CENGAGE

JAMES STEWART

CÁLCULO

TRASCENDENTES TEMPRANAS

Octava edición

CÁLCULO

TRASCENDENTES TEMPRANAS

OCTAVA EDICIÓN

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY Y UNIVERSITY OF TORONTO

Traducción

Ana Elizabeth García Hernández

Enrique C. Mercado González

Revisión técnica

Ileana Borja Tecuatl

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN

Hiram Cárdenas Gordillo

Facultad de Ingeniería, Universidad La Salle, México

Pedro Vásquez Urbano

Universidad de Puerto Rico - Mayaguez

Gilgamesh Luis Raya

Universidad Politécnica de Pachuca, México

Antonieta Martínez Velasco

Universidad Panamericana, campus Ciudad de México

Luz Citlaly Estrada López

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad de Guadalajara, México

José Ignacio Cuevas González

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Armando Silva Castillo

Universidad Politécnica de Pachuca, México



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE

***Cálculo. Trascendentes tempranas*, octava edición.**
James Stewart

Director Higher Education Latinoamérica:
Renzo Casapía Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:
Jesús Mares Chacón

Editor Senior Hardside:
Pablo Miguel Guerrero Rosas

Editora de desarrollo
Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Karla Paola Benítez García

Imagen de portada:
© David Carrick | Dreamstime.com

Composición tipográfica:
Humberto Núñez Ramos
Angélica Toledo Tirado
Alejandro Hernández Hernández

Traducido del libro *Calculus: Early Transcendentals*, Eighth Edition, International Metric Version. James Stewart.
Publicado en inglés por Cengage Learning ©2016.
ISBN: 978-1-305-27237-8

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James. *Cálculo. Trascendentes tempranas,* octava edición.
ISBN: 978-607-526-549-0

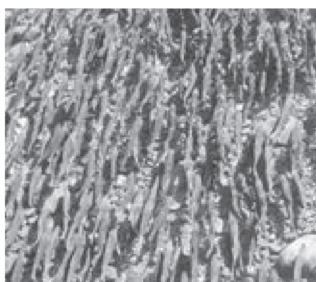
Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 20 19 18 17

Contenido



© Pictura Collectus/Alamy



© Jody Ann / Shutterstock.com

3 Reglas de derivación 171


© Mechanik / Shutterstock.com

4 Aplicaciones de la derivada 275


© Tatiana Makotra / Shutterstock.com

5 Integrales 365


© JRC, Inc. / Alamy

6 Aplicaciones de la integral 427


© Richard Paul Kane / Shutterstock.com

7 Técnicas de integración 471

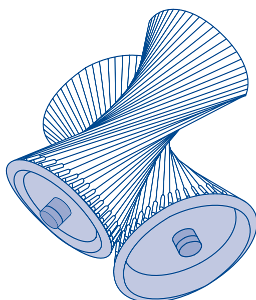

© USDA

11 Sucesiones y series infinitas 693



© STScI / NASA / ESA / Galaxy / Galaxy Picture Library / Alamy

12 Vectores y la geometría del espacio 791



13 Funciones vectoriales 847



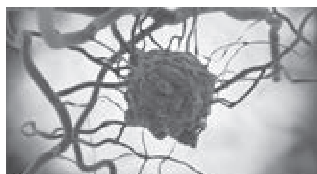
© Natalia Davydenko/Shutterstock.com

14 Derivadas parciales 887



Cortesía de © Speedo y ANSYS, Inc.

15 Integrales múltiples 987



© Juan Gaertner/Shutterstock.com



© Everett Collection/Glow Images



© CS Stock/Shutterstock.com

Prefacio

Esta versión de la obra difiere de la versión regular de *Cálculo*. *Trascendentes tempranas*, octava edición, de varias maneras:

Las unidades usadas en casi todos los ejemplos y ejercicios han sido cambiadas del sistema tradicional de Estados Unidos a unidades métricas. Hay un número reducido de excepciones: en algunas aplicaciones de ingeniería (principalmente en la sección 8.3) puede ser útil para algunos ingenieros estar familiarizados con las unidades usadas en Estados Unidos. Y yo quise conservar algunos ejercicios (por ejemplo, los relacionados con el beisbol) donde sería inapropiado usar unidades métricas.

He cambiado los ejemplos y ejercicios relacionados con datos del mundo real para que sean de naturaleza más internacional, de manera que la inmensa mayoría de ellos procede ahora de países distintos a Estados Unidos. Por ejemplo, ahora hay ejercicios y ejemplos concernientes a las tarifas postales en Hong Kong; la deuda pública canadiense; las tasas de desempleo en Australia; las horas de luz del sol en Ankara, Turquía; las isotermas en China; el porcentaje de la población en la Argentina rural; poblaciones de Malasia, Indonesia, México e India, y consumo de energía eléctrica en Ontario, entre muchos otros.

Además de cambiar ejercicios para que las unidades sean métricas y los datos tengan un sabor más internacional, otros ejercicios han sido cambiados también, el resultado de lo cual es que alrededor de 10% de los ejercicios son diferentes de los de la versión regular.

Filosofía del libro

El arte de enseñar, dijo Mark Van Doren, es el arte de ayudar al descubrimiento. Yo he tratado de escribir un libro que ayude a los estudiantes a descubrir el cálculo, tanto por su eficacia práctica como por su sorprendente belleza. En esta edición, como en las siete primeras, intento transmitir al estudiante una noción de la utilidad del cálculo y desarrollar competencia técnica, pero también me empeño en dar cierta apreciación de la belleza intrínseca del tema. Newton experimentó indudablemente una sensación de triunfo cuando hizo sus grandes descubrimientos. Yo deseo que los estudiantes compartan parte de esa emoción.

El énfasis está en la comprensión de conceptos. Pienso que casi todos están de acuerdo en que esta debería ser la meta primaria de la enseñanza de cálculo. De hecho, el ímpetu del actual movimiento de reforma del cálculo procedió de la Conferencia de Tulane de 1986, la cual formuló como su primera recomendación:

Concentrarse en la comprensión conceptual.

He tratado de implementar esta meta mediante *la regla de tres*: “Los temas deben presentarse geométrica, numérica y algebraicamente”. La visualización, la experimentación numérica y gráfica y otros enfoques han cambiado la forma en que se enseña el razonamiento conceptual de maneras fundamentales. Más recientemente, la regla de tres se ha ampliado para convertirse en la *regla de cuatro* enfatizando también el punto de vista verbal o descriptivo.

Al escribir esta octava edición, mi premisa fue que sea posible alcanzar comprensión conceptual y retener todavía las mejores tradiciones del cálculo tradicional. El libro contiene elementos de reforma, pero en el contexto de un plan de estudios tradicional.

Versiones alternas

He escrito otros libros de texto de cálculo que podrían ser preferibles para algunos profesores. La mayoría de ellos también se presenta en versiones de una y varias variables.

- *Calculus*, octava edición, versión métrica internacional, es similar al presente libro de texto excepto que las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas se cubren en el segundo semestre.
- *Essential Calculus*, segunda edición, edición internacional, es un libro mucho más breve (840 páginas), que, sin embargo, contiene casi todos los temas de *Calculus*, octava edición, versión métrica internacional. La relativa brevedad se logra mediante una exposición más breve de algunos temas al trasladar algunas características al sitio web.
- *Essential Calculus: Early Transcendentals*, segunda edición, edición internacional, se asemeja a *Essential Calculus*, edición internacional, pero las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas se cubren en el capítulo 3.
- *Calculus: Concepts and Contexts*, cuarta edición, edición métrica internacional, enfatiza la comprensión conceptual con más fuerza todavía que este libro. La cobertura de temas no es enciclopédica y el material sobre funciones trascendentes y sobre ecuaciones paramétricas se entreteje a lo largo del libro en lugar de ser tratado en capítulos separados.
- *Calculus: Early Vectors* presenta los vectores y funciones vectoriales en el primer semestre y los integra a todo lo largo del libro. Este es conveniente para estudiantes que toman cursos de ingeniería y física al mismo tiempo que el de cálculo.
- *Brief Applied Calculus*, edición internacional, está dirigido a estudiantes de negocios, ciencias sociales y ciencias de la vida.
- *Biocalculus: Calculus for the Life Sciences* intenta mostrar a los estudiantes de las ciencias de la vida cómo se relaciona el cálculo con la biología.
- *Biocalculus: Calculus, Probability, and Statistics for the Life Sciences* abarca todo el contenido de *Biocalculus: Calculus for the Life Sciences*, así como tres capítulos adicionales que cubren probabilidad y estadística.

¿Qué hay de nuevo en la octava edición?

Los cambios resultaron de conversar con mis colegas y estudiantes en la Universidad de Toronto y de leer revistas, así como de sugerencias de usuarios y revisores. He aquí algunas de las muchas mejoras que he incorporado en esta edición:

- Los datos en los ejemplos y ejercicios han sido actualizados para ser más oportunos.
- Se han añadido nuevos ejemplos (véanse los ejemplos 6.1.5, 11.2.5 y 14.3.3, entre otros), y las soluciones de algunos de los ejemplos existentes se ampliaron.
- Se agregaron tres nuevos proyectos: el proyecto *Controlar la pérdida de glóbulos rojos durante una cirugía* (página 244) describe el procedimiento ANH, en el que se extrae sangre del paciente antes de una operación y se le reemplaza por una solución salina. Esto diluye la sangre del paciente para que se pierdan menos glóbulos rojos durante hemorragias y la sangre extraída es devuelta al paciente después de la cirugía. El proyecto *Aviones y pájaros*: *minimización de la energía* (página 344) pregunta cómo pueden las aves minimizar fuerza y energía al comparar entre batir sus alas y planear. En el proyecto *El Speedo LZR Racer* (página 936) se explica que este traje de baño reduce la fricción en el agua y, como consecuencia,

se han roto muchos récords en la natación. Se pregunta a los estudiantes por qué un pequeño decremento en la fricción puede tener un efecto tan grande en el desempeño.

- He reestructurado el capítulo 15 (Integrales múltiples) combinando las dos primeras secciones para que las integrales iteradas se traten antes.
- Más de 20% de los ejercicios en cada capítulo son nuevos. He aquí algunos de mis favoritos: 2.7.61, 2.8.36-38, 3.1.79-80, 3.11.54, 4.1.69, 4.3.34, 4.3.66, 4.4.80, 4.7.39, 4.7.67, 5.1.19-20, 5.2.67-68, 5.4.70, 6.1.51, 8.1.39, 12.5.81, 12.6.29-30, 14.6.65-66. Además, hay nuevos y buenos Problemas adicionales. (Véanse los problemas 12-14 de la página 272, el problema 13 de la página 363, los problemas 16-17 de la página 426 y el problema 8 de la página 986.)

Caraterísticas

Ejercicios conceptuales

El modo más importante de fomentar la comprensión conceptual es mediante los problemas que se asignan. Con ese fin he ideado varios tipos de problemas. Algunos conjuntos de ejercicios comienzan con peticiones de explicar los significados de conceptos básicos de la sección. (Véanse, por ejemplo, los primeros ejercicios de las secciones 2.2, 2.5, 11.2, 14.2 y 14.3.) De igual forma, todas las secciones de repaso comienzan con una Verificación de conceptos y un Examen verdadero-falso. Otros ejercicios ponen a prueba la comprensión conceptual por medio de gráficas o tablas (véanse los ejercicios 2.7.17, 2.8.35-38, 2.8.47-52, 9.1.11-13, 10.1.24-27, 11.10.2, 13.2.1-2, 13.3.33-39, 14.1.1-2, 14.1.32-38, 14.1.41-44, 14.3.3-10, 14.6.1-2, 14.7.3-4, 15.1.6-8, 16.1.11-18, 16.2.17-18 y 16.3.1-2).

Otro tipo de ejercicios usa la descripción verbal para probar la comprensión conceptual (véanse los ejercicios 2.5.10, 2.8.66, 4.3.69-70 y 7.8.67). Valoro particularmente los problemas que combinan y comparan los enfoques gráfico, numérico y algebraico (véanse los ejercicios 2.6.45-46, 3.7.27 y 9.4.4).

Conjuntos de ejercicios graduados

Cada conjunto de ejercicios está cuidadosamente graduado, progresando de ejercicios conceptuales básicos y problemas de desarrollo de habilidades a problemas más desafiantes que implican aplicaciones y comprobaciones.

Datos del mundo real

Mis asistentes y yo dedicamos mucho tiempo a buscar en bibliotecas, hacer contacto con compañías y organismos gubernamentales y realizar búsquedas en internet en pos de datos interesantes del mundo real para presentar, motivar e ilustrar los conceptos del cálculo. En consecuencia, muchos de los ejemplos y ejercicios tienen que ver con funciones definidas por esos datos numéricos o gráficas. Véanse, por ejemplo, la figura 1 de la sección 1.1 (sismogramas del terremoto de Northridge), ejercicio 2.8.35 (tasas de desempleo), ejercicio 5.1.16 (velocidad del transbordador espacial *Endeavour*) y figura 4 de la sección 5.4 (consumo de energía eléctrica en San Francisco). Las funciones de dos variables son ilustradas por una tabla de valores del índice viento-frío como una función de temperatura del aire y velocidad del viento (ejemplo 14.1.12). Las derivadas parciales son presentadas en la sección 14.3 examinando una columna en una tabla de valores del índice de calor (temperatura del aire percibida) como una función de la temperatura real y la humedad relativa. Este ejemplo se retoma después en relación con aproximaciones lineales (ejemplo 14.4.3). Las derivadas direccionales se presentan en la sección 14.6 usando un mapa de contorno de temperatura para estimar la razón de cambio de la temperatura en Reno en la dirección de Las Vegas. Integrales dobles se usan para estimar la nevada promedio en Colorado del 20 y 21 de diciembre de 2006 (ejemplo 15.1.9). Los campos

vectoriales se presentan en la sección 16.1 mediante descripciones de campos vectoriales de velocidad reales, que muestran los patrones de viento de la bahía de San Francisco.

Proyectos

Una forma de motivar a los estudiantes y convertirlos en aprendices activos es ponerlos a trabajar (quizás en grupos) en amplios proyectos que les den una sensación de logro sustancial al completarlos. He incluido cuatro tipos de proyectos: los *Proyectos de aplicación* que contienen aplicaciones diseñadas para estimular la imaginación de los alumnos. El proyecto que está después de la sección 9.3 pregunta si una pelota lanzada hacia arriba tarda más en llegar a su altura máxima o en caer a su altura original. (La respuesta podría sorprenderlo.) El proyecto posterior a la sección 14.8 usa multiplicadores de Lagrange para determinar las masas de las tres etapas de un cohete a fin de minimizar la masa total mientras que a la vez se permite que alcance una velocidad deseada. Los *Proyectos de laboratorio* implican tecnología; el que sigue a la sección 10.2 muestra cómo utilizar las curvas de Bézier para diseñar formas que representan letras para una impresora láser. Los *Proyectos de redacción* piden a los estudiantes comparar métodos actuales con los de los fundadores del cálculo, el método de Fermat para determinar tangentes por ejemplo. Se proporcionan referencias sugeridas. Los *Proyectos de descubrimiento* anticipan resultados que se analizarán posteriormente o que alientan el descubrimiento mediante el reconocimiento de patrones (véase el que sigue a la sección 7.6). Otros exploran aspectos de geometría: tetraedros (después de la sección 12.4), hiperesferas (después de la sección 15.6) e intersecciones de tres cilindros (después de la sección 15.7). Proyectos adicionales pueden hallarse en la *Instructor's Guide** (véase, por ejemplo, Group Exercise 5.1: posición con base en muestras).

Resolución de problemas

Los estudiantes suelen tener dificultades con problemas para los que no hay un procedimiento claramente definido para la obtención de la respuesta. Pienso que nadie ha mejorado mucho la estrategia de resolución de problemas en cuatro etapas de George Polya, así que he incluido una versión de sus principios de resolución de problemas después del capítulo 1. Estos se aplican, explícita e implícitamente, a lo largo de todo el libro. Después de los demás capítulos he colocado secciones llamadas *Problemas adicionales*, que contienen ejemplos de cómo atacar problemas de cálculo desafiantes. Al seleccionar los variados problemas para esas secciones tuve en mente el consejo siguiente de David Hilbert: "Un problema matemático debe ser difícil a fin de atraernos, pero no inaccesible como para hacer mofa de nuestros esfuerzos". Cuando pongo estos problemas desafiantes en tareas y exámenes, los califico de manera diferente. Aquí recompenso a los estudiantes significativamente por ideas hacia una solución y por reconocer cuáles principios de resolución de problemas son relevantes.

Tecnología

La disponibilidad de tecnología vuelve no menos sino más importante comprender con claridad los conceptos que subyacen en las imágenes en la pantalla. Calculadoras graficadoras y computadoras son herramientas eficaces para descubrir y comprender esos conceptos cuando se les emplea en forma apropiada. Este libro de texto puede usarse con o sin tecnología, y yo uso dos símbolos especiales para indicar claramente cuándo se requiere un tipo particular de aparato. El icono indica un ejercicio que definitivamente requiere el uso de esa tecnología, aunque eso no quiere decir que no pueda usarse en los demás ejercicios también. El símbolo SAC se reserva a problemas en los que se requieren los servicios completos de un sistema algebraico computacional (como Maple, Mathematica o el TI-89). Pero la tecnología no vuelve obsoletos el lápiz y el papel. El cálculo y los diagramas a mano suelen ser preferibles a la tecnología para ilustrar y reforzar algunos conceptos. Tanto profesores como alumnos deben desarrollar la aptitud de decidir cuándo es apropiada la mano o la máquina.

*Este material se encuentra solo disponible en inglés.

Herramientas para enriquecer el cálculo*

TEC es un suplemento del texto y busca enriquecer y complementar su contenido. (Ahora está disponible en el eBook vía *CourseMate** y *Enhanced WebAssign*.* *Visuals* y *Modules* selectos están disponibles en *www.stewartcalculus.com*.*) Desarrollado por Harvey Keynes, Dan Clegg, Hubert Hohn y yo, TEC usa un enfoque de descubrimiento y exploración. En secciones del libro donde la tecnología es particularmente apropiada, iconos al margen dirigen a los estudiantes a TEC Modules que brindan un entorno de laboratorio en el que pueden explorar el tema de maneras diversas y en niveles diferentes. **Los *Visuals* son animaciones de figuras en el texto; los *Modules* son actividades más elaboradas e incluyen ejercicios**. Los profesores pueden optar por involucrarse en diversos niveles, desde simplemente alentar a los alumnos a usar los *Visuals* y *Modules* para su exploración independiente hasta asignar ejercicios específicos de los incluidos en cada *Module* o crear ejercicios, prácticas y proyectos adicionales que hagan uso de los *Visuals* y *Modules*.

TEC incluye asimismo *Homework Hints* para ejercicios representativos (usualmente con número impar) en cada sección del texto, indicados mediante la impresión del número del ejercicio en gris. Estas sugerencias suelen presentarse en forma de preguntas e intentan imitar a un asistente de aprendizaje eficaz funcionando como un tutor mudo. Están hechas para no revelar de la solución real más que lo mínimamente necesario para hacer progresos adicionales.

Enhanced WebAssign*

La tecnología ya tiene impacto en la manera en que se asignan tareas a los estudiantes, particularmente en grupos grandes. El uso de tareas en línea es creciente y su atractivo depende de la facilidad de empleo, la precisión de las calificaciones y la confiabilidad. Con la octava edición se ha trabajado con la comunidad del cálculo y *WebAssign* para desarrollar un sistema de tareas en línea. Hasta 70% de los ejercicios en cada sección se puede asignar como tareas en línea, incluidos formatos de respuesta libre, opción múltiple y partes múltiples.

Este sistema también contiene *Active Examples**, en los que los estudiantes son guiados en pequeños tutoriales paso a paso a través de ejemplos del texto, con vínculos con el libro de texto y soluciones en video.

Sitio web

Visite CengageBrain.com* o stewartcalculus.com* para estos materiales adicionales:

- *Homework Hints*
- *Algebra Review*
- *Lies My Calculator and Computer Told Me*
- *History of Mathematics* con vínculos a los mejores sitios históricos
- *Additional Topics* (con conjuntos de ejercicios): series de Fourier, fórmulas para el término residuo en las series de Taylor, rotación de ejes
- *Archived Problems* (ejercicios desafiantes que aparecieron en ediciones anteriores, junto con sus soluciones)
- *Challenge Problems* (algunas de las secciones de Problemas adicionales de ediciones anteriores)
- Vínculos de temas especiales con recursos externos de la web
- *Selected Visuals* y *Modules de Tools for Enriching Calculus* (TEC)

*Este material se encuentra solo disponible en inglés.

Contenido

Pruebas de diagnóstico El libro comienza con cuatro pruebas de diagnóstico, en álgebra básica, geometría analítica, funciones y trigonometría.

Un adelanto del cálculo Esta es una panorámica del tema e incluye una lista de preguntas para motivar el estudio del cálculo.

1 Funciones y modelos Desde el principio se enfatizan representaciones múltiples de funciones: verbal, numérica, visual y algebraica. Un análisis de modelos matemáticos conduce a una revisión de las funciones estándar, entre ellas funciones exponenciales o logarítmicas, desde esos cuatro puntos de vista.

2 Límites y derivadas El material sobre límites es motivado por un estudio previo de la tangente y problemas de velocidad. Los límites se tratan desde los puntos de vista descriptivo, gráfico, numérico y algebraico. La sección 2.4, sobre la definición precisa de un límite, es una sección opcional. Las secciones 2.7 y 2.8 tratan con derivadas (especialmente con funciones definidas gráfica y numéricamente) antes de que las reglas de derivación sean cubiertas en el capítulo 3. Aquí los ejemplos y ejercicios exploran los significados de las derivadas en varios contextos. Las derivadas de orden superior se presentan en la sección 2.8.

3 Reglas de derivación Todas las funciones básicas, incluidas las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas, se derivan aquí. Cuando se calculan derivadas en situaciones de aplicación, se pide a los estudiantes explicar sus significados. El crecimiento y decaimiento exponenciales se cubren ahora en este capítulo.

4 Aplicaciones de la derivada Los hechos básicos concernientes a valores extremos y formas de curvas se deducen del teorema del valor medio. La graficación con tecnología enfatiza la interacción entre cálculo y calculadoras y el análisis de familias de curvas. Algunos problemas de optimización sustanciales son provistos como una explicación de por qué uno debe elevar la cabeza 42° para ver la punta de un arcoíris.

5 Integrales El problema del área y el problema de la distancia sirven para motivar la integral definida, con la presentación de la notación sigma cuando es necesario. (Una cobertura completa de la notación sigma se proporciona en el apéndice E.) Se hace énfasis en explicar los significados de las integrales en varios contextos y en estimar sus valores a partir de gráficas y tablas.

6 Aplicaciones de la integral Aquí presento las aplicaciones de la integral —área, volumen, trabajo, valor promedio— que pueden hacerse razonablemente sin técnicas especializadas de integración. Se enfatizan métodos generales. La meta es que los estudiantes sean capaces de dividir una cantidad en piezas reducidas, estimar con sumas de Riemann y reconocer el límite como una integral.

7 Técnicas de integración Se cubren todos los métodos estándar, aunque, desde luego, el verdadero reto es poder reconocer qué técnica es la que más conviene usar en una situación dada. En consecuencia, en la sección 7.5 presento una estrategia de integración. El uso de sistemas algebraicos computacionales se analiza en la sección 7.6.

8 Aplicaciones adicionales de la integración Aquí están las aplicaciones de la integral —longitud de arco y área de superficies— para las que es útil disponer de todas las técnicas de integración, así como aplicaciones a la biología, economía y física (energía hidrostática y centros de masa). También he incluido una sección sobre probabilidad. Hay muchas aplicaciones aquí que pueden ser cubiertas en términos realistas en un curso dado. Los profesores deben seleccionar aplicaciones convenientes para sus alumnos y para las que ellos mismos tengan entusiasmo.

9 Ecuaciones diferenciales

El modelado es el tema que unifica este tratamiento introductorio de las ecuaciones diferenciales. Campos direccionales y método de Euler se estudian antes de que las ecuaciones separables y lineales se resuelvan explícitamente, de modo que a los métodos cualitativo, numérico y analítico se les da igual consideración. Estos métodos se aplican a los modelos exponencial, logístico y otros para el crecimiento de una población. Las cuatro o cinco primeras secciones de este capítulo sirven como una buena introducción a las ecuaciones diferenciales de primer orden. Una sección final opcional usa modelos de presa-depredador para ilustrar sistemas de ecuaciones diferenciales.

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Este capítulo presenta curvas paramétricas y polares y aplica los métodos del cálculo en ellas. Las curvas paramétricas son adecuadas para proyectos de laboratorio; las dos que se presentan aquí implican a familias de curvas y curvas de Bézier. Un breve tratamiento de las secciones cónicas en coordenadas polares prepara el camino para las leyes de Kepler en el capítulo 13.

11 Sucesiones y series infinitas

Las pruebas de convergencia tienen justificaciones intuitivas (véase la página 719), así como comprobaciones formales. Estimaciones numéricas de sumas de series se basan en la prueba que se haya usado para comprobar la convergencia. Se hace énfasis en la serie y polinomios de Taylor y sus aplicaciones a la física. Las estimaciones de error incluyen las de dispositivos de graficación.

12 Vectores y la geometría del espacio

El material sobre geometría analítica tridimensional y vectores se divide en dos capítulos. El capítulo 12 trata con vectores, los productos punto y cruz, rectas, planos y superficies.

13 Funciones vectoriales

Este capítulo cubre las funciones con vectores como valores, sus derivadas e integrales, la longitud y curvatura de curvas en el espacio y la velocidad y aceleración a lo largo de curvas en el espacio, lo que culmina con las leyes de Kepler.

14 Derivadas parciales

Las funciones de dos o más variables se estudian desde el punto de vista verbal, numérico, visual y algebraico. En particular, presento las derivadas parciales examinando una columna específica de una tabla de valores del índice de calor (temperatura del aire percibida) como una función de la temperatura real y la humedad relativa.

15 Integrales múltiples

Los mapas de contorno y la regla del punto medio se utilizan para estimar la nevada promedio y temperatura promedio de regiones dadas. Las integrales dobles y triples se emplean para calcular probabilidades, áreas de superficies y (en proyectos) volúmenes de hiperesferas y volúmenes de intersecciones de tres cilindros. Se presentan coordenadas cilíndricas y esféricas en el contexto de evaluar integrales triples.

16 Cálculo vectorial

Los campos vectoriales se presentan mediante imágenes de campos de velocidad que muestran patrones de viento de la bahía de San Francisco. Se enfatizan las semejanzas entre el teorema fundamental para integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia.

17 Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Dado que las ecuaciones diferenciales de primer orden se cubren en el capítulo 9, este último capítulo trata con ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, su aplicación a resortes vibratorios y circuitos eléctricos y soluciones de series.

Complementos

Cálculo. Trascendentes tempranas, octava edición, se apoya en un conjunto completo de complementos desarrollados bajo mi dirección. Cada pieza ha sido diseñada para favorecer la comprensión del estudiante y facilitar la enseñanza creativa. Las tablas de las páginas xxi-xxii describen cada uno de estos complementos.

Agradecimientos

La preparación de esta y las ediciones previas ha implicado mucho tiempo dedicado a leer los consejos razonados (aunque a veces contradictorios) de un gran número de perspicaces revisores. Agradezco enormemente el tiempo que ellos destinaron a comprender mi motivación para el enfoque adoptado. He aprendido algo de cada uno de ellos.

Revisores de la octava edición

Jay Abramson, *Arizona State University*
Adam Bowers, *University of California San Diego*
Neena Chopra, *The Pennsylvania State University*
Edward Dobson, *Mississippi State University*
Isaac Goldbring, *University of Illinois en Chicago*
Lea Jenkins, *Clemson University*
Rebecca Wahl, *Butler University*

Revisores de tecnología

Maria Andersen, *Muskegon Community College*
Eric Aurand, *Eastfield College*
Joy Becker, *University of Wisconsin–Stout*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama en Huntsville*
Monica Brown, *University of Missouri–St. Louis*
Roxanne Byrne, *University of Colorado en Denver y Health Sciences Center*
Teri Christiansen, *University of Missouri–Columbia*
Bobby Dale Daniel, *Lamar University*
Jennifer Daniel, *Lamar University*
Andras Domokos, *California State University, Sacramento*
Timothy Flaherty, *Carnegie Mellon University*
Lee Gibson, *University of Louisville*
Jane Golden, *Hillsborough Community College*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Diane Hoffoss, *University of San Diego*
Lorraine Hughes, *Mississippi State University*
Jay Jahangiri, *Kent State University*
John Jernigan, *Community College of Philadelphia*
Brian Karasek, *South Mountain Community College*
Jason Kozinski, *University of Florida*
Carole Krueger, *The University of Texas en Arlington*
Ken Kubota, *University of Kentucky*
John Mitchell, *Clark College*
Donald Paul, *Tulsa Community College*
Chad Pierson, *University of Minnesota, Duluth*
Lanita Presson, *University of Alabama en Huntsville*
Karin Reinhold, *State University of New York en Albany*
Thomas Riedel, *University of Louisville*
Christopher Schroeder, *Morehead State University*
Angela Sharp, *University of Minnesota, Duluth*
Patricia Shaw, *Mississippi State University*
Carl Spitznagel, *John Carroll University*
Mohammad Tabanjeh, *Virginia State University*
CPT. Koichi Takagi, *United States Naval Academy*
Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*
Roger Werbylo, *Pima Community College*
David Williams, *Clayton State University*
Zhuan Ye, *Northern Illinois University*

Revisores de ediciones anteriores

B. D. Aggarwala, *University of Calgary*
John Alberghini, *Manchester Community College*
Michael Albert, *Carnegie Mellon University*
Daniel Anderson, *University of Iowa*
Amy Austin, *Texas A&M University*
Donna J. Bailey, *Northeast Missouri State University*
Wayne Barber, *Chemeketa Community College*
Marilyn Belkin, *Villanova University*
Neil Berger, *University of Illinois, Chicago*
David Berman, *University of New Orleans*
Anthony J. Bevelacqua, *University of North Dakota*
Richard Biggs, *University of Western Ontario*
Robert Blumenthal, *Oglethorpe University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama en Huntsville*
Stephen W. Brady, *Wichita State University*
Michael Breen, *Tennessee Technological University*
Robert N. Bryan, *University of Western Ontario*
David Buchthal, *University of Akron*
Jenna Carpenter, *Louisiana Tech University*
Jorge Cassio, *Miami-Dade Community College*
Jack Ceder, *University of California, Santa Barbara*
Scott Chapman, *Trinity University*

Zhen-Qing Chen, *University of Washington—Seattle*
James Choike, *Oklahoma State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Carl Cowen, *Purdue University*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Charles N. Curtis, *Missouri Southern State College*
Daniel Cyphert, *Armstrong State College*
Robert Dahlin
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Gregory J. Davis, *University of Wisconsin–Green Bay*
Elias Deeba, *University of Houston–Downtown*
Daniel DiMaria, *Suffolk Community College*
Seymour Ditor, *University of Western Ontario*
Greg Dresden, *Washington and Lee University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Kenn Dunn, *Dalhousie University*
Dennis Dunninger, *Michigan State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
David Ellis, *San Francisco State University*
John Ellison, *Grove City College*
Martin Erickson, *Truman State University*
Garret Etgen, *University of Houston*
Theodore G. Faticoni, *Fordham University*
Laurene V. Fausett, *Georgia Southern University*
Norman Feldman, *Sonoma State University*
Le Baron O. Ferguson, *University of California—Riverside*
Newman Fisher, *San Francisco State University*
José D. Flores, *The University of South Dakota*
William Francis, *Michigan Technological University*
James T. Franklin, *Valencia Community College, East*
Stanley Friedlander, *Bronx Community College*
Patrick Gallagher, *Columbia University–New York*
Paul Garrett, *University of Minnesota–Minneapolis*
Frederick Gass, *Miami University of Ohio*
Bruce Gilligan, *University of Regina*
Matthias K. Gobbert, *University of Maryland, Baltimore County*
Gerald Goff, *Oklahoma State University*
Stuart Goldenberg, *California Polytechnic State University*
John A. Graham, *Buckingham Browne & Nichols School*
Richard Grassl, *University of New Mexico*
Michael Gregory, *University of North Dakota*
Charles Groetsch, *University of Cincinnati*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Salim M. Haïdar, *Grand Valley State University*
D. W. Hall, *Michigan State University*
Robert L. Hall, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Howard B. Hamilton, *California State University, Sacramento*
Darel Hardy, *Colorado State University*
Shari Harris, *John Wood Community College*
Gary W. Harrison, *College of Charleston*
Melvin Hausner, *New York University/Courant Institute*
Curtis Herink, *Mercer University*
Russell Herman, *University of North Carolina en Wilmington*
Allen Hesse, *Rochester Community College*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
James F. Hurley, *University of Connecticut*
Amer Iqbal, *University of Washington—Seattle*
Matthew A. Isom, *Arizona State University*
Gerald Janusz, *University of Illinois en Urbana-Champaign*
John H. Jenkins, *Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott Campus*
Clement Jeske, *University of Wisconsin, Platteville*
Carl Jockusch, *University of Illinois en Urbana-Champaign*
Jan E. H. Johansson, *University of Vermont*
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Zsuzsanna M. Kadas, *St. Michael's College*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
Matt Kaufman
Matthias Kawski, *Arizona State University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Akhtar Khan, *Rochester Institute of Technology*
Marianne Korten, *Kansas State University*
Virgil Kowalik, *Texas A&I University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Leonard Krop, *DePaul University*
Mark Krusemeyer, *Carleton College*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Christopher C. Leary, *State University of New York en Geneseo*
David Leeming, *University of Victoria*
Sam Lesseig, *Northeast Missouri State University*
Phil Locke, *University of Maine*
Joyce Longman, *Villanova University*
Joan McCarter, *Arizona State University*
Phil McCartney, *Northern Kentucky University*
Igor Malyshev, *San Jose State University*
Larry Mansfield, *Queens College*
Mary Martin, *Colgate University*
Nathaniel F. G. Martin, *University of Virginia*
Gerald Y. Matsumoto, *American River College*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Tom Metzger, *University of Pittsburgh*
Richard Millspaugh, *University of North Dakota*
Lon H. Mitchell, *Virginia Commonwealth University*
Michael Montaño, *Riverside Community College*
Teri Jo Murphy, *University of Oklahoma*
Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*
Ho Kuen Ng, *San Jose State University*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Hussain S. Nur, *California State University, Fresno*
Norma Ortiz-Robinson, *Virginia Commonwealth University*
Wayne N. Palmer, *Utica College*
Vincent Panico, *University of the Pacific*
F. J. Papp, *University of Michigan–Dearborn*
Mike Penna, *Indiana University–Purdue University Indianapolis*
Mark Pinsky, *Northwestern University*
Lothar Redlin, *The Pennsylvania State University*
Joel W. Robbin, *University of Wisconsin–Madison*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*
E. Arthur Robinson, Jr., *The George Washington University*
Richard Rockwell, *Pacific Union College*
Rob Root, *Lafayette College*
Richard Ruedemann, *Arizona State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*
Richard St. Andre, *Central Michigan University*

Ricardo Salinas, *San Antonio College*
Robert Schmidt, *South Dakota State University*
Eric Schreiner, *Western Michigan University*
Mihr J. Shah, *Kent State University–Trumbull*
Qin Sheng, *Baylor University*
Theodore Shifrin, *University of Georgia*
Wayne Skrapek, *University of Saskatchewan*
Larry Small, *Los Angeles Pierce College*
Teresa Morgan Smith, *Blinn College*
William Smith, *University of North Carolina*
Donald W. Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*
Edward Spitznagel, *Washington University*
Joseph Stampfli, *Indiana University*
Kristin Stoley, *Blinn College*
M. B. Tavakoli, *Chaffey College*
Magdalena Toda, *Texas Tech University*
Ruth Trygstad, *Salt Lake Community College*
Paul Xavier Uhlig, *St. Mary's University, San Antonio*
Stan Ver Nooy, *University of Oregon*
Andrei Verona, *California State University–Los Angeles*
Klaus Volpert, *Villanova University*
Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*
William L. Walton, *McCallie School*
Peiyong Wang, *Wayne State University*
Jack Weiner, *University of Guelph*
Alan Weinstein, *University of California, Berkeley*
Theodore W. Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Steven Willard, *University of Alberta*
Robert Wilson, *University of Wisconsin–Madison*
Jerome Wolbert, *University of Michigan–Ann Arbor*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts, Boston*
Mary Wright, *Southern Illinois University–Carbondale*
Paul M. Wright, *Austin Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*

Me gustaría agradecer además a R. B. Burckel, Bruce Colletti, David Behrman, John Dersch, Gove Effinger, Bill Emerson, Dan Kalman, Quyan Khan, Alfonso Gracia-Saz, Allan MacIsaac, Tami Martin, Monica Nitsche, Lamia Raffo, Norton Starr y Jim Trefzger por sus sugerencias; a Al Shenk y Dennis Zill por la autorización para usar ejercicios de sus textos de cálculo; a COMAP por su autorización para usar material para proyectos; a George Bergman, David Bleecker, Dan Clegg, Victor Kaftal, Anthony Lam, Jamie Lawson, Ira Rosenholtz, Paul Sally, Lowell Smylie y Larry Wallen por sus ideas para ejercicios; a Dan Drucker por el proyecto de carrera sobre ruedas; a Thomas Banchoff, Tom Farmer, Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, Philip Straffin y Klaus Volpert por sus ideas para proyectos; a Dan Anderson, Dan Clegg, Jeff Cole, Dan Drucker y Barbara Frank por resolver los ejercicios nuevos y sugerir maneras de mejorarlos; a Marv Riedesel y Mary Johnson por su precisión en la lectura de pruebas; a Andy Bulman-Fleming, Lothar Redlin, Gina Sanders y Saleem Watson por la lectura de pruebas adicional, y a Jeff Cole y Dan Clegg por su cuidadosa preparación y lectura de pruebas del manuscrito de respuestas.

Agradezco además a quienes contribuyeron en ediciones anteriores: Ed Barbeau, George Bergman, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Bob Burton, David Cusick, Tom DiCiccio, Garret Etgen, Chris Fisher, Leon Gerber, Stuart Goldenberg, Arnold Good, Gene Hecht, Harvey Keynes, E. L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Emile LeBlanc, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Mary Pugh, Lothar Redlin, Carl Riehm, John Ringland, Peter Rosenthal, Dusty Sabo, Doug Shaw, Dan Silver, Simon Smith, Saleem Watson, Alan Weinstein y Gail Wolkowicz.

Gracias también a Kathi Townes, Stephanie Kuhns, Kristina Elliott y Kira Abdallah de TECHarts por sus servicios de producción y a los empleados siguientes de Cengage Learning: Cheryll Linthicum, gerente de proyectos de contenido; Stacy Green, desarrolladora de contenido titular; Samantha Lugtu, desarrolladora de contenido asociada; Stephanie Kreuz, asistente de producto; Lynh Pham, desarrolladora de medios; Ryan Ahern, gerente de mercadotecnia, y Vernon Boes, director de arte. Todos ellos hicieron un trabajo sobresaliente.

He tenido la enorme suerte de trabajar con algunos de los mejores editores de matemáticas en el ramo en las últimas tres décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst, Gary Ostedt, Bob Pirtle, Richard Stratton, Liz Covello y ahora Neha Taleja. Todos ellos han contribuido ampliamente en el éxito de este libro.

JAMES STEWART

Complementos para profesores

Manual del instructor (Instructor's Guide)*
Por Douglas Shaw
ISBN 978-1-305-39371-4

Cada sección de este texto es analizada desde varios puntos de vista. **Instructor's Guide** *contiene tiempo sugerido por asignar, puntos por enfatizar, temas de análisis del texto, materiales básicos para exponer en clase, sugerencias de talleres/debates, ejercicios de trabajo grupal en forma conveniente para su distribución y sugerencias de tareas.*

Manual de soluciones completas (Complete Solutions Manual)*

Single Variable Early Transcendentals*
ISBN 978-1-305-27262-0

Multivariable*
ISBN 978-1-305-38699-0

Incluye soluciones desarrolladas de todos los ejercicios en el texto.

Printed Test Bank*
Por William Steven Harmon
ISBN 978-1-305-38722-5

Contiene elementos de exámenes de opción múltiple y respuesta libre específicos del texto.

Cengage Learning Testing Powered by Cognero*
(login.cengage.com)

Este sistema en línea flexible le permite crear, editar y gestionar contenido del banco de exámenes con base en múltiples soluciones de Cengage Learning; crear múltiples versiones de exámenes en un instante y aplicar exámenes desde su LMS, salón de clases o donde usted quiera.

Complementos para profesores y estudiantes

Stewart Website*
www.stewartcalculus.com

Contenido: *Homework Hints* ■ *Algebra Review* ■ *Additional Topics* ■ *Drill Exercises* ■ *Challenge Problems* ■ *Web Links* ■ *History of Mathematics* ■ *Tools for Enriching Calculus* (TEC)

TEC TOOLS FOR ENRICHING™ CALCULUS*
Por James Stewart, Harvey Keynes, Dan Clegg y el desarrollador Hubert Hohn

Tools for Enriching Calculus (TEC) funciona como una herramienta eficaz para profesores lo mismo que como un entorno tutorial en que los estudiantes pueden explorar y repasar temas selectos. Los módulos de simulación Flash en TEC incluyen instrucciones, explicaciones por escrito y en audio de los conceptos y ejercicios. TEC está disponible en el eBook vía CourseMate y Enhanced WebAssign. Visuals y Modules especiales pueden conseguirse en www.stewartcalculus.com.

ENHANCED WebAssign **Enhanced WebAssign®**
www.webassign.net
Código de acceso impreso: ISBN 978-1-285-85826-5
Código de acceso instantáneo: ISBN 978-1-285-85825-8

Exclusivamente de Cengage Learning, Enhanced WebAssign ofrece un amplio programa en línea para el Cálculo de Stewart *a fin de alentar la práctica decisiva para el dominio de conceptos. La pedagogía meticulosamente elaborada y los ejercicios de nuestros textos probados se vuelven aún más efectivos en Enhanced WebAssign, complementados por apoyo tutorial en multimedia y retroalimentación inmediata a medida que los estudiantes completan sus tareas. Las características clave incluyen:*

- *Miles de problemas de tarea que coinciden con los ejercicios de fin de sección del libro de texto*
- *Oportunidades para que los alumnos repasen habilidades y contenido de prerrequisito tanto al principio del curso como al principio de cada sección*
- *Páginas del* eBook Read It, *videos Watch It, tutoriales Master It y vínculos Chat About It*
- *Un* YouBook *de Cengage personalizable con características para resaltar, tomar apuntes y buscar, así como con vínculos a recursos multimedia*
- Personal Study Plans *(basados en exámenes de diagnóstico) que identifican temas de capítulos que los estudiantes deberán dominar*
- *Un* Answer Evaluator *de WebAssign que reconoce y acepta respuestas matemáticas equivalentes en la misma forma en que un profesor califica*
- *Una característica de* Show My Work *que da a los profesores la opción de ver soluciones detalladas de los alumnos*
- Visualizing Calculus Animations, Lecture Videos *y más*

*Este material se encuentra disponible en inglés. Visite www.cengage.com para acceder a estos recursos.

■ Elementos electrónicos ■ Elementos impresos

(La tabla continúa en la página xxii)

Cengage Customizable YouBook*

YouBook *es un eBook tanto interactivo como personalizable. Con todo el contenido del* Cálculo *de Stewart,* YouBook *ofrece una herramienta de edición de texto que permite a los profesores modificar la narración del libro de texto conforme sea necesario. Con* YouBook, *los profesores pueden reordenar rápidamente secciones y capítulos enteros o esconder contenido que no imparten para crear un eBook que se ajuste a la perfección a su curso. Los profesores pueden personalizar adicionalmente el texto añadiendo vínculos de video creados por ellos mismos o de YouTube. Elementos adicionales de medios incluyen figuras animadas, videoclips, características para resaltar y tomar apuntes y más.* YouBook *está disponible en Enhanced WebAssign*.

CourseMate*

CourseMate es una perfecta herramienta de estudio personal para los alumnos y no requiere preparación alguna de los profesores. CourseMate da vida a conceptos del curso con herramientas interactivas de aprendizaje, estudio y preparación para exámenes que prestan apoyo al libro de texto impreso. CourseMate para el Cálculo *de Stewart incluye un eBook interactivo, Tools for Enriching Calculus, videos, exámenes, tarjetas de conceptos y más. Para los profesores, CourseMate incluye Engagement Tracker, una herramienta única en su tipo que monitorea la participación de los estudiantes*.

CengageBrain.com*

Para tener acceso a materiales adicionales de cursos, visite por favor www.cengagebrain.com. *En la página principal de CengageBrain.com, busque el ISBN de su título (en el reverso de su libro) usando el cuadro de búsqueda en la parte superior de la página. Esto lo llevará a la página del producto donde pueden encontrarse estos recursos*.

Complementos para estudiantes

Manual de soluciones para el estudiante (Student Solutions Manual)*

Single Variable Early Transcendentals
ISBN 978-1-305-27263-7

Multivariable
ISBN 978-1-305-38698-3
Proporciona soluciones completamente elaboradas de todos los ejercicios de número impar del texto, dando a los estudiantes la oportunidad de verificar sus respuestas y cerciorarse de haber dado los pasos correctos para llegar a la respuesta. El Student Solutions Manual se puede ordenar o acceder a él *en línea como un eBook en* www.cengagebrain.com *buscando el ISBN*.

Study Guide*

Single Variable Early Transcendentals
Por Richard St. Andre
ISBN 978-1-305-27914-8

Multivariable*
Por Richard St. Andre
ISBN 978-1-305-27184-5
Para cada sección del texto, la Study Guide *ofrece a los estudiantes una breve introducción, una lista corta de conceptos por dominar y preguntas de resumen y concentración con respuestas explicadas. La* Study Guide *también contiene pruebas de autoaplicación con preguntas tipo examen. La* Study Guide *se puede ordenar o acceder a ella en línea como un eBook en* www.cengagebrain.com *buscando el ISBN*.

A Companion to Calculus*

Por Dennis Ebersole, Doris Schattschneider, Alicia Sevilla y Kay Somers
ISBN 978-0-495-01124-8
Escrito para mejorar habilidades de álgebra y resolución de problemas de los estudiantes que toman un curso de álgebra, cada capítulo de este complemento está dirigido a un tema de cálculo, ofreciendo fundamentos conceptuales y técnicas específicas de álgebra necesarios para entender y resolver problemas de cálculo relacionados con ese tema. Está diseñado para cursos de cálculo que integran el repaso de conceptos de precálculo o para uso individual. Pida un ejemplar del texto o acceda al eBook en línea en www.cengagebrain.com *buscando el ISBN*.

Linear Algebra for Calculus*

Por Konrad J. Heuvers, William P. Francis, John H. Kuisti, Deborah F. Lockhart, Daniel S. Moak y Gene M. Ortner
ISBN 978-0-534-25248-9
Este libro es muy completo, diseñado para complementar el curso de cálculo, ofrece una introducción y repaso de las ideas básicas del álgebra lineal. Pida un ejemplar del texto o acceda al eBook en línea en www.cengagebrain.com *buscando el ISBN.*

*Este material se encuentra disponible en inglés. Visite www.cengage.com para acceder a estos recursos.

■ Elementos electrónicos ■ Elementos impresos

Al estudiante

Leer un libro de texto de cálculo es diferente a leer un periódico o una novela, o incluso un libro de física. No se desanime si tiene que leer un pasaje más de una vez para comprenderlo. Debería tener lápiz y papel y una calculadora a la mano para trazar un diagrama o hacer un cálculo.

Algunos estudiantes comienzan probando sus problemas de tarea y leen el texto solo si se atoran en un ejercicio. Yo sugiero que un plan mucho mejor es leer y comprender una sección del texto antes de intentar hacer los ejercicios. En particular, usted debería examinar las definiciones para ver los significados exactos de los términos. Y antes de leer cada ejemplo, sugiero que cubra la solución e intente resolver el problema usted mismo. Obtendrá mucho más al estudiar la solución si lo hace así.

Parte de la finalidad de este curso es estimular su pensamiento lógico. Aprenda a escribir las soluciones de los ejercicios en forma coherente paso a paso, con oraciones explicatorias, no solo como una cadena de ecuaciones o fórmulas inconexas.

Las respuestas a los ejercicios con número impar aparecen al final del libro, en el apéndice I. Algunos ejercicios piden una explicación, interpretación o descripción verbal. En esos casos, no existe una manera correcta y única de expresar la respuesta, así que no se preocupe si no ha encontrado la respuesta definitiva. Además, hay varias formas en las cuales expresar una respuesta numérica o algebraica, así que si su respuesta difiere de la mía, no suponga de inmediato que está equivocado. Por ejemplo, si la respuesta dada al final del libro es $\sqrt{2} - 1$ y usted obtiene $1/(1+\sqrt{2})$, entonces usted está en lo correcto y racionalizar el denominador mostrará que las respuestas son equivalentes.

El icono indica un ejercicio que definitivamente requiere el uso de una calculadora graficadora o una computadora con software de graficación. Pero eso no significa que dispositivos de graficación no puedan usarse también para verificar su trabajo en los demás ejercicios. El símbolo SAC se reserva a problemas en los que son requeridos los recursos completos de un sistema algebraico computacional (como Maple, Mathematica o el TI-89).

Usted también encontrará el símbolo ⊘, el cual lo previene de cometer un error. He puesto este símbolo al margen en situaciones en que he observado que una gran proporción de mis estudiantes tiende a cometer el mismo error.

Tools for Enriching Calculus, que es un complemento de este texto, se refiere por medio del símbolo TEC y puede ser consultado en el eBook vía Enhanced WebAssign y CourseMate (Visuals y Modules selectos están disponibles en www.stewartcalculus.com). Esto lo dirige a usted a módulos en los que puede explorar aspectos del cálculo para los cuales la computadora es particularmente útil.

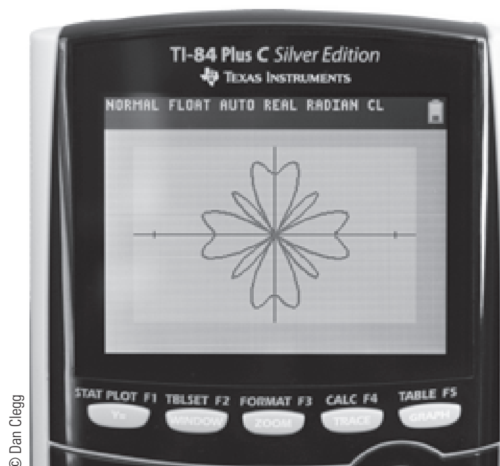
Notará que algunos números de ejercicios están impresos en gris: **5**. Esto indica que *Homework Hints* están disponibles para el ejercicio. Estas sugerencias pueden hallarse en stewartcalculus.com así como en Enhanced WebAssign y CourseMate. Las sugerencias de tareas hacen preguntas que le permiten realizar progresos hacia una solución sin realmente darle la respuesta. Usted debe seguir cada sugerencia en forma activa con lápiz y papel para resolver los detalles. Si una sugerencia particular no le permite resolver el problema, puede hacer clic para revelar la sugerencia siguiente.

Le recomiendo conservar este libro para efectos de consulta después de terminar el curso. Dado que es probable que olvide algunos de los detalles específicos del cálculo, el libro servirá como un recordatorio útil cuando deba usar el cálculo en cursos subsecuentes. Y como este libro contiene más material del que puede cubrirse en un curso, también puede servir como un valioso recurso para un científico o ingeniero en ejercicio profesional.

El cálculo es un tema muy interesante, con justicia considerado uno de los grandes logros del intelecto humano. Espero que usted descubra que es no solo útil, sino también intrínsecamente bello.

JAMES STEWART

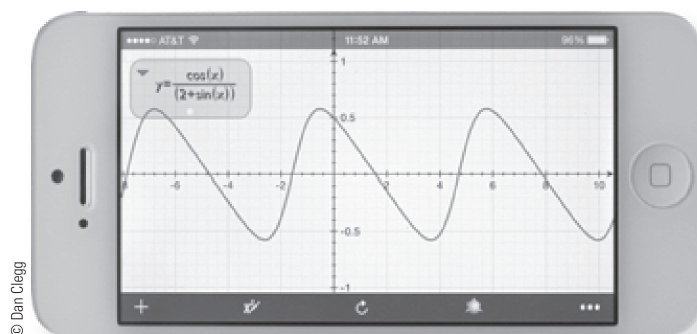
Calculadoras, computadoras y otros dispositivos de graficación



© Dan Clegg

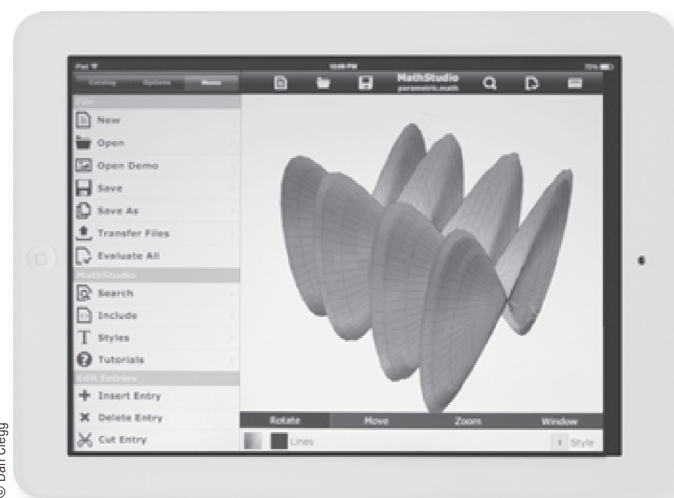
Los adelantos en tecnología siguen ofreciendo una variedad de herramientas cada vez más amplia para hacer matemáticas. Las calculadoras de bolsillo se han vuelto más potentes, lo mismo que los programas de software y los recursos en internet. Además, muchas aplicaciones matemáticas han sido lanzadas para teléfonos inteligentes y tabletas como la iPad.

Algunos ejercicios de este texto están marcados con un icono de graficación, que indica que el uso de alguna tecnología es requerido. A menudo esto significa que se desea que un dispositivo de graficación se use para dibujar la gráfica de una función o ecuación. Usted podría necesitar también tecnología para determinar los ceros de una gráfica o los puntos de intersección de dos gráficas. En algunos casos se usará un dispositivo de cálculo para resolver una ecuación o evaluar numéricamente una integral definida. Muchas calculadoras científicas y graficadoras llevan integradas estas características, como la Texas Instruments TI-84 o TI-Nspire CX. Calculadoras similares son fabricadas por Hewlett Packard, Casio y Sharp.



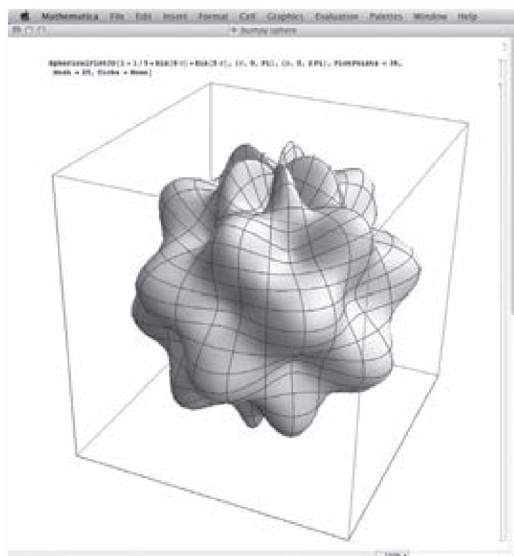
© Dan Clegg

Usted también puede emplear software de computación como *Graphing Calculator* de Pacific Tech (www.pacifict.com) para ejecutar muchas de esas funciones, lo mismo que aplicaciones para teléfonos y tabletas como Quick Graph (Colombiamug) o Math-Studio (Pomegranate Apps). Funcionalidad similar está disponible usando una interfaz web en WolframAlpha.com.



© Dan Clegg

En general, cuando se usa el término “calculadora” en este libro, se refiere al uso de cualquiera de los recursos que se han mencionado.

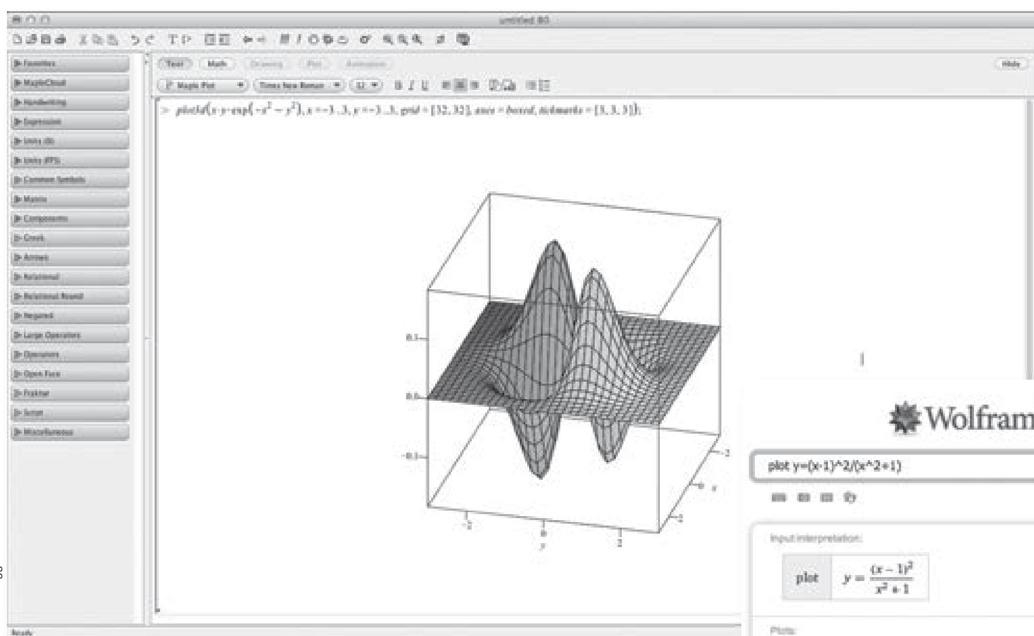


© Dan Clegg

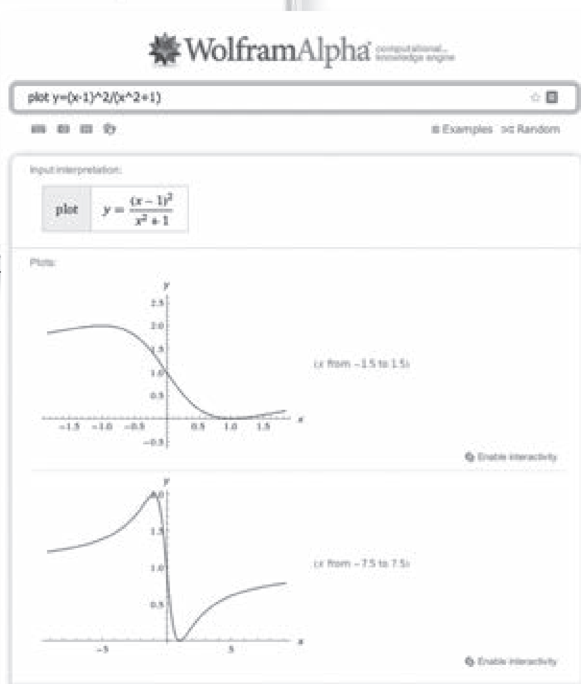
El icono SAC se reserva a problemas en los que son requeridos los recursos completos de un *sistema algebraico computacional* (SAC). Un SAC es capaz de hacer matemáticas (como resolver ecuaciones, calcular derivadas o integrales) *simbólicamente* más que solo numéricamente.

Ejemplos de sistemas algebraicos computacionales firmemente establecidos son los paquetes de software de computación Maple y Mathematica. El sitio web de WolframAlpha usa el motor de Mathematica para proporcionar funcionalidad SAC vía la web.

Muchas calculadoras graficadoras de bolsillo tienen capacidades del SAC, como la TI-89 y TI-Nspire CX CAS de Texas Instruments. Algunas aplicaciones para tabletas y teléfonos inteligentes brindan estas capacidades, como el ya mencionado MathStudio.



© Dan Clegg



© Dan Clegg

Pruebas de diagnóstico

El éxito en cálculo depende en gran medida del conocimiento de las matemáticas que preceden al cálculo: álgebra, geometría analítica, funciones y trigonometría. Las pruebas siguientes buscan diagnosticar debilidades que usted podría tener en esas áreas. Después de realizar cada prueba, puede verificar sus respuestas contra las respuestas dadas y, si es necesario, reactivar sus habilidades remitiéndose a los materiales de repaso provistos.

A Prueba de diagnóstico: álgebra

1. Evalúe cada expresión sin usar una calculadora.

(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4}

(d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique cada expresión. Escriba su respuesta sin exponentes negativos.

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$

(b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

(c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Desarrolle y simplifique.

(a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ (b) $(x + 3)(4x - 5)$

(c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (d) $(2x + 3)^2$

(e) $(x + 2)^3$

4. Factorice cada expresión.

(a) $4x^2 - 25$ (b) $2x^2 + 5x - 12$

(c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (d) $x^4 + 27x$

(e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifique la expresión racional.

(a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ (b) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{2x + 1}$

(c) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ (d) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

6. Racionalice la expresión y simplifique.

(a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$

7. Reescriba completando el cuadrado.

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $2x^2 - 12x + 11$

8. Resuelva la ecuación. (Halle solo las soluciones reales.)

(a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ (b) $\dfrac{2x}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x}$

(c) $x^2 - x - 12 = 0$ (d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

(e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (f) $3|x - 4| = 10$

(g) $2x(4 - x)^{-1/2} - 3\sqrt{4 - x} = 0$

9. Resuelva cada desigualdad. Escriba su respuesta usando notación de intervalos.

(a) $-4 < 5 - 3x \leqslant 17$ (b) $x^2 < 2x + 8$

(c) $x(x - 1)(x + 2) > 0$ (d) $|x - 4| < 3$

(e) $\dfrac{2x - 3}{x + 1} \leqslant 1$

10. Diga si cada ecuación es verdadera o falsa.

(a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$ (b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$

(c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ (d) $\dfrac{1 + TC}{C} = 1 + T$

(e) $\dfrac{1}{x - y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ (f) $\dfrac{1/x}{a/x - b/x} = \dfrac{1}{a - b}$

RESPUESTAS DE LA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO A: ÁLGEBRA

1. (a) 81 (b) -81 (c) $\frac{1}{81}$
(d) 25 (e) $\frac{9}{4}$ (f) $\frac{1}{8}$

2. (a) $6\sqrt{2}$ (b) $48a^5b^7$ (c) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. (a) $11x - 2$ (b) $4x^2 + 7x - 15$
(c) $a - b$ (d) $4x^2 + 12x + 9$
(e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4. (a) $(2x - 5)(2x + 5)$ (b) $(2x - 3)(x + 4)$
(c) $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$ (d) $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
(e) $3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)$ (f) $xy(x - 2)(x + 2)$

5. (a) $\dfrac{x + 2}{x - 2}$ (b) $\dfrac{x - 1}{x - 3}$
(c) $\dfrac{1}{x - 2}$ (d) $-(x + y)$

6. (a) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{4 + h} + 2}$

7. (a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ (b) $2(x - 3)^2 - 7$

8. (a) 6 (b) 1 (c) $-3, 4$
(d) $-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (e) $\pm 1, \pm\sqrt{2}$ (f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
(g) $\frac{12}{5}$

9. (a) $[-4, 3)$ (b) $(-2, 4)$
(c) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$ (d) $(1, 7)$
(e) $(-1, 4]$

10. (a) Falso (b) Verdadero (c) Falso
(d) Falso (e) Falso (f) Verdadero

Si tuvo dificultad con estos problemas, consulte el repaso de álgebra en el sitio web **www.stewartcalculus.com.**

B Prueba de diagnóstico: geometría analítica

1. Determine una ecuación para la recta que pasa por el punto $(2, -5)$ y
(a) tiene pendiente -3
(b) es paralela al eje x
(c) es paralela al eje y
(d) es paralela a la recta $2x - 4y = 3$

2. Determine una ecuación para la circunferencia que tiene centro $(-1, 4)$ y pasa por el punto $(3, -2)$.

3. Determine el centro y radio de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

4. Sean $A(-7, 4)$ y $B(5, -12)$ puntos en el plano.
(a) Halle la pendiente de la recta que contiene a A y B.
(b) Encuentre una ecuación de la recta que pasa por A y B. ¿Cuáles son las intersecciones?
(c) Halle el punto medio del segmento AB.
(d) Halle la longitud del segmento AB.
(e) Encuentre una ecuación de la bisectriz perpendicular a AB.
(f) Encuentre una ecuación de la circunferencia para el que AB es un diámetro.

5. Trace la región en el plano xy definida por la ecuación o desigualdades.

(a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$ (b) $|x| < 4$ y $|y| < 2$
(c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$ (d) $y \geqslant x^2 - 1$
(e) $x^2 + y^2 < 4$ (f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

RESPUESTAS DE LA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO B: GEOMETRÍA ANALÍTICA

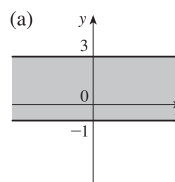
1. (a) $y = -3x + 1$ (b) $y = -5$
(c) $x = 2$ (d) $y = \frac{1}{2}x - 6$

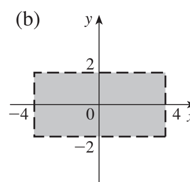
2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 52$

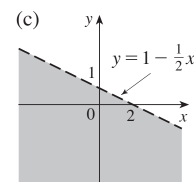
3. Centro $(3, -5)$, radio 5

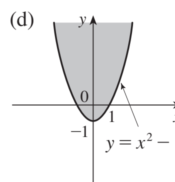
4. (a) $-\frac{4}{3}$
(b) $4x + 3y + 16 = 0$; intersección en $x = -4$, intersección en $y = -\frac{16}{3}$
(c) $(-1, -4)$
(d) 20
(e) $3x - 4y = 13$
(f) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

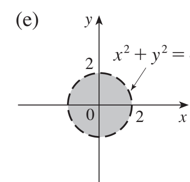
5.

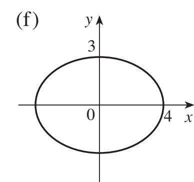
(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


Si tuvo dificultad con estos problemas, consulte el repaso de geometría analítica en los apéndices B y C.

C Prueba de diagnóstico: funciones

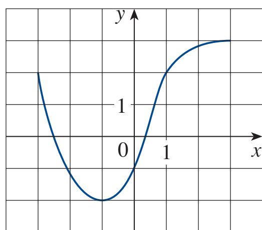


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. La gráfica de una función f se da a la izquierda.
   (a) Enuncie el valor de $f(-1)$.
   (b) Estime el valor de $f(2)$.
   (c) ¿Para cuáles valores de x es $f(x) = 2$?
   (d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.
   (e) Enuncie el dominio y rango de f.

2. Si $f(x) = x^3$, evalúe el cociente de diferencia $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ y simplifique su respuesta.

3. Determine el dominio de cada función.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

4. ¿Cómo se obtienen las gráficas de las siguientes funciones a partir de la gráfica de f?

   (a) $y = -f(x)$ (b) $y = 2f(x) - 1$ (c) $y = f(x-3) + 2$

5. Sin usar una calculadora, haga un diagrama preliminar de la gráfica.

   (a) $y = x^3$ (b) $y = (x+1)^3$ (c) $y = (x-2)^3 + 3$
   (d) $y = 4 - x^2$ (e) $y = \sqrt{x}$ (f) $y = 2\sqrt{x}$
   (g) $y = -2^x$ (h) $y = 1 + x^{-1}$

6. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   (a) Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$. (b) Trace la gráfica de f.

7. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 2x - 3$, determine cada una de las funciones siguientes.
   (a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

RESPUESTAS DE LA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO C: FUNCIONES

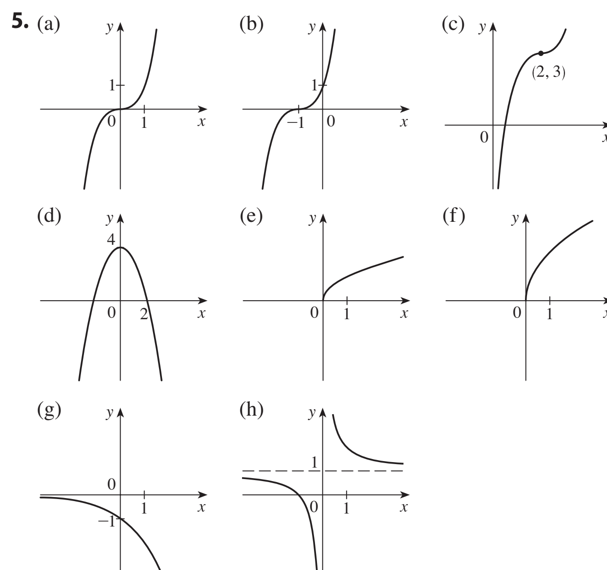
1. (a) -2 (b) 2.8
   (c) $-3, 1$ (d) $-2.5, 0.3$
   (e) $[-3, 3], [-2, 3]$

2. $12 + 6h + h^2$

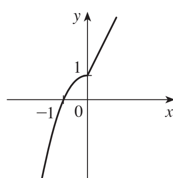
3. (a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$
   (b) $(-\infty, \infty)$
   (c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

4. (a) Refleje a través del eje x
   (b) Prolongue verticalmente por un factor de 2 y luego desplace 1 unidad hacia abajo
   (c) Desplace 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba

5.



6. (a) $-3, 3$ (b)



7. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
(c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

Si tuvo dificultad con estos problemas, examine las secciones 1.1-1.3 de este libro.

D Prueba de diagnóstico: trigonometría

1. Convierta de grados a radianes.
(a) $300°$ (b) $-18°$

2. Convierta de radianes a grados.

(a) $5\pi/6$ (b) 2

3. Determine la longitud de un arco de un círculo con radio 12 cm si el arco subtiende un ángulo central de 30°.

4. Determine los valores exactos.

(a) $\tan(\pi/3)$ (b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$

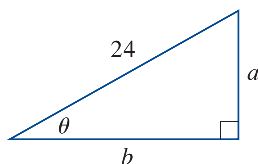


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. Exprese las longitudes de a y b en la figura en términos de θ.

6. Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x y y se sitúan entre 0 y $\pi/2$, evalúe $\operatorname{sen}(x + y)$.

7. Compruebe las identidades.

(a) $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$ (b) $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

8. Determine todos los valores de x tales que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ y $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

9. Trace la gráfica de la función $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$ sin usar una calculadora.

RESPUESTAS DE LA PRUEBA DE DIAGNÓSTICO D: TRIGONOMETRÍA

1. (a) $5\pi/3$ (b) $-\pi/10$

2. (a) $150°$ (b) $360°/\pi \approx 114.6°$

3. 2π cm

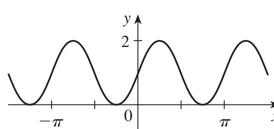
4. (a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2

5. (a) $24 \operatorname{sen}\theta$ (b) $24\cos\theta$

6. $\frac{1}{15}\left(4 + 6\sqrt{2}\right)$

8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$

9.

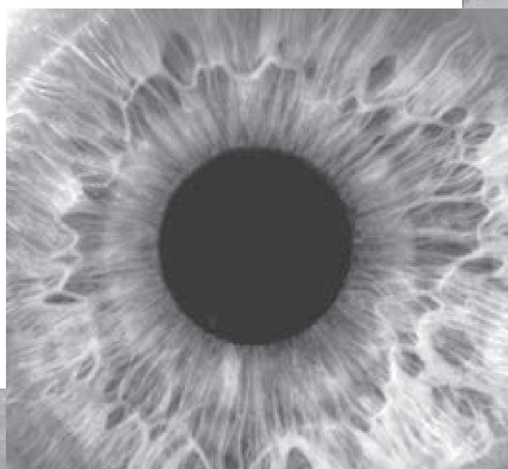


Si tuvo dificultad con estos problemas, examine el apéndice D de este libro.

Un adelanto del cálculo

Cuando termine este curso, será capaz de calcular la longitud de la curva utilizada para diseñar el Gateway Arch en St. Louis, determinar dónde un piloto debe iniciar el descenso para un aterrizaje suave, calcular la fuerza sobre un bate de béisbol cuando golpea la pelota y medir la cantidad de luz captada por el ojo humano conforme cambia el tamaño de la pupila.



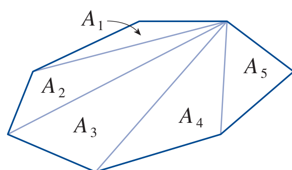






EL CÁLCULO ES FUNDAMENTALMENTE DIFERENTE DE las matemáticas que ha estudiado anteriormente: el cálculo es menos estático y más dinámico. Se ocupa de los cambios y del movimiento; estudia cantidades que se aproximan a otras cantidades. Por eso puede ser útil tener una visión general del tema antes de comenzar su estudio intensivo. Aquí se da un vistazo de algunas de las ideas principales del cálculo, se muestran cómo surge el concepto de límite cuando se intentan resolver diferentes problemas.

El problema del área



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

FIGURA 1

Los orígenes del cálculo se remontan a unos 2500 años a los antiguos griegos, quienes calcularon áreas usando el "método de agotamiento". Los griegos sabían cómo encontrar el área de cualquier polígono al dividirlo en triángulos como se ve en la figura 1 y sumar las áreas de estos triángulos.

Un problema mucho más difícil es encontrar el área encerrada por una figura curvada. El método griego de agotamiento consistía en inscribir y circunscribir polígonos en la figura y luego aumentar el número de lados de los polígonos. La figura 2 ilustra este proceso para el caso especial de un círculo con polígonos regulares inscritos.

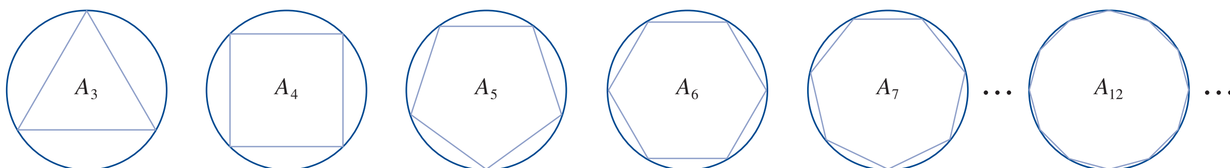


FIGURA 2

Sea A_n el área del polígono inscrito con n lados. A medida que aumenta n, el área se parece cada vez más y más al área del círculo. Se dice que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos, y se escribe

TEC En Preview Visual, puede ver cómo las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos se aproximan al área del círculo.

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Los griegos no utilizaron de manera explícita el concepto de límite. Sin embargo, por razonamiento indirecto, Eudoxo (siglo V a. C.) utilizó la técnica de agotamiento para demostrar la conocida fórmula para el área de un círculo: $A = \pi r^2$.

En el capítulo 5 se utilizará una idea similar para encontrar las áreas de regiones del tipo que se muestra en la figura 3. Se aproximará al área deseada por medio de áreas de rectángulos (como en la figura 4), disminuyendo el ancho de los rectángulos y luego calculando el área A como el límite de estas sumas de áreas de rectángulos.

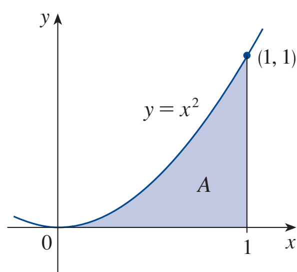
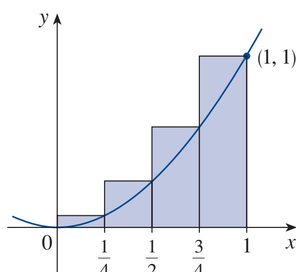
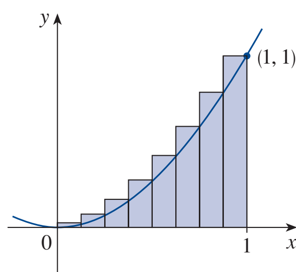


FIGURA 3





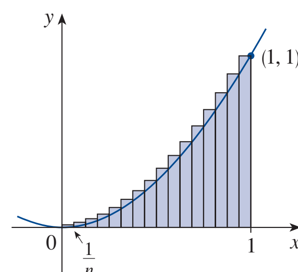


FIGURA 4

El problema del área es el problema central en la rama del cálculo llamado *cálculo integral*. Las técnicas que se desarrollarán en el capítulo 5 para encontrar áreas también permitirán calcular el volumen de un sólido, la longitud de una curva, la fuerza de las aguas contra una presa, la masa y el centro de gravedad de una varilla y el trabajo realizado al bombear agua hacia afuera de un tanque.

El problema de la tangente

Considere el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente t a una curva con ecuación $y = f(x)$ en un punto dado P. (En el capítulo 2 se dará una definición precisa de una recta tangente. Por ahora la puede considerar como una recta que toca la curva en P

como en la figura 5.) Como se sabe que el punto P se encuentra en la recta tangente, se puede encontrar la ecuación de t si se sabe su pendiente m. El problema es que se necesitan dos puntos para calcular la pendiente y se tiene solo un punto P de t. Como una solución alternativa al problema se encuentra en primer lugar una aproximación a m tomando un punto cercano Q de la curva y se calcula la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. De la figura 6 se ve que

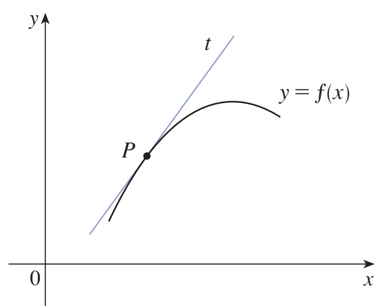


FIGURA 5
La recta tangente en P

1 $$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora imagine que Q se mueve a lo largo de la curva hacia P como en la figura 7. Puede verse que la recta secante gira y se acerca a la recta tangente como su posición límite. Esto significa que la pendiente de la recta secante se acerca más y más a la pendiente m_{PQ} de la recta tangente. Escriba

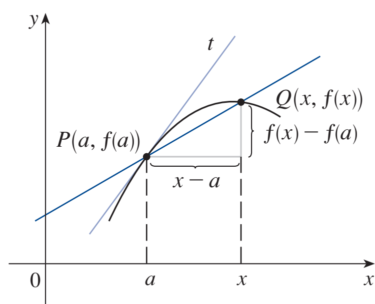


FIGURA 6
La recta secante PQ

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

y diga que m es el límite de m_{PQ} cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva. Puesto que x se aproxima a a cuando Q se aproxima a P, también se puede utilizar la ecuación 1 para escribir

2 $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

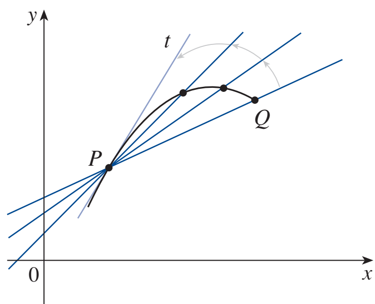


FIGURA 7
Recta secante aproximándose a la recta tangente

En el capítulo 2 se verán ejemplos específicos de este procedimiento.

El problema de la tangente ha dado lugar a la rama del cálculo llamada *cálculo diferencial*, inventada más de 2000 años después que el cálculo integral. Las principales ideas detrás del cálculo diferencial se deben al matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) y fueron desarrolladas por los matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1642-1727); y el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716).

Las dos ramas de cálculo y sus principales problemas, el problema del área y el problema de la tangente, parecen ser muy diferentes, pero resulta que hay una conexión muy estrecha entre ellas. El problema de la tangente y el área son problemas inversos en un sentido que se describe en el capítulo 5.

Velocidad

Cuando se ve el velocímetro de un automóvil y se lee que se está desplazando a 48 km/h, ¿qué información se obtiene? Si la velocidad se mantiene constante, después de una hora se habrá desplazado 48 km. Pero, si la velocidad del auto varía, ¿qué significa decir que la velocidad en un instante dado es 48 km/h?

Para analizar esta situación, examine el caso de un automóvil que viaja a lo largo de una carretera recta en el que se supone que es posible medir la distancia recorrida por el vehículo (en metros) a intervalos de un segundo como se registra en la tabla siguiente:

t = tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = distancia (m)	0	2	9	24	42	71

Un primer paso para determinar la velocidad una vez que han transcurrido 2 segundos, es encontrar la velocidad promedio durante el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 4$:

$$\begin{aligned}\text{velocidad promedio} &= \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} \\ &= \frac{42 - 9}{4 - 2} \\ &= 16.5 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Del mismo modo, la velocidad promedio en el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 3$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{24 - 9}{3 - 2} = 15 \text{ m/s}$$

Se tiene la sensación de que la velocidad en el instante $t = 2$ no puede ser muy diferente de la velocidad promedio durante un corto intervalo de tiempo desde $t = 2$. Así que imagine que se ha medido la distancia recorrida en intervalos de tiempo de 0.1 segundo como se ve en la tabla siguiente:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	9.00	10.02	11.16	12.45	13.96	15.80

Entonces se puede calcular, por ejemplo, la velocidad promedio en el intervalo de tiempo [2, 2.5]:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{15.80 - 9.00}{2.5 - 2} = 13.6 \text{ m/s}$$

Los resultados de estos cálculos se muestran en la tabla siguiente:

Intervalo de tiempo	[2, 3]	[2, 2.5]	[2, 2.4]	[2, 2.3]	[2, 2.2]	[2, 2.1]
Velocidad promedio (m/s)	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

Las velocidades promedio durante intervalos sucesivamente más pequeños parecen estar aproximándose cada vez más a un número cercano a 10 y, por tanto, se esperaría que la velocidad exactamente en $t = 2$ fuera de 10 m/s. En el capítulo 2 se definirá la velocidad instantánea de un objeto en movimiento, como el valor límite de las velocidades promedio durante intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

En la figura 8 se muestra una representación gráfica del movimiento del automóvil al trazar la distancia recorrida como función del tiempo. Si se escribe $d = f(t)$, entonces $f(t)$ es el número de metros recorridos después de t segundos. La velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[2, t]$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

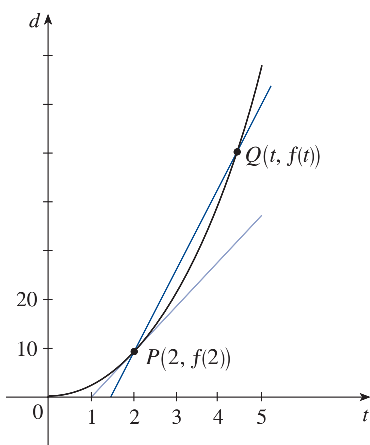


FIGURA 8

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8. La velocidad v cuando $t = 2$ es el valor límite de esta velocidad promedio cuando t se aproxima a 2; es decir,

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

y de la ecuación 2 se reconoce que esta es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en P.

Así, cuando se resuelve el problema de la tangente en el cálculo diferencial, también se da solución a problemas relativos a velocidades. Las mismas técnicas permiten resolver problemas relacionados con tasas de cambio en las ciencias naturales y sociales.

El límite de una sucesión

En el siglo v a. C., el filósofo griego Zenón de Elea planteó cuatro problemas, ahora conocidos como *Paradojas de Zenón,* que estaban diseñados para cuestionar algunas de las ideas sobre el espacio y el tiempo que se sostenían en esos días. La segunda paradoja de Zenón se refiere a una carrera entre Aquiles, el héroe griego, y una tortuga a la que se ha dado cierta ventaja al inicio. Zenón argumentaba que Aquiles nunca podría rebasar a la tortuga. Suponga que Aquiles empieza en la posición a_1 y la tortuga comienza en posición t_1 (véase la figura 9). Cuando Aquiles alcanza el punto $a_2 = t_1$, la tortuga está más adelante en la posición t_2. Cuando Aquiles llega a $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3. Este proceso continúa indefinidamente y así parece que ¡la tortuga siempre estará por delante! Pero esto desafía el sentido común.

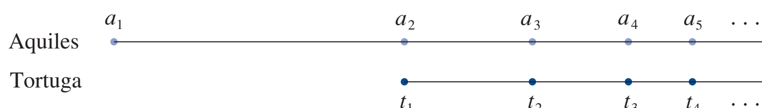


FIGURA 9

Una manera de explicar esta paradoja es con el concepto de *sucesión*. Las posiciones sucesivas de Aquiles (a_1, a_2, a_3,....) o las posiciones sucesivas de la tortuga (t_1, t_2, t_3,....) forman lo que se conoce como una sucesión.

En general, una sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto de números escritos en un orden definido. Por ejemplo, la sucesión

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

puede describirse dando la siguiente fórmula para el enésimo término:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

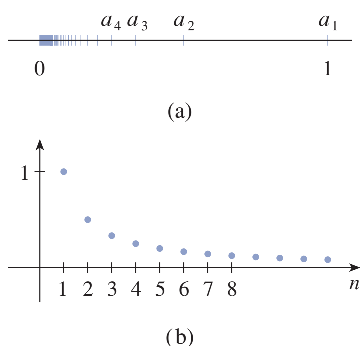


FIGURA 10

Puede visualizar esta sucesión ubicando sus términos en una recta numérica como en la figura 10(a) o dibujando su gráfica como en la figura 10(b). En cualesquiera de las dos representaciones se observa que los términos de la sucesión $a^n = 1/n$ se aproximan cada vez más y más a 0 conforme n aumenta. De hecho, se pueden encontrar términos tan pequeños como se quiera haciendo n suficientemente grande. En estas condiciones, se dice que el límite de la sucesión es 0, y se indica escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

En general, la notación

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

se utiliza si los términos a_n se aproximan al número L cuando n es suficientemente grande. Esto significa que los números a_n pueden acercarse al número L tanto como se quiera si se toma una n suficientemente grande.

El concepto de límite de una sucesión aparece cada vez que se utiliza la representación decimal de un número real. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} a_1 &= 3.1 \\ a_2 &= 3.14 \\ a_3 &= 3.141 \\ a_4 &= 3.1415 \\ a_5 &= 3.14159 \\ a_6 &= 3.141592 \\ a_7 &= 3.1415926 \\ &\vdots \end{aligned}$$

entonces
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

Los términos de esta sucesión son aproximaciones racionales de π.

Regrese a la paradoja de Zenón. Las posiciones sucesivas de Aquiles y la tortuga forman sucesiones $\{a_n\}$ y $\{t_n\}$, donde $a_n < t_n$ para toda n. Puede demostrarse que ambas sucesiones tienen el mismo límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n$$

Es precisamente en este punto p que Aquiles alcanza a la tortuga.

La suma de una serie

Otra de las paradojas de Zenón, según Aristóteles, es la siguiente: "un hombre parado en una sala no puede caminar hasta la pared. Para ello, primero tendría que recorrer la mitad de la distancia, después recorrer la mitad de la distancia restante y, luego, recorrer la mitad de lo que falta. Este proceso puede mantenerse siempre y nunca puede terminarse" (véase la figura 11).

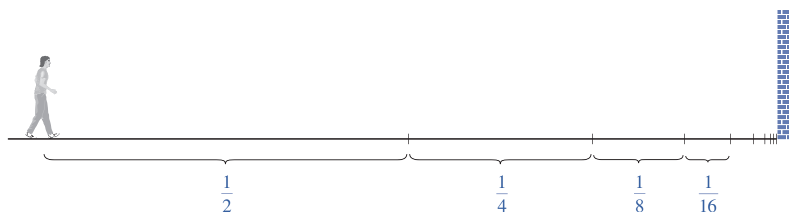


FIGURA 11

Por supuesto, se sabe que el hombre realmente puede llegar a la pared, lo que sugiere que tal vez la distancia total puede expresarse como la suma de una infinidad de distancias cada vez más pequeñas como sigue:

3
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenón argumentaba que no tiene sentido sumar una infinidad de números. Pero hay otras situaciones en que se utilizan implícitamente sumas infinitas. Por ejemplo, en notación decimal, el símbolo $0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots$$

y así, en cierto sentido, debe ser cierto que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Más generalmente, si d_n denota el enésimo dígito en la representación decimal de un número, entonces

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Por tanto, algunas sumas infinitas o series infinitas, como se les llama, tienen un significado. Pero se debe definir con cuidado lo que es la suma de una serie infinita.

Regresando a la serie en la ecuación 3, se denota por s_n la suma de los n primeros términos de la serie. Por tanto,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0.5\\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75\\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875\\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0.9375\\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0.96875\\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0.984375\\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0.9921875\\
&\vdots\\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0.99902344\\
&\vdots\\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0.99998474
\end{aligned}$$

Observe que como le se añadieron cada vez más términos, las sumas parciales parecen estar más cercanas a 1. De hecho, puede demostrarse que si n es suficientemente grande (es decir, si se suman suficientes términos de la serie), se puede aproximar la suma parcial tanto como se quiera al número 1. Por tanto, parece razonable decir que la suma de la serie infinita es 1 y escribir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

En otras palabras, la razón de que la suma de la serie sea 1 es que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

En el capítulo 11 se analizarán con más detalle estas ideas y se utilizará la propuesta de Newton de combinar las series infinitas con el cálculo diferencial e integral.

Resumen

Se vio que el concepto de límite surge al intentar encontrar el área de una región, la pendiente de la recta tangente a una curva, la velocidad de un auto o la suma de una serie infinita. En cada caso el problema común es el cálculo de una cantidad como el límite de otras cantidades fáciles de calcular. Esta idea básica de límite separa al cálculo de otras áreas de las matemáticas. De hecho, podría definirse el cálculo como la parte de las matemáticas que estudia límites.

Después de que Sir Isaac Newton inventó su versión del cálculo, lo usó para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Hoy el cálculo se utiliza para determinar las órbitas de los satélites y naves espaciales, en la predicción de tamaños de población, en la estimación de la rapidez con la que los precios del petróleo suben o bajan, en el pronóstico del clima, en medir el gasto cardiaco, en el cálculo de las primas de seguros de vida y en una gran variedad de otras áreas. En este libro se explorarán algunos de estos usos del cálculo.

Con el fin de dar una idea del poder del cálculo, se termina este panorama preliminar con una lista de algunas de las preguntas que usted podrá responder al usar el cálculo:

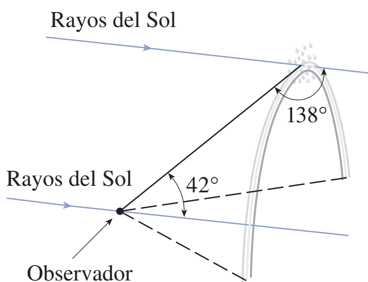


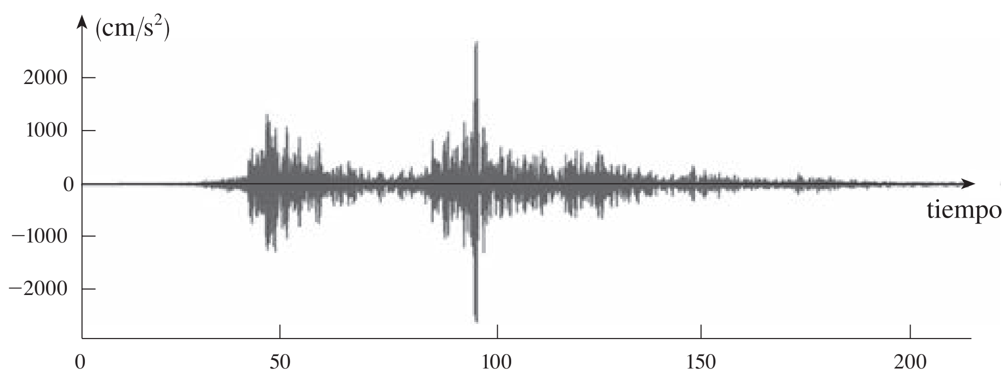
FIGURA 12

1. ¿Cómo podría explicar el hecho, ilustrado en la figura 12, de que el ángulo de elevación desde un observador hasta el punto más alto en un arcoíris es 42°? (Véase la página 285).
2. ¿Cómo podría explicar las formas de las latas en los estantes del supermercado? (Véase la página 343).
3. ¿Dónde está el mejor lugar para sentarse en una sala de cine? (Véase la página 465).
4. ¿Cómo diseñaría una montaña rusa para un viaje suave? (Véase la página 182).
5. ¿A qué distancia de la pista de un aeropuerto debe un piloto iniciar el descenso? (Véase la página 208).
6. ¿Cómo podría ajustar distintas curvas para que al unirlas sirvan para diseñar letras que puedan ser impresas en una impresora láser? (Véase la página 657).
7. ¿Cómo estimaría el número de trabajadores que fueron necesarios para construir la gran pirámide de Keops en Egipto? (Véase la página 460).
8. ¿Dónde debe colocarse un parador en corto para atrapar una pelota de béisbol lanzada por un jardinero y arrojarla al plato (*home*)? (Véase la página 465).
9. Una bola lanzada verticalmente hacia arriba, ¿tarda más tiempo en llegar a su altura máxima o en volver a su posición original de lanzamiento? (Véase la página 609).
10. ¿Cómo podría explicar el hecho de que planetas y satélites se mueven en órbitas elípticas? (Véase la página 876).
11. ¿Cómo distribuiría el caudal entre las turbinas en una central hidroeléctrica para maximizar la producción total de energía? (Véase la página 980).
12. Si una canica, una pelota de squash, una barra de acero y un tubo de plomo bajan una pendiente, ¿cuál de ellos llega primero al fondo? (Véase la página 1052).

1 Funciones y modelos



© Pictura Collectus/Alamy



© Seismological Society of America

A menudo una gráfica es la mejor manera de representar una función porque transmite mucha información en un vistazo. Se muestra la gráfica de la aceleración vertical del suelo, creada por el terremoto de 2011 cerca de Tohoku en Japón. El terremoto tuvo una magnitud de 9.0 en la escala de Ritcher y fue tan fuerte que movió el norte de Japón 2.4 metros más cerca de América del Norte.

LOS OBJETOS FUNDAMENTALES CON LOS que trata el cálculo son las funciones. Este capítulo prepara el camino para el cálculo discutiendo las ideas básicas sobre las gráficas de funciones y la manera de transformarlas y combinarlas. Se destaca que una función puede representarse de diferentes maneras: mediante una ecuación, una tabla, una gráfica o con palabras. Se verán los principales tipos de funciones que se presentan en el cálculo y se describirán cómo se utilizan estas funciones para modelar matemáticamente fenómenos del mundo real.

1.1 Cuatro maneras de representar una función

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende de su radio r. La regla que relaciona A con r está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r hay asociado un valor de A, por lo que se dice que A es una *función* de r.

B. La población humana del mundo P depende del tiempo t. La tabla muestra las estimaciones de la población mundial $P(t)$ en el tiempo t, para algunos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor del tiempo t hay un valor correspondiente de P, por lo que se dice que P es una función de t.

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080
2010	6870

C. El costo C de envío de un paquete por correo depende de su peso w. Aunque no hay alguna fórmula simple que relacione a w con C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a del suelo, medida por un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. La figura 1 muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un determinado valor de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.

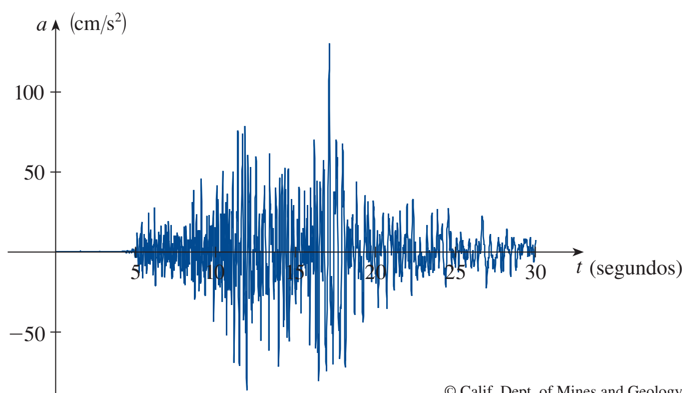


FIGURA 1
Aceleración vertical de suelo durante el terremoto de Northridge

Cada uno de estos ejemplos describe una regla de acuerdo con la cual, a un número dado (r, t, w o t), se le asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso se dice que el segundo número es una función del primero.

> Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Usualmente se consideran funciones para las cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. Al conjunto D se le denomina **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "*f de x*". El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de f se conoce como **variable dependiente**. En el ejemplo A, r es la variable independiente, y A es la variable dependiente.

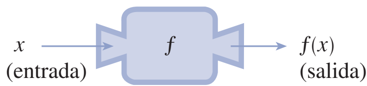


FIGURA 2
Diagrama de una función *f* como una máquina

Es útil pensar en una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, cuando x entra en la máquina, esta la acepta como una entrada apropiada y produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, puede pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

Las funciones preprogramadas en una calculadora son ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla raíz cuadrada en la calculadora calcula esa función. Oprima la tecla etiquetada $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$) e introduzca la entrada x; si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, entonces se presentará una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así, la tecla $\sqrt{x}$ en la calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha conecta un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

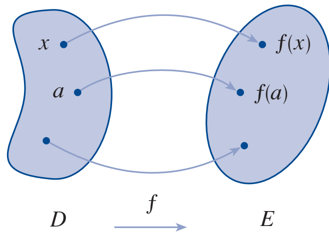


FIGURA 3
Diagrama de flechas para *f*

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio D, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f presenta una imagen útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en la gráfica es $y = f(x)$, se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f permite también tener una imagen visual del dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

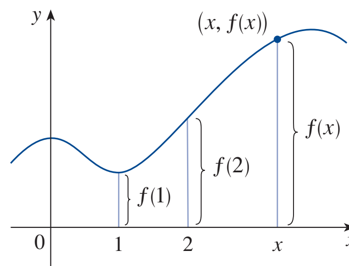


FIGURA 4

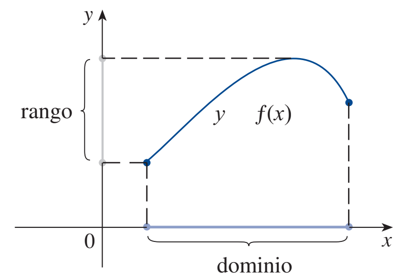


FIGURA 5

EJEMPLO 1 La gráfica de una función f se muestra en la figura 6.
(a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.
(b) ¿Cuál es el dominio y el rango de f?

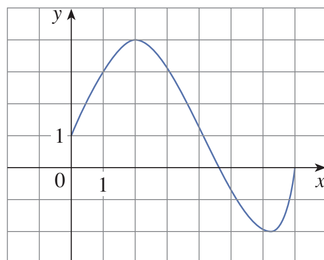


FIGURA 6

SOLUCIÓN
(a) De la figura 6 se ve que el punto (1, 3) está en la gráfica de f, por lo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra arriba de $x = 1$ está 3 unidades arriba del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0.7 unidades por debajo del eje x, así que se estima que $f(5) \approx -0.7$.

(b) Vea que $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, por lo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores de -2 a 4, por lo que el rango de f es

La notación por intervalos está dada en el apéndice A.

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$ ■

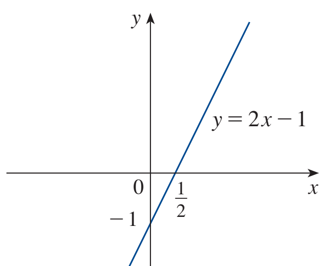


FIGURA 7

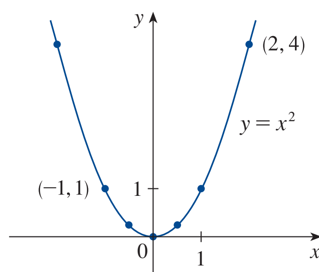


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace la gráfica y encuentre el dominio y rango de cada una de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN

(a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$, y representa la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección con el eje y en -1. (Recuerde que la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = mx + b$. Véase el apéndice B). Esto permite dibujar una parte de la gráfica de f en la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, por lo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, que se denota por $\mathbb{R}$. La gráfica muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.

(b) Dado que $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, se pueden colocar los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$ junto con algunos otros puntos de la gráfica, y después unirlos para obtener la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$ y representa una parábola (véase el apéndice C). El dominio de g es $\mathbb{R}$. El rango de g consiste de todos los valores de $g(x)$, esto es, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x, y cualquier número positivo y es un cuadrado. Por lo que el rango de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto se puede ver en la figura 8. ■

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalúe $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

SOLUCIÓN Primero evalúe $f(a + h)$ reemplazando x por $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

La expresión

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en el ejemplo 3 se llama **cociente de diferencias** y se presenta en cálculo con frecuencia. Como se verá en el capítulo 2, representa la razón de cambio de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$.

Después se sustituye en la expresión dada y se simplifica:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$ ■

■ Representaciones de funciones

Hay cuatro posibles maneras de representar una función:

- verbalmente (con una descripción en palabras)
- numéricamente (con una tabla de valores)
- visualmente (con una gráfica)
- algebraicamente (con una fórmula explícita)

Si una función puede representarse de las cuatro maneras, con frecuencia es muy útil pasar de una representación a otra a fin de disponer de información adicional de la función. (En el ejemplo 2, se empezó con formas algebraicas y luego se obtuvieron gráficas.) Pero ciertas funciones se describen más naturalmente por una forma que por otra. Con esto en mente, se reexaminarán las cuatro situaciones que se consideraron al inicio de esta sección.

A. La representación quizá más útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores para trazar una gráfica (la mitad de una parábola). Debido a que un círculo tiene un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$ y el rango $(0, \infty)$.

t (años desde 1900)	Población (millones)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870

B. Se da una descripción de la función en palabras: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. Ahora medirá t, así que $t = 0$ corresponde al año 1900. La tabla de valores de la población mundial proporciona una representación adecuada de esta función. Si se grafican estos valores, se obtiene la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) en la figura 9. También es una representación útil porque la gráfica permite disponer de todos los datos a la vez. ¿Qué pasa con una fórmula? Por supuesto, es imposible concebir una fórmula explícita que proporcione la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible encontrar una expresión para una función que se *aproxime* a $P(t)$. De hecho, utilizando los métodos que se explican en la sección 1.2, se obtiene la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

La figura 10 muestra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que aproxima el comportamiento de la función dada. Sin embargo, se verá que las ideas del cálculo también pueden aplicarse a una tabla de valores; una fórmula explícita no es necesaria.

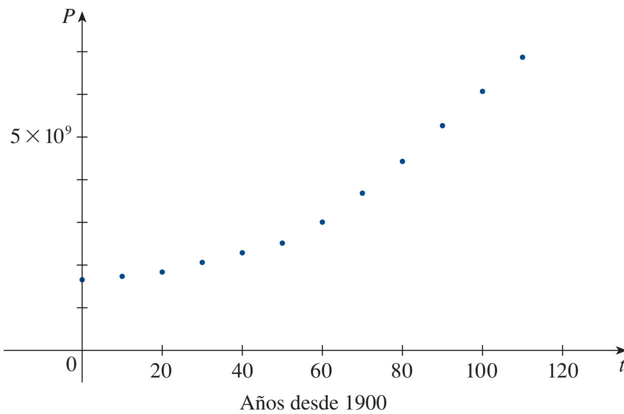


FIGURA 9

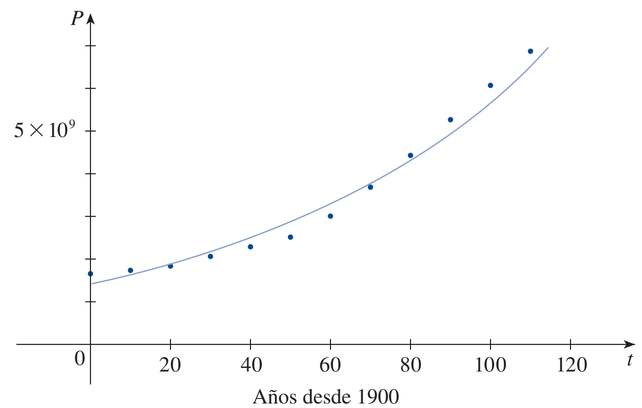


FIGURA 10

La función P es típica de aquellas que surgen cuando se intenta aplicar el cálculo en el mundo real. Comienza con una descripción verbal de una función. Quizá sea capaz de elaborar una tabla de valores de la función, tal vez de lecturas del instrumento en un experimento científico. A pesar de que no tenga un conocimiento completo de los valores de la función, se verá durante el desarrollo de este libro que todavía es posible realizar las operaciones del cálculo con dicha función.

Una función definida por una tabla de valores se llama función *tabular*.

C. Nuevamente la función se describe con palabras: sea $C(w)$ el costo de envío por correo de un paquete con peso w. La regla que el Servicio Postal de Hong Kong utiliza desde 2015 para el correo a Taiwán es la siguiente: el costo es \$2.90 para 20 g o menos, \$5.50 por 30 g o menos, y \$1.50 por cada 10 g más o parte de estos. La tabla de valores que se muestra al margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible trazar una gráfica (véase el ejemplo 10).

w (gramos)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leqslant 20$	2.90
$20 < w \leqslant 30$	5.50
$30 < w \leqslant 40$	7.00
$40 < w \leqslant 50$	8.50
⋮	⋮

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que podría construirse una tabla de valores, y que incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo, las amplitudes y los patrones, puede verse fácilmente en la

gráfica. (Lo mismo es cierto para los patrones que se observan en los electrocardiogramas de pacientes que sufren del corazón y en polígrafos para la detección de mentiras).

En el ejemplo siguiente, se traza la gráfica de una función definida verbalmente.

EJEMPLO 4 Al abrir un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado saliendo el agua. Dibuje una gráfica de T como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que fue abierto el grifo.

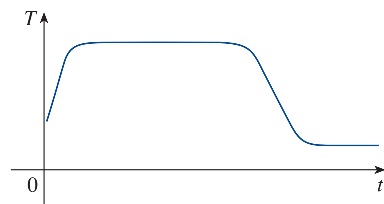


FIGURA 11

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente es cercana a la temperatura ambiente porque el agua ha permanecido en las tuberías. Cuando empieza a salir el agua desde el tanque de agua caliente, T aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua caliente en el tanque. Cuando el tanque se drena, T disminuye hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto permite hacer la gráfica de T en función de t en la figura 11. ■

El ejemplo siguiente inicia con una descripción verbal de una función en una situación física, y hay que obtener una fórmula algebraica explícita. La capacidad para hacer esto es una habilidad útil para resolver problemas de cálculo en los que se piden los valores máximo o mínimo de cantidades.

EJEMPLO 5 Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta $10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta $6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales como una función del ancho de la base.

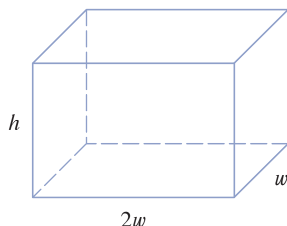


FIGURA 12

SOLUCIÓN Dibuje un diagrama como el de la figura 12 e introduzca la notación w y $2w$ para el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h para la altura.

El área de la base es $(2w)w = 2w^2$, por lo que el costo en dólares de los materiales para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen área wh, y los otros dos tienen área $2wh$, por lo que el costo de los materiales para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. El costo total es, por tanto,

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C solo como una función de w, se necesita eliminar h y para hacerlo se utiliza el hecho de que el volumen es de 10 m^3. Por tanto,

$$w(2w)h = 10$$

esto da

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Sustituyendo en la expresión para C, se tiene

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como una función de w. ■

SP Para establecer funciones aplicadas como en el ejemplo 5, puede ser útil revisar los principios de la resolución de problemas como se explica en la página 71, particularmente el *Paso 1: Comprenda el problema*.

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Convención para el dominio
Si una función está dada por una fórmula y el dominio no se expresa explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

SOLUCIÓN

(a) Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como un número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, por lo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Como

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

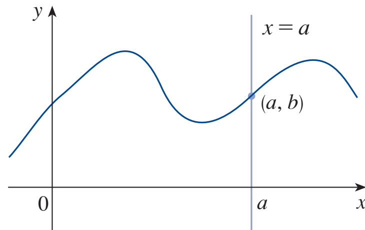
y no se permite la división entre 0, vea que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

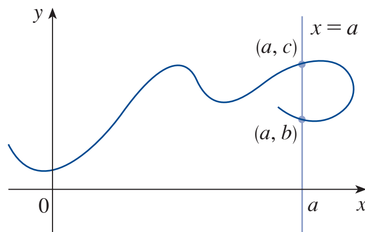
que también puede escribirse en notación de intervalos como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$ ■

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esta pregunta se contesta con la siguiente prueba.



(a) Esta curva representa una función.



(b) Esta curva no representa una función.

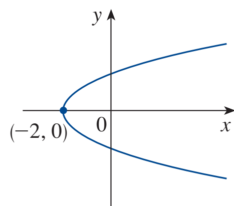
FIGURA 13

La prueba de la recta vertical Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y solo si no hay recta vertical que se interseque con la curva más de una vez.

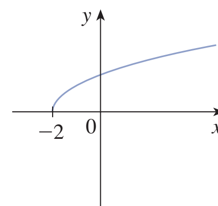
La razón de la validez de la prueba de la vertical puede verse en la figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ se interseca con una curva solo una vez, en (a, b), entonces se define exactamente un valor funcional para $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ se interseca con la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función debido a que una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que se muestra en la figura 14(a) no es la gráfica de una función de x porque, como puede ver, hay rectas verticales que se intersecan con la parábola dos veces. La parábola, sin embargo, contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Observe que la ecuación $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, por lo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Por tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 2}$ del ejemplo 6(a) y $g(x) = -\sqrt{x + 2}$. Véanse las figuras 14(b) y (c).

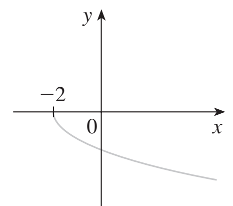
Observe que si invierte los roles de x y y, entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ *define* a x como una función de y (con y como la variable independiente y x como la variable dependiente), y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función h.



(a) $x = y^2 - 2$



(b) $y = \sqrt{x + 2}$



(c) $y = -\sqrt{x + 2}$

FIGURA 14

■ Funciones definidas por partes

Las funciones en los siguientes cuatro ejemplos se definen mediante diferentes fórmulas en distintas partes de sus dominios. Estas funciones se llaman **funciones definidas por partes**.

EJEMPLO 7 Una función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Evalúe $f(-2)$, $f(-1)$ y $f(0)$ y trace la gráfica de la función.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular la regla es la siguiente: primero vea el valor de la entrada x. Si sucede que $x \leqslant -1$, entonces el valor de $f(x)$ es $1 - x$. Por otro lado, si $x > -1$, entonces el valor de $f(x)$ es x^2.

Puesto que $-2 \leqslant -1$, se tiene $f(-2) = 1 - (-2) = 3$.

Puesto que $-1 \leqslant -1$, se tiene $f(-1) = 1 - (-1) = 2$.

Puesto que $0 > -1$, se tiene $f(0) = 0^2 = 0$.

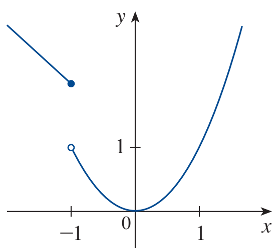


FIGURA 15

¿Cómo obtiene la gráfica de f? Observe que si $x \leqslant -1$, entonces $f(x) = 1 - x$, por lo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la recta vertical $x = -1$ debe coincidir con la recta $y = 1 - x$, que tiene pendiente -1 e intersección $y = 1$. Si $x > -1$, entonces $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la derecha de la recta $x = -1$ debe coincidir con la gráfica de $y = x^2$, que es una parábola. Esto permite trazar la gráfica en la figura 15. El punto relleno indica que $(-1, 2)$ está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que $(-1, 1)$ está excluido de la gráfica. ■

El ejemplo siguiente de una función definida por partes es la función valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, se denota por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 en la recta de números reales. Las distancias son siempre positivas o cero, así se tiene que

Para un repaso más amplio de valores absolutos, véase el apéndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general, se tiene

$$\begin{aligned} |a| &= a \quad \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a \quad \text{si } a < 0 \end{aligned}$$

(Recuerde que, si a es negativa, entonces $-a$ es positiva.)

EJEMPLO 8 Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN De la discusión anterior se sabe que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

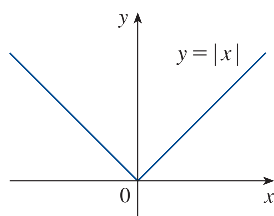


FIGURA 16

Utilizando el mismo método que en el ejemplo 7, vea que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y, y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase la figura 16). ■

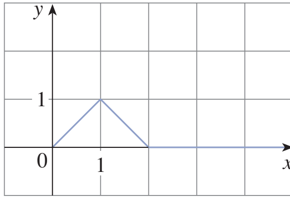


FIGURA 17

Forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Véase el apéndice B.

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura 17.

SOLUCIÓN La recta que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = 1$ e intersección con el eje y en $b = 0$, por lo que su ecuación es $y = x$. Así, para la parte de la gráfica de f que une a (0, 0) con (1, 1), se tiene

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

La recta que une a (1, 1) y (2, 0) tiene pendiente $m = -1$, por lo que su forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{o} \qquad y = 2 - x$$

Así se tiene
$$f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2$$

También se ve que la gráfica de f coincide con el eje x para $x > 2$. Reuniendo esta información, se tiene la fórmula siguiente en tres partes para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

■

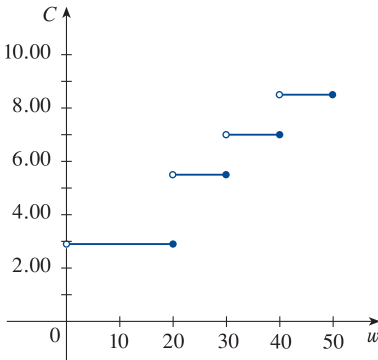


FIGURA 18

EJEMPLO 10 En el ejemplo C al principio de esta sección se consideró el costo $C(w)$ de enviar por correo paquetes con peso w. En efecto, esto define una función por partes porque, de la tabla de valores en la página 13, se tiene

$$C(w) = \begin{cases} 2.90 & \text{si } 0 < w \leqslant 20 \\ 5.50 & \text{si } 20 < w \leqslant 30 \\ 7.00 & \text{si } 30 < w \leqslant 40 \\ 8.50 & \text{si } 40 < w \leqslant 50 \\ \vdots & \end{cases}$$

La gráfica se muestra en la figura 18. Puede ver por qué funciones similares a esta se llaman **funciones escalón**: saltan de un valor al siguiente. Estas funciones se estudiarán en el capítulo 2. ■

Simetría

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

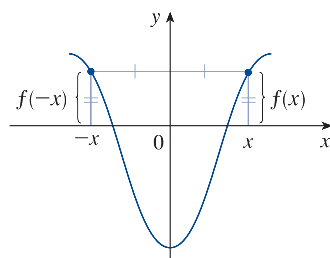


FIGURA 19
Una función par

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase la figura 19). Esto significa que, si ha dibujado la gráfica para $x \geqslant 0$, se obtiene toda la gráfica simplemente reflejándola con respecto al eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para cada x en su dominio, entonces f es una **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

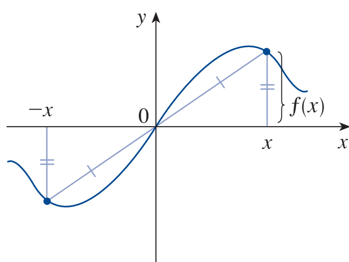


FIGURA 20
Una función impar

La gráfica de una función impar es simétrica en relación con el origen (véase la figura 20). Si ya tiene la gráfica de f para $x \geqslant 0$, se puede obtener toda la gráfica rotando 180º esta parte con respecto al origen.

EJEMPLO 11 Determine si cada una de las funciones siguientes es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

(a)
$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x)$$
$$= -x^5 - x = -(x^5 + x)$$
$$= -f(x)$$

Por tanto, f es una función impar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Por lo que g es par.

(c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar. ■

Las gráficas de las funciones del ejemplo 11 se muestran en la figura 21. Observe que la gráfica de h no es simétrica con respecto al eje y ni en relación con el origen.

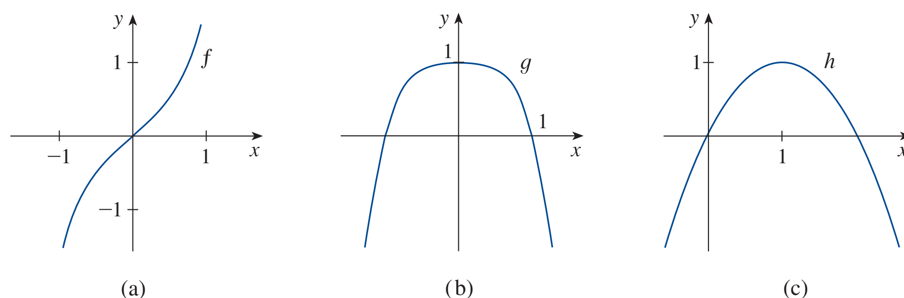


FIGURA 21

■ Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube de A a B, desciende de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, decreciente de $[b, c]$ y creciente nuevamente de $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números entre a y b con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Se utiliza esta propiedad para definir una función creciente.

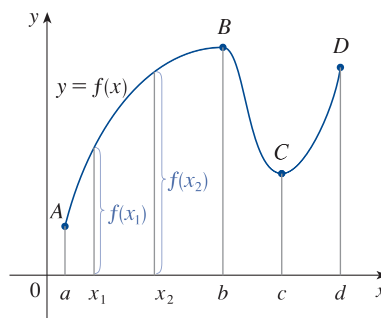


FIGURA 22

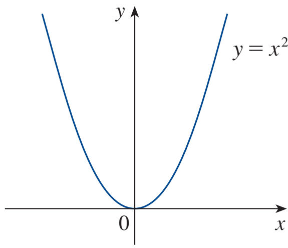


FIGURA 23

Una función f se llama **creciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

En la definición de una función creciente, es importante darse cuenta de que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe cumplirse para *todo* par de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

Puede observarse en la figura 23 que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 EJERCICIOS

1. Si $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$ y $g(u) = u + \sqrt{2 - u}$, ¿es verdad que $f = g$?

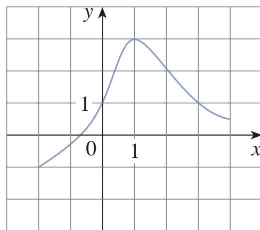
2. Si

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x$$

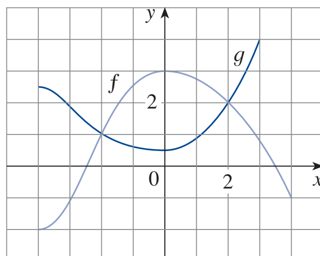
¿es verdad que $f = g$?

3. La gráfica de una función f está dada.

(a) Indique el valor de $f(1)$.
(b) Calcule el valor de $f(-1)$.
(c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 1$?
(d) Calcule el valor de x tal que $f(x) = 0$.
(e) Indique el dominio y el rango de f.
(f) ¿En qué intervalo f es creciente?



4. Las gráficas de f y g están dadas.



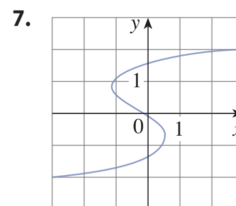
(a) Indique los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
(b) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?
(c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.
(d) ¿Sobre qué intervalo f es decreciente?
(e) Establezca el dominio y el rango de f.
(f) Establezca el dominio y el rango de g.

5. La gráfica de la figura 1 fue registrada por un instrumento operado por el Departamento de Minas y Geología de California en el Hospital Universitario de la Universidad de California del Sur en Los Ángeles. Utilice esta gráfica para estimar el rango de la función aceleración vertical de suelo, en la Universidad de California del Sur, durante el terremoto de Northridge.

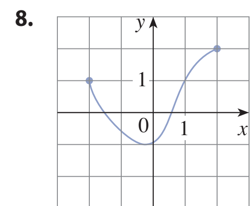
6. En esta sección se discuten ejemplos de funciones cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo de envío postal es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dé otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describen verbalmente. ¿Qué puede decir sobre el dominio y el rango de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica de cada función.

7–10 Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, establezca el dominio y el rango de la función.

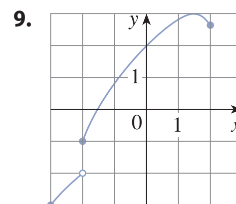
7.



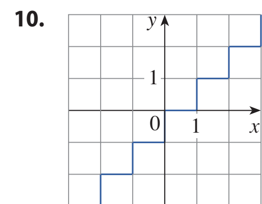
8.



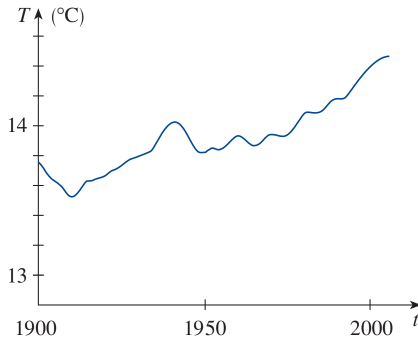
9.



10.

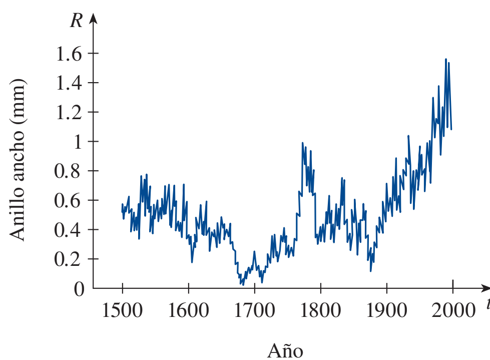


11. En la figura se muestra una gráfica de la temperatura media global T durante el siglo XX. Estime lo siguiente.
(a) La temperatura media mundial en 1950.
(b) El año en que la temperatura promedio fue de 14.2 °C.
(c) ¿En qué año la temperatura fue más baja? ¿Más alta?
(d) El rango de T.



Fuente: adaptado de *Globe and Mail* [Toronto], 5 de diciembre de 2009. Impreso.

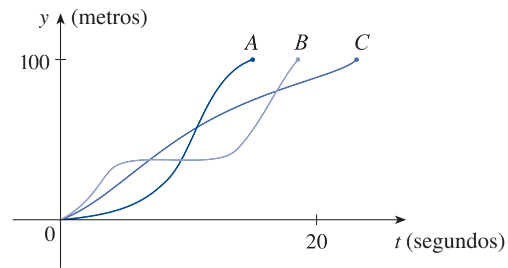
12. Los árboles crecen más rápido y forman anillos más amplios en los años cálidos y crecen más lentamente y forman anillos más angostos en los años más fríos. La figura muestra anillos anchos del pino siberiano de 1500 a 2000.
(a) ¿Cuál es el rango de la función de ancho de anillo?
(b) ¿Qué dice la gráfica acerca de la temperatura de la tierra? ¿La gráfica refleja las erupciones volcánicas de la mitad del siglo XIX?



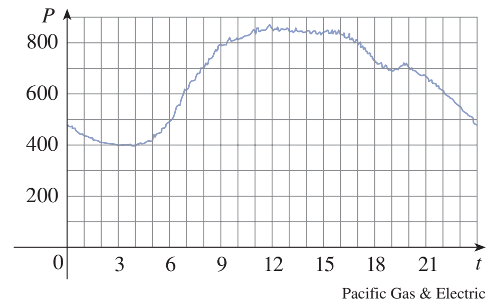
Fuente: adaptado de G. Jacoby *et al*., "Mongolian Tree Rings and 20th-Century Warming," *Science* 273(1996): 771–773.

13. Se ponen unos cubitos de hielo en un vaso, se llena el vaso con agua fría y luego se coloca sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua conforme transcurre el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura del agua como una función del tiempo transcurrido.

14. Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica muestra la distancia recorrida como una función del tiempo de cada corredor. Describa en palabras lo que la gráfica indica acerca de esta carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada corredor terminó la carrera?



15. La gráfica muestra el consumo de energía para un día de septiembre en San Francisco. (P se mide en megawatts; t se registra en horas a partir de la medianoche).
(a) ¿Cuál fue el consumo de potencia a las 6:00? ¿A las 18:00?
(b) ¿Cuándo fue el consumo de energía más bajo? ¿Cuándo fue el más alto? ¿Estos tiempos parecen razonables?



Pacific Gas & Electric

16. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz en función de la época del año.

17. Trace una gráfica de la temperatura exterior en función del tiempo, durante un día típico de primavera.

18. Trace una gráfica aproximada del valor de mercado de un nuevo automóvil en función del tiempo, durante un período de 20 años. Suponga que el automóvil se mantiene en buen estado.

19. Trace la gráfica de la cantidad de una determinada marca de café vendido por una tienda, en función del precio del café.

20. Coloque una tarta congelada en un horno y caliéntela durante una hora. Luego sáquela y déjela enfriar antes de comerla. Describa cómo cambia la temperatura de la tarta conforme pasa el tiempo. Luego trace una gráfica de la temperatura de la tarta en función del tiempo.

21. El propietario de una casa poda el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica de la altura del césped como una función del tiempo, en el transcurso de un período de cuatro semanas.

22. Un avión despega desde un aeropuerto y aterriza una hora más tarde en otro aeropuerto a 400 km de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado la terminal, $x(t)$ es la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión, trace
(a) Una posible gráfica de $x(t)$.
(b) Una posible gráfica de $y(t)$.

(c) Una posible gráfica de la rapidez respecto al suelo.
(d) Una posible gráfica de la velocidad vertical.

23. Las siguientes lecturas de temperatura T (en ºC) se registraron cada tres horas desde la medianoche a las 15:00 en Montreal, el 13 de junio de 2004. El tiempo t se midió en horas a partir de la medianoche

t	0	3	6	9	12	15
T	21.5	19.8	20.0	22.2	24.8	25.8

(a) Utilice las lecturas para trazar una gráfica de T como una función de t.
(b) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 11:00.

24. Los investigadores midieron la concentración de alcohol en la sangre (BAC, por su sigla en inglés) de ocho sujetos masculinos adultos después de consumir en forma rápida 30 mL de etanol (correspondiente a dos bebidas alcohólicas estándar). La tabla muestra los datos que se obtuvieron promediando la BAC (en mg/mL) de los ocho hombres.
(a) Utilice las lecturas para trazar la gráfica de la BAC en función de t.
(b) Utilice la gráfica para describir cómo el efecto del alcohol varía con el tiempo.

t (horas)	BAC	t (horas)	BAC
0	0	1.75	0.22
0.2	0.25	2.0	0.18
0.5	0.41	2.25	0.15
0.75	0.40	2.5	0.12
1.0	0.33	3.0	0.07
1.25	0.29	3.5	0.03
1.5	0.24	4.0	0.01

Fuente: adaptado de P. Wilkinson *et al.*, "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State," *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5(1977): 207–224.

25. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, determine $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a + 1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$, y $f(a + h)$.

26. Un globo esférico con radio de r centímetros tiene volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire necesaria para inflar el globo de un radio de r centímetros a un radio $r + 1$ centímetros.

27–30 Evalúe el cociente de diferencias de cada una de las funciones siguientes. Simplifique su respuesta.

27. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\quad \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$

28. $f(x) = x^3$, $\quad \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

30. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x + 1}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

31–37 Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

31. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$

32. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

33. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

34. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

35. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

36. $f(u) = \dfrac{u + 1}{1 + \dfrac{1}{u + 1}}$

37. $F(p) = \sqrt{2 - \sqrt{p}}$

38. Encuentre el dominio y el rango, y dibuje la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

39–40 Encuentre el dominio y grafique cada una de las funciones siguientes:

39. $f(x) = 1.6x - 2.4$

40. $g(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t + 1}$

41–44 Evalúe $f(-3)$, $f(0)$, y $f(2)$ para la función definida por partes. Luego trace la gráfica de la función.

41. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 7 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

45–50 Trace la gráfica de la función.

45. $f(x) = x + |x|$

46. $f(x) = |x + 2|$

47. $g(t) = |1 - 3t|$

48. $h(t) = |t| + |t + 1|$

49. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

50. $g(x) = ||x| - 1|$

51–56 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

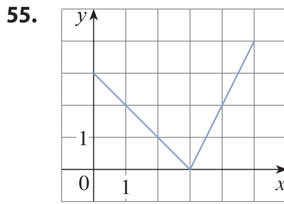
51. El segmento de recta que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$.

52. El segmento de recta que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$.

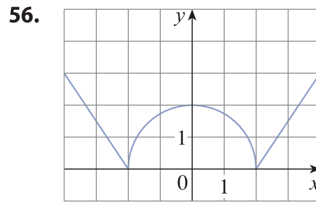
53. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$.

54. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

55.



56.



57–61 Encuentre una fórmula y el dominio para cada una de las funciones siguientes.

57. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

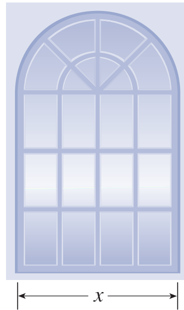
58. Un rectángulo tiene 16 m^2 de área. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

59. Exprese el área de un triángulo equilátero, como función de la longitud de un lado.

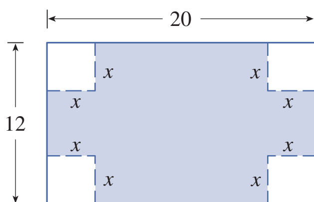
60. Una caja rectangular cerrada con volumen 6 m^3 tiene un largo de dos veces el ancho. Exprese la altura de la caja como una función del ancho.

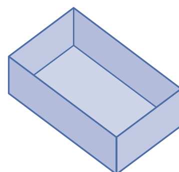
61. Una caja rectangular abierta con 2 m^3 de volumen tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base.

62. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 10 m, exprese el área A de la ventana en función del ancho x de la ventana.



63. Se va a construir una caja sin tapa, a partir de una hoja rectangular de cartón que tiene dimensiones de 12 por 20 centímetros, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja en función de x.





64. Un plan de telefonía celular tiene una carga básica de 35 dólares al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cargos de 10 centavos de dólar por cada minuto adicional de uso. Escriba el costo mensual C como una función del número x de minutos utilizados, y trace la gráfica de C como una función de x para $0 \leqslant x \leqslant 600$.

65. En cierto estado del país, la velocidad máxima permitida en autopistas es 100 km/h y la velocidad mínima es de 50 km/h. La multa para los conductores que violan estos límites es $10 por cada kilómetro por hora arriba de la velocidad máxima o debajo de la velocidad mínima. Exprese el monto de la multa F como una función de la velocidad x a la que se conduce y trace la gráfica de $F(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 180$.

66. Una compañía de electricidad cobra a sus clientes una tasa base de 10 dólares al mes, más 6 centavos de dólar por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 1200 kWh y 7 centavos de dólar por kWh para todo uso arriba de 1200 kWh. Exprese el costo mensual E como una función de la cantidad x de electricidad utilizada. Luego trace la gráfica de la función E para $0 \leqslant x \leqslant 2000$.

67. En un determinado país, el impuesto sobre la renta se calcula como sigue. No hay impuesto sobre la renta para ingresos de hasta $10 000. Los ingresos de más de $10 000 se gravan con una tasa de 10%, hasta un ingreso de $20 000. Los ingresos superiores a $20 000 se gravan en 15%.

(a) Trace la gráfica de la tasa de impuestos R en función del ingreso I.

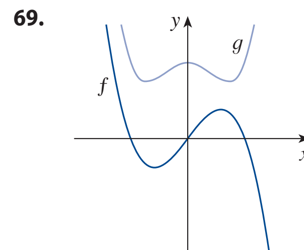
(b) ¿Qué impuesto corresponde a un ingreso de $14 000? ¿Y de $26 000?

(c) Trace la gráfica del impuesto total T en función del ingreso I.

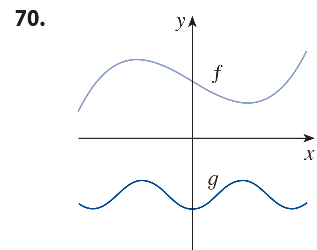
68. Las funciones del ejemplo 10 y el ejercicio 67 se llaman funciones escalón porque sus gráficas parecen escaleras. Sugiera dos ejemplos de funciones escalón que surgen en la vida cotidiana.

69–70 Se muestran las gráficas de f y g. Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

69.



70.



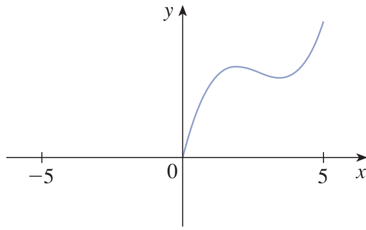
71. (a) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

(b) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar en la gráfica?

72. Una función f tiene dominio $[-5, 5]$ y se muestra una porción de su gráfica.

(a) Complete la gráfica de f si se sabe que f es par.

(b) Complete la gráfica de f si se conoce que f es impar.



73–78 Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora, utilícela para verificar visualmente su respuesta.

73. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

74. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

75. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

76. $f(x) = x|x|$

77. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

78. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

79. Si f y g son funciones pares, ¿es $f + g$ par? Si f y g son funciones impares, ¿es $f + g$ impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

80. Si f y g son dos funciones pares, ¿es el producto fg par? Si f y g son dos funciones impares, ¿es fg impar? ¿Qué sucede si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales

Un **modelo matemático** es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o una ecuación) de un fenómeno real, como el tamaño de una población, la demanda de un producto, la rapidez de un objeto que cae, la concentración de un producto en una reacción química, la esperanza de vida de una persona al nacer, o el costo de la reducción de las emisiones. El propósito del modelo es comprender el fenómeno y tal vez hacer predicciones sobre su comportamiento futuro.

La figura 1 ilustra el proceso de modelado matemático. Dado un problema del mundo real, la primera tarea es formular un modelo matemático mediante la identificación y etiquetado de las variables dependientes e independientes, y hacer suposiciones que simplifiquen lo suficiente el fenómeno para que sea matemáticamente manejable. Utilice su conocimiento de la situación física y sus habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En situaciones donde no hay ninguna ley física que lo guíe, recopile los datos (ya sea en una biblioteca, en internet o mediante la realización de sus propios experimentos) y organícelos en una tabla para identificar patrones. A partir de esa representación numérica de una función, puede obtener una representación gráfica. La gráfica podría sugerir incluso una fórmula algebraica apropiada en algunos casos.

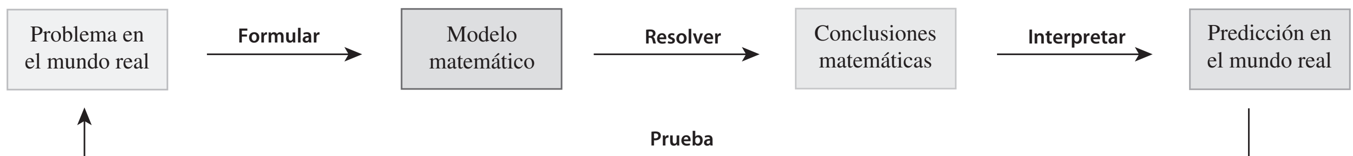


FIGURA 1
El proceso de modelado

La segunda etapa consiste en aplicar las matemáticas que conoce (como el cálculo que se desarrollará en este libro) al modelo matemático que se ha formulado para obtener conclusiones matemáticas. Luego, en la tercera etapa, se toman esas conclusiones matemáticas y se interpretan como información sobre el fenómeno original del mundo real con el propósito de dar explicaciones o hacer predicciones. El último paso es probar sus predicciones y compararlas contra nuevos datos reales. Si las predicciones no coinciden con una buena aproximación de la realidad, se necesita afinar el modelo o formular uno nuevo y empezar otra vez el ciclo.

Un modelo matemático nunca es una representación completamente precisa de una situación física: es una *idealización*. Un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente

para permitir hacer cálculos matemáticos, pero es razonablemente preciso para proporcionar valiosas conclusiones. Es importante darse cuenta de las limitaciones del modelo porque, finalmente, la Madre Naturaleza tiene la última palabra.

Hay muchos tipos diferentes de funciones que pueden utilizarse para modelar relaciones observadas en el mundo real. En lo que sigue, se analizarán el comportamiento y la gráfica de estas funciones y se darán ejemplos de situaciones modeladas por ellas adecuadamente.

Modelos lineales

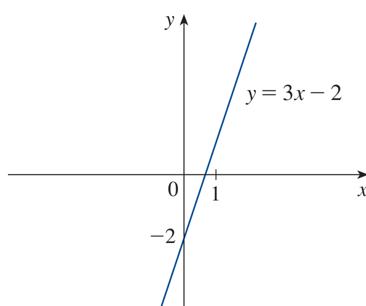
En el apéndice B se repasa la geometría analítica de las rectas.

Cuando se dice que y es una **función lineal** de x, quiere decir que la gráfica de la función es una recta, de manera que puede utilizar la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta para escribir una fórmula para la función como

$$y = f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la intersección de la recta con el eje y.

Una característica de las funciones lineales es que crecen a una razón constante. Por ejemplo, la figura 2 muestra una gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ y una tabla con algunos de sus valores. Observe que cuando x aumenta por 0.1, el valor de $f(x)$ aumenta por 0.3. Por lo que $f(x)$ aumenta tres veces más rápido que x. De este modo, la pendiente de la gráfica $y = 3x - 2$, es decir 3, puede interpretarse como la razón de cambio de y con respecto a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

EJEMPLO 1

(a) Cuando el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es 20 ºC, y la temperatura a 1 km de altura es de 10 ºC, exprese la temperatura T (en ºC) en función de la altura h (en kilómetros), suponiendo que un modelo lineal es adecuado.
(b) Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). ¿Qué representa la pendiente?
(c) ¿Cuál es la temperatura a 2.5 km de altura?

SOLUCIÓN

(a) Ya que se supone que T es una función lineal de h, se puede escribir

$$T = mh + b$$

Se tiene que $T = 20$ cuando $h = 0$, por lo que

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

En otras palabras, la intersección con el eje y es $b = 20$.

También se tiene que $T = 10$ cuando $h = 1$, por lo que

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

La pendiente de la recta es, por tanto, $m = 10 - 20 = -10$, y la función lineal requerida es

$$T = -10h + 20$$

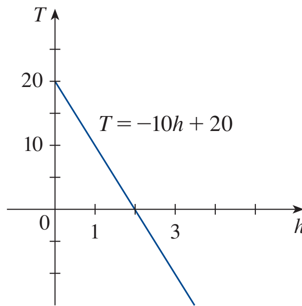


FIGURA 3

(b) En la figura 3 se muestra la gráfica. La pendiente es $m = -10$ ºC/km y representa la razón de cambio de la temperatura respecto a la altura.

(c) A una altura de $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -5°C$$

Si no hay ley o principio físicos que ayude a formular un modelo, se construye un **modelo empírico** que se base exclusivamente en los datos recopilados. Se busca una curva que "ajuste" en los datos, en el sentido que sugiera la tendencia básica de los puntos que representan los datos.

EJEMPLO 2 La tabla 1 muestra el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el Observatorio Mauna Loa, desde 1980 a 2012. Utilice los datos de la tabla 1 para encontrar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.

SOLUCIÓN Se utilizan los datos de la tabla 1 para hacer la gráfica de dispersión en la figura 4, donde t representa el tiempo (en años) y C, el nivel de CO_2 (en partes por millón, ppm).

Tabla 1

Año	Nivel de CO_2 (en ppm)	Año	Nivel de CO_2 (en ppm)
1980	338.7	1998	366.5
1982	341.2	2000	369.4
1984	344.4	2002	373.2
1986	347.2	2004	377.5
1988	351.5	2006	381.9
1990	354.2	2008	385.6
1992	356.3	2010	389.9
1994	358.6	2012	393.8
1996	362.4		

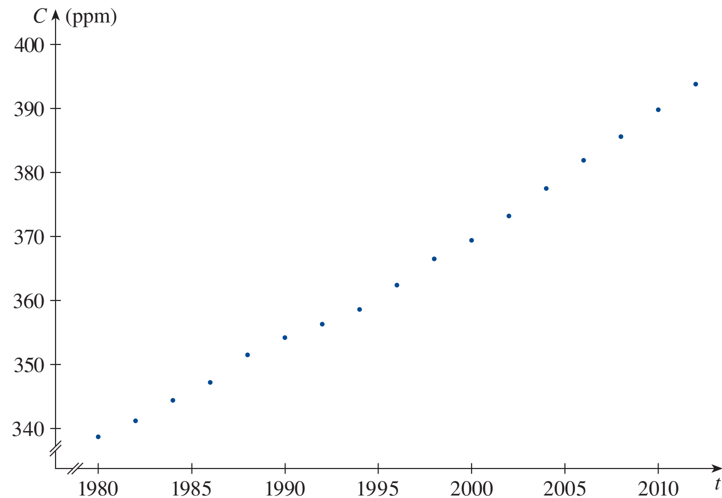


FIGURA 4 La gráfica de dispersión para el nivel promedio de CO_2

Observe que los puntos de datos parecen estar cercanos a una recta, por lo que es natural que se elija un modelo lineal en este caso. Pero hay muchas rectas posibles que se aproximan a estos puntos de datos, así que, ¿cuál se debe usar? Una posibilidad es la recta que pasa por el primero y el último punto de datos. La pendiente de esta recta es

$$\frac{393.8 - 338.7}{2012 - 1980} = \frac{55.1}{32} = 1.721875 \approx 1.722$$

Su ecuación se escribe como

$$C - 338.7 = 1.722(t - 1980)$$

o

1 $$C = 1.722t - 3070.86$$

La ecuación 1 da un posible modelo lineal para el nivel de dióxido de carbono y se representa gráficamente en la figura 5.

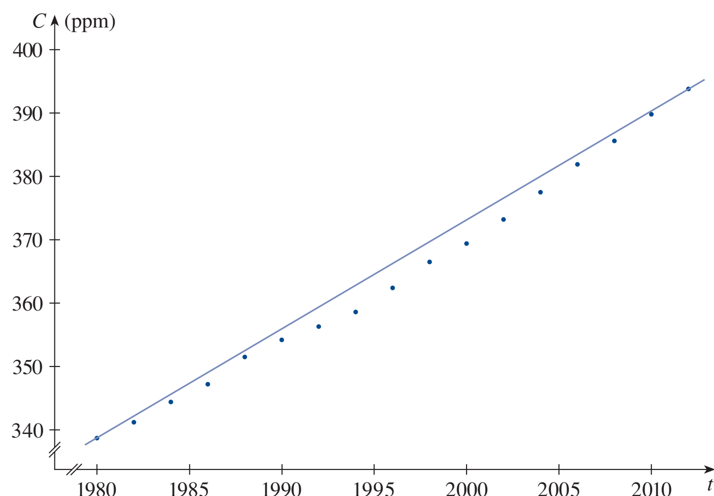


FIGURA 5
Modelo lineal a través del primero y el último punto de datos

Una computadora o una calculadora graficadora encuentra la recta de regresión por el método de **mínimos cuadrados**, que consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos de datos y la recta. Los detalles se explican en la sección 14.7.

Observe que este modelo da valores por encima de la mayoría de los niveles reales de CO_2. Un mejor modelo lineal se obtiene por un procedimiento estadístico llamado regresión lineal. Si utiliza una calculadora graficadora, introduzca los datos de la tabla 1 en el editor de datos y elija el comando de regresión lineal (en Maple se utiliza el comando fit[leastsquare] en el paquete de estadística; con Mathematica se utiliza el comando Fit), la máquina da la pendiente y la intersección con el eje *y* de la recta de regresión como

$$m = 1.71262 \qquad b = -3054.14$$

Por lo que el modelo de mínimos cuadrados para el nivel de CO_2 es

2 $$C = 1.71262t - 3054.14$$

En la figura 6 se grafica la recta de regresión, así como los puntos de datos. Comparado con la figura 5, se ve que da un mejor ajuste que el modelo lineal anterior.

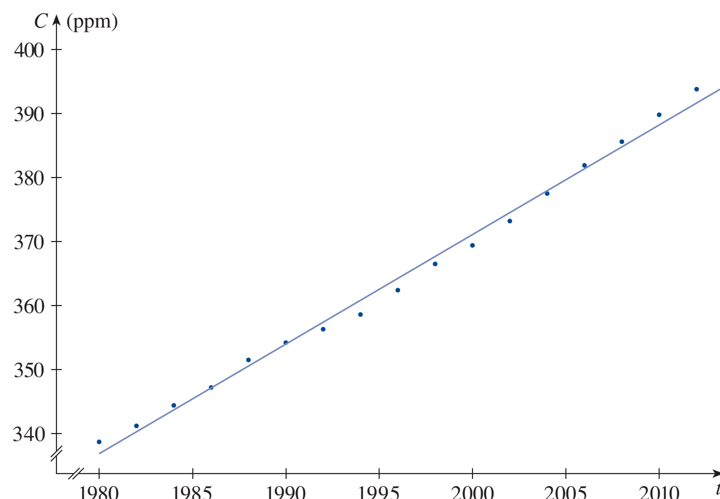


FIGURA 6
Recta de regresión

EJEMPLO 3 Utilice el modelo lineal dado por la ecuación 2 para estimar el nivel promedio de CO_2 para 1987 y predecir el nivel para el año 2020. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo superará el nivel de CO_2 las 420 partes por millón?

SOLUCIÓN Mediante la ecuación 2 con $t = 1987$, se estima que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue

$$C(1987) = (1.71262)(1987) - 3054.14 \approx 348.84$$

Este es un ejemplo de *interpolación* porque se ha estimado un valor entre los valores observados. (De hecho, el Observatorio Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue de 348.93 ppm, por lo que la estimación es bastante precisa.)

Con $t = 2020$, se obtiene

$$C(2020) = (1.71262)(2020) - 3054.14 \approx 405.35$$

Por lo que se pronostica que el nivel promedio de CO_2 en el año 2020 será 405.4 ppm. Este es un ejemplo de *extrapolación* porque se predijo un valor *fuera* de la región de observaciones. En consecuencia, se está menos seguro acerca de la precisión de la predicción.

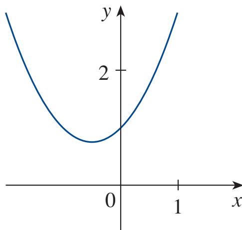
Utilizando la ecuación 2, se ve que el nivel de CO_2 excede las 420 ppm cuando

$$1.71262t - 3054.14 > 420$$

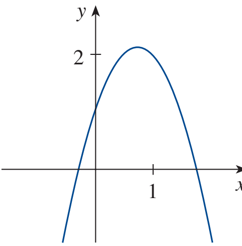
Resolviendo esta desigualdad, se obtiene

$$t > \frac{3474.14}{1.71262} \approx 2028.55$$

Por tanto, se predice que el nivel de CO_2 superará 420 ppm para el año 2029. Esta predicción es riesgosa porque se trata de un tiempo bastante alejado de las observaciones. De hecho, se puede ver en la figura 6 que la tendencia ha sido de un rápido aumento para los niveles de CO_2 en los últimos años, por lo que el nivel podría superar los 420 ppm antes de 2029. ■



(a) $y = x^2 + x + 1$



(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

FIGURA 7
Las gráficas de funciones cuadráticas son parábolas

Polinomios

Una función P es un **polinomio** si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas los **coeficientes** de la función polinomial. El dominio de cualquier polinomio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** del polinomio es n. Por ejemplo, la función

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

es un polinomio de grado 6.

Una función polinomial de grado 1 es de la forma $P(x) = mx + b$, por lo que es una función lineal. Un polinomio de grado 2 es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ y se llama **función cuadrática**. Su gráfica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola $y = ax^2$, como se verá en la siguiente sección. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$ (véase la figura 7).

Una polinomial de grado 3 es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

y se llama **función cúbica**. La figura 8 muestra la gráfica de una función cúbica en el inciso (a) y las gráficas de polinomios de grados 4 y 5 en los incisos (b) y (c). Se verá más adelante por qué las gráficas tienen esas formas.

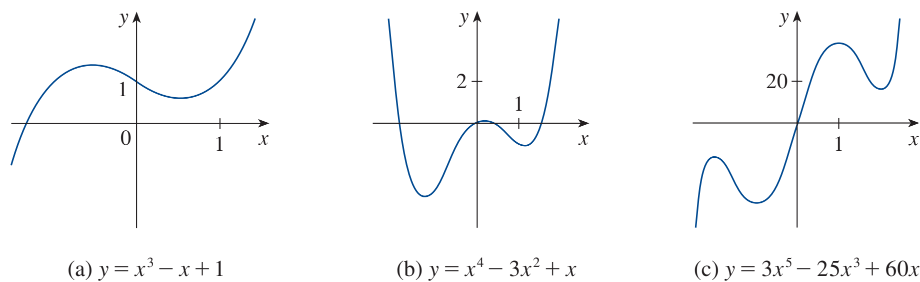


FIGURA 8

(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Los polinomios se utilizan por lo común para modelar diversas cantidades que se presentan en las ciencias naturales y sociales. Por ejemplo, en la sección 3.7 se explica por qué los economistas usan a menudo un polinomio $P(x)$ para representar el costo de producir x unidades de una mercancía. En el ejemplo siguiente, se utiliza una función cuadrática para modelar la caída de una pelota.

Tabla 2

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EJEMPLO 4 Se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN, a 450 m por encima del suelo. Las sucesivas alturas h de la pelota por encima del suelo están registradas a intervalos de 1 segundo, en la tabla 2. Encuentre un modelo para ajustar los datos y utilícelo para predecir el momento en que la pelota golpeará el suelo.

SOLUCIÓN En la figura 9 se traza una gráfica de dispersión con la información disponible y se observa que un modelo ideal no es adecuado. Pero parece ser que los puntos de datos podrían acomodarse a una parábola, por lo que se intenta un modelo cuadrático. Utilizando una calculadora graficadora o computadora (que utiliza el método de los mínimos cuadrados), se obtiene el siguiente modelo cuadrático:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2 \tag{3}$$

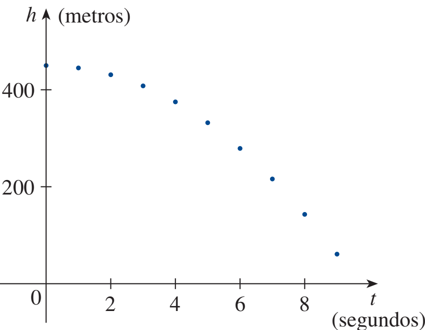


FIGURA 9
Gráfica de dispersión para la caída de una pelota

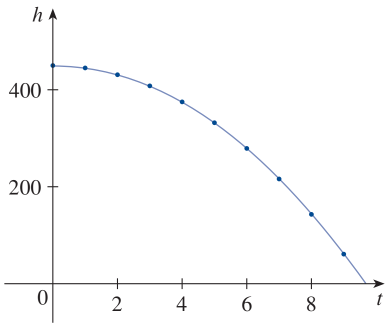


FIGURA 10
Modelo cuadrático para la caída de una pelota

En la figura 10 se dibuja la gráfica de la ecuación 3 junto con los puntos de datos y se ve que el modelo cuadrático da un muy buen ajuste.

La pelota golpea el suelo cuando $h = 0$, por lo que resuelve la ecuación cuadrática

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

La ecuación cuadrática da

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

La raíz positiva es $t \approx 9.67$, por lo que se pronostica que la pelota golpeará el suelo después de aproximadamente 9.7 segundos. ■

Funciones potencia

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama **función potencia**. Se consideran varios casos.

(i) $a = n$, donde n es un número entero positivo

Las gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 se muestran en la figura 11. (Estas son funciones polinomiales con un solo término.) Ya se sabe la forma de la gráfica de $y = x$ (una recta que pasa por el origen con pendiente 1) y $y = x^2$ [una parábola, véase el ejemplo 1.1.2(b)].

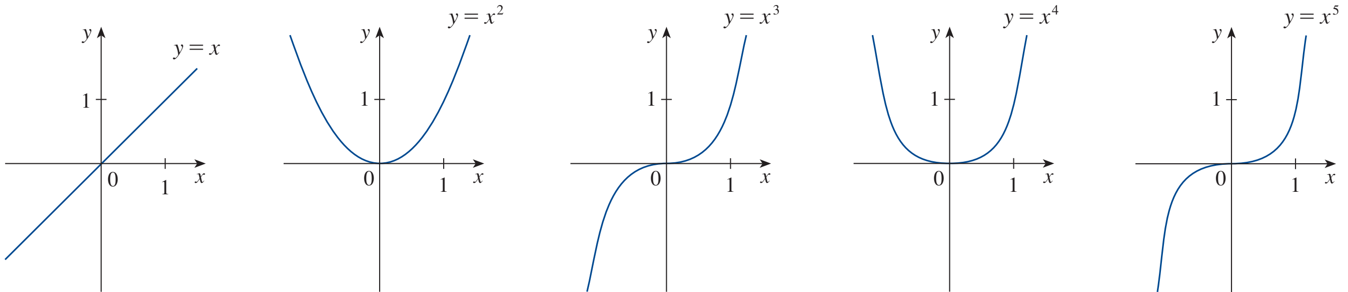


FIGURA 11 Gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. Si n es par, entonces $f(x) = x^n$ es una función par, y su gráfica es similar a la parábola $y = x^2$. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ es una función impar, y su gráfica es similar a la de $y = x^3$. Observe en la figura 12, sin embargo, que cuando n aumenta, la gráfica de $y = x^n$ se aplana más cerca de 0 y es más pronunciada cuando $|x| \geq 1$. (Si x es pequeña, entonces x^2 es más pequeña, x^3 es aún más pequeña, x^4 es todavía más pequeña aún, y así sucesivamente.)

Una **familia de funciones** es un conjunto de funciones cuyas ecuaciones se relacionan. La figura 12 muestra dos familias de funciones potencia, una con potencias pares y otra con potencias impares.

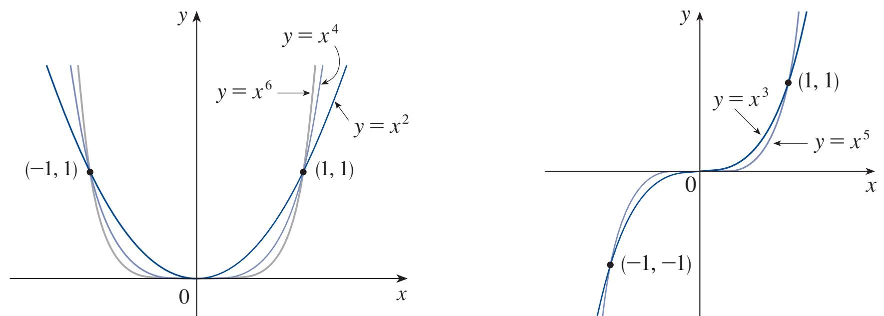


FIGURA 12

(ii) $a = 1/n$, donde n es un número entero positivo

La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **función raíz**. Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con dominio en $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola

$x = y^2$. [Véase la figura 13(a)]. Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$ se tiene la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (recuerde que todo número real tiene raíz cúbica) y cuya gráfica se muestra en la figura 13(b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar ($n > 3$) es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.

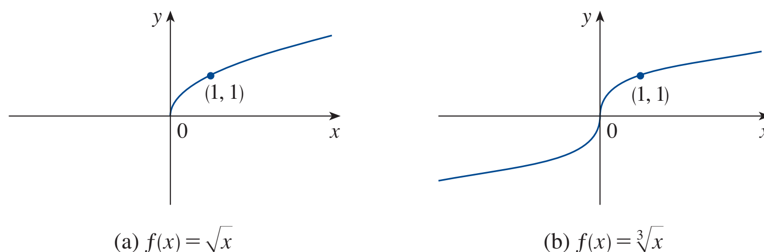


FIGURA 13
Gráficas de funciones raíz

(iii) $a = -1$

La gráfica de la **función recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ se muestra en la figura 14. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$ o $xy = 1$, y es una hipérbola con los ejes de coordenadas como sus asíntotas. Esta función surge en física y química en relación con la ley de Boyle, que dice que, cuando la temperatura es constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

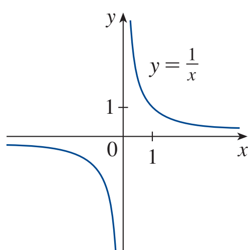


FIGURA 14
La función recíproca

$$V = \frac{C}{P}$$

donde C es una constante. Así, la gráfica de V en función de P (véase la figura 15) tiene la misma forma general que la mitad derecha de la figura 14.

Las funciones potencia también se utilizan para modelar relaciones especie-área (ejercicios 30-31), la iluminación como una función de la distancia a una fuente de luz (ejercicio 29) y el período de revolución de un planeta en función de su distancia al Sol (ejercicio 32).

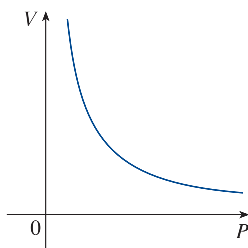


FIGURA 15
El volumen como una función de la presión a temperatura constante.

Funciones racionales

Una **función racional** f es un cociente de dos funciones polinomiales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo simple de una función racional es $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x|x \neq 0\}$; esta es la función recíproca graficada en la figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. La gráfica se muestra en la figura 16.

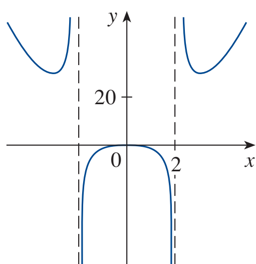


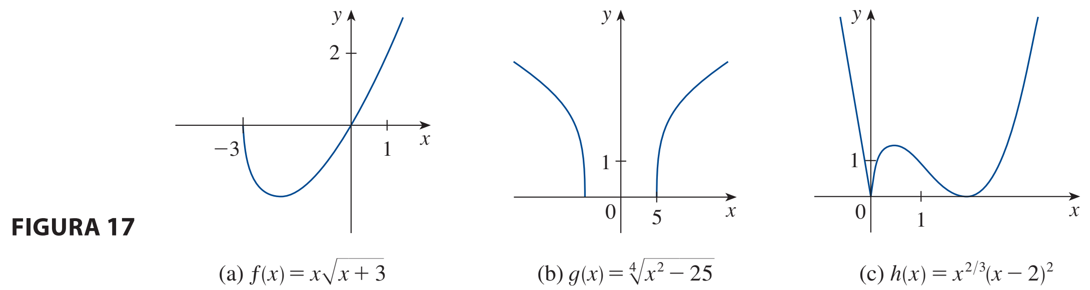
FIGURA 16
$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funciones algebraicas

Una función f se llama **función algebraica** si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con los polinomios. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica. Aquí hay dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Cuando trace funciones algebraicas en el capítulo 4, verá que sus gráficas pueden tener una variedad de formas. La figura 17 ilustra algunas de las posibilidades.



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

FIGURA 17

Un ejemplo de una función algebraica se produce en la teoría de la relatividad. La masa de una partícula con velocidad v es

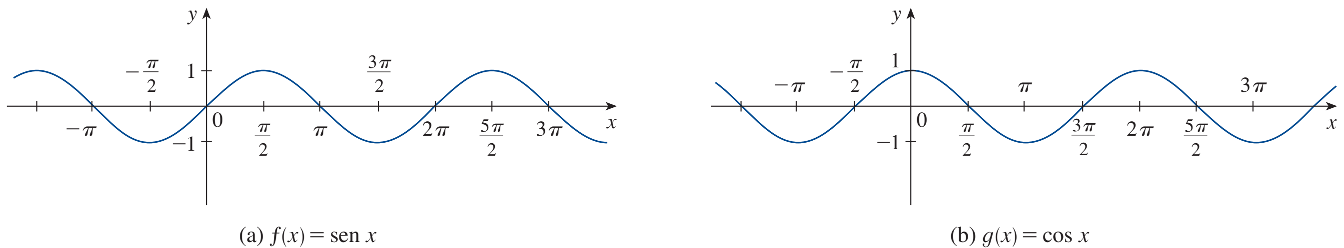
$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0 \times 10^5$ km/s es la velocidad de la luz en el vacío.

Funciones trigonométricas

Las páginas de referencia se encuentran en la parte final del libro.

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en la página de referencia 2 y también en el apéndice D. En cálculo, por convención, siempre se utilizan medidas en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando se utiliza la función $f(x) = \text{sen } x$, se sobreentiende que sen x significa el seno de un ángulo cuya medida en radianes es x. Así, las gráficas de las funciones seno y coseno son como se muestra en la figura 18.



(a) $f(x) = \text{sen } x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por tanto, para todos los valores de x, se tiene

$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

o, en términos de valor absoluto,

$$|\text{sen } x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

También, los ceros de la función seno se producen en los múltiplos enteros de p; es decir,

$$\text{sen } x = 0 \qquad \text{cuando} \qquad x = n\pi \qquad n \text{ es un entero}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas con período 2π. Esto significa que, para todos los valores de x,

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

El carácter periódico de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos, como las olas del mar, resortes en vibración y las ondas de sonido. Por ejemplo, en el ejemplo 1.3.4 vea que un modelo razonable para el número de horas de luz solar en Filadelfia t días de después del 1 de enero viene dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

EJEMPLO 5 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$?

SOLUCIÓN Esta función se define para todos los valores de x excepto los que hacen el denominador 0. Pero

$$1 - 2\cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

donde n es cualquier número entero (ya que la función coseno tiene período 2π). Por tanto, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto los mencionados. ■

La función tangente está relacionada con las funciones seno y coseno por la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

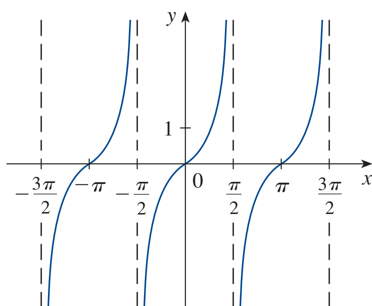


FIGURA 19
$y = \tan x$

y su gráfica se muestra en la figura 19. Está definida siempre que $\cos x = 0$, que es, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ Su rango es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene período π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son las recíprocas de las funciones seno, coseno y tangente. Sus gráficas se muestran en el apéndice D.

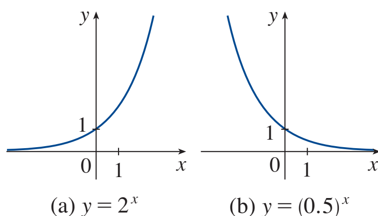


FIGURA 20

■ Funciones exponenciales

Las **funciones exponenciales** son funciones de la forma $f(x) = b^x$, donde la base b es una constante positiva. Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0.5)^x$ se muestran en la figura 20. En ambos casos el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.

Las funciones exponenciales serán estudiadas en detalle en la sección 1.4, y se verá que son útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como el crecimiento de una población (si $b > 1$) y la desintegración radiactiva (si $b < 1$).

■ Funciones logarítmicas

Las **funciones logarítmicas** $f(x) = \log_b x$, donde la base b es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales; se estudiarán en la sección 1.5.

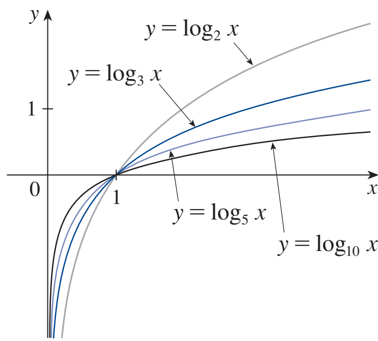


FIGURA 21

La figura 21 muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$, el rango es $(-\infty, \infty)$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$.

EJEMPLO 6 Clasifique las funciones siguientes como uno de los tipos de funciones que se han discutido.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUCIÓN

(a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

(b) $g(x) = x^5$ es una función potencia. (La x es la base.) Se podría considerar como una función polinomial de grado 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es una función polinomial de grado 4. ■

1.2 EJERCICIOS

1–2 Clasifique cada función como una función potencia, función raíz, polinomial (establezca su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. (a) $f(x) = \log_2 x$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

(c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$ (d) $u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$

(e) $v(t) = 5^t$ (f) $w(\theta) = \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

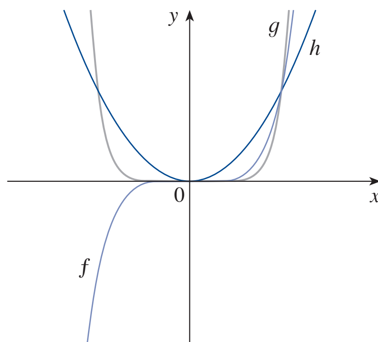
2. (a) $y = \pi^x$ (b) $y = x^\pi$

(c) $y = x^2(2 - x^3)$ (d) $y = \tan t - \cos t$

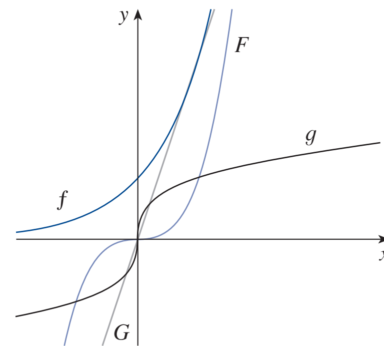
(e) $y = \dfrac{s}{1 + s}$ (f) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

3–4 Relacione cada una de las siguientes ecuaciones con su gráfica. Explique el porqué de su elección. (No utilice computadora o calculadora graficadora.)

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5–6 Encuentre el dominio de la función.

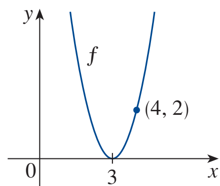
5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$ **6.** $g(x) = \dfrac{1}{1 - \tan x}$

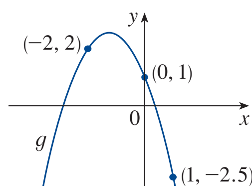
7. (a) Determine una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y trace la gráfica de varios miembros de la familia.
(b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y trace varios miembros de la familia.
(c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

8. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Trace varios miembros de la familia.

9. ¿Qué todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = c - x$ tienen en común? Trace varios miembros de la familia.

10. Encuentre expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran.





11. Encuentre una expresión para una función cúbica f si $f(1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

12. Estudios recientes indican que la temperatura promedio de la superficie de la Tierra ha estado aumentando. Algunos científicos han modelado la temperatura con la función lineal $T = 0.02t + 8.50$, donde T es la temperatura en ºC y t representa años desde 1900.
(a) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje T?
(b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura promedio de la superficie global en 2100.

13. Si D (en mg) es la dosis de un medicamento recomendada para adultos, entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, el farmacéutico utiliza la ecuación $c = 0.0417D(a + 1)$. Suponga que la dosis para un adulto es de 200 mg.
(a) Encuentre la pendiente de la gráfica de c. ¿Qué representa?
(b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

14. El administrador de un bazar de fin de semana sabe por experiencia que, si cobra x dólares por el alquiler de un espacio en el bazar, entonces el número y de espacios que puede alquilar está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.
(a) Trace la gráfica de esta función lineal. (Recuerde que la renta por el espacio y el número de espacios alquilados no pueden ser cantidades negativas.)
(b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje y la intersección con el eje x de la gráfica?

15. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Trace la gráfica de esta función.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección con el eje F y qué representa?

16. Kelly sale de Winnipeg a las 14:00 y conduce a rapidez constante hacia el oeste a lo largo de la carretera Trans-Canadá. Pasa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, a las 16:00.
(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.
(b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

17. Los biólogos han observado que la tasa de chirridos que emiten los grillos de una determinada especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 112 chirridos por minuto a 20 ºC y 180 chirridos por minuto a 29 ºC.
(a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura T, en función del número N de chirridos por minuto.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Qué representa?
(c) Si los grillos producen 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

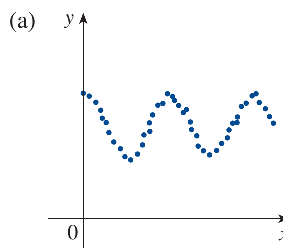
18. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta \$2200 fabricar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un solo día.
(a) Exprese el costo en función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
(c) ¿Cuál es la intersección en y de la gráfica y qué representa?

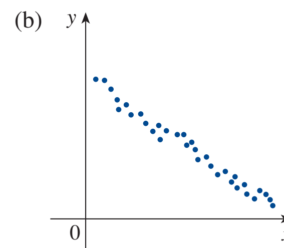
19. En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la presión del aire por encima del agua, 1.05 kg/cm^2. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 0.10 kg/cm^2 por cada metro de descenso.
(a) Exprese la presión del agua en función de la profundidad bajo la superficie del océano.
(b) ¿A qué profundidad la presión es de 7 kg/cm^2?

20. El costo mensual de conducir un auto depende del número de kilómetros recorridos. Lynn encontró que en mayo le costó \$380 conducir 768 km y en junio le costó \$460 conducir 1280 km.
(a) Exprese el costo mensual C como una función de la distancia recorrida d, suponiendo que una relación lineal da un modelo adecuado.
(b) Utilice el inciso (a) para predecir el costo de conducir 2400 km por mes.
(c) Dibuje la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?
(d) ¿Qué representa la intersección en y?
(e) ¿Por qué una función lineal es un modelo adecuado en esta situación?

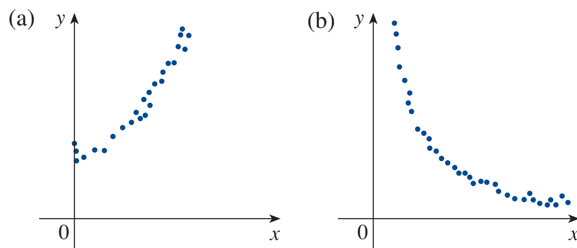
21–22 Para cada una de las gráficas de dispersión siguientes, ¿qué tipo de función elegiría como un modelo para los datos? Explique sus elecciones.

21.

(a)


(b)


22.



23. La tabla muestra la tasa de úlcera péptica (de por vida) (por cada 100 habitantes) en relación con el ingreso familiar como lo informa la Encuesta Nacional de Entrevista de Salud.

Ingreso	Tasa de úlcera (por cada 100 habitantes)
\$4,000	14.1
\$6,000	13.0
\$8,000	13.4
\$12,000	12.5
\$16,000	12.0
\$20,000	12.4
\$30,000	10.5
\$45,000	9.4
\$60,000	8.2

(a) Trace una gráfica de dispersión con estos datos y decida si es apropiado un modelo lineal.
(b) Encuentre y grafique un modelo lineal utilizando el primero y el último punto de datos.
(c) Encuentre y grafique la recta de regresión por mínimos cuadrados.
(d) Utilice el modelo lineal del inciso (c) para estimar la tasa de úlcera para un ingreso de \$25 000.
(e) De acuerdo con el modelo, ¿qué tan probable es que alguien que tiene un ingreso de \$80 000 sufra de úlcera péptica?
(f) ¿Cree que sería razonable aplicar el modelo a alguien con un ingreso de \$200 000?

24. Los biólogos han observado que la tasa de chirridos de grillos de una determinada especie, parece estar relacionada con la temperatura. La tabla muestra la cantidad de chirridos para distintas temperaturas.

Temperatura (°C)	Tasa de chirridos (chirridos/min)	Temperatura (°C)	Tasa de chirridos (chirridos/min)
20	113	30	188
22	128	32	203
24	143	34	218
26	158	36	233
28	173		

(a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
(b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
(c) Utilice el modelo lineal del inciso (b) para estimar la tasa chirridos a 40 ºC.

25. Los antropólogos usan un modelo lineal que relaciona la longitud del fémur humano a la altura. El modelo permite que un antropólogo determine la altura de una persona cuando se encuentra solamente una parte de esqueleto (incluido el fémur). Aquí tiene el modelo mediante el análisis de los datos sobre la longitud del fémur y altura para los ocho humanos masculinos dados en la tabla siguiente.
(a) Haga un diagrama de dispersión de los datos.
(b) Determine y trace la recta de regresión que modela los datos.
(c) Un antropólogo encuentra un fémur humano de 53 cm de largo. ¿Cuál era la altura de la persona?

Fémur longitud (cm)	Altura (cm)	Fémur longitud (cm)	Altura (cm)
50.1	178.5	44.5	168.3
48.3	173.6	42.7	165.0
45.2	164.8	39.5	155.4
44.7	163.7	38.0	155.8

26. Cuando las ratas de laboratorio están expuestas a fibras de asbesto, algunas de ellas desarrollan tumores de pulmón. La tabla muestra los resultados de varios experimentos realizados por científicos diferentes.
(a) Determine la recta de regresión para los datos.
(b) Haga una gráfica de dispersión y la gráfica de la recta de regresión. ¿La línea de regresión parece ser un modelo adecuado para los datos?
(c) ¿Qué representa la intersección con el eje *y* de la recta de regresión?

Exposición al asbesto (fibras/mL)	Porcentaje de ratones que desarrollan tumores de pulmón	Exposición al asbesto (fibras/mL)	Porcentaje de ratones que desarrollan tumores de pulmón
50	2	1600	42
400	6	1800	37
500	5	2000	38
900	10	3000	50
1100	26		

27. La tabla muestra el consumo mundial diario promedio de aceite entre 1985 y 2010 medido en miles de barriles por día.
(a) Realice una gráfica de dispersión y decida si es adecuado un modelo lineal.
(b) Determine y trace la gráfica de la recta de regresión.
(c) Use el modelo lineal para estimar el consumo de petróleo entre 2002 y 2012.

Años desde 1985	Miles de barriles de aceite por día
0	60,083
5	66,533
10	70,099
15	76,784
20	84,077
25	87,302

Fuente: US Energy Information Administration

28. La tabla muestra el porcentaje de la población de Argentina que ha vivido en las zonas rurales de 1955 al 2000. Encuentre un modelo para los datos y utilícelo para estimar el porcentaje rural en 1988 y 2002.

Año	Porcentaje rural	Año	Porcentaje rural
1955	30.4	1980	17.1
1960	26.4	1985	15.0
1965	23.6	1990	13.0
1970	21.1	1995	11.7
1975	19.0	2000	10.5

29. Muchas de las cantidades físicas están relacionadas mediante *leyes de los cuadrados inversos*, es decir, por las funciones potencia de la forma $f(x) = kx^{-2}$. En particular, la iluminación de un objeto por una fuente de luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Suponga que al anochecer está en una habitación con una lámpara y que está intentando leer un libro. La luz es demasiado tenue, por lo que mueve la lámpara a la mitad de la distancia. ¿Cuánto más ilumina la luz al libro?

30. Tiene sentido afirmar que cuanto mayor sea el área de una región, es mayor el número de especies que habitan en la región. Muchos ecólogos han modelado la relación de especies de la zona con una función potencia y, en particular, el número de especies S de murciélagos que habitan en cuevas en México ha estado relacionado con el área superficial A de las cuevas por la ecuación $S = 0.7A^{0.3}$.

(a) La cueva llamada *Misión imposible*, situada cerca de Puebla, México, tiene una superficie de $A = 60$ m^2. ¿Cuántas especies de murciélagos esperaría encontrar en esa cueva?

(b) Si descubre que cuatro especies de murciélagos viven en una cueva, estime el área de la cueva.

31. La tabla muestra el número N de especies de reptiles y anfibios que habitan en las islas del Caribe y el área A de la isla en millas cuadradas.

(a) Utilice una función potencia para modelar N como una función de A.

(b) La isla caribeña de Dominica tiene un área 291 mi^2. ¿Cuántas especies de reptiles y anfibios esperaría encontrar en Dominica?

Isla	A	N
Saba	4	5
Monserrat	40	9
Puerto Rico	3,459	40
Jamaica	4,411	39
Española	29,418	84
Cuba	44,218	76

32. La tabla muestra las distancias d (promedio) del Sol (tomando la unidad de medida como la distancia entre la Tierra y el Sol) y sus períodos T (tiempo de revolución en años).

(a) Ajuste un modelo potencia para los datos.

(b) La tercera ley de movimiento planetario de Kepler afirma que "el cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol". ¿El modelo del inciso (a) corrobora la tercera ley de Kepler?

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784

1.3 Funciones nuevas a partir de funciones previas

Esta sección empieza con las funciones básicas discutidas en la sección 1.2 para obtener funciones nuevas por medio del desplazamiento, estiramiento y reflexión de las gráficas. También se muestra cómo combinar pares de funciones utilizando operaciones aritméticas estándar y composición.

Transformaciones de funciones

Mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, se pueden obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto dará la posibilidad de esbozar las gráficas de muchas funciones rápidamente a mano. También permitirá expresar ecuaciones para las gráficas dadas.

Considere primero las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada verticalmente hacia arriba una distancia de c unidades (ya que cada coordenada y se incrementa por el mismo número c). Por otro

lado, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Por tanto, la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$, desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$

$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$

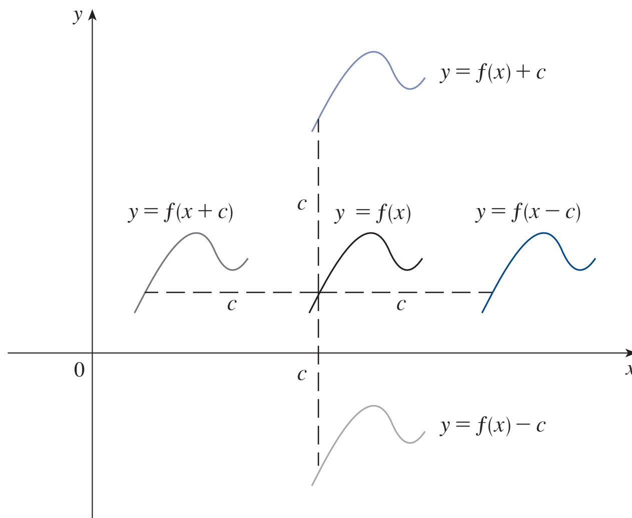


FIGURA 1 Traslación de la gráfica de f

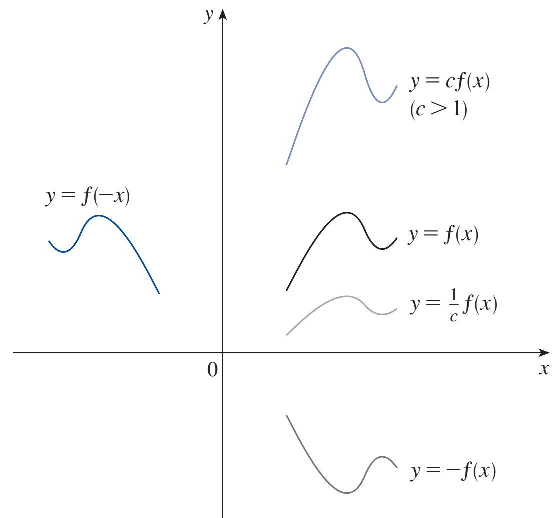


FIGURA 2 Estiramiento y reflexión de la gráfica de f

Ahora considere las transformaciones por **estiramiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ alargada verticalmente por un factor de c (porque cada coordenada y se multiplica por el número c). La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada en relación con el eje x porque el punto (x, y) se reemplaza por el punto $(x, -y)$. (Véanse la figura 2 y el siguiente cuadro, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

Alargamientos y reflexiones vertical y horizontal Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c

$y = (1/c)f(x)$, comprima verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c

$y = f(cx)$, comprima horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c

$y = -f(x/c)$, alargue horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c

$y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje x

$y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ a través del eje y

La figura 3 ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2 \cos x$ multiplique la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga verticalmente por un factor de 2.

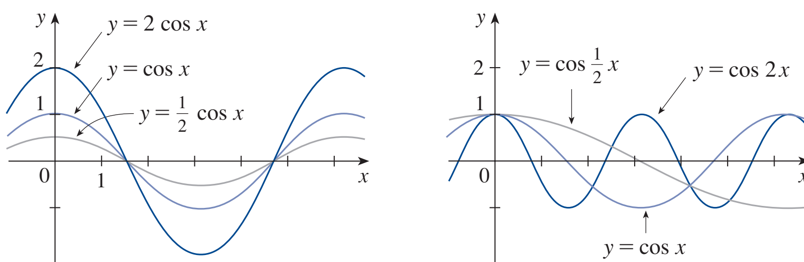
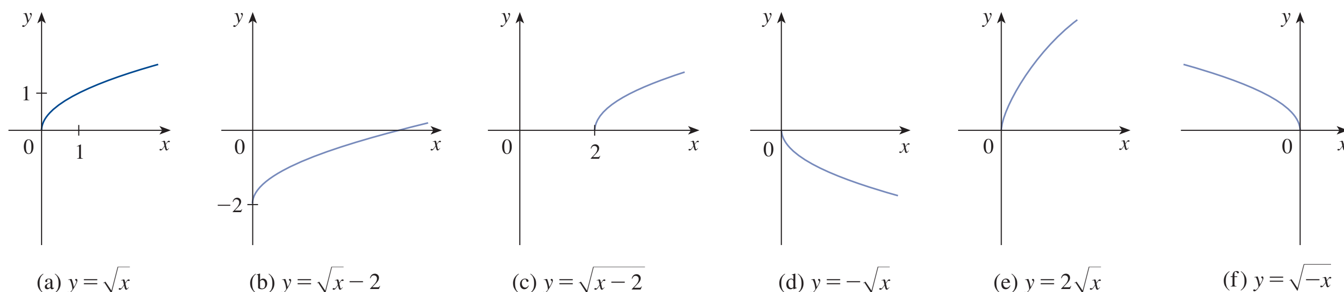


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use transformaciones para trazar la gráfica de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN La gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, obtenida de la figura 1.2.13(a) se muestra en la figura 4(a). En otras partes de la figura se ha trazado $y = \sqrt{x} - 2$ desplazándola 2 unidades hacia abajo, $y = \sqrt{x - 2}$ por desplazamiento de 2 unidades a la derecha, $y = -\sqrt{x}$ reflejando a través del eje x, $y = 2\sqrt{x}$ estirando verticalmente por un factor de 2, y $y = \sqrt{-x}$ reflejando a través del eje y.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x - 2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURA 4 ■

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Completando el cuadrado, se escribe la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto significa que se obtiene la gráfica deseada iniciando con la parábola $y = x^2$ y desplazándola 3 unidades a la izquierda y, luego 1 unidad hacia arriba (véase la figura 5).

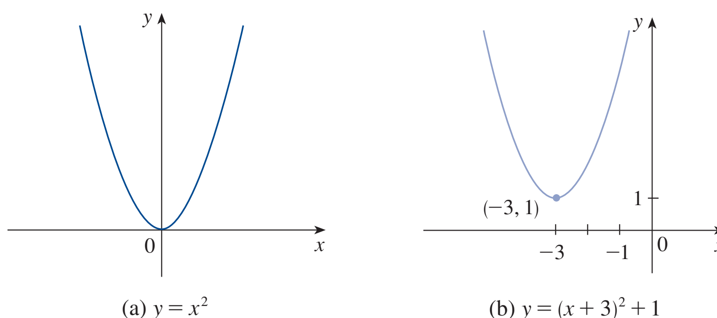


FIGURA 5 (a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$ ■

EJEMPLO 3 Trace las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = \text{sen } 2x$ (b) $y = 1 - \text{sen } x$

SOLUCIÓN

(a) Se obtiene la gráfica de $y = \text{sen } 2x$ comprimiendo horizontalmente a $y = \text{sen } x$ por un factor de 2 (véanse las figuras 6 y 7). Por tanto, considerando que el período de $y = \text{sen } x$ es 2π, el período de $y = \text{sen } 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

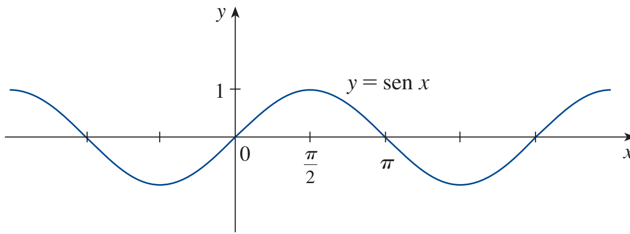


FIGURA 6

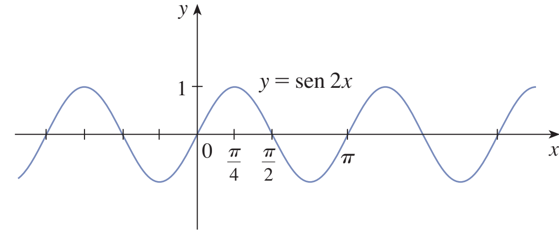


FIGURA 7

(b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \text{sen } x$, se empieza de nuevo con $y = \text{sen } x$. Se refleja a través del eje x para obtener la gráfica de $y = -\text{sen } x$, luego se desplaza 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \text{sen } x$ (véase la figura 8).

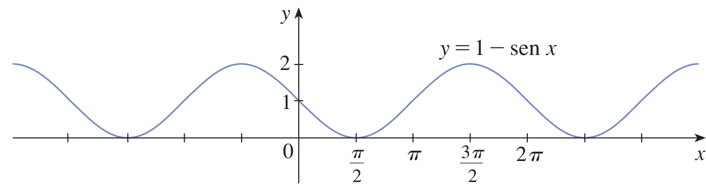


FIGURA 8

■

EJEMPLO 4 La figura 9 muestra gráficas del número de horas de luz natural como funciones de la época del año en varias latitudes. Dado que Ankara, Turquía, se encuentra a una latitud de aproximadamente 40 °N, determine una función que modele la longitud del día en Ankara.

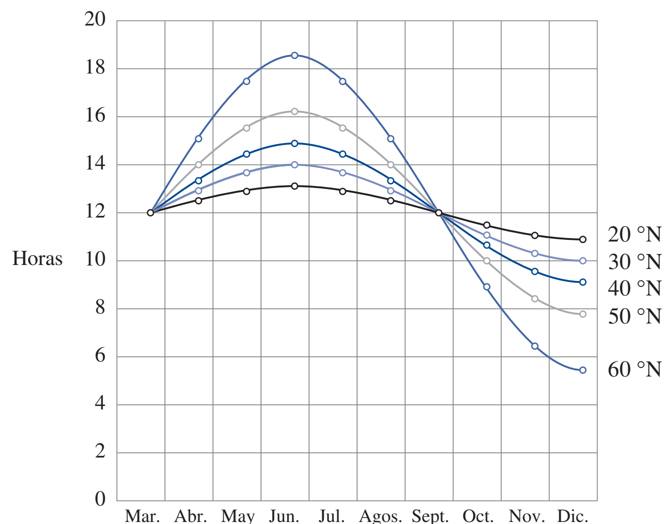


FIGURA 9

Gráfica de la duración de la luz del día del 21 de marzo al 21 de diciembre en diferentes latitudes

Fuente: adaptado de L. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York: Silver, Burdett, 1935), 40.

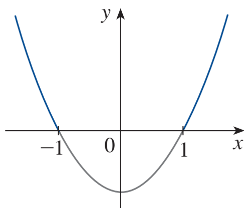
SOLUCIÓN Observe que cada curva se parece a una función seno desplazada y alargada. Al ver la curva respectiva se tiene que, en la latitud de Ankara, la luz de día dura unas 14.8 horas el 21 de junio y 9.2 horas el 21 de diciembre, por lo que la amplitud de la curva (el factor por el cual se tiene que alargar verticalmente la curva seno) es $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

¿Por cuál factor se necesita alargar horizontalmente la curva seno si se mide el tiempo t en días? Como hay aproximadamente 365 días en un año, el período del modelo debe ser 365. Pero el período de $y = \operatorname{sen} t$ es 2π, por lo que el factor de alargamiento horizontal es $2\pi/365$.

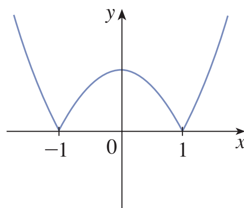
También se ve que la curva comienza su ciclo el 21 de marzo, el día 80 del año, así que se tiene que desplazar la curva 80 unidades a la derecha. Además, debe desplazarla 12 unidades hacia arriba. Por tanto, se modela la duración del día en Ankara el t-ésimo día del año por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$ ■

Otra transformación de cierto interés se obtiene tomando el *valor absoluto* de una función. Si $y = |f(x)|$ entonces, de acuerdo con la definición de valor absoluto, $y = f(x)$ cuando $f(x) \geqslant 0$ y $y = -f(x)$ cuando $f(x) < 0$. Esto dice cómo obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$: la parte de la gráfica que se encuentra arriba del eje x sigue siendo la misma; la parte que se encuentra debajo del eje x se refleja a través de este eje.



(a) $y = x^2 - 1$



(b) $y = |x^2 - 1|$

FIGURA 10

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN En primer lugar, se grafica la parábola $y = x^2 - 1$ en la figura 10(a), desplazando verticalmente 1 unidad hacia abajo la parábola $y = x^2$. Se ve que la gráfica se encuentra por debajo del eje x cuando: $-1 < x < 1$, por lo que se refleja esa parte de la gráfica respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ en la figura 10(b). ■

Combinación de funciones

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar funciones nuevas $f + g$, $f - g$, fg y f/g en forma similar a la suma, resta, multiplicación y división de números reales. La suma y diferencia de funciones se definen mediante:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el dominio de g es B, el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque $f(x)$ y $g(x)$ tienen que estar definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, por lo que el dominio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$.

Del mismo modo, se definen el producto y cociente de funciones por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es $A \cap B$, pero no se puede dividir entre 0, por lo que el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, entonces el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$, o bien $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Hay otra forma de combinar dos funciones para obtener una función nueva. Por ejemplo, suponga que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y es una función de u y u es, a su vez, una función de x, se concluye que, finalmente, y es una función de x.

Se puede calcular esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Este procedimiento se denomina *composición* porque la función nueva se compone de las dos funciones dadas f y g.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, se empieza con un número x en el dominio de g y se calcula su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces se puede calcular el valor de $f(g(x))$. Observe que la salida de una función se usa como entrada para la próxima función. El resultado es una función nueva $h(x) = f(g(x))$ obtenida mediante la sustitución de g en f y se llama la composición (o compuesta) de f y g, y se denota por $f \circ g$ ("f círculo g").

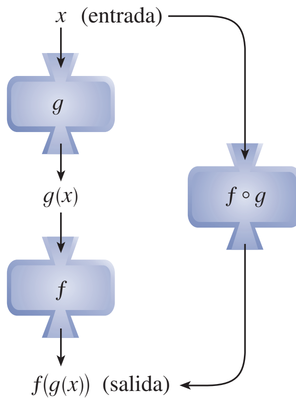


FIGURA 11
La máquina $f \circ g$ se compone de la máquina g (primero) y luego de la máquina f.

Definición Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también llamada la composición de f y g) se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La figura 11 muestra $f \circ g$ en términos de máquinas.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre la composición de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Se tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

■

NOTA En el ejemplo 6 puede verse que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y, luego se aplica f. En el ejemplo 6, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y, *luego* eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *primero* se eleva al cuadrado y, *luego* resta 3.

EJEMPLO 7 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre cada una de las funciones siguientes y su dominio.

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Si $0 \leq a \leq b$, entonces $a^2 \leq b^2$.

Para que $\sqrt{x}$ esté definida debe cumplirse con que $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debe cumplirse con que $2 - \sqrt{x} \geq 0$, esto es, $\sqrt{x} \leq 2$ o $x \leq 4$. Así que $0 \leq x \leq 4$, por lo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$$

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geqslant 0$ y $2 - \sqrt{2-x} \geqslant 0$. La primera desigualdad significa $x \leqslant 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2-x} \leqslant 2$, o $2 - x \leqslant 4$ o $x \geqslant -2$. Así, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, por lo que el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$. ■

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la composición $f \circ g \circ h$ se encuentra aplicando primero h, después g y, por último, f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 8 Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x+1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x+3)) \\ &= f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}\end{aligned}$$ ■

Hasta ahora ha utilizado la composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en cálculo es útil a menudo ser capaz de descomponer una función compleja en otras más simples, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x+9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x+9)]^2$, la fórmula para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, finalmente, eleve al cuadrado. Así, se tiene

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

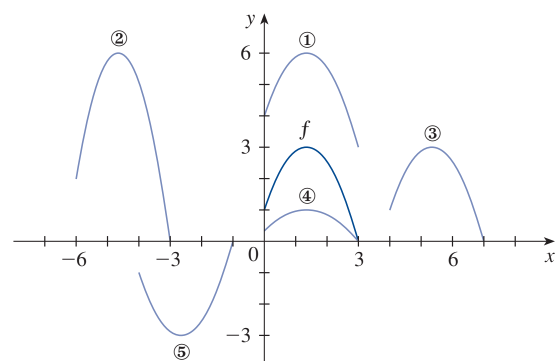
Entonces $$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x+9)) = f(\cos(x+9)) \\ &= [\cos(x+9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$ ■

1.3 EJERCICIOS

1. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica f como sigue:
(a) Desplazar 3 unidades hacia arriba.
(b) Desplazar 3 unidades hacia abajo.
(c) Desplazar 3 unidades hacia la derecha.
(d) Desplazar 3 unidades hacia la izquierda.
(e) Reflejar respecto al eje x.
(f) Reflejar respecto al eje y.
(g) Alargada verticalmente por un factor de 3.
(h) Contraída verticalmente por un factor de 3.

2. Explique cómo se obtiene cada gráfica a partir de la gráfica de $y = f(x)$.
(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x+8)$
(c) $y = 8f(x)$ (d) $y = f(8x)$
(e) $y = -f(x) - 1$ (f) $y = 8f\left(\frac{1}{8}x\right)$

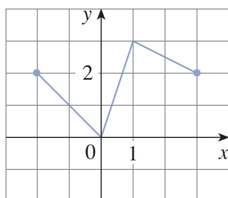
3. Se da la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada ecuación con su gráfica y argumente sus elecciones.
(a) $y = f(x-4)$ (b) $y = f(x) + 3$
(c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x+4)$
(e) $y = 2f(x+6)$



4. Se da la gráfica de f. Trace las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = f(x) - 3$ (b) $y = f(x + 1)$

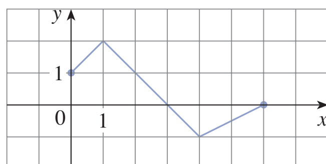
(c) $y = \frac{1}{2}f(x)$ (d) $y = -f(x)$



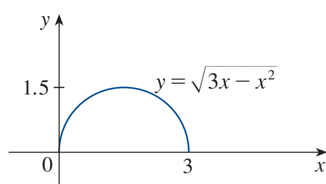
5. Se da la gráfica de f. Utilícela para trazar las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

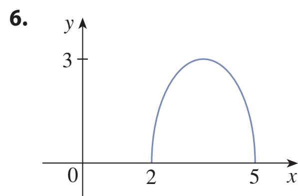
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



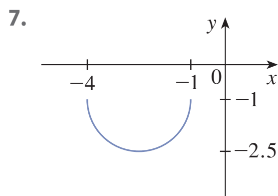
6–7 La gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$ está dada. Utilice transformaciones para crear una función cuya gráfica es como se muestra.



6.



7.



8. (a) ¿Cómo es la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ en relación con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$? Utilice su respuesta y la figura 6 para trazar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$.

(b) ¿Cómo es la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ en relación con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Utilice su respuesta y la figura 4(a) para trazar la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Grafique la función a mano, sin trazar puntos, sino empezando con la gráfica de una de las funciones esenciales de la sección 1.2 y después aplique las transformaciones apropiadas.

9. $y = -x^2$ **10.** $y = (x - 3)^2$

11. $y = x^3 + 1$ **12.** $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

13. $y = 2 \cos 3x$ **14.** $y = 2\sqrt{x + 1}$

15. $y = x^2 - 4x + 5$ **16.** $y = 1 + \operatorname{sen} \pi x$

17. $y = 2 - \sqrt{x}$ **18.** $y = 3 - 2 \cos x$

19. $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **20.** $y = \dfrac{2}{x} - 2$

21. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ **22.** $y = 1 - 2\sqrt{x + 3}$

23. $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$ **24.** $y = |\cos \pi x|$

25. La ciudad de Nueva Delhi, India, se encuentra en la latitud 30 ºN. Utilice la figura 9 para encontrar una función que modele el número de horas de luz diurna en Nueva Delhi como una función de la época del año. Para comprobar la exactitud de su modelo, utilice el hecho de que el 31 de marzo el Sol sale a las 6:13 y se pone a las 18:39 en esta ciudad.

26. Una estrella variable es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye alternándose. Para la estrella variable más visible, Delta Cephei, el tiempo transcurrido entre períodos de brillo máximo es de 5.4 días, el brillo promedio (o magnitud) de la estrella es 4.0, y su brillo varía en una magnitud de ± 0.35. Encuentre una función que modele el brillo de Delta Cephei, como una función del tiempo.

27. Algunas de las mareas más altas en el mundo ocurren en la bahía de Fundy en la costa atlántica de Canadá. En Hopewell Cape la profundidad del agua durante la marea baja es de 2.0 m y con la marea alta es de aproximadamente 12.0 m. El período natural de oscilación es de alrededor de 12 horas y el 30 de junio de 2009 la marea alta se produjo a las 6:45. Determine una función que implique la función de coseno que modele la profundidad $D(t)$ (en metros) en función del tiempo t (en horas después de la medianoche) en ese día.

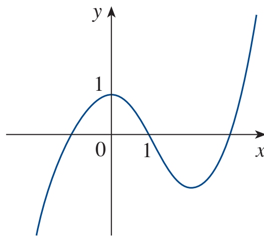
28. En un ciclo respiratorio normal, el volumen de aire que se mueve dentro y fuera de los pulmones es de unos 500 mL. Los volúmenes de reserva y de residuo de aire que permanecen en los pulmones ocupan aproximadamente 2000 mL y un solo ciclo respiratorio para un humano promedio toma alrededor de 4 segundos. Determine un modelo para el volumen total de aire $V(t)$ en los pulmones como una función del tiempo.

29. (a) ¿Cómo es la gráfica de $y = f(|x|)$ en relación con la gráfica de f?

(b) Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen} |x|$.

(c) Trace la gráfica de $y = \sqrt{|x|}$.

30. Utilice la gráfica de f para trazar la de $y = 1/f(x)$. ¿Qué características de f son las más importantes en el trazado de $y = 1/f(x)$? Explique cómo se utilizan.



31–32 Encuentre (a) $f + g$, (b) $f - g$, (c) fg y (d) f/g y establezca sus dominios.

31. $f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{3 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

33–38 Encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, y (d) $g \circ g$ y sus dominios.

33. $f(x) = 3x + 5, \quad g(x) = x^2 + x$

34. $f(x) = x^3 - 2, \quad g(x) = 1 - 4x$

35. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = 4x - 3$

36. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = x^2 + 1$

37. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

38. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

39–42 Encuentre $f \circ g \circ h$.

39. $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = x^2$

40. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = \sqrt{x}$

41. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

42. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

43–48 Exprese la función en la forma $f \circ g$.

43. $F(x) = (2x + x^2)^4$

44. $F(x) = \cos^2 x$

45. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

46. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

47. $v(t) = \sec(t^2)\tan(t^2)$

48. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

49–51 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

49. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

50. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

51. $S(t) = \operatorname{sen}^2(\cos t)$

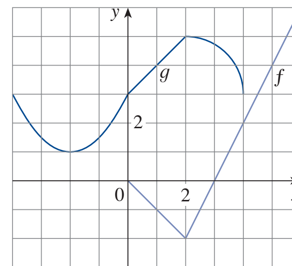
52. Utilice la tabla para evaluar cada una de las expresiones siguientes:

(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

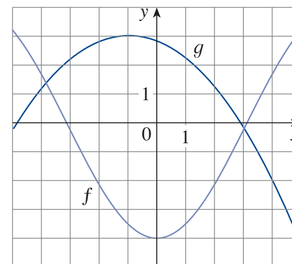
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

53. Utilice las gráficas dadas de f y g para evaluar cada una de las expresiones siguientes, o explique por qué no están definidas:

(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



54. Utilice las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Utilice estas estimaciones para trazar la gráfica $f \circ g$.



55. Una piedra se deja caer en un lago, creando una onda circular que viaja hacia fuera a una velocidad de 60 cm/s.
(a) Exprese el radio r del círculo en función del tiempo t (en segundos).
(b) Si A es el área de este círculo como una función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprétela.

56. Un globo esférico está siendo inflado de manera que su radio aumenta a razón de 2 cm/s.
(a) Exprese el radio r del globo en función del tiempo t (en segundos).
(b) Si V es el volumen del globo en función del radio, encuentre $V \circ r$ e interprétela.

57. Un barco se está moviendo con una velocidad de 30 km/h paralelamente a una costa recta. El barco está a 6 km de la costa y pasa por un faro al mediodía.

(a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco en función de la distancia d, que el barco ha recorrido desde el mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.
(b) Exprese d como una función de t, el tiempo transcurrido desde el mediodía; es decir, encuentre g de modo que $d = g(t)$.
(c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

58. Un avión está volando con una velocidad de 350 km/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el tiempo $t = 0$.
(a) Exprese la distancia horizontal d (en kilómetros) que el avión ha volado, en función de t.
(b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar en función de d.
(c) Utilice la composición para expresar s como una función de t.

59. La **función de Heaviside** H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Se utiliza en el estudio de circuitos eléctricos para representar aumentos repentinos de la corriente eléctrica, o de voltaje, cuando el interruptor se activa de manera instantánea.
(a) Trace la gráfica de la función de Heaviside.
(b) Dibuje la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 0$ y se aplican instantáneamente 120 volts al circuito. Escriba una fórmula para V(t) en términos de $H(t)$.
(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 5$ segundos y se aplican instantáneamente 240 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$. (Observe que a partir de $t = 5$ corresponde a una traslación.)

60. La función de Heaviside que se define en el ejercicio 59 también puede utilizarse para definir la **función rampa** $y = ctH(t)$, que representa un aumento gradual del voltaje o de corriente en un circuito.
(a) Trace la gráfica de la función rampa $y = tH(t)$.
(b) Dibuje la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 0$, y el voltaje se aumenta gradualmente a 120 volts durante un intervalo de tiempo de 60 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.
(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito cuando el interruptor se enciende en el tiempo $t = 7$ segundos y el voltaje se incrementa gradualmente a 100 volts durante un período de 25 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

61. Sean f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$. ¿Es $f \circ g$ también una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?

62. Si usted invierte x dólares al 4% de interés compuesto anualmente, entonces la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es $A(x) = 1.04x$. Encuentre $A \circ A$, $A \circ A \circ A$, y $A \circ A \circ A \circ A$. ¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para la composición de n copias de A.

63. (a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense qué operaciones tendrá que realizar en la fórmula para g para determinar la fórmula para h.)
(b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.

64. Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$, encuentre una función g tal que $g \circ f = h$.

65. Suponga que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función par?

66. Suponga que g es una función impar y sea $h = f \circ g$. ¿Es h siempre una función impar? ¿Qué pasa si f es impar? ¿Qué pasa si f es par?

1.4 Funciones exponenciales

En el apéndice G se presenta un enfoque alternativo a las funciones exponenciales y logarítmicas utilizando cálculo integral.

La función $f(x) = 2^x$ se llama una *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No se debe confundir con la función potencia $g(x) = x^2$, en la que la variable es la base.

En general, una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = b^x$$

donde b es una constante positiva. Recuerde el significado de esto.

Si $x = n$, un entero positivo, entonces

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}$$

Si $x = 0$, entonces $b^0 = 1$, y si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

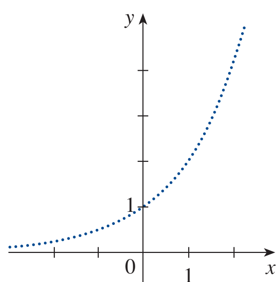


FIGURA 1
Representación de $y = 2^x$, x racional

Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son números enteros y $q > 0$, entonces

$$b^x = b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} = \left(\sqrt[q]{b}\right)^p$$

Pero ¿cuál es el significado de b^x si x es un número irracional? Por ejemplo, ¿qué significa $2^{\sqrt{3}}$ o 5^{π}?

Para ayudar a responder esta pregunta, se examina la gráfica de la función $y = 2^x$, donde x es racional. Una representación de esta gráfica se muestra en la figura 1. Se quiere ampliar el dominio de $y = 2^x$ para incluir tanto los números racionales como los irracionales.

Hay huecos en la gráfica de la figura 1 correspondientes a valores irracionales de x. Se quiere llenarlos mediante la definición de $f(x) = 2^x$, donde $x \in \mathbb{R}$, por lo que f es una función creciente. En particular, puesto que el número irracional $\sqrt{3}$ satisface

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

se debe tener

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

y se sabe lo que $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$ significan ya que 1.7 y 1.8 son números racionales. Del mismo modo, si usa mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, se obtienen mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{array}{rcl} 1.73 < \sqrt{3} < 1.74 & \Rightarrow & 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\ 1.732 < \sqrt{3} < 1.733 & \Rightarrow & 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\ 1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 & \Rightarrow & 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\ 1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 & \Rightarrow & 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \end{array}$$

Una demostración de este hecho se presenta en J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1981).

Puede demostrarse que hay exactamente un número que es mayor que todos los números

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

y menor que todos los números

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

Este número se define como $2^{\sqrt{3}}$ y, utilizando este procedimiento de aproximación, se puede calcular con una aproximación de seis decimales:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

De la misma manera, se puede definir 2^x (o b^x, si $b > 0$) donde x es cualquier número irracional. En la figura 2 se muestra cómo todos los huecos en la figura 1 han sido llenados para completar la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

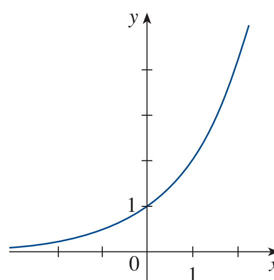


FIGURA 2
$y = 2^x$, para x real

Las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = b^x$ se muestran en la figura 3 para varios valores de la base b. Observe que todas estas gráficas pasan por el mismo punto (0, 1) porque $b^0 = 1$ para $b \neq 0$. Observe también que cuando la base b se hace más grande, la función exponencial crece más rápidamente (para $x > 0$).

Si $0 < b < 1$, entonces b^x se aproxima a 0 cuando x es muy grande. Si $b > 1$, entonces b^x se aproxima a 0 cuando x disminuye al tomar valores negativos. En ambos casos el eje x es una asíntota horizontal. Estas cuestiones se tratan en la sección 2.6.

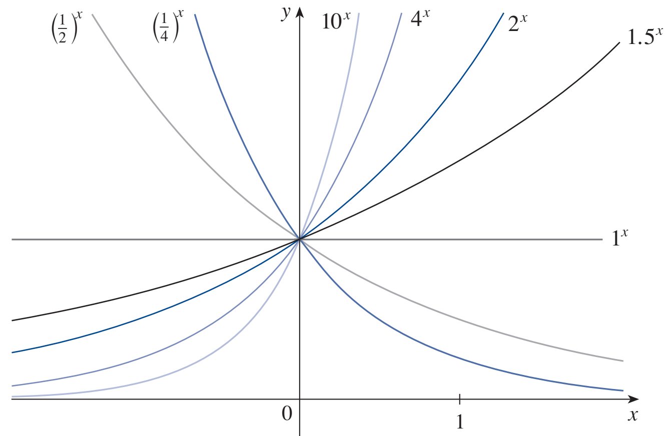


FIGURA 3

En la figura 3 puede verse que existen básicamente tres tipos de funciones exponenciales $y = b^x$. Si $0 < b < 1$, la función exponencial decrece; si $b = 1$, es una constante, y si $b > 1$, crece. Estos tres casos se ilustran en la figura 4. Observe que si $b \neq 1$, entonces la función exponencial $y = b^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Observe también que, dado que $(1/b)^x = 1/b^x = b^{-x}$, entonces la gráfica de $y = (1/b)^x$ es justamente la reflexión de la gráfica de $y = b^x$ a través del eje y.

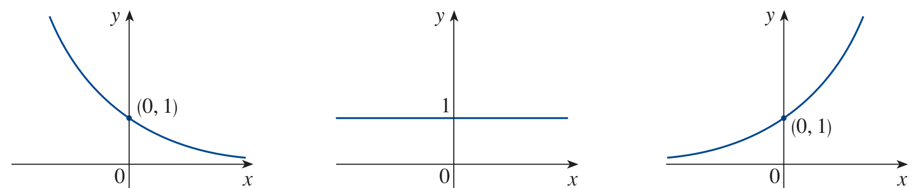


FIGURA 4 (a) $y = b^x$, $0 < b < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = b^x$, $b > 1$

Una de las razones de la importancia de la función exponencial se encuentra en las siguientes propiedades. Si x y y son números racionales, entonces estas leyes son bien conocidas del álgebra elemental. Puede demostrarse que seguirán siendo válidas para números reales x y y arbitrarios.

www.stewartcalculus.com
Para un repaso de las leyes de exponentes, haga clic en *Review of Algebra*.

Leyes de los exponentes Si a y b son números positivos, y los números x y y son reales cualesquiera, entonces

1. $b^{x+y} = b^x b^y$ **2.** $b^{x-y} = \dfrac{b^x}{b^y}$ **3.** $(b^x)^y = b^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función $y = 3 - 2^x$, determine su dominio y rango.

Para un repaso de la reflexión y desplazamiento de gráficas, consulte la sección 1.3.

SOLUCIÓN Primero refleje la gráfica de $y = 2^x$ [se muestran en las figuras 2 y 5(a)] a través del eje x para obtener la gráfica de $y = -2^x$ en la figura 5(b). Después se desplaza

3 unidades hacia arriba la gráfica de $y = -2^x$ para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ en la figura 5(c). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-\infty, 3)$.

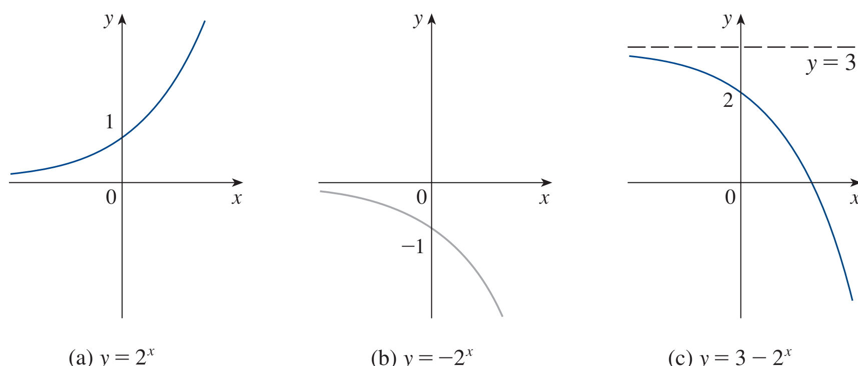


FIGURA 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$ ■

EJEMPLO 2 Utilice un dispositivo de graficación para comparar la función exponencial $f(x) = 2^x$ con la de la función potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

SOLUCIÓN La figura 6 muestra ambas funciones representadas gráficamente en el rectángulo de vista $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vea que las gráficas se intersecan tres veces, pero para $x > 4$ la gráfica de $f(x) = 2^x$ permanece por encima de la gráfica de $g(x) = x^2$. La figura 7 da una visión más global y muestra que para valores grandes de x, la función exponencial $y = 2^x$ crece mucho más rápidamente que la función potencia $y = x^2$.

En el ejemplo 2 se muestra que $y = 2^x$ aumenta más rápidamente que $y = x^2$. Para demostrar lo rápido que $f(x) = 2^x$ aumenta, realice el experimento mental siguiente. Suponga que se empieza con un trozo de papel de un décimo de milímetro de espesor y lo dobla por la mitad 50 veces. Cada vez que dobla el papel por la mitad, el grosor del papel se duplica, por lo que el grosor del papel resultante sería $2^{50}/10\,000$ m. ¿De qué grosor cree usted que es? ¡Más de cien millones de kilómetros!

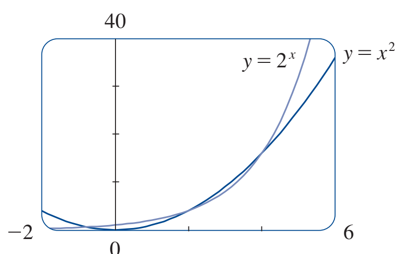


FIGURA 6

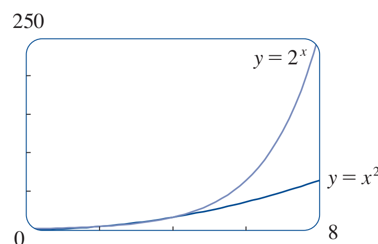


FIGURA 7 ■

Aplicaciones de las funciones exponenciales

La función exponencial ocurre con mucha frecuencia en los modelos matemáticos de las ciencias naturales y sociales. Aquí se indica brevemente cómo surge en la descripción del crecimiento de una población y decaimiento radioactivo. En capítulos posteriores se seguirán estas y otras aplicaciones en mayor detalle.

En primer lugar, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que por muestreo de la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1000$, entonces se tiene

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

De este patrón, parece ser que, en general:

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

Tabla 1

t (años desde 1900)	Población (millones)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870

Esta función de la población es un múltiplo constante de la función exponencial $y = 2^t$, por lo que muestra el rápido crecimiento observado en las figuras 2 y 7. En condiciones ideales (nutrientes, espacio ilimitado y la ausencia de enfermedad), este crecimiento exponencial es típico de lo que ocurre de hecho en la naturaleza.

¿Qué pasa con la población humana? La tabla 1 muestra los datos de la población del mundo en el siglo XX, y en la figura 8 se muestra la gráfica de dispersión correspondiente.

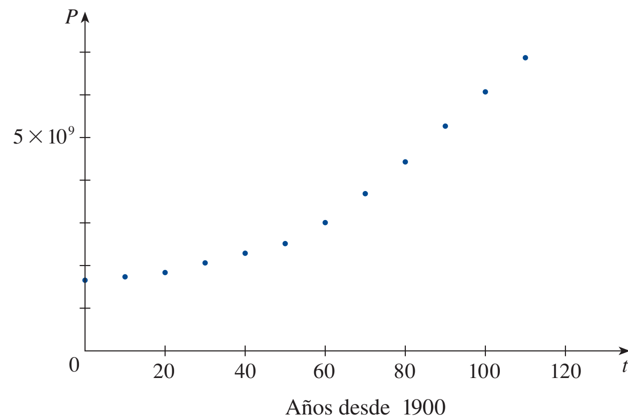


FIGURA 8
Gráfica de dispersión para el crecimiento de la población mundial

El patrón de los puntos de datos en la figura 8 sugiere un crecimiento exponencial, por eso se usa una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para aplicar el método de mínimos cuadrados y obtener el modelo exponencial

$$P = (1436.53) \cdot (1.01395)^t$$

donde $t = 0$ corresponde a 1900. La figura 9 muestra la gráfica de esta función exponencial junto con los puntos de datos originales. Se ve que la curva exponencial ajusta razonablemente bien en el conjunto de datos. El período de crecimiento relativamente lento de la población se explica por las dos Guerras Mundiales y la Gran Depresión de la década de 1930.

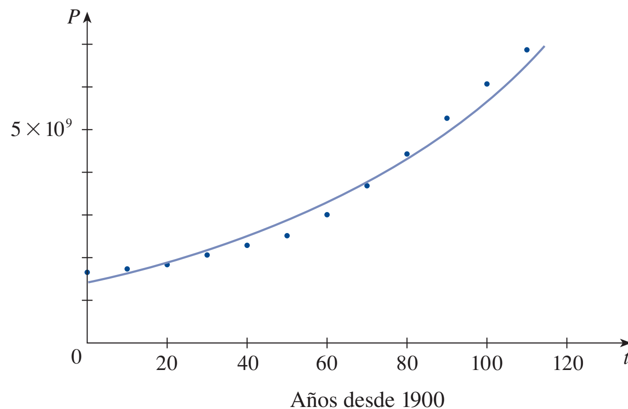


FIGURA 9
Modelo exponencial para el crecimiento de población

En 1995 apareció un documento detallando el efecto del inhibidor de proteasa ABT-538 en el virus de inmunodeficiencia humana VIH-1.[1] La tabla 2 muestra valores de plasma viral cargado $V(t)$ del paciente 303, medidos en copias/mL de ARN, t días después de que inició el tratamiento con ABT-538. En la figura 10 se muestra la correspondiente gráfica de dispersión.

Tabla 2

t (días)	$V(t)$
1	76.0
4	53.0
8	18.0
11	9.4
15	5.2
22	3.6

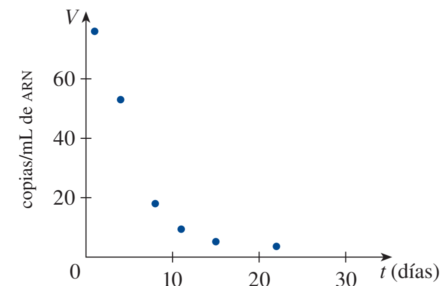


FIGURA 10 Plasma viral cargado de paciente 303

La disminución más dramática de la carga viral que se ve en la figura 10 recuerda las gráficas de la función exponencial $y = b^x$ en las figuras 3 y 4 para el caso donde la base b es menor de 1. Se modela la función $V(t)$ con una función exponencial. Usando una calculadora graficadora o una computadora para ajustar los datos en la tabla 2 con una función exponencial de la forma $y = a \cdot b^t$, se obtiene el modelo

$$V = 96.39785 \cdot (0.818656)^t$$

En la figura 11 se traza la gráfica de esta función exponencial con los puntos de datos y se ve que el modelo representa la carga viral razonablemente bien durante el primer mes de tratamiento.

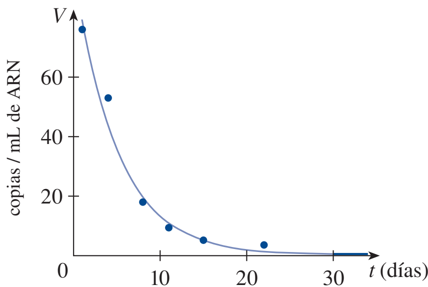


FIGURA 11
Modelo viral para la carga viral

Podría utilizar la gráfica de la figura 11 para estimar la **vida media** de V, es decir, el tiempo requerido para que la carga viral se reduzca a la mitad de su valor inicial (véase el ejercicio 33). En el ejemplo siguiente se da la vida media de un elemento radioactivo y se pide encontrar la masa de una muestra en cualquier momento.

EJEMPLO 3 La vida media del estroncio 90, ^{90}Sr, es 25 años. Esto significa que la mitad de cualquier cantidad dada de ^{90}Sr se desintegrará en 25 años.

(a) Si una muestra de ^{90}Sr tiene una masa de 24 mg, determine una expresión para la masa $m(t)$ que queda después de t años.

(b) Determine la masa restante después de 40 años, correcto al miligramo más cercano.

(c) Utilice un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de $m(t)$ y utilícela para estimar el tiempo requerido para que la masa se reduzca a 5 mg.

---

1. D. Ho *et al.*, "Rapid Turnover of Plasma Virions and CD4 Lymphocytes in HIV-1 Infection," *Nature* 373(1995): 123–126.

SOLUCIÓN

(a) La masa es inicialmente 24 mg y se reduce a la mitad durante cada período de 25 años, así

$$m(0) = 24$$

$$m(25) = \frac{1}{2}(24)$$

$$m(50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$$

$$m(100) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$$

De este patrón, se obtiene que la masa restante después de t años

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24 \cdot 2^{-t/25} = 24 \cdot (2^{-1/25})^t$$

Esta es una función exponencial con base $b = 2^{-1/25} = 1/2^{1/25}$.

(b) La masa que queda después de 40 años es

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-40/25} \approx 7.9 \text{ mg}$$

(c) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para ver la función $m(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$ en la figura 12. Observe también la gráfica de la recta $m = 5$ y utilice el cursor para estimar que $m(t) = 5$ cuando $t \approx 57$. Así, la masa de la muestra se reducirá a 5 mg después de 57 años. ■

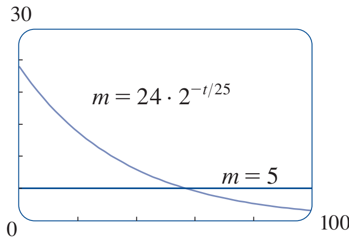


FIGURA 12

■ El número *e*

De todas las posibles bases para una función exponencial, hay una que es más conveniente para los fines del cálculo. La elección de una base b está influida por la forma en que la gráfica de $y = b^x$ cruza el eje y. Las figuras 13 y 14 muestran las rectas tangentes a las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto (0, 1). (Se definirán las rectas tangentes de manera precisa en la sección 2.7. Para los fines presentes, puede considerarse que la recta tangente a una gráfica exponencial en un punto es la recta que toca la gráfica solo en ese punto.) Si se miden las pendientes de estas rectas tangentes en (0, 1), se encuentra que $m \approx 0.7$ para $y = 2^x$ y $m \approx 1.1$ para $y = 3^x$.

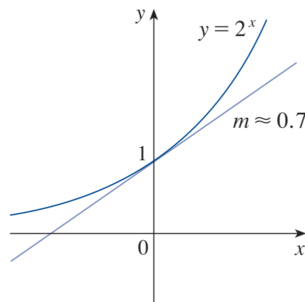


FIGURA 13

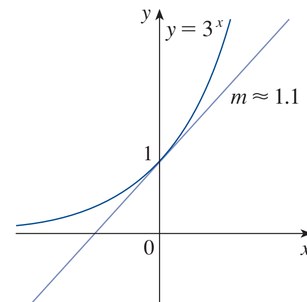


FIGURA 14

Resulta que, como se verá en el capítulo 3, algunas de las fórmulas del cálculo quedarán muy simplificadas si elige la base b para la que la pendiente de la recta tangente

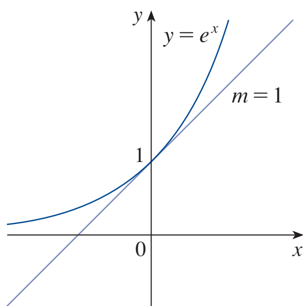


FIGURA 15
La función exponencial natural corta el eje y con una pendiente de 1.

TEC Module 1.4 le permite graficar funciones exponenciales con diversas bases y sus rectas tangentes para calcular más de cerca el valor de b para la cual la recta tangente tiene pendiente 1.

a $y = b^x$ en (0, 1) es *exactamente* 1. (Véase la figura 15.) De hecho, existe tal número y se denota con la letra e. (Esta notación fue elegida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.) En vista de las figuras 13 y 14, no causa ninguna sorpresa que el número e se encuentre entre 2 y 3 y que la gráfica de $y = e^x$ se encuentre entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Véase la figura 16.) En el capítulo 3 se verá que el valor de e, con una aproximación de cinco decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

A la función $f(x) = e^x$ se le llama **función exponencial natural.**

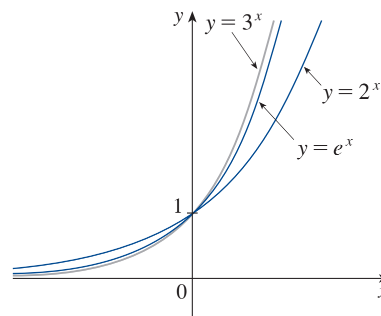
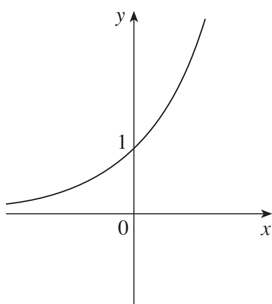


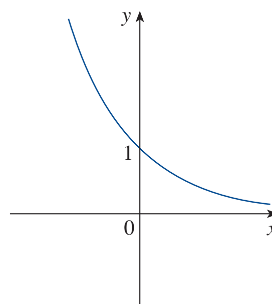
FIGURA 16

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y establezca el dominio y el rango.

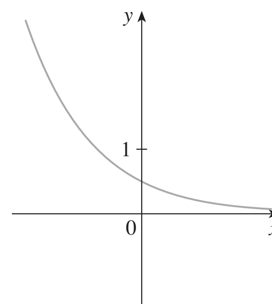
SOLUCIÓN Empiece con la gráfica de $y = e^x$ de las figuras 15 y 17(a) y refléjela a través del eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ en la figura 17(b). (Observe que la gráfica interseca el eje y con una pendiente de -1.) Entonces se comprime la gráfica verticalmente por un factor de dos para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en la figura 17(c). Por último, se desplazará la gráfica hacia abajo una unidad para obtener la gráfica deseada en la figura 17(d). El dominio es $\mathbb{R}$, y el rango es $(-1, \infty)$.



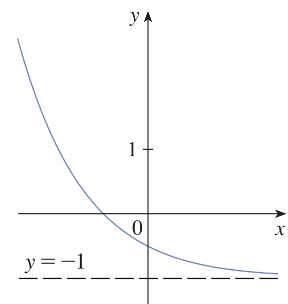
(a) $y = e^x$



(b) $y = e^{-x}$



(c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$



(d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 17

■

¿Hasta qué valor de x a la derecha de cero cree usted que se tendría que ir para que la altura de la gráfica de $y = e^x$ sea superior a un millón? En el ejemplo siguiente se muestra el rápido crecimiento de esta función proporcionando una respuesta que podría sorprenderle.

EJEMPLO 5 Utilice un dispositivo de graficación para encontrar los valores de x para los cuales $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUCIÓN En la figura 18 se ve la gráfica de la función $y = e^x$ y la recta horizontal $y = 1\,000\,000$. Se ve que estas curvas se intersecan cuando $x \approx 13.8$. Por tanto, $e^x > 10^6$ cuando $x > 13.8$. Tal vez le sorprenda que los valores de la función exponencial ya han superado un millón cuando x es solo 14. ■

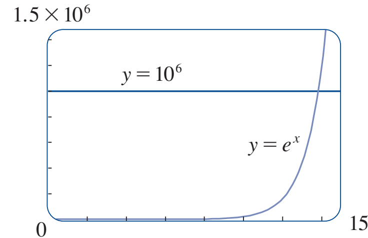


FIGURA 18

1.4 EJERCICIOS

1–4 Utilice las leyes de los exponentes para simplificar cada una de las expresiones siguientes:

1. (a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2. (a) $8^{4/3}$ (b) $x(3x^2)^3$

3. (a) $b^8(2b)^4$ (b) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

4. (a) $\dfrac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

5. (a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $b > 0$.
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) Si $b \neq 1$, ¿cuál es el rango de esta función?
(d) Dibuje la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada uno de los siguientes casos.
(i) $b > 1$
(ii) $b = 1$
(iii) $0 < b < 1$

6. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) ¿Cuál es un valor aproximado de e?
(c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

7–10 Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

7. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

8. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

9. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

10. $y = 0.9^x$, $y = 0.6^x$, $y = 0.3^x$, $y = 0.1^x$

11–16 Haga un trazo de la gráfica de la función. No utilice calculadora. Solo utilice las gráficas que se presentan en las figuras 3 y 13 y si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

11. $y = 4^x - 1$

12. $y = (0.5)^{x-1}$

13. $y = 10^{x+2}$

14. $y = (0.5)^x - 2$

15. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

16. $y = 2(1 - e^x)$

17. Comenzando con la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica que resulta de:
(a) desplazarla 2 unidades hacia abajo.
(b) desplazarla 2 unidades a la derecha.
(c) reflejarla con respecto al eje x.
(d) reflejarla con respecto al eje y.
(e) reflejarla con respecto al eje x y luego reflejarla con respecto al eje y.

18. Comenzando con la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica que resulta de:
(a) reflejarla con respecto a la recta $y = 4$.
(b) reflejarla con respecto a la recta $x = 2$.

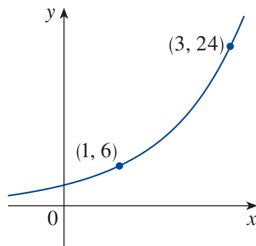
19–20 Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

19. (a) $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$ (b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{e^{\cos x}}$

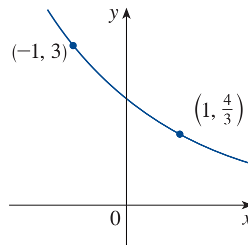
20. (a) $g(t) = \sqrt{10^t - 100}$ (b) $g(t) = \operatorname{sen}(e^t - 1)$

21–22 Encuentre la función exponencial $f(x) = Cb^x$ cuya gráfica está dada.

21.



22.



23. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

24. Suponga que se le ofrece trabajo por un mes. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago prefiere?

I. Un millón de dólares al final del mes.
II. Un centavo en el primer día del mes, dos centavos en el segundo día, cuatro centavos en el tercer día y, en general, 2^{n-1} centavos el enésimo día.

25. Suponga que las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ se dibujan en una cuadrícula de coordenadas con 1 cm como unidad de medida. Demuestre que, a una distancia de 1 m a la derecha del origen, la altura de la gráfica de f es de 100 m, pero la altura de la gráfica de g es aproximadamente 10^{25} km.

26. Compare las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5^x$ graficando ambas funciones en varios rectángulos de vista. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas con aproximación a un decimal. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es muy grande?

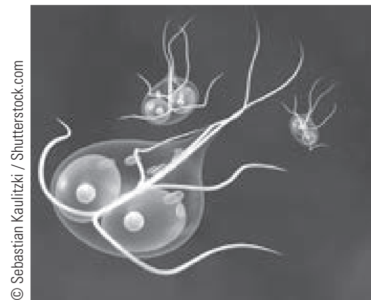
27. Compare las funciones $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = e^x$ al graficar a f y g en varios rectángulos de visión. ¿Cuándo la gráfica de g finalmente supera a la gráfica de f?

28. Utilice una gráfica para estimar los valores de x tales que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

29. Un investigador está tratando de determinar el tiempo de duplicación para una población de la bacteria *Giardia lamblia*. Comienza un cultivo en una solución nutritiva y estima los conteos de bacterias cada cuatro horas. Sus datos se muestran en la tabla

Tiempo (horas)	0	4	8	12	16	20	24
Conteo de bacterias (CFU/mL)	37	47	63	78	105	130	173

(a) Realice una gráfica de dispersión de los datos.
(b) Utilice una calculadora graficadora para encontrar una curva exponencial $f(t) = a \cdot b^t$ que modele la población de bacterias después de t horas.
(c) Trace la gráfica del modelo del inciso (b) junto con el diagrama de dispersión del inciso (a). Utilice la función TRACE para determinar cuánto tarda el conteo de bacterias en duplicarse.



G. lamblia

30. Un cultivo de bacterias comienza con 500 bacterias y duplica su tamaño cada media hora.
(a) ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?
(b) ¿Cuántas bacterias hay después de t horas?
(c) ¿Cuántas bacterias hay después de 40 minutos?

(d) Trace la gráfica de la función de la población y calcule el tiempo en que la población llega a 100 000.

31. La vida media del bismuto-210, ^{210}Bi, es 5 días.
(a) Si una muestra tiene una masa de 200 mg, determine la cantidad restante después de 15 días.
(b) Determine la cantidad restante después de t días.
(c) Calcule la cantidad restante después de 3 semanas.

(d) Utilice una gráfica para estimar el tiempo necesario para que la masa se reduzca a 1 mg.

32. Un isótopo de sodio, ^{24}Na, tiene una vida media de 15 horas. Una muestra de este isótopo tiene masa 2 g.
(a) Determine la cantidad restante después de 60 horas.
(b) Encuentre la cantidad restante después de t horas.
(c) Calcule la cantidad restante después de 4 días.

(d) Utilice una gráfica para estimar el tiempo requerido para que la masa se reduzca a 0.01 g.

33. Utilice la gráfica de V en la figura 11 para estimar la vida media de la carga viral del paciente 303 durante el primer mes de tratamiento.

34. Después de que el alcohol es absorbido por completo en el cuerpo, se metaboliza con una vida media aproximada de 1.5 horas. Suponga que usted ha bebido tres bebidas alcohólicas y una hora más tarde, a medianoche, su concentración de alcohol en la sangre (BAC) es 0.6 mg/mL.
(a) Determine un modelo de decaimiento exponencial para su BAC t horas después de la medianoche.

(b) Trace la gráfica de su BAC y utilice la gráfica para determinar cuándo su BAC es de 0.08 mg/mL.

Fuente: adaptado de P. Wilkinson *et al*., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State," *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5(1977): 207–224.

35. Utilice una calculadora gráfica con capacidad para calcular una regresión exponencial para modelar la población

del mundo con los datos de 1950 a 2010 de la tabla 1 en la página 49. Utilice el modelo para estimar la población en 1993 y para predecir la población en el año 2020.

36. La tabla muestra la población de Malasia, en millones, para los años 1950-2000. Utilice una calculadora graficadora con la capacidad de calcular una regresión exponencial para modelar la población de Malasia desde 1950. Utilice el modelo para estimar la población en 1975 y 2010, y para predecir la población en 2020.

Año	Población	Año	Población
1950	6.1	1980	13.8
1955	7.0	1985	15.7
1960	8.1	1990	17.8
1965	9.5	1995	20.4
1970	10.9	2000	23.0
1975	12.3		

37. Si usted traza la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

verá que f parece ser una función impar. Demuéstrelo.

38. Trace la gráfica de varios miembros de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando b cambia? ¿Cómo cambia la gráfica cuando a cambia?

1.5 Funciones inversas y logarítmicas

La tabla 1 muestra los datos de un experimento en el que un cultivo de bacterias inició con 100 de ellas en un medio limitado de nutrientes; el tamaño de la población de bacterias se registró a intervalos de una hora. El número N de bacterias es una función del tiempo t: $N = f(t)$.

Suponga, sin embargo, que la bióloga cambia su punto de vista y se interesa en el tiempo requerido para que la población alcance distintos niveles. En otras palabras, piensa en t como una función de N. Esta función se llama *función inversa* de f, denotada por f^{-1} y se lee "f inversa". Así, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo requerido para que el nivel de la población llegue a N. Los valores de f^{-1} pueden encontrarse mediante la lectura de la tabla 1 de derecha a izquierda o consultando la tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$ ya que $f(6) = 550$.

Tabla 1 N como función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población al tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

Tabla 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo en alcanzar las N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

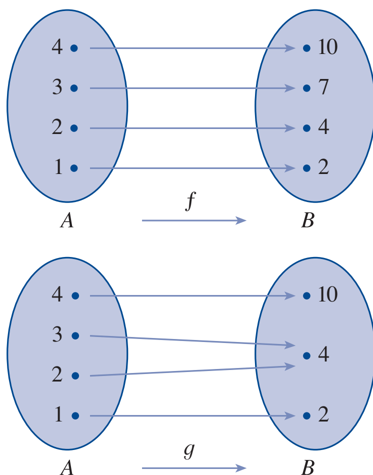


FIGURA 1
f es inyectiva; g no lo es.

No todas las funciones poseen inversa. Se compararán las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la figura 1. Observe que f nunca tiene el mismo valor dos veces (cualquier par de entradas en A tienen diferentes salidas), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma salida, 4). En símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

pero $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Las funciones que comparten esta propiedad con f se llaman *funciones inyectivas*.

En el lenguaje de entradas y salidas, esta definición indica que f es inyectiva si cada salida corresponde a una sola entrada.

1 Definición Una función f se llama ***función inyectiva*** si nunca toma el mismo valor dos veces; esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Si una recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces se ve en la figura 2 que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es inyectiva,

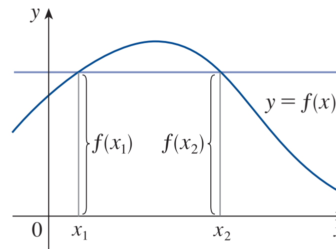


FIGURA 2
Esta función no es inyectiva ya que $f(x_1) = f(x_2)$.

Por tanto, con el siguiente método geométrico se puede determinar si una función es inyectiva.

Prueba de la recta horizontal Una función es inyectiva si y solo si no existe una recta horizontal que interseque su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 ¿Es la función $f(x) = x^3$ inyectiva?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es inyectiva.

SOLUCIÓN 2 De la figura 3 se observa que no existe recta horizontal que interseque a la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, f es inyectiva. ■

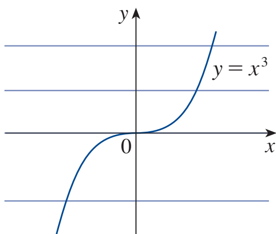


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es inyectiva.

EJEMPLO 2 ¿Es inyectiva la función $g(x) = x^2$?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es inyectiva, ya que, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

por lo que 1 y -1 tienen la misma salida.

SOLUCIÓN 2 De la figura 4 se observa que existen rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es inyectiva. ■

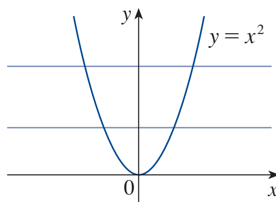


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ no es inyectiva.

Las funciones inyectivas son importantes porque son precisamente aquellas que poseen funciones inversas de acuerdo con la definición siguiente.

2 Definición Sea f una función inyectiva con dominio A y rango B. Entonces, la **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B.

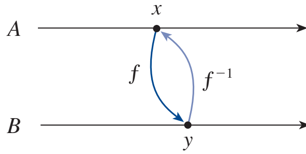


FIGURA 5

La definición dice que si f mapea x con y, entonces f^{-1} mapea de regreso y con x. (Si f no fuera inyectiva, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única). El diagrama de flechas en la figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Observe que

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ ya que si $y = x^3$, entonces

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

CUIDADO No cometa el error de pensar en -1 en f^{-1} como un exponente. Es decir,

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no} \text{ significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

Sin embargo, la función recíproca, $1/f(x)$, podría escribirse como $[f(x)]^{-1}$.

EJEMPLO 3 Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1}, se tiene

$$f^{-1}(7) = 3 \qquad \text{ya que} \qquad f(3) = 7$$
$$f^{-1}(5) = 1 \qquad \text{ya que} \qquad f(1) = 5$$
$$f^{-1}(-10) = 8 \qquad \text{ya que} \qquad f(8) = -10$$

El diagrama en la figura 6 aclara cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso. ■

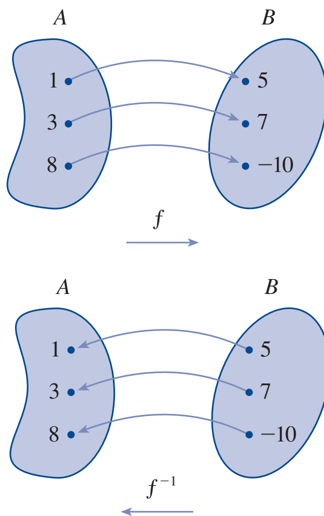


FIGURA 6
La función inversa invierte las salidas y las entradas.

La letra x es tradicionalmente utilizada como la variable independiente, así que cuando se concentre en f^{-1} en vez de f, usualmente se cambian los roles de x y y en la definición 2, y se escribe

3 $$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Al sustituir por y en la definición 2 y sustituyendo por x en (3), se obtienen las **ecuaciones de cancelación**:

4 $$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } B$$

La primera ecuación de cancelación indica que si se comienza con x, se aplica f y luego f^{-1}, se llega de regreso a x, donde se empezó (consulte el diagrama de máquinas en la figura 7). Así, f^{-1} deshace a f. La segunda ecuación indica que f deshace lo que hace f^{-1}.

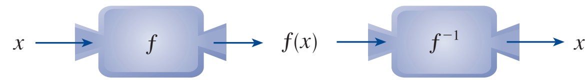


FIGURA 7

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y, por tanto, las ecuaciones de cancelación son

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones dicen simplemente que la función elevar al cubo y la función raíz cúbica se anulan mutuamente cuando se aplican una después de la otra.

Ahora vea cómo calcular funciones inversas. Si se tiene una función $y = f(x)$ y es capaz de resolver esta ecuación para x en términos de y, entonces, de acuerdo con la definición 2, debe obtener $x = f^{-1}(y)$. Si quiere llamar a la variable independiente x, intercambie x por y y llegará a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 Cómo encontrar la función inversa de una función *f* inyectiva

PASO 1 Escribir $y = f(x)$.

PASO 2 Resolver esta ecuación para x en términos de y (si es posible).

PASO 3 Para expresar f^{-1} en función de x, intercambiar x por y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 4 Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN De acuerdo con (5) empiece escribiendo

$$y = x^3 + 2$$

Después, despeje x:

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Por último, intercambie x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Por tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. ■

En el ejemplo 4, observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "elevar al cubo, luego sumar 2"; f^{-1} es la regla "Restar 2, luego sacar la raíz cúbica."

El principio de intercambio de x e y para encontrar la función inversa también da el método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Ya que $f(a) = b$ si y solo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y solo si el punto (b, a) está en la

gráfica de f^{-1}. Pero se obtiene el punto (b, a) a partir del punto (a, b) reflejando el segundo a través de la recta $y = x$. (Véase la figura 8.)

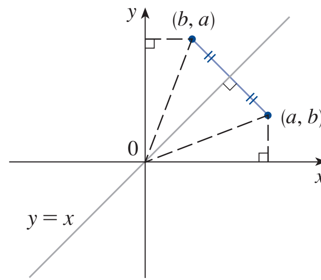


FIGURA 8

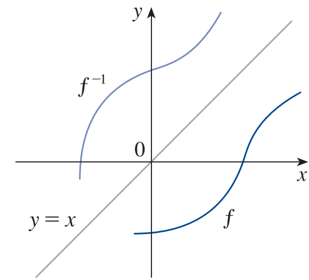


FIGURA 9

Por tanto, como se ejemplifica en la figura 9:

La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f a través de la recta $y = x$.

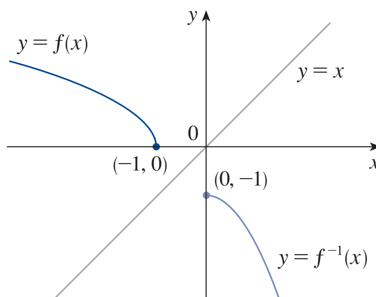


FIGURA 10

EJEMPLO 5 Trace las gráficas de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ y su función inversa utilizando el mismo eje de coordenadas.

SOLUCIÓN Primero trace la curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (la mitad superior de la parábola $y^2 = -1 - x$ o $x = -y^2 - 1$), luego refleje respecto a la recta $y = x$ para obtener la gráfica de f^{-1}. (Véase la figura 10.) Para comprobar nuestra gráfica, observe que la expresión para f^{-1} es $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $x \geqslant 0$. Por lo que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = -x^2 - 1$, y esto parece razonable a partir de la figura 10. ■

Funciones logarítmicas

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, la función exponencial $f(x) = b^x$ siempre es creciente o decreciente, así que es inyectiva por la prueba de la recta horizontal. Por tanto, tiene una función inversa f^{-1} que se llama la **función logarítmica con base *b*** y se denota por $\log_b$. Si se utiliza la formulación de una función inversa dada por (3)

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

entonces se tiene

6
$$\log_b x = y \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x$$

Así, si $x > 0$, entonces $\log_b x$ es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener x. Por ejemplo, el $\log_{10} 0.001 = -3$, ya que $10^{-3} = 0.001$.

Las ecuaciones de cancelación (4), cuando se aplican a las funciones $f(x) = b^x$ y $f^{-1}(x) = \log_b x$, se convierten en

7
$$\log_b(b^x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$
$$b^{\log_b x} = x \quad \text{para todo } x > 0$$

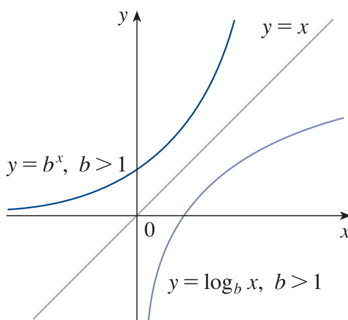


FIGURA 11

La función logarítmica $\log_b$ tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$. Su gráfica es la reflexión de la gráfica de $y = b^x$ a través de la recta $y = x$.

La figura 11 muestra el caso en que $b > 1$. (Las funciones logarítmicas más importantes tienen una base $b > 1$.) El hecho de que $y = b^x$ sea una función de rápido crecimiento para $x > 0$ se refleja en el hecho de que $y = \log_b x$ es una función de lento crecimiento para $x > 1$.

La figura 12 muestra las gráficas de $y = \log_b x$ con varios valores de la base $b > 1$. Puesto que $\log_b 1 = 0$, las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

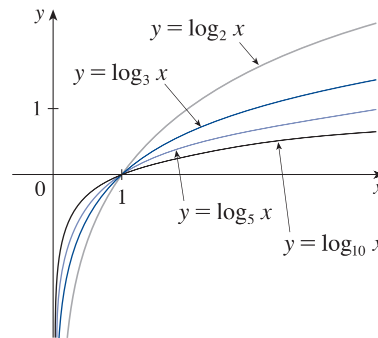


FIGURA 12

Las siguientes propiedades de las funciones logarítmicas se derivan de las correspondientes propiedades de las funciones exponenciales dadas en la sección 1.4.

Leyes de los logaritmos Si x e y son números positivos, entonces

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

2. $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3. $\log_b(x^r) = r\log_b x$ (donde r es cualquier número real)

EJEMPLO 6 Use las leyes de los logaritmos para evaluar $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUCIÓN Con la ley 2, se tiene

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$. ■

Notación de los logaritmos
En la mayoría de los libros de texto de cálculo y ciencias, así como en las calculadoras, se usa la notación $\ln x$ para el logaritmo natural de x, y $\log x$ para el "logaritmo común", $\log_{10} x$. Sin embargo, en la literatura matemática y científica más avanzada, así como en los lenguajes de programación de computadoras, la notación $\log x$ denota por lo general el logaritmo natural.

Logaritmos naturales

De todas las posibles bases b de los logaritmos, se verá en el capítulo 3 que la más conveniente es el número e, que se definió en la sección 1.4. Al logaritmo con base e se le llama **logaritmo natural** y tiene una notación especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Si se hace $b = e$ y se sustituye $\log_e$ con "ln" en (6) y (7), entonces las propiedades que definen a la función logaritmo natural se convierten en

8

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

9

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

En particular, si se hace $x = 1$, se obtiene

$$\ln e = 1$$

EJEMPLO 7 Encuentre x si $\ln x = 5$.

SOLUCIÓN 1 De (8) se ve que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Por tanto, $x = e^5$.

(Si tiene problemas para trabajar con la notación "ln", simplemente reemplácela por $\log_e$. Entonces la ecuación se convierte en $\log_e x = 5$; así que, por la definición de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUCIÓN 2 Comience con la ecuación

$$\ln x = 5$$

y aplique la función exponencial a ambos lados de la ecuación:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Pero la segunda ecuación de cancelación en (9) indica que $e^{\ln x} = x$. Por tanto, $x = e^5$. ■

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$.

SOLUCIÓN Se toman logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación y se usa (9):

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$
$$5 - 3x = \ln 10$$
$$3x = 5 - \ln 10$$
$$x = \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

Ya que el logaritmo natural se encuentra en las calculadoras científicas, se puede aproximar la solución; para cuatro decimales se tiene: $x \approx 0.8991$. ■

EJEMPLO 9 Exprese $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ con un solo logaritmo.

SOLUCIÓN Con las leyes 3 y 1 de los logaritmos, se tiene

$$\ln a + \tfrac{1}{2}\ln b = \ln a + \ln b^{1/2}$$
$$= \ln a + \ln\sqrt{b}$$
$$= \ln\left(a\sqrt{b}\right)$$ ■

La fórmula siguiente muestra que los logaritmos de cualquier base pueden expresarse en términos del logaritmo natural.

10 Fórmula para el cambio de base Para cualquier número positivo b ($b \neq 1$), se tiene

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_b x$. Entonces, a partir de (6), se tiene $b^y = x$. Tomando logaritmos naturales de ambos lados de esta ecuación, se obtiene $y \ln b = \ln x$. Por tanto,

$$y = \frac{\ln x}{\ln b}$$ ■

Las calculadoras científicas tienen un comando para los logaritmos naturales, por lo que la fórmula 10 permite utilizar una calculadora para calcular un logaritmo de cualquier base (como se muestra en el siguiente ejemplo). Del mismo modo, la fórmula 10 permite graficar cualquier función logarítmica en una calculadora graficadora o computadora (véanse los ejercicios 43 y 44).

EJEMPLO 10 Evalúe $\log_8 5$ con una precisión de seis decimales.

SOLUCIÓN La fórmula 10 da

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$ ■

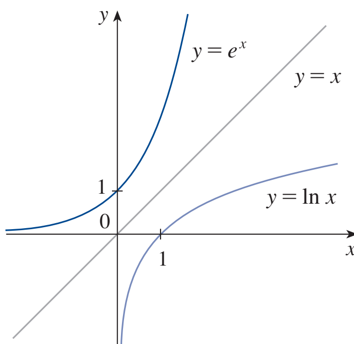


FIGURA 13
La gráfica de $y = \ln x$ es la reflexión de la gráfica $y = e^x$ sobre la recta $y = x$.

■ Gráfica y crecimiento del logaritmo natural

Las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función logaritmo natural, se muestran en la figura 13. Debido a que la curva $y = e^x$ cruza el eje y con una pendiente de 1, se deduce que la curva reflejada $y = \ln x$ cruza el eje x con una pendiente de 1.

Al igual que todas las demás funciones logarítmicas con base mayor que 1, el logaritmo natural es una función creciente definida en $(0, \infty)$, y el eje y es una asíntota vertical. (Esto significa que los valores de $\ln x$ son números negativos cada vez más grandes cuando x se aproxima a 0.)

EJEMPLO 11 Trace la gráfica de la función $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUCIÓN Empiece con la gráfica de $y = \ln x$ como se indica en la figura 13. Usando las transformaciones de la sección 1.3, desplácela 2 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $y = \ln (x - 2)$ y luego desplácela una unidad hacia abajo para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Véase la figura 14.)

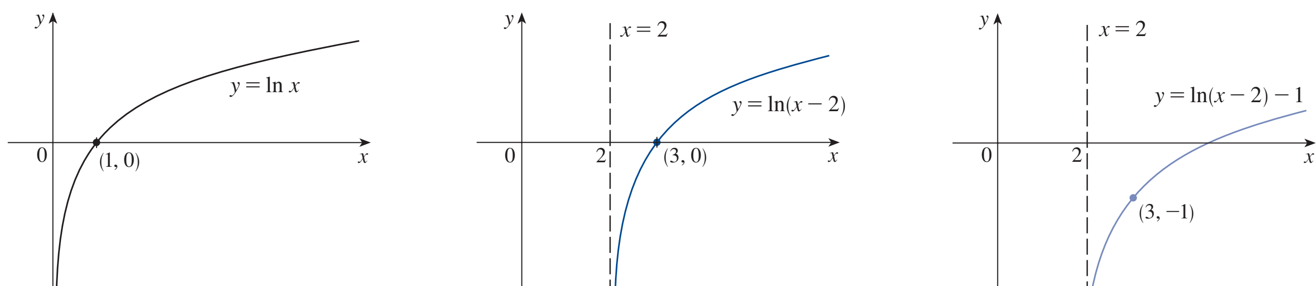


FIGURA 14 ■

A pesar de que $\ln x$ es una función creciente, su crecimiento es muy lento cuando $x > 1$. De hecho, $\ln x$ crece más lentamente que cualquier potencia positiva de x. Para ilustrar este hecho, se comparan los valores aproximados de las funciones $y = \ln x$ y $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ en la tabla siguiente y se muestran sus gráficas en las figuras 15 y 16. Usted puede ver que en un principio las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ crecen a un ritmo comparable, pero al final la función raíz supera con creces al logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

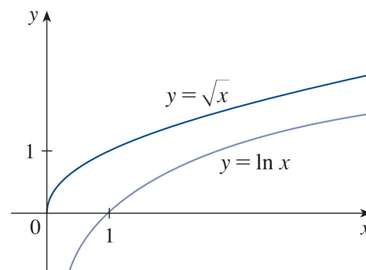


FIGURA 15

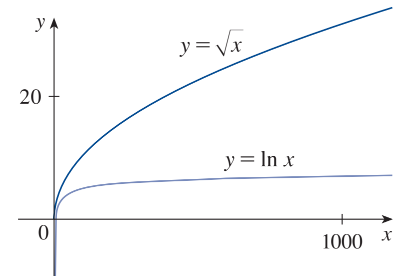


FIGURA 16

Funciones trigonométricas inversas

Cuando se trata de encontrar las funciones trigonométricas inversas, hay una pequeña dificultad: debido a que las funciones trigonométricas no son inyectivas, no tienen funciones inversas. La dificultad se supera restringiendo los dominios de estas funciones para que sean inyectivas.

Puede verse en la figura 17 que la función seno, $y = \operatorname{sen} x$, no es inyectiva (utilice la prueba de la recta horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, es inyectiva (véase la figura 18). La función inversa de la función seno restringida f existe y se denota por sen^{-1} o arcsen. Se llama **función seno inverso** o **función arco seno**.

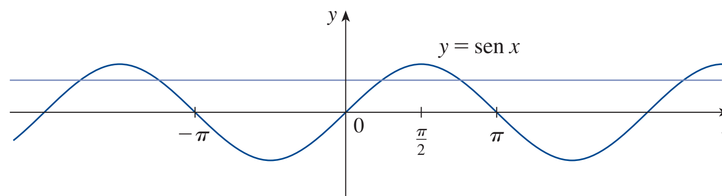


FIGURA 17

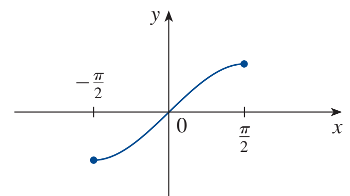


FIGURA 18
$y = \operatorname{sen} x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Dado que la definición de una función inversa indica que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

se tiene

$$\text{sen}^{-1}x = y \iff \text{sen } y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

⊘ $\text{sen}^{-1}x \neq \dfrac{1}{\text{sen } x}$

Por tanto, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

EJEMPLO 12 Evalúe (a) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y (b) $\tan\left(\text{arcsen } \frac{1}{3}\right)$.

SOLUCIÓN

(a) Se tiene que

$$\text{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

porque $\text{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

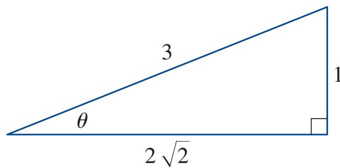


FIGURA 19

(b) Sea $\theta = \text{arcsen } \frac{1}{3}$, por lo que el $\text{sen } \theta = \frac{1}{3}$. Entonces, se puede dibujar un triángulo rectángulo con un ángulo θ como en la figura 19 y deducir por el teorema de Pitágoras que el tercer lado del triángulo tiene una longitud de $\sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. Esto permite leer del triángulo que

$$\tan\left(\text{arcsen } \tfrac{1}{3}\right) = \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

■

Las ecuaciones de cancelación para las funciones inversas resultan ser, en este caso,

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

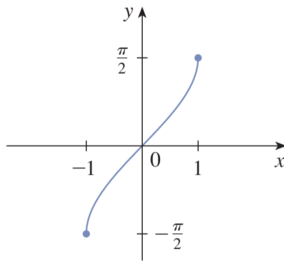


FIGURA 20
$y = \text{sen}^{-1}\, x = \text{arcsen } x$

La función inversa del seno, sen^{-1}, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$, y su gráfica, que se muestra en la figura 20, se obtiene a partir de la función seno restringido (figura 18), mediante la reflexión a través de la recta $y = x$.

La **función coseno inverso** se maneja en forma similar. La función coseno restringida $f(x) = \cos x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, es inyectiva (figura 21) y, por tanto, tiene una función inversa denotada por $\cos^{-1}$ o arccos.

$$\cos^{-1}x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

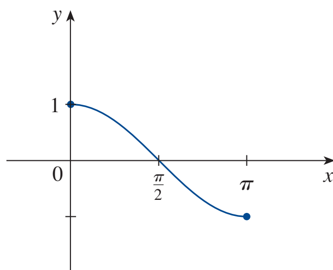


FIGURA 21
$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

Las ecuaciones de cancelación son

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\cos(\cos^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

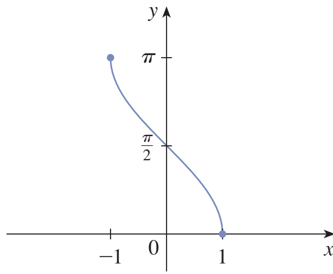


FIGURA 22
$y = \cos^{-1}x = \arccos x$

La función coseno inverso, $\cos^{-1}$, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$. Su gráfica se muestra en la figura 22.

La función tangente puede hacerse inyectiva mediante la restricción de que el intervalo sea $(-\pi/2, \pi/2)$. Así, la **función tangente inversa** se define como la inversa de la función $f(x) = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Véase la figura 23), y se denota por $\tan^{-1}$ o arctan.

$$\tan^{-1}x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

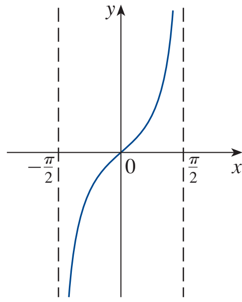


FIGURA 23
$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 13 Simplifique la expresión $\cos(\tan^{-1}x)$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \tan^{-1}x$. Entonces $\tan y = x$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Se quiere encontrar $\cos y$, pero, ya que $\tan y$ es conocida, es más fácil encontrar primero $\sec y$:

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad (\text{ya que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2)$$

Así
$$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

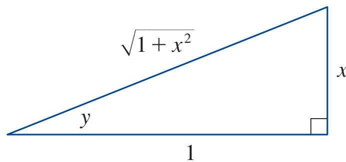


FIGURA 24

SOLUCIÓN 2 En lugar de utilizar las identidades trigonométricas como en la solución 1, es quizá más fácil usar un diagrama. Si $y = \tan^{-1}x$, entonces $\tan y = x$, y se puede leer de la figura 24 (que ilustra el caso $y > 0$) que

$$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$ ■

La función tangente inversa, $\tan^{-1} = \arctan$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$. Su gráfica se muestra en la figura 25.

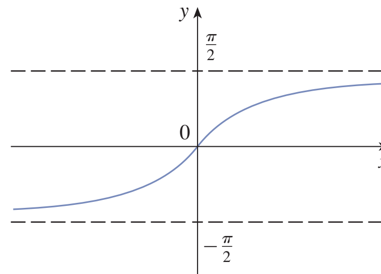


FIGURA 25
$y = \tan^{-1}x = \arctan x$

Se sabe que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan. Dado que la gráfica de $\tan^{-1}$ se obtiene reflejando la gráfica de la función tangente restringida, respecto a la recta $y = x$, se deduce que las rectas $y = \pi/2$ y $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de $\tan^{-1}$.

El resto de las funciones trigonométricas inversas no se utilizan con tanta frecuencia y se resumen aquí.

11
$$y = \csc^{-1}x \ \left(|x| \geqslant 1\right) \iff \csc y = x \ \text{ y } \ y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$$
$$y = \sec^{-1}x \ \left(|x| \geqslant 1\right) \iff \sec y = x \ \text{ y } \ y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$$
$$y = \cot^{-1}x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \cot y = x \ \text{ y } \ y \in (0, \pi)$$

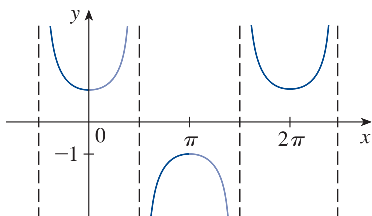


FIGURA 26
$y = \sec x$

La elección de los intervalos para y en las definiciones de $\csc^{-1}$ y $\sec^{-1}$ no es aceptada universalmente. Por ejemplo, algunos autores utilizan $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)]$ en la definición de $\sec^{-1}$. [Se puede ver en la gráfica de la función secante en la figura 26 que tanto esta opción como la que se encuentra en (11) funcionan.]

1.5 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una función inyectiva?
(b) ¿Cómo puede decirse, a partir de la gráfica de una función, que es inyectiva?

2. (a) Suponga que f es una función inyectiva con dominio A y rango B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el rango de f^{-1}?
(b) Si se le da una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}?
(c) Si se le da la gráfica para f, ¿cómo encuentra la gráfica de f^{-1}?

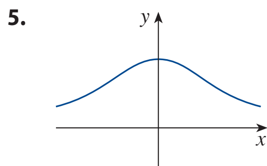
3–14 Una función está dada por una tabla de valores, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si es inyectiva.

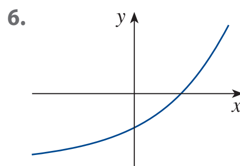
3.

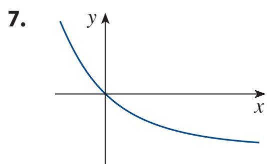
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

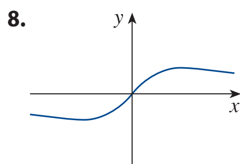
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0	1.9	2.8	3.5	3.1	2.9

5.


6.


7.


8.


9. $f(x) = 2x - 3$

10. $f(x) = x^4 - 16$

11. $g(x) = 1 - \operatorname{sen} x$

12. $g(x) = \sqrt[3]{x}$

13. $f(t)$ es la altura de una flecha t segundos después de que se lanza hacia arriba.

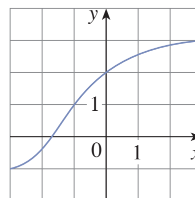
14. $f(t)$ es el tamaño de su zapato a la edad t.

15. Suponga que f es una función inyectiva.
(a) Si $f(4)= 7$, ¿qué es $f^{-1}(7)$?
(b) Si $f^{-1}(8)= 2$, ¿qué es $f(2)$?

16. Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, determine $f^{-1}(3)$ y $f(f^{-1}(2))$.

17. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, determine $g^{-1}(4)$.

18. La gráfica de f está dada.
(a) ¿Por qué f es inyectiva?
(b) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f^{-1}?
(c) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(2)$?
(d) Calcule el valor de $f^{-1}(0)$.



19. La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geqslant -459.67$, expresa la temperatura Celsius C, en función de la temperatura Fahrenheit F. Encuentre una fórmula para la función inversa e interprétela. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

20. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con rapidez v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz en el vacío. Encuentre la función inversa de f y explique su significado.

21–26 Determine una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$ **24.** $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

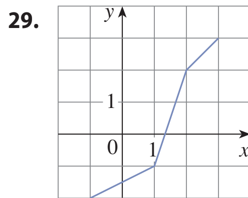
25. $y = \ln(x + 3)$ **26.** $y = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

27–28 Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y utilícela para graficar f^{-1}, f y la recta $y = x$ en la misma pantalla. Para comprobar su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones a través de la recta.

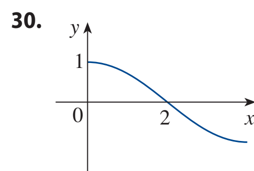
27. $f(x) = \sqrt{4x + 3}$ **28.** $f(x) = 1 + e^{-x}$

29–30 Use la gráfica dada de f, para trazar la gráfica de f^{-1}.

29.



30.



31. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(a) Encuentre f^{-1}. ¿Cómo se relaciona con f?
(b) Identifique la gráfica de f y explique su respuesta al inciso (a).

32. Sea $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
(a) Encuentre g^{-1}. ¿Cómo se relaciona con la g?

(b) Grafique g. ¿Cómo explica usted su respuesta al inciso (a)?

33. (a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_b x$?
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) ¿Cuál es el rango de esta función?
(d) Dibuje la forma general de la gráfica de la función $y = \log_b x$ si $b > 1$.

34. (a) ¿Qué es el logaritmo natural?
(b) ¿Qué es el logaritmo común?
(c) Trace las gráficas de la función logaritmo natural y la función exponencial natural en un mismo conjunto de ejes.

35–38 Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

35. (a) $\log_2 32$ (b) $\log_8 2$

36. (a) $\log_5 \frac{1}{125}$ (b) $\ln(1/e^2)$

37. (a) $\log_{10} 40 + \log_{10} 2.5$
(b) $\log_8 60 - \log_8 3 - \log_8 5$

38. (a) $e^{-\ln 2}$ (b) $e^{\ln(\ln e^3)}$

39–41 Exprese cada una de las siguientes cantidades dadas como un solo logaritmo.

39. $\ln 20 - 2 \ln 2$ **40.** $\ln b + 2 \ln c - 3 \ln d$

41. $\frac{1}{3} \ln(x + 2)^3 + \frac{1}{2} [\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

42. Use la fórmula 10 para evaluar cada logaritmo con precisión de seis decimales.
(a) $\log_5 10$ (b) $\log_3 57$

43–44 Use la fórmula 10 para graficar cada una de las funciones siguientes en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

43. $y = \log_{1.5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

45. Suponga que la gráfica de $y = \log_2 x$ se dibuja sobre una cuadrícula de coordenadas, donde la unidad de medida es de un centímetro. ¿Cuántos kilómetros a la derecha del origen se tiene que mover antes de que la altura de la curva alcance 1 m?

46. Compare las funciones $f(x) = x^{0.1}$ y $g(x) = \ln x$ graficando ambas, f y g, en varios rectángulos de visualización. ¿Cuándo la gráfica de f supera finalmente a la gráfica de g?

47–48 Haga un trazo de la gráfica de cada una de las funciones siguientes. No utilice calculadora. Solo tiene que usar las gráficas de las figuras 12 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln |x|$

49–50 *a*) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?
(b) ¿Cuál es la intersección en x de la gráfica?
(c) Trace la gráfica de f.

49. $f(x) = \ln x + 2$ **50.** $f(x) = \ln(x - 1) - 1$

51–54 Resuelva cada ecuación para x.

51. (a) $e^{7-4x} = 6$ (b) $\ln(3x - 10) = 2$

52. (a) $\ln(x^2 - 1) = 3$ (b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

53. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, donde $a \neq b$

55–56 Resuelva cada desigualdad para x.

55. (a) $\ln x < 1$ (b) $e^x \geqslant 3$

56. (a) $1 < e^{3x-1} < 2$ (b) $1 - 2 \ln x < 3$

57. (a) Encuentre el dominio de $f(x) = \ln(e^x - 3)$.
(b) Determine f^{-1} y su dominio.

58. (a) ¿Cuáles son los valores de $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$?
(b) Use su calculadora para evaluar $e^{\ln 300}$ y $\ln(e^{300})$. ¿Qué observa? ¿Puede explicar por qué la calculadora tiene problemas?

SAC **59.** Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es inyectiva. Luego utilice un sistema de algebraico computacional para encontrar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (El SAC produce tres posibles expresiones. Explique por qué dos de ellas son irrelevantes en este contexto.)

SAC **60.** (a) Si $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$, utilice un sistema de algebraico computacional para encontrar una expresión para $g^{-1}(x)$.
(b) Utilice la expresión del inciso (a) para graficar $y = g(x)$, $y = x$ y $y = g^{-1}(x)$, en la misma pantalla.

61. Si una población de bacterias comienza con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, entonces el número de bacterias después de t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$.
(a) Determine la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuándo la población alcanzará 50 000 bacterias?

62. Cuando el flash de una cámara se apaga, las baterías comienzan a recargar de inmediato el condensador del flash, que almacena una carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La capacidad de carga máxima es Q_0, y t se mide en segundos.)
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuánto tiempo se tarda en recargar el condensador a 90% de la capacidad si $a = 2$?

63–68 Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

63. (a) $\cos^{-1}(-1)$ (b) $\text{sen}^{-1}(0.5)$

64. (a) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ (b) $\arctan(-1)$

65. (a) $\csc^{-1}\sqrt{2}$ (b) arcsen 1

66. (a) $\text{sen}^{-1}(-1/\sqrt{2})$ (b) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$

67. (a) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

68. (a) $\text{arcsen}(\text{sen}(5\pi/4))$ (b) $\cos\left(2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

69. Pruebe que $\cos(\text{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

70–72 Simplifique cada una de las expresiones siguientes:

70. $\tan(\text{sen}^{-1}x)$ **71.** $\text{sen}(\tan^{-1}x)$ **72.** $\text{sen}(2 \arccos x)$

73-74 Trace la gráfica de las funciones dadas, en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

73. $y = \text{sen}\, x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$; $y = \text{sen}^{-1}x$; $y = x$

74. $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$; $y = \tan^{-1}x$; $y = x$

75. Encuentre el dominio y el rango de la función

$$g(x) = \text{sen}^{-1}(3x + 1)$$

76. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(\text{sen}^{-1}x)$ y explique la apariencia de la gráfica.
(b) Trace la gráfica de la función $g(x) = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x)$. ¿Cómo se explica la apariencia de esta gráfica?

77. (a) Si desplaza la curva a la izquierda, ¿qué sucede con su reflexión a través de la recta $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$, donde f es una función inyectiva.
(b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

1 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una función? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
(b) ¿Qué es la gráfica de una función?
(c) ¿Cómo se puede saber si una curva dada es la gráfica de una función?

2. Analice cuatro maneras de representar una función. Ilustre la discusión con ejemplos.

3. (a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede saber si una función es par observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función par.
(b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede saber si una función es impar observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función impar.

4. ¿Qué es una función creciente?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

6. Dé un ejemplo de cada tipo de función
(a) lineal (b) potencia
(c) exponencial (d) cuadrática
(e) polinomial de grado 5 (f) racional

7. Trace a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las funciones siguientes.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Trace a mano un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = \text{sen}\, x$ (b) $y = \tan x$ (c) $y = e^x$
(d) $y = \ln x$ (e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \tan^{-1} x$

9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
(a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
(b) ¿Cuál es el dominio de fg?
(c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

11. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de f de la siguiente manera.
(a) Desplazar 2 unidades hacia arriba.
(b) Desplazar 2 unidades hacia abajo.
(c) Desplazar 2 unidades a la derecha.
(d) Desplazar 2 unidades a la izquierda.
(e) Reflejar a través del eje x.
(f) Reflejar a través del eje y.
(g) Alargar verticalmente por un factor de 2.
(h) Contraer verticalmente por un factor de 2.
(i) Alargar horizontalmente por un factor de 2.
(j) Contraer horizontalmente por un factor de 2.

12. (a) ¿Qué es una función inyectiva? ¿Cómo puede saber si una función es inyectiva observando su gráfica?
(b) Si f es una función inyectiva, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo se obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

13. (a) ¿Cómo se define la función seno inverso $f(x) = \text{sen}^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y su rango?
(b) ¿Cómo se define la función coseno inverso $f(x) = \cos^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?
(c) ¿Cómo se define la función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.

3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.

4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Una recta vertical interseca la gráfica de una función a lo más una vez.

6. Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.

7. Si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

8. Siempre puede dividirse entre e^x.

9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.

10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

11. Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

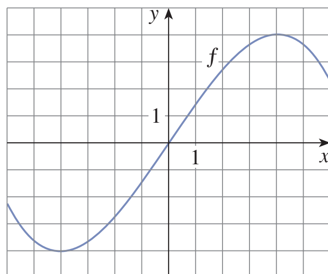
12. $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$.

13. $\tan^{-1} x = \dfrac{\text{sen}^{-1} x}{\cos^{-1} x}$

14. Si x es cualquier número real, entonces $\sqrt{x^2} = x$.

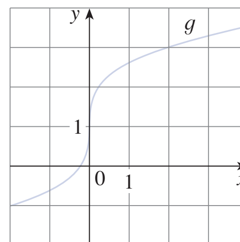
EJERCICIOS

1. Sea f la función cuya gráfica está dada.



(a) Calcule el valor de $f(2)$.
(b) Calcule los valores de x tales que $f(x) = 3$.
(c) Indique el dominio de f.
(d) Establezca el rango de f.
(e) ¿Sobre qué intervalo es creciente f?
(f) ¿Es f inyectiva? Explique.
(g) ¿Es f par, impar, o ninguno de los dos? Explique.

2. La gráfica de g está dada



(a) Obtenga el valor de $g(2)$.
(b) ¿Por qué g es inyectiva?
(c) Calcule el valor de $g^{-1}(2)$.
(d) Calcule el dominio de g^{-1}.
(e) Trace la gráfica de g^{-1}.

3. Si $f(x) = x^2 - 2x + 3$, evalúe el cociente de diferencias

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

4. Dibuje una gráfica aproximada de la producción de un cultivo en función de la cantidad de fertilizante utilizado.

5–8 Encuentre el dominio y rango de cada una de las funciones siguientes. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$ **6.** $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$ **8.** $F(t) = 1 + \operatorname{sen} 2t$

---

9. Suponga que la gráfica de f está dada. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las funciones siguientes a partir de la gráfica de f.

(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$

(c) $y = 1 + 2f(x)$ (d) $y = f(x - 2) - 2$

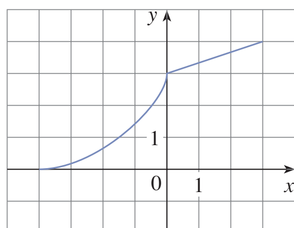
(e) $y = -f(x)$ (f) $y = f^{-1}(x)$

10. La gráfica de f está dada. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $y = f(x - 8)$ (b) $y = -f(x)$

(c) $y = 2 - f(x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$

(e) $y = f^{-1}(x)$ (f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 Utilice transformaciones para trazar la gráfica de la función.

11. $y = (x - 2)^3$ **12.** $y = 2\sqrt{x}$

13. $y = x^2 - 2x + 2$ **14.** $y = \ln(x + 1)$

15. $f(x) = -\cos 2x$ **16.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

---

17. Determine si f es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$

(b) $f(x) = x^3 - x^7$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$ (d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica consiste en el segmento de recta desde el punto $(-2, 2)$ hasta el punto $(-1, 0)$, junto con la mitad superior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como una composición de tres funciones.

21. La tabla muestra la población de Indonesia (en millones) durante los años 1950-2000. Decida qué tipo de modelo es apropiado y utilice el modelo para estimar la población de Indonesia en 2010.

Año	Población	Año	Población
1950	80	1980	150
1955	86	1985	166
1960	96	1990	182
1965	107	1995	197
1970	120	2000	212
1975	134		

22. Un pequeño fabricante de electrodomésticos encuentra que cuesta \$9000 producir 1000 hornos tostadores a la semana y \$12 000 producir 1500 hornos tostadores a la semana.

(a) Exprese el costo en función del número de hornos tostadores producidos, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

(c) ¿Cuál es la intersección de la gráfica con el eje y y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, determine $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(c) $\tan\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right)$ (d) $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes para x.

(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$

(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\tan^{-1}x = 1$

27. La vida media del paladio-100, ^{100}Pd, es de cuatro días. (Así que la mitad de cualquier cantidad dada de ^{100}Pd se desintegrará en cuatro días.) La masa inicial de una muestra es un gramo.

(a) Encuentre la masa que queda después de 16 días.

(b) Determine la masa $m(t)$ que queda después de t días.

(c) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(d) ¿Cuándo se reducirá la masa a 0.01 g?

28. La población de ciertas especies en un ambiente limitado con una población inicial de 100 y capacidad de carga de 1000 es

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años.

(a) Grafique esta función y estime cuánto tiempo le toma a la población llegar a 900.

(b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(c) Utilice la función inversa para encontrar el tiempo necesario para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso (a).

Principios para la resolución de problemas

No hay reglas sólidas ni inmediatas que aseguren el éxito en la resolución de problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales en el proceso de resolución de problemas y dar algunos principios que pueden ser útiles en la resolución de algunos de ellos. Estos pasos y principios no hacen otra cosa que explicitar el sentido común y se han adaptado del libro de George Polya, *How To Solve It*.

1 COMPRENDA EL PROBLEMA

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que lo comprende con claridad. Plantéese las siguientes preguntas:

¿Cuál es la incógnita?

¿Cuáles son las cantidades que se conocen?

¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas es útil

dibujar un diagrama

e identificar en el diagrama las cantidades dadas y las requeridas.

Por lo general, es necesario

introducir una notación adecuada

En la elección de símbolos para las incógnitas, a menudo se usan letras como a, b, c, m, n, x o y, aunque en algunos casos es mejor usar las iniciales de las cantidades involucradas como símbolos sugerentes; por ejemplo, V para el volumen o t para tiempo.

2 PIENSE EN UN PLAN

Es importante encontrar una conexión entre la información dada y la desconocida, lo que le permitirá calcular las incógnitas. Con frecuencia es útil preguntarse a sí mismo de manera explícita: "¿Cómo relaciono lo conocido con lo desconocido?" Si usted no ve una conexión inmediata, las siguientes ideas pueden serle útiles en la concepción de un plan.

Intente reconocer algo conocido Relacione la situación dada con los conocimientos previos. Observe lo desconocido y trate de recordar un problema más conocido que cuente con una incógnita similar.

Intente reconocer patrones Algunos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón que está ocurriendo. El patrón puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si usted puede ver la regularidad o repetición en un problema, podría ser capaz de inferir el patrón y luego probarlo.

Utilice analogías Trate de pensar en un problema análogo, es decir, un problema similar, un problema relacionado, pero que sea más fácil de resolver que el problema original. Si usted puede resolver el problema similar, pero más sencillo, entonces podría dar con las claves que necesita para resolver el problema original, que es más difícil. Por ejemplo, si un problema implica cantidades muy grandes, podría intentar primero resolver un problema similar con cifras más pequeñas. O si el problema implica geometría en tres dimensiones, puede buscarse un problema geométrico similar en dos dimensiones. O si el problema inicial es de carácter general, puede empezar con un caso particular.

Introduzca algo extra A veces puede ser necesario introducir algo nuevo, un apoyo auxiliar para ayudar a hacer la conexión entre lo dado y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva línea trazada en el diagrama. En un problema más algebraico, podría ser una nueva incógnita relacionada con la original.

Establezca casos A veces puede tener que dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno de los casos. Por ejemplo, a menudo se tiene que utilizar esta estrategia al tratar con valores absolutos.

Trabaje hacia atrás A veces es útil imaginar que el problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Entonces usted puede revertir sus pasos y construir una solución al problema original. Este procedimiento es utilizado, por lo común, en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, en la resolución de la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabaje hacia atrás. Sume 5 a cada lado de la ecuación y luego divida ambos lados entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada uno de estos pasos puede revertirse, ha resuelto el problema.

Establezca metas parciales En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales (en los que la situación deseada se cumple solo parcialmente). Si primero puede llegar a estos objetivos parciales, entonces puede construir conclusiones sobre ellos para llegar a la meta final.

Razonamiento indirecto Con frecuencia es apropiado atacar en forma indirecta un problema. En el uso de la demostración por contradicción para demostrar que P implica Q, suponga que P es cierta y Q es falsa y trate de ver por qué esto no puede suceder. De alguna manera, tiene que utilizar esta información y llegar a una contradicción de lo que sabe que es verdadero.

Inducción matemática En la demostración de proposiciones que implican un entero positivo n, frecuentemente es útil usar el siguiente principio.

Principio de inducción matemática Sea S_n ser un enunciado sobre el número entero positivo n. Suponga que

1. S_1 es verdadero.

2. S_{k+1} es verdadero siempre que S_k es verdadero.

Entonces S_n es cierto para todos los enteros positivos n.

Esto es razonable porque, dado que S_1 es verdadera, se deduce de la condición 2 (con $k = 1$) que la S_2 es verdadera. Luego, utilizando la condición 2 con $k = 2$, se ve que S_3 es verdadera. Una vez más, con la condición 2, esta vez con $k = 3$, se tiene que S_4 es verdadera. Este procedimiento puede seguirse indefinidamente.

3 EJECUTE EL PLAN

En el paso 2 se ideó un plan. Para llevar a cabo ese plan hay que verificar cada etapa de este y escribir los detalles que demuestran que cada etapa es correcta.

4 REVISE

Después de haber completado la solución, es conveniente revisarla, en parte para ver si no se han cometido errores en la solución y en parte para ver si puede pensar una manera más fácil de resolver el problema. Otra razón para revisar es familiarizarse con el método de solución, lo que puede ser útil para resolver un problema en el futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas."

Estos principios de la resolución de problemas se ilustran en los ejemplos siguientes. Intente resolverlos antes de mirar las soluciones. Consulte estos principios de resolución de problemas si se queda atascado. Usted puede encontrar útil referirse a esta sección de vez en cuando al resolver los ejercicios en los restantes capítulos de este libro.

EJEMPLO 1 Exprese la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con un área de 25 m^2 en función de su perímetro P.

SP Entienda el problema

SOLUCIÓN Primero clasifique la información mediante la identificación de la incógnita y los datos:

Incógnita: hipotenusa h

Datos: perímetro P, área 25 m^2

SP Dibuje un diagrama

Dibujar un diagrama como el de la figura 1 puede ser de gran ayuda.

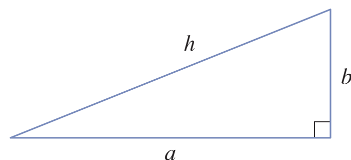


FIGURA 1

SP Relacione los datos con las incógnitas
SP Introduzca algo extra

Para establecer la relación entre las incógnitas y los datos, introduzca dos variables adicionales a y b, que representen las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Esto permite expresar la condición dada, que es un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Las otras relaciones entre las variables se obtienen al escribir las expresiones para el área y el perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Ya que P está dado, ahora tiene tres ecuaciones con tres incógnitas a, b y h:

1 $$h^2 = a^2 + b^2$$

2 $$25 = \tfrac{1}{2}ab$$

3 $$P = a + b + h$$

SP Relacione con algo conocido

Aunque tiene el número correcto de ecuaciones, no son fáciles de resolver en una forma sencilla. Pero si usa la estrategia de resolución de problemas tratando de reconocer algo conocido, entonces puede resolver estas ecuaciones por un método más fácil. Observe el lado derecho de las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Estas expresiones le recuerdan algo familiar? Observe que contienen los ingredientes de una fórmula conocida:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Con esta idea, se expresa $(a + b)^2$ de dos maneras. De las ecuaciones 1 y 2 se tiene

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

De la ecuación 3 se tiene

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Así
$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$
$$2Ph = P^2 - 100$$
$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Esta es la expresión requerida para h en función de P. ■

Como se ilustra en el ejemplo siguiente, con frecuencia es necesario utilizar el principio de *considerar casos* en la resolución de problemas, cuando se trata con valores absolutos.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

SOLUCIÓN Recuerde la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se tiene que

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Del mismo modo

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{si } x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

SP Considere casos

Estas expresiones muestran que es necesario considerar tres casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I Si $x < -2$, se tiene

$$|x - 3| + |x + 2| < 11$$

$$-x + 3 - x - 2 < 11$$

$$-2x < 10$$

$$x > -5$$

CASO II Si $-2 \leqslant x < 3$, la desigualdad dada se convierte en

$$-x + 3 + x + 2 < 11$$

$$5 < 11 \qquad \text{(siempre verdadera)}$$

CASO III Si $x \geqslant 3$, la desigualdad se convierte en

$$x - 3 + x + 2 < 11$$

$$2x < 12$$

$$x < 6$$

De la combinación de los casos I, II y III, se ve que se cumple con la desigualdad cuando $-5 < x < 6$. Por lo que la solución es el intervalo $(-5, 6)$. ■

En el ejemplo siguiente, primero se estima una respuesta revisando los casos particulares y buscando un patrón. Luego se demuestra la conjetura por inducción matemática.

Usando el principio de inducción matemática, se siguen tres pasos:

Paso 1 Demuestre que S_n es verdadera cuando $n = 1$.

Paso 2 Suponga que S_n es verdadera cuando $n = k$ y deduzca que S_n es verdadera cuando $n = k + 1$.

Paso 3 Concluya que S_n es verdadera para toda n por el principio de inducción matemática.

EJEMPLO 3 Si $f_0(x) = x/(x + 1)$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

SP Analogía: intente un problema similar más simple

SOLUCIÓN Empiece por encontrar fórmulas para $f_n(x)$ para los casos particulares más sencillos $n = 1, 2,$ y 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0\big(f_0(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0\big(f_1(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0\big(f_2(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

SP Busque un patrón

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Se ve un patrón: el coeficiente de x en el denominador de $f_n(x)$ es $n + 1$ en los tres casos calculados. Así que se hace la suposición de que, en general,

$$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1} \qquad \boxed{4}$$

Para demostrar esto, se utiliza el principio de inducción matemática. Ya se ha comprobado que (4) es verdadera para $n = 1$. Suponga que es verdadera para $n = k$, es decir,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

Entonces $$f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0\big(f_k(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Esta expresión demuestra que (4) es verdadera para $n = k + 1$. Por tanto, por inducción matemática, es verdadera para todo entero positivo n. ■

Problemas

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo tiene una longitud de 4 cm. Exprese la longitud de la altura perpendicular a la hipotenusa en función de la longitud de esta última.

2. La altura perpendicular a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 12 cm. Exprese la longitud de la hipotenusa en función del perímetro.

3. Resuelva la ecuación $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Resuelva la desigualdad $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Trace la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Trace la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.

7. Dibuje la gráfica de la ecuación $x + |x| = y + |y|$.

8. Dibuje la región en el plano formado por todos los puntos (x, y) tales que

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$

9. La notación $\text{máx}\{a, b, \ldots\}$ significa el mayor de los números a, b, ... Dibuje la gráfica de cada función.
(a) $f(x) = \text{máx}\{x, 1/x\}$
(b) $f(x) = \text{máx}\{\text{sen}\, x, \cos x\}$
(c) $f(x) = \text{máx}\{x^2, 2 + x, 2 - x\}$

10. Trace la región en el plano definido por cada una de las ecuaciones o desigualdades siguientes.
(a) $\text{máx}\{x, 2y\} = 1$
(b) $-1 \leqslant \text{máx}\{x, 2y\} \leqslant 1$
(c) $\text{máx}\{x, y^2\} = 1$

11. Evalúe $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.

12. (a) Demuestre que la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ es una función impar.
(b) Encuentre la función inversa de f.

13. Resuelva la desigualdad $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.

14. Use un razonamiento indirecto para probar que $\log_2 5$ es un número irracional.

15. Una conductora emprende un viaje. Durante la primera mitad del trayecto conduce a un ritmo lento de 60 km/h; en la segunda mitad conduce a 120 km/h. ¿Cuál es su rapidez promedio durante este viaje?

16. ¿Es verdad que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

17. Demuestre que si n es un entero positivo, entonces $7^n - 1$ es divisible entre 6.

18. Demuestre que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

19. Si $f_0(x) = x^2$ y $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

20. (a) Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ encuentre una expresión para $f_n(x)$ y utilice inducción matemática para demostrarla.

(b) Trace la gráfica de f_0, f_1, f_2, f_3, en la misma pantalla y describa los efectos de la composición repetida.

2 Límites y derivadas



© Jody Ann / Shutterstock.com

La velocidad máxima sostenible *S* del salmón depende de la temperatura *T* del agua. En el ejercicio 58 de la sección 2.7 se le pide que analice cómo varía *S* cuando cambia *T*, calculando la derivada de *S* respecto de *T*.

EN *UN ADELANTO DEL CÁLCULO* (página 1) se vio cómo la idea de límite sustenta las distintas ramas del cálculo. Por tanto, es apropiado comenzar nuestro estudio investigando sus límites y sus propiedades. El tipo especial de límite que se usa para encontrar rectas tangentes y velocidades da lugar a la idea central del cálculo diferencial, la derivada.

2.1 Problemas de la tangente y la velocidad

En esta sección se verá cómo surgen los límites cuando se trata de encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

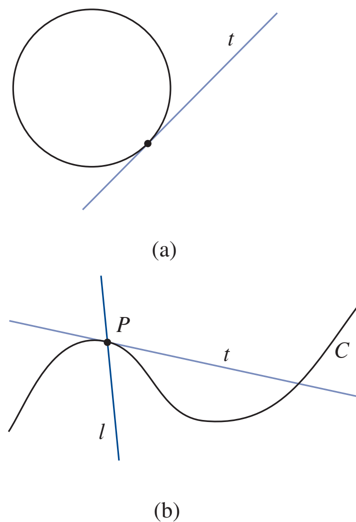


FIGURA 1

El problema de la tangente

La palabra *tangente* se deriva de la voz latina *tangens*, que significa "tocar". Así, una tangente a una curva es una recta que toca la curva. En otras palabras, una recta tangente debe tener la misma dirección que la curva en el punto de contacto, pero, ¿cómo puede hacer precisa esta idea?

Para una circunferencia se puede simplemente seguir la idea de Euclides y decir que la tangente es una recta que interseca la circunferencia una y solo una vez, como se muestra en la figura 1(a). Para curvas más complicadas esta definición es inadecuada. La figura 1(b) muestra dos rectas l y t que pasan por un punto P en una curva C. La recta l cruza C solo una vez, pero ciertamente no es la idea que se tiene de lo que es una tangente. La recta t, por otro lado, se parece más a una tangente, pero interseca a C dos veces.

Para ser más específicos, intente resolver el problema de encontrar una recta tangente t a la parábola $y = x^2$ en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1, 1)$.

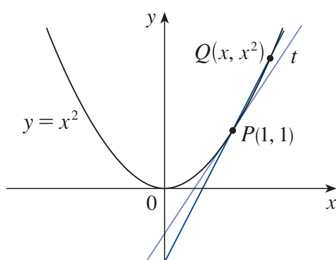


FIGURA 2

SOLUCIÓN Puede encontrar la ecuación de la recta tangente t tan pronto conozca su pendiente m. La dificultad es que solo se conoce un punto P sobre t, y para calcular la pendiente se necesitan dos puntos. Sin embargo, se observa que puede calcular una aproximación a m eligiendo un punto cercano $Q(x, x^2)$ sobre la parábola (como en la figura 2) y calculando la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. [Una **recta secante**, de la palabra latina *secans*, que significa cortar, es una recta que interseca (corta) una curva más de una vez.]

Elija $x \neq 1$ de manera que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$, se tiene

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Las tablas en el margen muestran los valores de m_{PQ} para varios valores de x cercanos a 1. Cuanto más cerca está Q de P, la x es más cercana a 1 y, de las tablas, m_{PQ} está más cerca de 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

Se dice que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes, y esto se expresa simbólicamente escribiendo

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Suponiendo que la pendiente de la recta tangente finalmente es 2, se utiliza la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente [$y - y_1 = m(x - x_1)$, véase el apéndice B) para escribir la ecuación de la recta tangente en (1, 1) como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

La figura 3 muestra el proceso de límite que se presenta en este ejemplo. Cuando Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las rectas secantes correspondientes giran alrededor de P y se aproximan a la recta tangente t.

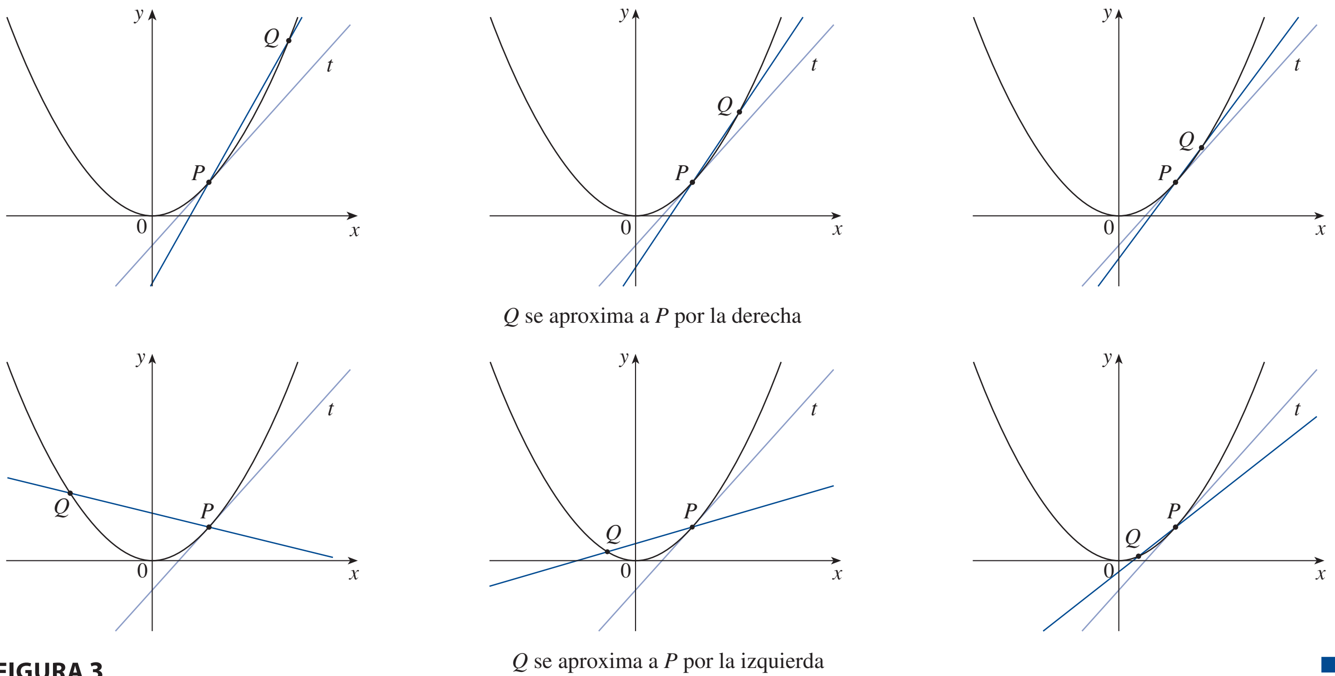


FIGURA 3

■

Muchas de las funciones que se producen en la ciencia no están descritas por ecuaciones explícitas, sino que están definidas por datos experimentales. El ejemplo siguiente muestra cómo calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de este tipo de funciones.

TEC En Visual 2.1 puede ver cómo funciona el proceso en la figura 3 para otras funciones.

EJEMPLO 2 La unidad de destello (flash) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un condensador y su liberación repentina cuando el flash se activa. Los datos de la tabla describen la carga Q restante en el condensador (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos después de que el flash se dispara). Utilice los datos para dibujar la gráfica de esta función y calcule la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [*Nota*: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica (medida en microamperes) que fluye desde el condensador a la lámpara del flash.]

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

SOLUCIÓN En la figura 4 se grafican los datos dados y se usan para trazar una curva que se aproxima a la gráfica de la función.

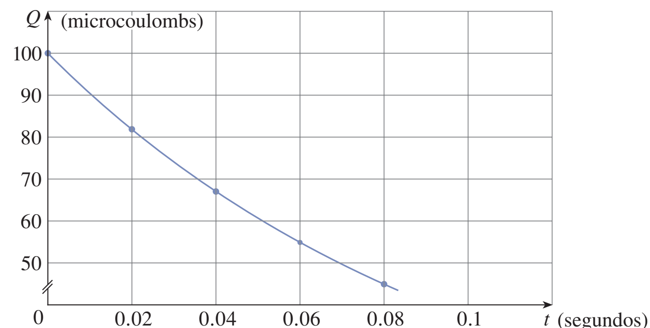


FIGURA 4

Dados los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ en la gráfica, se encuentra con que la pendiente de la recta secante PR es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

La tabla de la izquierda muestra los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. De esta tabla se esperaría que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre en algún valor entre -742 y -607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

Así, por este método, se estima la pendiente de la recta tangente como -675.

Otro método consiste en elaborar una aproximación a la tangente en P y medir los lados del triángulo ABC, como en la figura 5.

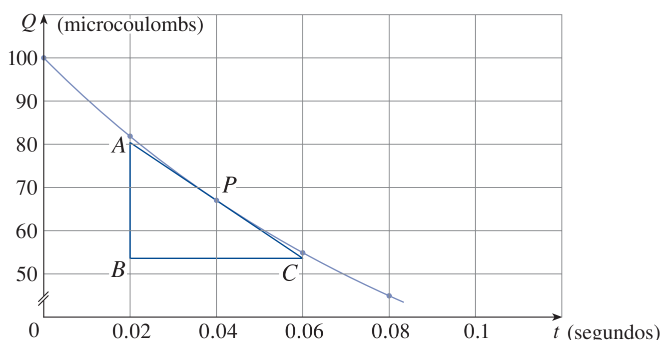


FIGURA 5

El significado físico de la respuesta en el ejemplo 2 es que la corriente eléctrica que circula desde el condensador a la bombilla de flash después de 0.04 segundos es de aproximadamente −670 microamperes.

Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$

■

■ El problema de la velocidad

Si usted mira el velocímetro de un automóvil mientras viaja en el tráfico de la ciudad, se ve que la aguja no se queda quieta por mucho tiempo; es decir, la velocidad del automóvil no es constante. Suponga al ver el velocímetro, que el auto tiene una velocidad determinada en cada instante, pero ¿cómo se define la velocidad "instantánea"? Investigue el ejemplo de la caída de una pelota.

EJEMPLO 3 Suponga que una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN en Toronto, a 450 m sobre el suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.

SOLUCIÓN Por medio de experimentos llevados a cabo hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia que recorre cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (Este modelo de caída libre no considera



La Torre CN en Toronto fue el edificio autoestable más alto en el mundo durante 32 años.

la resistencia del aire.) Si la distancia de caída después de t segundos se denota por $s(t)$ y se mide en metros, entonces la ley de Galileo se expresa por la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para encontrar la velocidad después de 5 s es que se trata de un solo instante de tiempo ($t = 5$), por lo que no se cuenta con un intervalo de tiempo. Sin embargo, se puede aproximar la cantidad deseada mediante el cálculo de la velocidad promedio en el breve intervalo de tiempo de una décima de segundo, desde $t = 5$ hasta $t = 5.1$:

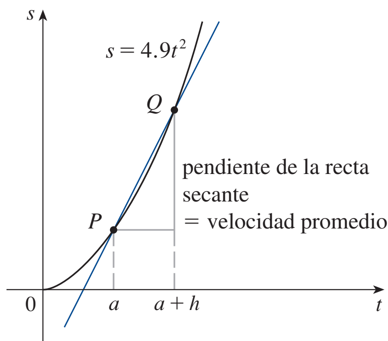
$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}$$

$$= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}$$

La tabla siguiente muestra los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante períodos cada vez más pequeños.

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049



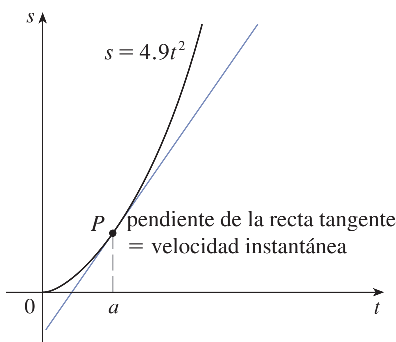


FIGURA 6

Parece que, a medida que se acorta el período, la velocidad promedio es cada vez más cercana a 49 m/s. La **velocidad instantánea** cuando $t = 5$ se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante períodos cada vez más cortos que comienzan en $t = 5$. Así, la velocidad (instantánea) después de 5 segundos es

$$v = 49 \text{ m/s}$$

■

Usted puede sentir que los cálculos utilizados en la solución de este problema son muy similares a los utilizados anteriormente en esta sección para encontrar tangentes. De hecho, hay una estrecha conexión entre el problema de obtener la tangente y aquel de encontrar la velocidad. Si se dibuja la gráfica de la función de la distancia recorrida por la pelota (como en la figura 6) y se consideran los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ sobre la gráfica, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

que es la misma que la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[a, a + h]$. Por tanto, la velocidad en el instante $t = a$ (el límite de las velocidades promedio cuando h tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

Los ejemplos 1 y 3 muestran que, para resolver los problemas de la tangente y la velocidad, debe ser capaz de calcular límites. Después de estudiar los métodos para calcular límites en las cinco secciones siguientes, se regresará a estos problemas de encontrar tangentes y velocidades en la sección 2.7.

2.1 EJERCICIOS

1. Un tanque contiene 1000 litros de agua que se drenan por la parte inferior del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen V de agua que queda en el tanque (en litros) después de t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

(a) Si P es el punto (15, 250) sobre la gráfica de V, encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto sobre la gráfica con $t = 5, 10, 20, 25$ y 30.
(b) Calcule la pendiente de la recta tangente en P por medio del promedio de las pendientes de dos rectas secantes.
(c) Utilice una gráfica de la función para calcular la pendiente de la recta tangente en P. (Esta pendiente representa la rapidez a la que fluye el agua del tanque después de 15 minutos.)

2. Un monitor se utiliza para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. El aparato compila el número de latidos del corazón después de t minutos y se registran en una tabla. Cuando los datos de la tabla se representan gráficamente, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Latidos	2530	2661	2806	2948	3080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Utilice los datos para calcular el ritmo cardíaco del paciente después de 42 minutos, utilizando la recta secante entre los puntos con los valores dados de t.
(a) $t = 36$ y $t = 42$ (b) $t = 38$ y $t = 42$
(c) $t = 40$ y $t = 42$ (d) $t = 42$ y $t = 44$
¿Cuáles son sus conclusiones?

3. El punto $P(2, -1)$ se encuentra en la curva $y = 1/(1 - x)$.
(a) Si Q es el punto $(x, 1/(1 - x))$, utilice la calculadora para determinar la pendiente de la recta secante PQ (con una precisión de seis decimales) para los valores de x siguientes:
(i) 1.5 (ii) 1.9 (iii) 1.99 (iv) 1.999
(v) 2.5 (vi) 2.1 (vii) 2.01 (viii) 2.001
(b) Utilice los resultados del inciso (a), para intuir el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(2, -1)$.
(c) Utilizando la pendiente del inciso (b), obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva en $P(2, -1)$.

4. El punto $P(0.5, 0)$ se encuentra sobre la curva $y = \cos \pi x$.
(a) Si Q es el punto $(x, \cos \pi x)$, utilice la calculadora para encontrar la pendiente de la secante PQ (redondeada a seis decimales) para los valores de x siguientes:
(i) 0 (ii) 0.4 (iii) 0.49
(iv) 0.499 (v) 1 (vi) 0.6
(vii) 0.51 (viii) 0.501
(b) Utilice los resultados del inciso (a), para intuir el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
(c) Utilice la pendiente del inciso (b), para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
(d) Trace la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

5. Si se lanza una pelota al aire con una velocidad de 10 m/s, su altura en metros después de t segundos está dada por $y = 10t - 4.9t^2$.
(a) Encuentre la velocidad promedio para el período que comienza cuando $t = 1.5$ y permanece
(i) 0.5 segundos (ii) 0.1 segundos
(iii) 0.05 segundos (iv) 0.01 segundos
(b) Calcule la velocidad instantánea cuando $t = 1.5$.

6. Si una piedra se lanza hacia arriba en el planeta Marte a una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después está dada por $y = 10t - 1.86t^2$
(a) Encuentre la velocidad promedio en los intervalos de tiempo dados:
(i) [1, 2] (ii) [1, 1.5]
(iii) [1, 1.1] (iv) [1, 1.01]
(v) [1, 1.001]
(b) Calcule la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

7. La tabla muestra la posición de un ciclista después de que acelera a partir del reposo.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

(a) Encuentre la velocidad promedio para cada período:
(i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]
(b) Utilice la gráfica de s en función de t para calcular la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

8. El desplazamiento (en centímetros) de una partícula que se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio durante cada período:
(i) [1, 2] (ii) [1, 1.1]
(iii) [1, 1.01] (iv) [1, 1.001]
(b) Calcule la velocidad instantánea de la partícula cuando $t = 1$.

9. El punto $P(1, 0)$ se encuentra sobre la curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.
(a) Si Q es el punto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante PQ (con una precisión de cuatro decimales) para $x = 2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ y 0.9. ¿Las pendientes parecen estar acercándose a un límite?
(b) Utilice la gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes en el inciso (a) no están cercanas a la pendiente de la recta tangente en P.
(c) Eligiendo rectas secantes apropiadas, calcule la pendiente de la recta tangente en P.

2.2 El límite de una función

En la sección anterior se vio cómo surgen los límites cuando se quiere encontrar la recta tangente a una curva o la velocidad de un objeto; ahora dirija la atención a los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos a 2. La tabla siguiente muestra los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

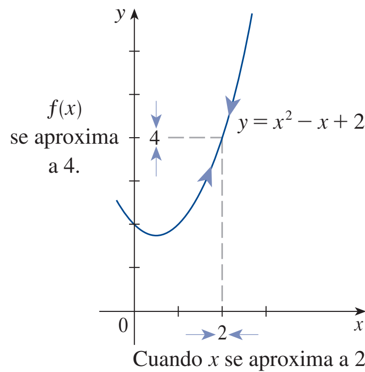


FIGURA 1

De la tabla y la gráfica de f (una parábola) que se muestra en la figura 1, se ve que cuando x se aproxima a 2 (por ambos lados de 2), $f(x)$ se aproxima a 4. De hecho, parece que se puede hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cerca de 4 como se quiera, tomando x suficientemente cerca de 2. Esto se expresa al decir que "el límite de la función $f(x) = x^2 - x - 2$ cuando x tiende a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación.

1 Definición intuitiva de un límite Suponga que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se dice que "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si se puede hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como se quiera), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

En términos generales, esto quiere decir que los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x tiende a a. En otras palabras, los valores de $f(x)$ tienden a estar más y más cerca del número L cuando x se acerca cada vez más al número a (de ambos lados de a), pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se dará una definición más precisa.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Observe la frase “pero $x \neq a$” en la definición de límite. Esto significa que, al encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, no se considera $x = a$. De hecho, $f(x)$ podría no estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo se define f *cerca de* a.

La figura 2 muestra las gráficas de tres funciones. Observe que en el inciso (c), $f(a)$ no está definida y, en el inciso (b), $f(a) \neq L$. Sin embargo, en cada caso, independientemente de lo que sucede en a, es cierto que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

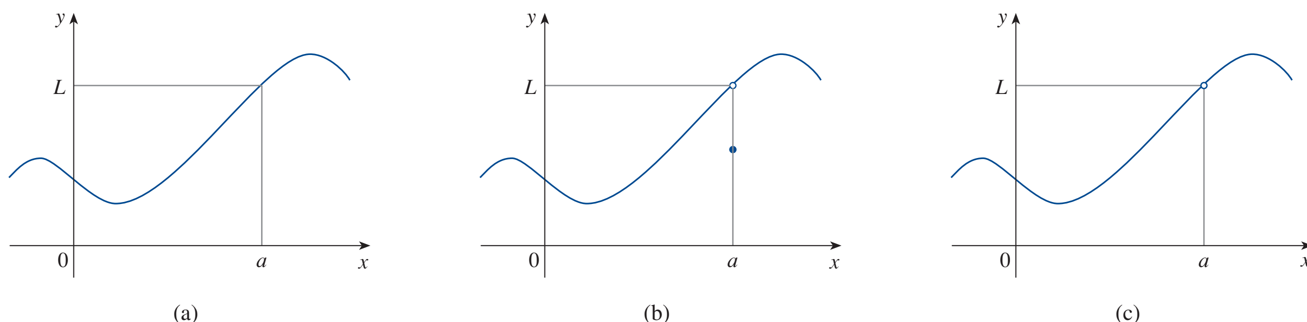


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 Infiera el valor de $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

1 0.5

SOLUCIÓN Observe que la función $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa, porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que se consideran los valores de x que están cerca de a, pero que no son iguales a a.

Las tablas de la izquierda dan valores de $f(x)$ (con una precisión de seis decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no iguales a 1). Con base en los valores en las tablas, haga la suposición de que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0.5$$

■

El ejemplo 1 se ilustra en la gráfica de f, en la figura 3. Ahora se va a cambiar un poco f, dándole el valor de 2 cuando $x = 1$ y llamando g a la función obtenida:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g conserva el mismo límite cuando x tiende a 1 (véase la figura 4).

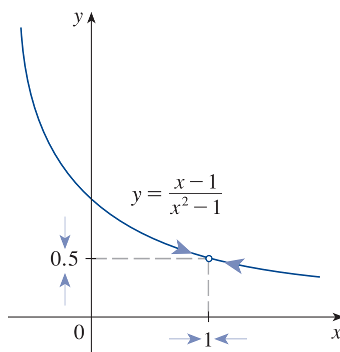


FIGURA 3

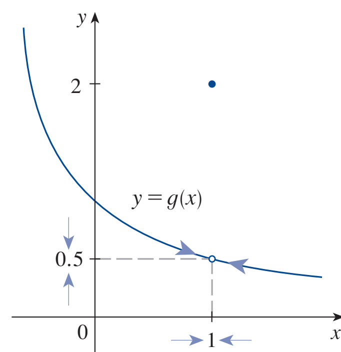


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Calcule el valor de $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN La tabla presenta los valores de la función para varios valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 1.0	$0.162277\ldots$
± 0.5	$0.165525\ldots$
± 0.1	$0.166620\ldots$
± 0.05	$0.166655\ldots$
± 0.01	$0.166666\ldots$

A medida que t se acerca a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.1666666..., por lo que suponga que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$ ■

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 0.001	0.166667
± 0.0001	0.166670
± 0.00001	0.167000
± 0.000001	0.000000

En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si se hubiera tomado valores aún más pequeños de t? La tabla en el margen muestra los resultados de una calculadora; sin duda, ¡algo extraño parece estar sucediendo!

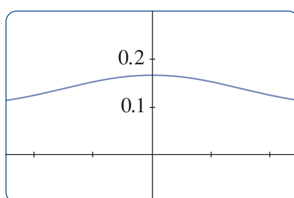
Si trata de obtener estos cálculos en su propia calculadora podría obtener valores diferentes, pero al final obtendrá el valor 0 si hace t suficientemente pequeña. ¿Significa esto que la respuesta es realmente 0, en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como se demuestra en la siguiente sección. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2 + 9}$ está muy cerca de 3 cuando t es pequeña. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeña, una calculadora da el valor de 3.000... para tantos dígitos como la calculadora sea capaz de aceptar.)

www.stewartcalculus.com
Para una mayor explicación de por qué las calculadoras, a veces, dan valores falsos, haga clic en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, véase la sección llamada *The Perils of Subtraction*.

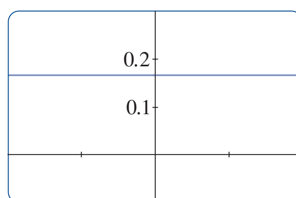
Algo similar sucede cuando se trata de graficar la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

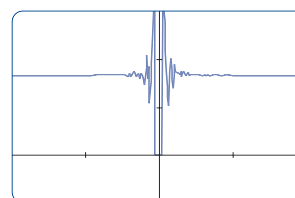
del ejemplo 2, en una calculadora graficadora o computadora. Los incisos (a) y (b) de la figura 5 muestran gráficas bastante precisas de f, y cuando se utiliza el modo *trace* (si está disponible) se puede calcular fácilmente que el límite es cercano a $\frac{1}{6}$. Pero si se acerca demasiado, como en los incisos (c) y (d), entonces obtiene gráficas incorrectas, de nuevo debido a problemas con la sustracción.



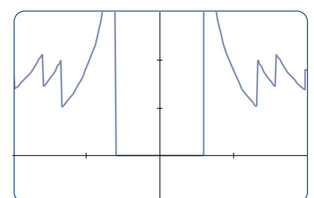
(a) $-5 \leqslant t \leqslant 5$



(b) $-0.1 \leqslant t \leqslant 0.1$



(c) $-10^{-6} \leqslant t \leqslant 10^{-6}$



(d) $-10^{-7} \leqslant t \leqslant 10^{-7}$

FIGURA 5

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

EJEMPLO 3 Obtenga el valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Usando una calculadora (y recordando que, si $x \in \mathbb{R}$, sen x significa el seno del ángulo x medido en *radianes*) puede elaborar una tabla de valores con una precisión de hasta ocho decimales. De la tabla a la izquierda y la gráfica en la figura 6 suponga que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

De hecho, esta conjetura es correcta como se demostrará en el capítulo 3, utilizando un argumento geométrico.

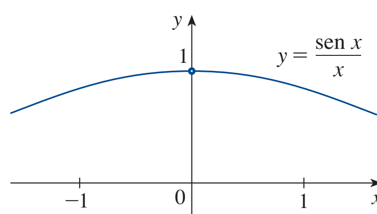


FIGURA 6

EJEMPLO 4 Investigue $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Una vez más la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Evaluando la función para algunos valores pequeños de x, obtenga

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información se puede estar tentado a suponer

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez *la suposición es errónea*. Observe que, aunque $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para muchos valores de x (tal como 2/5 o 2/101). Esto se puede ver en la gráfica de f que se muestra en la figura 7.

Sistemas algebraicos computacionales
Los sistemas algebraicos computacionales (SAC) tienen instrucciones que calculan límites. Para evitar los tipos de trampas como las de los ejemplos 2, 4 y 5, no calculan límites a partir de la experimentación numérica. En su lugar, utilizan técnicas más sofisticadas, como el cálculo de series infinitas. Si usted tiene acceso a un SAC, utilice las instrucciones de límites para calcular los límites de los ejemplos de esta sección y para revisar sus respuestas en los ejercicios de este capítulo.

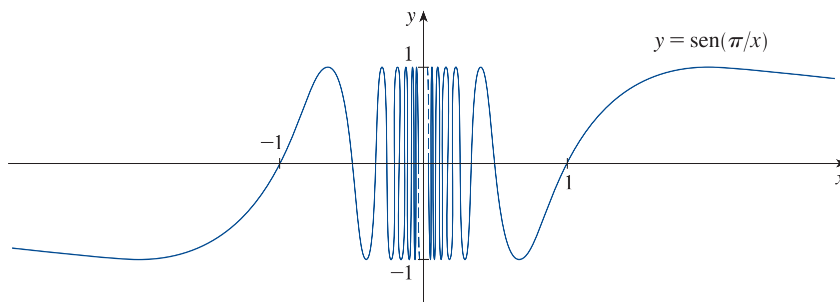


FIGURA 7

Las líneas punteadas, cerca del eje y indican que los valores del sen(π/x) oscilan infinitamente entre 1 y -1 cuando x tiende a 0. (Véase el ejercicio 51.)

Ya que los valores de $f(x)$ no se acercan a un número fijo cuando x tiende a 0,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

■

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre el $\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}\right)$.

SOLUCIÓN Como antes, se elabora una tabla de valores. De la primera tabla en el margen parece que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0$$

Pero si se persevera con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0.000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Más adelante verá que $\lim_{x\to 0} \cos 5x = 1$; entonces se deducirá que el límite es 0.0001. ■

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los riesgos al intentar conjeturar el valor de un límite. Es fácil caer en el valor incorrecto si se utilizan valores inadecuados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como muestra la discusión después del ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores incorrectos. En la sección siguiente, sin embargo, se van a desarrollar métodos infalibles para el cálculo de límites.

Límites laterales

EJEMPLO 6 La función de Heaviside H se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

[Esta función lleva el nombre del ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925) y se utiliza para describir una corriente eléctrica en un circuito en el tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la figura 8.

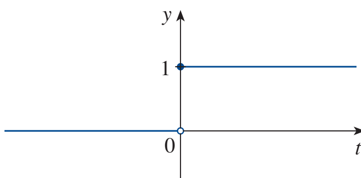


FIGURA 8
La función de Heaviside

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Conforme t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay un único número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxima a 0. Por tanto, $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe. ■

Ha observado en el ejemplo 6 que $H(t)$ tiende a 0 cuando t se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ tiende a 1 a medida que t se aproxima a 0 por la derecha. Esta situación se indica simbólicamente al escribir

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo $t \to 0^-$ indica que se consideran solo los valores de t que son menores de 0. De igual modo, $t \to 0^+$ indica que se consideran solo los valores de t que son mayores de 0.

2 Definición de límites unilaterales Cuando se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se expresa que el **límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda**] es igual a L si se puede hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a L, tanto como se quiera, tomando x suficientemente cercanos a a, pero *menores que a*.

Observe que la definición 2 difiere de la definición 1 solo en el hecho de que se pide que x sea necesariamente menor que a. Del mismo modo, si se requiere que x sea mayor que a, se obtiene que "el **límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a a** es igual a L" y se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Así, la notación $x \to a^+$ significa que se consideran solo x *mayores que a*. Estas definiciones se ilustran en la figura 9.

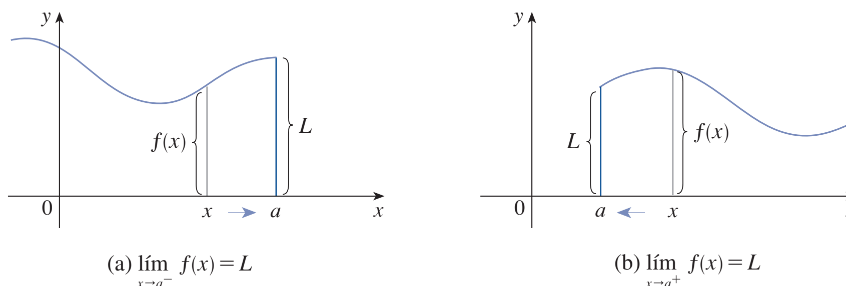


FIGURA 9

Al comparar la definición 1 con las de los límites laterales, vea que se satisface lo siguiente.

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

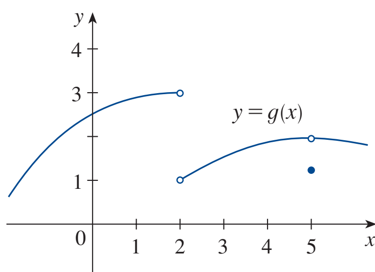


FIGURA 10

EJEMPLO 7 La gráfica de una función g se muestra en la figura 10. Utilícela para establecer los valores (si existen) de los siguientes:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN En la gráfica vea que los valores de $g(x)$ tienden a 3 conforme x tiende a 2 por la izquierda, pero se acercan a 1 a medida que x tiende a 2 por la derecha. Por tanto,

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Dado que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, se llega a la conclusión de que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

La gráfica también muestra que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Esta vez los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos, así que, por (3), se tiene

$$\lim_{x\to 5} g(x) = 2$$

A pesar de esto, observe que $g(5) \neq 2$. ■

Límites infinitos

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
±1	1
±0.5	4
±0.2	25
±0.1	100
±0.05	400
±0.01	10,000
±0.001	1,000,000

SOLUCIÓN Conforme x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Véase la tabla en el margen.) De hecho, se desprende de la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ en la figura 11, que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes, tomando x suficientemente cerca de 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, por lo que $\lim_{x\to 0}(1/x^2)$ no existe. ■

Para indicar el tipo de comportamiento exhibido en el ejemplo 8, se usa la notación

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

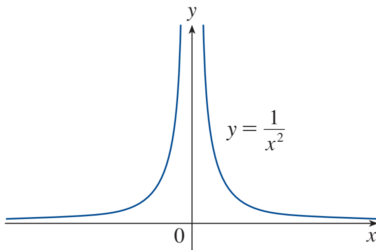


FIGURA 11

Esto no quiere decir que se esté considerando a ∞ como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en que el límite no existe: $1/x^2$ puede hacerse tan grande como se quiera, tomando a x suficientemente cerca de 0.

En general, puede escribir simbólicamente

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a ser más y más grandes (o "crecen sin límite") a medida que x se acerca más y más a a.

> **4 Definición intuitiva de un límite infinito** Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

Otra notación para $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \qquad \text{es} \qquad x \to a$$

De nuevo, el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es infinito"

o "$f(x)$ tiende al infinito cuando x se aproxima a a"

o "$f(x)$ crece sin límite cuando x se aproxima a a".

Esta definición se ilustra gráficamente en la figura 12.

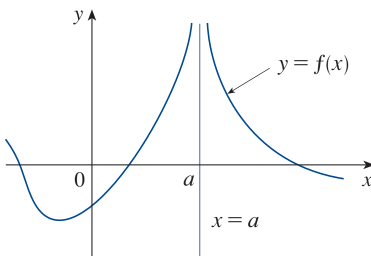


FIGURA 12
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Cuando se dice que un número es "negativo muy grande", se quiere decir que es negativo, pero su magnitud (valor absoluto) es grande.

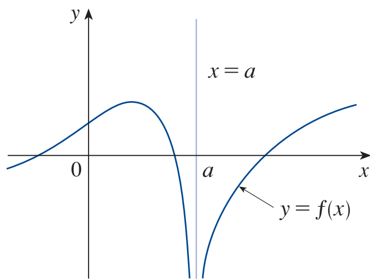


FIGURA 13
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Un tipo similar de límite, para las funciones que se convierten en negativos muy grandes conforme x se aproxima a a, se precisa en la definición 5 y se ilustra en la figura 13.

> **5 Definición** Sea f definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Entonces
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes, tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual a a.

El símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ puede leerse como "el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es infinito negativo" o "$f(x)$ decrece sin límite conforme x tiende a a". Como ejemplo se tiene

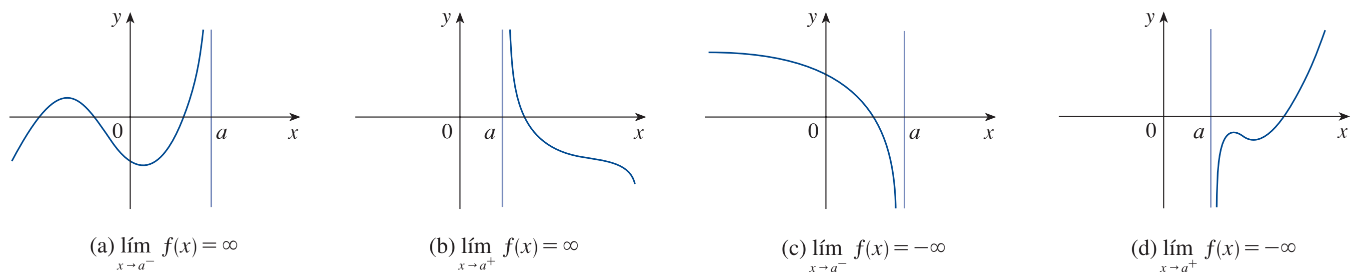
$$\lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Definiciones similares pueden darse a los límites laterales infinitos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

recordando que $x \to a^-$ significa que se consideran solo los valores de x que son menores que a, y del mismo modo $x \to a^+$ significa que se consideran solo $x > a$. En la figura 14, se ilustran estos cuatro casos.



(a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

> **6 Definición** La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos uno de los enunciados siguientes son verdaderos:
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, el eje y es una asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ debido a que $\lim_{x \to 0} (= 1/x^2)= \infty$. En la figura 14 la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno

de los cuatro casos que se muestran. En general, el conocimiento de asíntotas verticales es muy útil para dibujar gráficas.

EJEMPLO 9 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}$ y $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}$.

SOLUCIÓN Si x tiende a 3 con valores mayores que 3, entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo muy pequeño y $2x$ está muy cerca de 6, por lo que el cociente $2x/(x - 3)$ es un número positivo muy grande. Por tanto, intuitivamente, se puede ver que

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=\infty$$

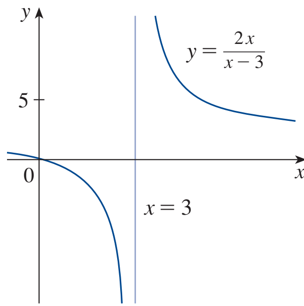


FIGURA 15

Asimismo, si x es cercano a 3, pero con valores menores que 3, entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño, pero $2x$ es aún un número positivo (cercano a 6). Así, $2x/(x - 3)$ es un número *negativo* muy grande. Por tanto,

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=-\infty$$

La gráfica de la curva $y = 2x/(x - 3)$ se ilustra en la figura 15. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. ■

EJEMPLO 10 Encuentre las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN Ya que

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

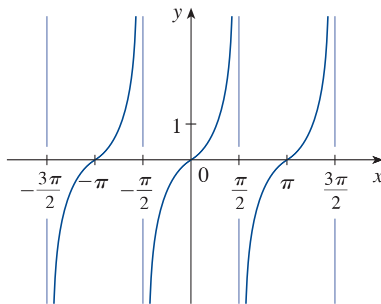


FIGURA 16
$y = \tan x$

hay posibles asíntotas verticales donde $\cos x = 0$. De hecho, puesto que $\cos x \to 0^+$ cuando $x \to (\pi/2)^-$ y $\cos x \to 0^-$ cuando $x \to (\pi/2)^+$, mientras que sen x es positivo (cerca de 1) cuando x está cerca de $\pi/2$, se tiene

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\tan x=\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^+}\tan x=-\infty$$

Esto muestra que la recta $x = \pi/2$ es una asíntota vertical. Un razonamiento similar muestra que las rectas $x = \pi/2 + n\pi$, donde n es un número entero, son todas asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$. La gráfica en la figura 16 confirma esto. ■

Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural $y = \ln x$. En la figura 17 se ve que

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

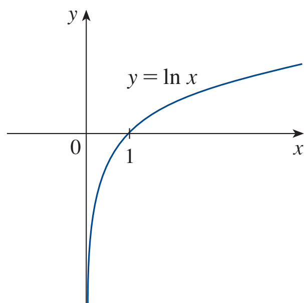


FIGURA 17
El eje y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

y así, la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical. De hecho, lo mismo es cierto para $y = \log_b x$ siempre que $b > 1$. (Véase las figuras 1.5.11 y 1.5.12.)

2.2 EJERCICIOS

1. Explique el significado de la ecuación

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla con este enunciado aunque $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique qué significa decir que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$$

En esta situación, ¿es posible que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$? Explique.

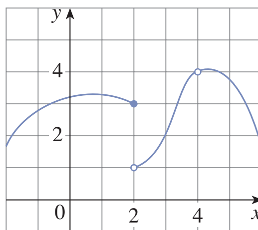
3. Explique el significado de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $\lim_{x\to -5} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

4. Utilice la gráfica de f para establecer el valor de cada cantidad si esta existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

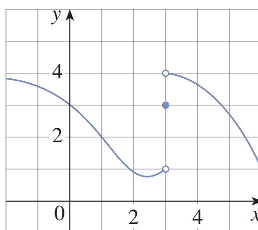
(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x\to 4} f(x)$ (f) $f(4)$



5. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las cantidades siguientes. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



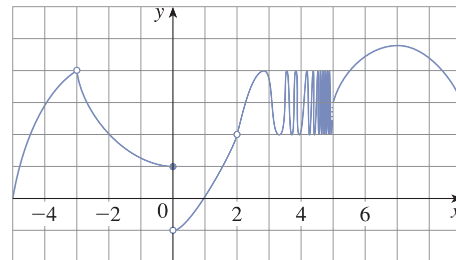
6. Para la función h cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las cantidades siguientes. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x\to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$

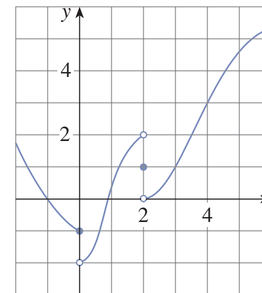


7. Para la función g cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las cantidades siguientes si existe. Si no, explique por qué.

(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$

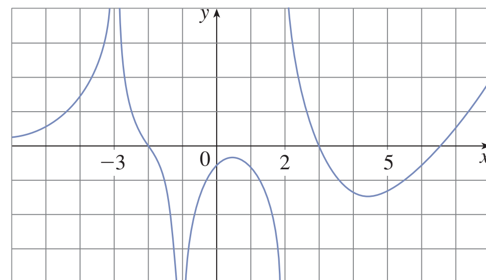


8. Para la función A cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim_{x\to -3} A(x)$ (b) $\lim_{x\to 2^-} A(x)$

(c) $\lim_{x\to 2^+} A(x)$ (d) $\lim_{x\to -1} A(x)$

(e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.

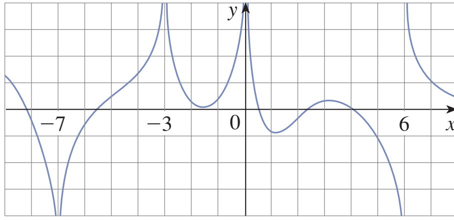


9. Para la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

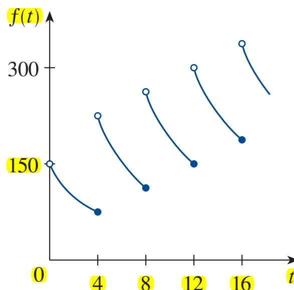
(f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11–12 Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes y utilícela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

13–14 Utilice la gráfica de la función f para establecer el valor de cada uno de los límites siguientes, si es que existen. Si no, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15–18 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

15. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$

16. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ es indefinido

17. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$,
$f(3) = 3$, $f(-2) = 1$

18. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$,
$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0$, $f(0) = 2$, $f(4) = 1$

19–22 Conjeture el valor de cada uno de los límites siguientes (si existen) evaluando la función dada en los números propuestos (con una precisión de seis decimales).

19. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$,
$x = 3.1, 3.05, 3.01, 3.001, 3.0001,$
$2.9, 2.95, 2.99, 2.999, 2.9999$

20. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$,
$x = -2.5, -2.9, -2.95, -2.99, -2.999, -2.9999,$
$-3.5, -3.1, -3.05, -3.01, -3.001, -3.0001$

21. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t}$, $t = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

22. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(4 + h)^3 - 64}{h}$,
$h = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

23–28 Utilice una tabla de valores para calcular el valor de cada uno de los límites siguientes. Si dispone usted de una calculadora o computadora, utilícela para confirmar gráficamente su resultado.

23. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\ln x - \ln 4}{x - 4}$ **24.** $\lim_{p\to -1} \dfrac{1 + p^9}{1 + p^{15}}$

25. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\tan 2\theta}$ **26.** $\lim_{t\to 0} \dfrac{5^t - 1}{t}$

27. $\lim_{x\to 0^+} x^x$ **28.** $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

29. (a) Por medio de la gráfica de la función $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y, calcule el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(b) Verifique su respuesta del inciso (a) mediante la evaluación de $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

30. (a) Calcule el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

al trazar la gráfica de la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Exprese su respuesta con una precisión de dos decimales.
(b) Verifique su respuesta del inciso (a) evaluando $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

31–43 Determine cada uno de los límites infinitos siguientes.

31. $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{x+1}{x-5}$

32. $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{x+1}{x-5}$

33. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

34. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x}}{(x-3)^5}$

35. $\lim_{x\to 5^+} \ln(x^2-25)$

36. $\lim_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen} x)$

37. $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \dfrac{1}{x}\sec x$

38. $\lim_{x\to\pi^-} \cot x$

39. $\lim_{x\to 2\pi^-} x\csc x$

40. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

41. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$

42. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \ln x\right)$

43. $\lim_{x\to 0} (\ln x^2 - x^{-2})$

---

44. (a) Encuentre las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

(b) Verifique su respuesta al inciso (a) al trazar la gráfica de la función.

45. Determine $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3-1}$ y $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3-1}$

(a) evaluando $f(x) = 1/(x^3-1)$ para valores de x que tiendan a 1, por el lado izquierdo y por el lado derecho.

(b) razonando como en el ejemplo 9, y

(c) a partir de la gráfica de f.

46. (a) Por medio de la gráfica de la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y un acercamiento al punto donde la gráfica interseca el eje y, calcule el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Verifique su respuesta del inciso (a) para evaluar $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

47. (a) Calcule el valor de $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$ con una precisión de cinco decimales. ¿Le parece conocido este número?

(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la función $y = (1+x)^{1/x}$.

48. (a) Trace la gráfica de $f(x) = e^x + \ln|x-4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. ¿Piensa que la gráfica es una representación precisa de f?

(b) ¿Cómo conseguiría una gráfica que represente mejor a f?

49. (a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05 e infiera el valor de

$$\lim_{x\to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000}\right)$$

(b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Infiera otra vez.

50. (a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.

(b) Suponga el valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

(c) Evalúe $h(x)$ para valores pequeños sucesivos de x hasta que finalmente alcance un valor de 0 para $h(x)$. ¿Aún confía en que su conjetura en el inciso (b) es correcta? Explique por qué finalmente obtuvo valores 0. (En la sección 4.4 se explicará un método para evaluar el límite.)

(d) Trace la gráfica de la función h en un rectángulo de vista $[1, 1]$ por $[0, 1]$. Después haga un acercamiento hacia el punto donde la gráfica interseca el eje y, para calcular el límite de $h(x)$ cuando x tienda a 0. Continúe el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso (c).

51. Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en el rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Después haga acercamientos al origen varias veces. Haga comentarios acerca del comportamiento de esta función.

52. Considere la función $f(x) = \tan \dfrac{1}{x}$.

(a) Demuestre que $f(x) = 0$ para $x = \dfrac{1}{\pi}, \dfrac{1}{2\pi}, \dfrac{1}{3\pi}, \ldots$

(b) Demuestre que $f(x) = 1$ para $x = \dfrac{4}{\pi}, \dfrac{4}{5\pi}, \dfrac{4}{9\pi}, \ldots$

(c) ¿Qué puede concluir acerca de $\lim_{x\to 0^+} \tan \dfrac{1}{x}$?

53. Utilice una gráfica para calcular las ecuaciones de todas las asíntotas de la curva

$$y = \tan(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Luego determine las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

54. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde $m_0 = 0$ es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c^-$?

55. (a) Utilice una evidencia numérica y gráfica para intuir el valor del límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$$

(b) ¿Qué tan cerca de 1 tiene que estar x para garantizar que la función en el inciso (a) esté dentro de una distancia de 0.5 de este límite?

2.3 Cálculo de límites usando las leyes de los límites

En la sección 2.2 se utilizan calculadoras y gráficas para inferir los valores de un límite, pero se observa que estos métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. En esta sección se utilizan las propiedades de los límites siguientes, llamadas *leyes de los límites*, para calcularlos.

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Estas cinco leyes se pueden expresar verbalmente como sigue:

Ley de la suma **1.** El límite de una suma es la suma de los límites.

Ley de la diferencia **2.** El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

Ley del múltiplo constante **3.** El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

Ley del producto **4.** El límite de un producto es el producto de los límites.

Ley del cociente **5.** El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ está cerca de L y $g(x)$ está cerca de M, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ está muy cerca de $L + M$. Esto da una base intuitiva para creer que la ley 1 es verdadera. En la sección 2.4 se dará una definición precisa de la idea de límite y se utilizará para demostrar esta ley. Las demostraciones del resto de las leyes se presentan en el apéndice F.

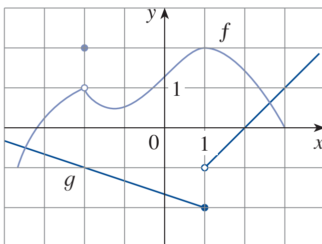


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Utilice las leyes de los límites y las gráficas de f y g en la figura 1 para evaluar los límites siguientes, si es que existen.

(a) $\lim_{x\to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

(a) De las gráficas de f y g se observa que

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -2} g(x) = -1$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)] &= \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)] && \text{(por la ley 1)}\\ &= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) && \text{(por la ley 3)}\\ &= 1+5(-1) = -4\end{aligned}$$

(b) Observe que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

Por lo que no se puede utilizar la ley 4 para el límite deseado, pero *se puede* utilizar para los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to 1^-} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = 2\cdot(-2) = -4$$

$$\lim_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to 1^+} f(x)\cdot \lim_{x\to 1^+} g(x) = 2\cdot(-1) = -2$$

Los límites por la izquierda y por la derecha no son iguales, por lo que $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ no existe.

(c) La gráfica muestra que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

Ya que el límite del denominador es 0, no se puede utilizar la ley 5. El límite dado no existe porque el denominador tiende a 0, mientras que el numerador se acerca a un número diferente de cero. ■

Si se utiliza repetidamente la ley del producto con $g(x) = f(x)$, se obtiene la siguiente ley.

Ley de la potencia

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ donde n es un número entero positivo

En la aplicación de estas seis leyes, se necesitan utilizar dos límites especiales:

7. $\lim_{x\to a} c = c$ **8.** $\lim_{x\to a} x = a$

Estos límites son obvios desde un punto de vista intuitivo (expréselos con palabras o dibuje las gráficas de $y = c$ y $y = x$), pero en los ejercicios de la sección 2.4 se requieren las demostraciones con base en la definición precisa.

Si se hace $f(x) = x$ en la ley 6 y se utiliza la ley 8, se obtiene otra forma especial de límite.

9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo

Un límite similar que es válido para raíces es el siguiente. (Para la raíz cuadrada, la demostración se resume en el ejercicio 2.4.37.)

10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo
(Si n es par, se supone que $a > 0$.)

Más generalmente, se tiene la ley siguiente que se demuestra en la sección 2.5 como una consecuencia de la ley 10.

Ley de la raíz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo

$\left[\text{Si } n \text{ es par, se supone que } \lim_{x \to a} f(x) > 0.\right]$

Newton y los límites

Isaac Newton nació el día de Navidad en 1642, año en que murió Galileo. Cuando entró en la Universidad de Cambridge en 1661, Newton no sabía muchas matemáticas, pero aprendió rápidamente leyendo a Euclides y Descartes, y asistiendo a las conferencias de Isaac Barrow. Cambridge fue cerrada a causa de la peste en 1665 y 1666, y Newton regresó a su casa a reflexionar sobre lo que había aprendido. Esos dos años fueron extraordinariamente productivos porque hizo cuatro de sus descubrimientos más importantes: 1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; 2) su trabajo sobre el cálculo diferencial e integral; 3) sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal y 4) sus experimentos con el prisma relacionados con la naturaleza de la luz y el color. Debido a un temor a la controversia y la crítica, se mostró reacio a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, a instancias del astrónomo Halley, que Newton publicó *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton expone su versión del cálculo y su utilización en la investigación de la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como en la explicación del movimiento de los planetas y los cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en los procedimientos para obtener áreas y volúmenes ideados por los antiguos sabios griegos Eudoxo y Arquímedes. A pesar de que los aspectos de la idea de límite están implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxo y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de límite. Tampoco matemáticos como Cavalieri, Fermat ni Barrow, antecesores inmediatos de Newton en el desarrollo del cálculo, utilizaron los límites. Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente de límites. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se acercan más que cualquier diferencia dada". Newton dijo que el límite era el concepto básico en el cálculo, pero fue el posterior trabajo de matemáticos como Cauchy y otros más el que finalmente clarificó las ideas relacionadas con los límites.

EJEMPLO 2 Evalúe los límites siguientes y justifique cada paso

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por las leyes 1 y 2)}\\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por la ley 3)}\\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}\\ &= 39\end{aligned}$$

(b) Empiece utilizando la ley 5, pero su uso está completamente justificado solo en la etapa final cuando observe que los límites del numerador y el denominador existen y el límite del denominador no es cero.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} && \text{(por la ley 5)}\\ &= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} && \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}\\ &= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{(por las leyes 9, 8 y 7)}\\ &= -\frac{1}{11}\end{aligned}$$

■

NOTA Si se hace $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habría obtenido la respuesta correcta del ejemplo 2(a) sustituyendo 5 por x. Del mismo modo, la sustitución directa aporta la respuesta correcta en el inciso (b). Las funciones en el ejemplo 2 son una función polinomial y una función racional, respectivamente, y el mismo uso de las leyes de los límites demuestra que la sustitución directa siempre sirve para este tipo de funciones (Véase los ejercicios 57 y 58). Este hecho se expresa de la manera siguiente:

Propiedad de sustitución directa Si f es una función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con la propiedad de sustitución directa se llaman *continuas en a* y se estudiaran en la sección 2.5. Sin embargo, no todos los límites se pueden evaluar por sustitución directa, como se muestra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No se puede encontrar el límite por sustitución directa de $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Tampoco se puede aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. Así, se necesita de un proceso algebraico preliminar. Factorizando el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

Observe que en el ejemplo 3 no se tiene un límite infinito a pesar de que el denominador tiende a 0 cuando $x \to 1$. Cuando tanto el numerador como el denominador tienden a 0, el límite puede ser infinito o puede tener algún valor finito.

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando se toma el límite cuando tiende a 1, se tiene que $x \neq 1$ y, por tanto, $x - 1 \neq 0$. Así, se puede eliminar el factor común y calcular el límite por sustitución directa como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

El límite en este ejemplo surgió en la sección 2.1.1 cuando se intenta encontrar la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). ■

NOTA En el ejemplo 3 se pudo calcular el límite sustituyendo la función dada, $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, por la función más sencilla, $g(x) = x + 1$, con el mismo límite. Esto es válido ya que $f(x) = g(x)$, excepto cuando $x = 1$, y al calcular el límite cuando x tiende a 1, no se considera qué sucede cuando x es en realidad *igual* a 1. En general, se tiene el hecho útil siguiente.

> Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, siempre que el límite exista.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 1} g(x)$ donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{Si } x \neq 1 \\ \pi & \text{Si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aquí g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor del límite cuando x *tiende a* 1, no depende del valor de la función *en* 1. Ya que $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, se tiene

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$ ■

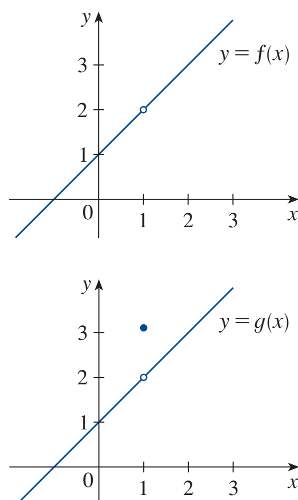


FIGURA 2
Las gráficas de las funciones f (del ejemplo 3) y g (del ejemplo 4)

Observe que los valores de las funciones en los ejemplos 3 y 4 son idénticos, excepto cuando $x = 1$ (véase la figura 2) y tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si se define

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

entonces, como en el ejemplo 3, no se puede calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ haciendo que $h = 0$, ya que $F(0)$ es indefinida. Pero si se simplifica algebraicamente $F(h)$, se encuentra que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que se considera solo $h \neq 0$ cuando se hace que h tienda a 0.) Así

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No se puede aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9} + 3}{\sqrt{t^2+9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2+9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2+9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Aquí se utilizan varias propiedades de los límites de (5, 1, 10, 7, 9).

Este cálculo confirma la conjetura que se hizo en el ejemplo 2.2.2. ■

Algunos límites se calculan mejor encontrando primero los límites por la izquierda y por la derecha. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Se dice que los límites por los dos lados existen si y solo si ambos límites existen y son iguales.

1 Teorema $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Cuando se calculan los límites laterales, se utiliza el hecho de que las leyes de los límites también son válidas para los límites laterales.

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Al ver la figura 3, el resultado del ejemplo 7 parece razonable.

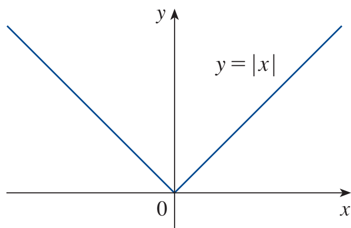


FIGURA 3

Dado que $|x| = x$ para $x > 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$ se tiene $|x| = -x$ así que

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

Por tanto, por el teorema 1,

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$ ■

EJEMPLO 8 Demuestre que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

SOLUCIÓN Usando que $|x| = x$ cuando $x > 0$ y $|x| = -x$ cuando $x < 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

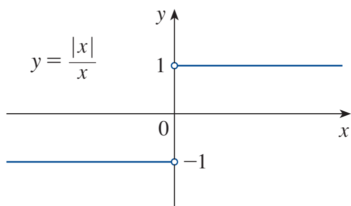


FIGURA 4

Puesto que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, se sigue, del teorema 1, que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se presenta en la figura 4 y exhibe la coincidencia con los límites laterales que se encuentran. ■

EJEMPLO 9 Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe.

En el ejemplo 2.4.3 se muestra que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN Ya que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, se tiene

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

Dado que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, se tiene

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

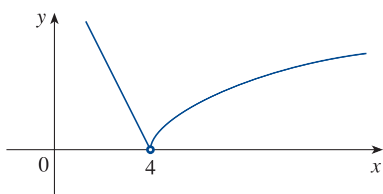


FIGURA 5

Los límites por la izquierda y por la derecha son iguales. Por lo que el límite existe y

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$$

La gráfica de f se muestra en la figura 5. ■

Otras notaciones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. A veces, la función parte entera se llama *función piso*.

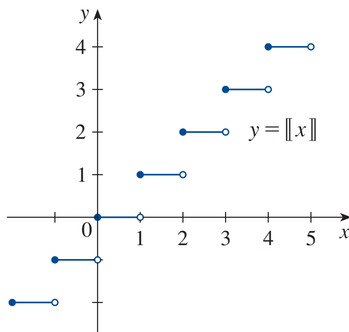


FIGURA 6
Función parte entera

EJEMPLO 10 La **función parte entera** está definida por $[\![x]\!]$ = el mayor entero que es menor que o igual a x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x\to 3}[\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN La gráfica de la función parte entera se muestra en la figura 6. Ya que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, se tiene

$$\lim_{x\to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^+} 3 = 3$$

Ya que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, se tiene

$$\lim_{x\to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^-} 2 = 2$$

Ya que estos límites laterales no son iguales, $\lim_{x\to 3}[\![x]\!]$ no existe por el teorema 1. ■

Los dos teoremas siguientes dan dos propiedades adicionales para los límites. Sus demostraciones se encuentran en el apéndice F.

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a) y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$$

3 El teorema de la compresión Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x tiende a a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

entonces $$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

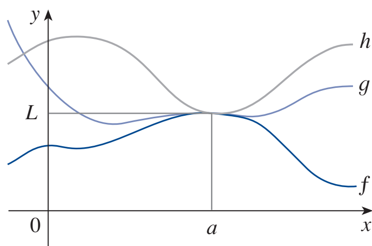


FIGURA 7

El teorema de la compresión, llamado a veces teorema del sándwich o del apretón, se ilustra en la figura 7. Se dice que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces g es forzada a tener el mismo límite L en a.

EJEMPLO 11 Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Primero observe que **no puede** utilizar



$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

ya que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 2.2.4).

En su lugar se aplica el teorema de la compresión, por lo que se tiene que encontrar una función f menor que $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y una función h mayor que g tal que tanto $f(x)$

como $h(x)$ tiendan a 0. Para hacer esto, se utiliza lo que se sabe de la función seno. Ya que el seno de cualquier número está entre -1 y 1, se puede escribir

$$\boxed{4} \qquad -1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

Cualquier desigualdad permanece válida cuando se multiplica por un número positivo. Se sabe que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, así multiplicando cada lado de la desigualdad en (4) por x^2, se obtiene

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

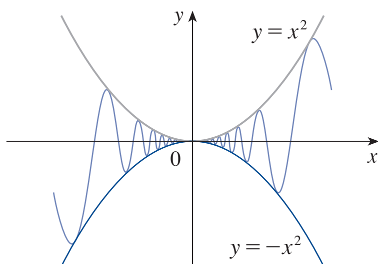


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

como se ilustra en la figura 8. Se sabe que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ del teorema de la compresión, se obtiene

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$ ■

2.3 EJERCICIOS

1. Dado que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 0$$

encuentre los límites que existen. Si el límite no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

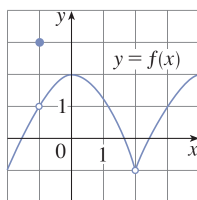
(e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

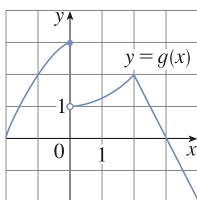
2. Las gráficas de f y g están dadas. Utilícelas para evaluar cada límite si es que existe. Si el límite no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)]$

(c) $\lim_{x \to -1} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} [x^2 f(x)]$ (f) $f(-1) + \lim_{x \to -1} g(x)$





3–9 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las leyes de los límites apropiadas.

3. $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x \to -1} (x^2 + x)(3x^2 + 6)$

5. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 8} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5}\right)^2$

9. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. (a) ¿Cuál es el error en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Usando el inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

11–32 Evalúe cada uno de los límites siguientes si existen.

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12}$

13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 12}$

15. $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^3-27}$

20. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^4-1}{t^3-1}$

21. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$

22. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$

23. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}}{x-3}$

24. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

26. $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

27. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^4-3x^2-4}$

29. $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

32. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

33. (a) Calcule el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

al trazar la gráfica de la función $f(x) = x/(\sqrt{1+3x}-1)$.

(b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0 e infiera el valor del límite.

(c) Utilice las leyes de los límites para demostrar que su conjetura es correcta.

34. (a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$$

para calcular el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ con dos decimales.

(b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para calcular el límite con cuatro decimales.

(c) Utilice las leyes de los límites para encontrar el valor exacto del límite.

35. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre trazando las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ al trazar la gráfica en la misma pantalla.

36. Utilice el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+x^2}\, \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$$

Ilústrelo con las gráficas de las funciones f, g y h (en la notación del teorema de la compresión), en la misma pantalla.

37. Si $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encuentre $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

38. Si $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para toda x, evalúe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

39. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos\dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

41–46 Encuentre cada uno de los límites siguientes si estos existen. Si el límite no existe, explique por qué.

41. $\lim\limits_{x\to 3} (2x + |x-3|)$

42. $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{2x+12}{|x+6|}$

43. $\lim\limits_{x\to 0.5^-} \dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

44. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2-|x|}{2+x}$

45. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

46. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

47. La función *signum* (o signo), que se denota por sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Trace la gráfica de esta función.

(b) Encuentre cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existen.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim\limits_{x\downarrow 0^-} \operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Sea $g(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$.

(a) Encuentre cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existen.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

(iv) $\lim\limits_{x\to \pi^+} g(x)$ (v) $\lim\limits_{x\to \pi^-} g(x)$ (vi) $\lim\limits_{x\to \pi} g(x)$

(b) Para qué valores de a ¿no existe $\lim_{x\to a} g(x)$?

(c) Trace la gráfica de g.

49. Sea $g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{|x-2|}$.

(a) Encuentre

(i) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

(b) ¿Existe $\lim_{x\to 2} g(x)$?

(c) Trace la gráfica de g.

50. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Encuentre $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

(b) ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

(c) Trace la gráfica de f.

51. Sea

$$B(t) = \begin{cases} 4 - \frac{1}{2}t & \text{si } t < 2 \\ \sqrt{t+c} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

Determine el valor de c tal que $\lim\limits_{t\to 2} B(t)$ exista.

52. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada una de los límites siguientes si es que existen.

(i) $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(b) Trace la gráfica de g.

53. (a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función parte entera definida en el ejemplo 10, evalúe:

(i) $\lim_{x \to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x \to -2.4} [\![x]\!]$

(b) Si n es un entero, evalúe

(i) $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$

(c) ¿Para qué valores de a existe el $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$?

54. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Trace la gráfica de f.

(b) Evalúe cada uno de los límites siguientes si existen.

(i) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to \pi/2} f(x)$

(c) ¿Para qué valores de a existe el $\lim_{x \to a} f(x)$?

55. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, muestre que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, pero no es igual a $f(2)$.

56. En la teoría de la relatividad, la fórmula de contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario el límite lateral por la izquierda?

57. Si p es una función polinomial, demuestre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

58. Si r es una función racional, utilice el ejercicio 57 para demostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a en el dominio de r.

59. Si $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$ encuentre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

60. Si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$ encuentre cada uno de los límites siguientes.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

61. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

62. Demuestre por medio de un ejemplo que puede existir el $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$, aunque no exista el $\lim_{x \to a} f(x)$ ni el $\lim_{x \to a} g(x)$.

63. Demuestre por medio de un ejemplo que puede existir el $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$, aunque no exista el $\lim_{x \to a} f(x)$ ni el $\lim_{x \to a} g(x)$.

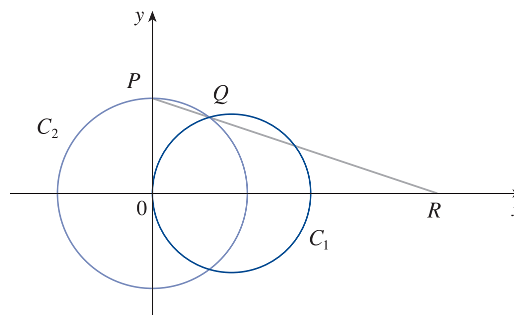
64. Evalúe $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

65. ¿Existe un número a tal que exista el

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}?$$

Si es así, encuentre el valor de a y el valor del límite.

66. La figura muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 con radio r y centro en el origen que se contrae. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de las dos circunferencias y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje de las x. ¿Qué pasa con R cuando C_2 se contrae, esto es, cuando $r \to 0^+$?



2.4 Definición precisa de límite

La definición intuitiva de límite dada en la sección 2.2 es inadecuada para algunos propósitos porque frases como "x es muy cercano a 2" y "$f(x)$ se acerca más y más a L" son muy vagas. Para demostrar convincentemente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0.0001 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

se debe precisar la definición de límite.

Para motivar la definición precisa de límite, considere la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Intuitivamente, es claro que cuando x está cerca de 3, pero $x \neq 3$, entonces $f(x)$ está cerca de 5, y así $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Para obtener una información más detallada de cómo varía $f(x)$ cuando x está cerca de 3, habrá que preguntar:

¿Qué tan cerca tiene que estar x de 3 para que $f(x)$ difiera de 5 en menos de 0.1?

Es tradición usar la letra griega δ (delta) en este caso.

La distancia de x a 3 es $|x - 3|$, y la distancia de $f(x)$ a 5 es $|f(x) - 5|$, por lo que el problema es encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad |x - 3| < \delta \quad \text{pero } x \neq 3$$

Si $|x - 3| > 0$, entonces $x \neq 3$, por lo que una formulación equivalente del problema es encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que si $0 < |x - 3| < 0.1/2 = 0.05$, entonces

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0.05) = 0.1$$

esto es, $$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.05$$

Así, una respuesta al problema está dada por $\delta = 0.05$; esto es, si x está dentro de una distancia de 0.05 de 3, entonces $f(x)$ deberá estar dentro de una distancia de 0.1 de 5.

Si se cambia el número 0.1 en el problema por el número menor 0.01, entonces, utilizando el mismo método, se encuentra que $f(x)$ diferirá de 5 por menos de 0.01 siempre que x difiera de 3 por menos de $(0.01)/2 = 0.005$:

$$|f(x) - 5| < 0.01 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.005$$

Del mismo modo,

$$|f(x) - 5| < 0.001 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.0005$$

Los números 0.1, 0.01 y 0.001 que ha considerado son las *tolerancias de error* que puede permitir. Para que 5 sea el límite exacto de $f(x)$ cuando x tiende a 3, se debe no solo poder hacer la diferencia entre $f(x)$ y 5 por debajo de cada uno de estos tres números; también se debe ser capaz de estar por debajo de *cualquier* número positivo. Y, por el mismo razonamiento, ¡claro que es posible! Si se escribe ε (la letra griega épsilon) para un número positivo arbitrario, entonces se encuentra al igual que antes

1 $$|f(x) - 5| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta es una forma precisa de decir que $f(x)$ está cerca de 5 cuando x se acerca a 3 porque (1) dice que puede hacer que los valores de $f(x)$ queden dentro de una distancia arbitraria ε a partir de 5, tomando los valores de x dentro de una distancia $\varepsilon/2$ de 3 (pero $x \neq 3$).

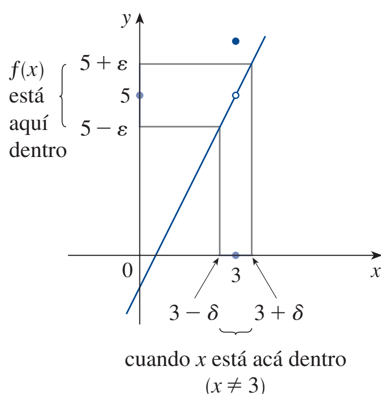


FIGURA 1

Note que (1) se puede reescribir como sigue:

$$\text{Si} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3) \qquad \text{entonces} \qquad 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

y se ilustra en la figura 1. Tomando los valores de x ($\neq 3$) en el intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, se puede lograr que los valores de $f(x)$ estén en el intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Utilizando (1) como un modelo, se da una definición precisa de límite.

2 Definición precisa de un límite Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L**, y se expresa como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Puesto que $|x - a|$ es la distancia de x a a y $|f(x) - L|$ es la distancia de $f(x)$ a L, y como ε puede ser arbitrariamente pequeña, la definición de límite se puede expresar en palabras como sigue:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse arbitrariamente pequeña, tomando la distancia de x a a suficientemente pequeña (pero no 0).

Alternamente,

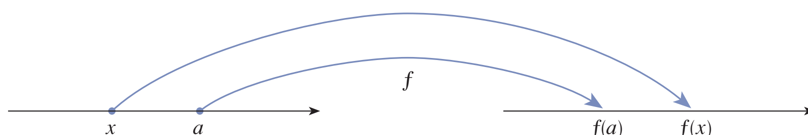
> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse tan cercanos a L como se quiera, tomando x suficientemente cerca de a (pero no igual a a).

También se puede reformular la definición 2 en términos de intervalos, observando que la desigualdad $|x - a| < \delta$ es equivalente a $-\delta < |x - a| < \delta$, que puede escribirse como $a - \delta < x < a + \delta$. Además, $0 < |x - a|$ es verdadera si y solo si $x - a \neq 0$; esto es, $x \neq$ a. Del mismo modo, la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente al par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Por tanto, en términos de intervalos, la definición 2 se puede establecer como sigue:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para toda $\varepsilon > 0$ (sin importar qué tan pequeña sea ε), se puede encontrar una $\delta > 0$ tal que si x está dentro del intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está dentro del intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Geométricamente, este enunciado se interpreta representando una función por un diagrama de flechas, como en la figura 2, donde f hace corresponder un subconjunto de $\mathbb{R}$ con otro subconjunto de $\mathbb{R}$.

FIGURA 2



La definición de límite dice que si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ está dado alrededor de L, entonces se puede encontrar un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ alrededor de a tal que f mapea todos los puntos de $(a - \delta, a + \delta)$ (excepto posiblemente a a) en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Véase la figura 3.)

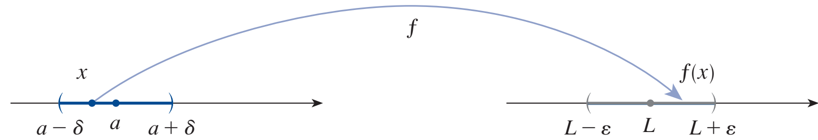


FIGURA 3

Geométricamente, puede darse otra interpretación de límite en términos de la gráfica de una función. Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces se dibujan las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$, y $y = L - \varepsilon$ y la gráfica de f (véase la figura 4). Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que si se restringe a x en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ y se toma $x \neq$ a, entonces la curva $y = f(x)$ está entre las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$. (Véase la figura 5.) Puede usted ver que si se encuentra tal δ, entonces cualquier δ más pequeña también funcionará.

Es importante darse cuenta de que el proceso ilustrado en las figuras 4 y 5 debe funcionar para *todo* número positivo ε, sin importar qué tan pequeño se elija. En la figura 6 se muestra que si se elige un ε más pequeño, entonces se podría requerir una δ más pequeña.

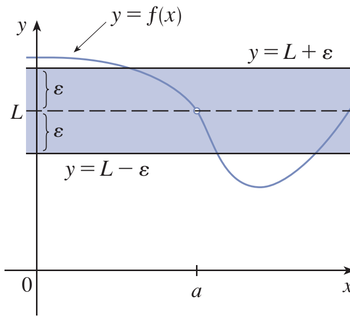


FIGURA 4

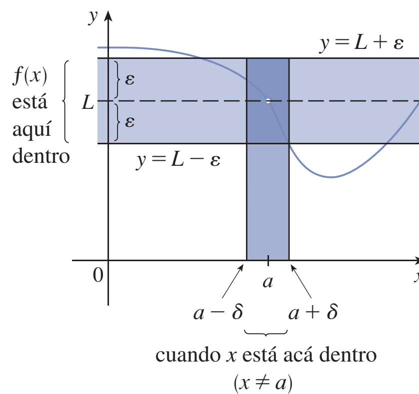


FIGURA 5

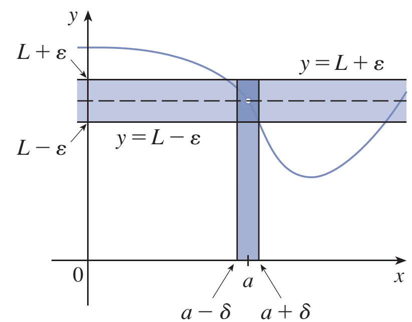


FIGURA 6

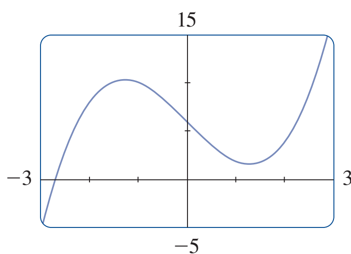


FIGURA 7

EJEMPLO 1 Ya que $f(x) = x^3 - 5x + 6$ es un polinomio, se sabe por la propiedad de la sustitución directa que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1^3 - 5(1) + 6 = 2$. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que si x está a menos de δ desde 1, entonces y está a menos de 0.2 desde 2, esto es,

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

En otras palabras, encuentre un número δ que corresponda a $\varepsilon = 0.2$ en la definición de un límite para la función $f(x) = x^3 - 5x + 6 = 1$ con $a = 1$ y $L = 2$.

SOLUCIÓN En la figura 7 se muestra una gráfica de f; se está interesado en la región cerca del punto (1, 2). Observe que puede reescribir la desigualdad

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

como

$$-0.2 < (x^3 - 5x + 6) - 2 < 0.2$$

o en forma equivalente

$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

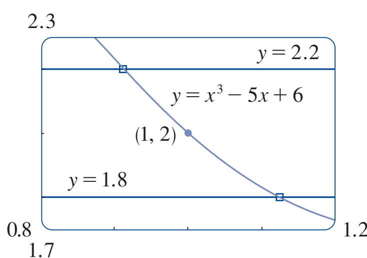


FIGURA 8

Por lo que necesita determinar los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está entre las rectas horizontales $y = 1.8$ y $y = 2.2$. Por eso, grafique las curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1.8$ y $y = 2.2$ cerca del punto (1, 2) en la figura 8. Después

utilice el cursor para calcular que la coordenada x del punto de intersección de la recta $y = 2.2$ y la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está cerca de 0.911. Del mismo modo, $y = x^3 - 5x + 6$ interseca la recta $y = 1.8$ cuando $x \approx 1.124$. Así, al redondear hacia 1 para estar seguro, se puede decir que

$$\text{si} \quad 0.92 < x < 1.12 \quad \text{entonces} \quad 1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

Este intervalo (0.92, 1.12) no es simétrico con respecto a $x = 1$. La distancia de $x = 1$ al punto extremo izquierdo es $1 - 0.92 = 0.08$, y la distancia al punto final derecho es 0.12. Es posible elegir a δ como el menor de estos números, esto es, $\delta = 0.08$. Entonces, se puede reescribir las desigualdades en términos de distancias como sigue:

$$\text{si} \quad |x - 1| < 0.08 \quad \text{entonces} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

Esto dice justamente que manteniendo a x dentro del 0.08 de 1, se mantiene $f(x)$ dentro del 0.2 de 2.

Aunque seleccione $\delta = 0.08$, cualquier valor positivo más pequeño también habría funcionado. ■

El procedimiento gráfico en el ejemplo 1 proporciona una ilustración de la definición para $\varepsilon = 0.2$, pero no *demuestra* que el límite es igual a 2. Una demostración tiene que proporcionar una δ para *toda* ε.

Para pulir los enunciados de límite sería útil pensar en la definición de límite como un desafío. Primero lo retan con un número ε. Después, debe usted ser capaz de producir una δ adecuada. Debe ser capaz de hacerlo para *toda* $\varepsilon > 0$, no solo para una ε en particular.

TEC En Module 2.4/2.6 usted puede explorar la definición precisa de límite de una forma gráfica y numérica.

Imagine una contienda entre dos personas A y B, en la que usted es B. La persona A le indica que se debe aproximar al número fijo L por medio de valores de $f(x)$ dentro de un grado de exactitud ε, (digamos 0.01). Por tanto, la persona B responde determinando un número δ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Luego, A podría exigir aún más y desafío a B con un valor más pequeño de δ, (digamos 0.0001). Una vez más, B tiene que responder encontrando una δ apropiada. Usualmente, a medida que el valor de ε es más pequeño, el correspondiente valor de δ se reduce. Si B siempre gana, sin importar qué tan pequeño haga A a ε, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

EJEMPLO 2 Pruebe que $\lim_{x\to 3}(4x - 5) = 7$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema* (*intuir un valor para* δ). Sea ε un número positivo dado. Encuentre un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Pero $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Por tanto, se quiere una δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

$$\text{esto es,} \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Esto sugiere que debe elegir $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Demostración* (*demostrar que esta* δ *funciona*). Dado $\varepsilon > 0$, elija $\delta = \varepsilon/4$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Así

$$\text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Por tanto, por la definición de límite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este ejemplo se ilustra en la figura 9.

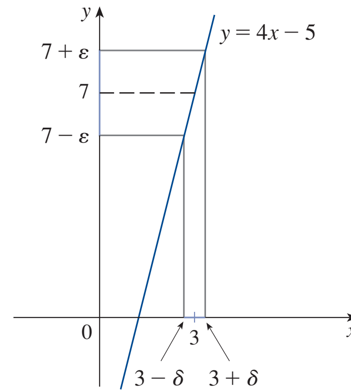


FIGURA 9

■

Cauchy y los límites

Después de la invención del cálculo en el siglo XVII, siguió un período de fecundo desarrollo de la materia en el siglo XVIII. Matemáticos como Euler y los hermanos Bernoulli estaban ansiosos por aprovechar el potencial del cálculo, por lo que exploraron audazmente las consecuencias de esta nueva y maravillosa teoría matemática, sin preocuparse demasiado por si sus demostraciones eran completamente correctas.

El siglo XIX, por el contrario, fue la Edad del Rigor en matemáticas. Hubo un movimiento para volver a los fundamentos del tema, para proporcionar cuidadosas definiciones y rigurosas demostraciones. A la vanguardia de este movimiento estaba el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857), que comenzó como ingeniero militar antes de convertirse en profesor de matemáticas en París. Cauchy tomó la idea de Newton de límite, que mantuvo viva el matemático francés Jean d'Alembert, en el siglo XVIII, haciéndola más precisa. Su definición de un límite se lee así: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para terminar difiriendo por tan poco como uno quiera, esto se llama el *límite* de los otros". Pero cuando Cauchy aplicaba esta definición en ejemplos y demostraciones, utilizaba a menudo desigualdades delta-épsilon similares a las de esta sección. Una demostración típica de Cauchy comienza con: "designar por δ y ε dos números muy pequeños; ...". Utilizaba ε debido a la correspondencia entre épsilon y la palabra francesa *erreur* y δ ya que la delta corresponde a la palabra francesa *différence*. Después, el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) estableció la definición de límite exactamente como en nuestra definición 2.

Observe que en la solución del ejemplo 2 hay dos etapas: intuir y verificar. Se efectuó un análisis preliminar que posibilitó suponer un valor de δ. Pero luego, en la segunda etapa, se tuvo que regresar y verificar en forma cuidadosa y lógica que dio una opinión correcta. Este procedimiento es característico de gran parte de las matemáticas. Algunas veces se necesita hacer primero una conjetura inteligente con respecto a la respuesta de un problema y luego demostrar que la suposición es correcta.

Las definiciones intuitivas de límites laterales que se presentan en la sección 2.2 se pueden reformular de la forma siguiente.

3 Definición de límite por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad a - \delta < x < a \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

4 Definición de límite por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad a < x < a + \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observe que la definición 3 es la misma que la definición 2, excepto que x está restringida a encontrarse en la mitad *izquierda* $(a - \delta, a)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. En la definición 4, x está restringida a encontrarse en la mitad *derecha* $(a, a + \delta)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

EJEMPLO 3 Utilice la definición 4 para demostrar que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN

1. *Infiera un valor para* δ. Sea ε un número positivo dado. Aquí $a = 0$ y $L = 0$, por lo que se quiere encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \sqrt{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

esto es,
$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

o, elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad $\sqrt{x} < \varepsilon$, se obtiene

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad x < \varepsilon^2$$

Esto sugiere que se debe elegir $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Demuestre que esta* δ *funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon^2$. Si $0 < x < \delta$, entonces

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

así,
$$\left| \sqrt{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

De acuerdo con la definición 4, esto demuestra que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$. ■

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

SOLUCIÓN

1. *Infiera un valor para* δ. Sea $\varepsilon > 0$ un valor dado. Se tiene que encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Para relacionar $|x^2 - 9|$ con $|x - 3|$ se escribe $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Entonces queremos que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x + 3||x - 3| < \varepsilon$$

Observe que si se puede encontrar un número constante positivo C tal que $|x + 3| < C$, entonces

$$|x + 3||x - 3| < C|x - 3|$$

y se puede hacer $C|x - 3| < \varepsilon$ tomando $|x - 3| < \varepsilon/C$, así podría elegir $\delta = \varepsilon/C$.

Puede encontrar tal número C si restringe x a algún intervalo centrado en 3. De hecho, esté interesado solo en valores de x que se encuentren en un intervalo centrado en 3. Ya que en efecto solo le interesan los valores de x que sean cercanos a 3, por lo que es razonable suponer que x está dentro de una distancia de 1 de 3, esto es, $|x - 3| < 1$. Entonces $2 < x < 4$, por lo que $5 < x + 3 < 7$. Así, se tiene que $|x + 3| < 7$, y, por tanto, $C = 7$ es una elección adecuada para la constante.

Pero ahora hay dos restricciones sobre $|x + 3|$, a saber

$$|x - 3| < 1 \quad \text{y} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para asegurar que ambas desigualdades se satisfacen, tome δ como el menor de los dos números 1 y $\varepsilon/7$. La notación para esto es $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Demuestre que esta δ funciona.* Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como en el inciso 1). También se tiene $|x - 3| < \varepsilon/7$, así que

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Esto demuestra que $\text{lím}_{x \to 3} x^2 = 9$. ■

Como se ilustra en el ejemplo 4, no siempre es fácil demostrar que los enunciados de límite son verdaderos utilizando la definición ε, δ. De hecho, si se tiene una función más complicada como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, una demostración requeriría una gran cantidad de ingenio. Afortunadamente, esto es innecesario porque las leyes de los límites establecidas en la sección 2.3 se pueden demostrar utilizando la definición 2, y luego los límites de funciones complicadas pueden determinarse en forma rigurosa a partir de estas leyes, sin recurrir directamente a la definición.

Por ejemplo, a continuación se demuestra la ley de la suma: si $\text{lím}_{x \to a} g(x) = L$ y $\text{lím}_{x \to a} f(x) = M$ ambos existen, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Las leyes restantes se demuestran en los ejercicios y en el apéndice F.

Desigualdad del triángulo:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

(Véase el apéndice A).

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LA SUMA Sea $\varepsilon > 0$. Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Utilizando la desigualdad del triángulo se puede escribir

5
$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Haga $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor que ε haciendo cada uno de los términos $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ menores que $\varepsilon/2$.

Dado que $\varepsilon/2 > 0$ y $\text{lím}_{x \to a} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Del mismo modo, puesto que $\text{lím}_{x \to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, el menor de los números δ_1 y δ_2. Observe que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

y así
$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, por 5,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Para resumir,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Así, por la definición de límite,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

■

Límites infinitos

Los límites infinitos también se pueden definir de manera precisa. La siguiente es una versión exacta de la definición 2.2.4.

6 Definición precisa de un límite infinito Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un número positivo tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) > M$$

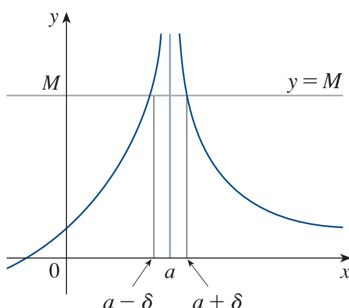


FIGURA 10

Esto dice que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (más grandes que cualquier número M dado), tomando x suficientemente cercana a a (dentro de una distancia δ, donde δ depende de M, pero con $x \neq a$). Una ilustración geométrica se muestra en la figura 10.

Dada cualquier recta horizontal $y = M$, puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que si se restringe x al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, pero $x \neq a$, entonces la curva $y = f(x)$ está por encima de la recta $y = M$. Usted puede ver que si se elige un valor muy grande de M, entonces se requiere un δ muy pequeño.

EJEMPLO 5 Utilice la definición 6, para demostrar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

SOLUCIÓN Sea M un número positivo dado. Se quiere encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x| < \delta \quad \text{entonces} \quad 1/x^2 > M$$

Pero $$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff \sqrt{x^2} < \sqrt{\frac{1}{M}} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Por lo que si se elige $\delta = 1/\sqrt{M}$ y $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, entonces $1/x^2 > M$. Esto muestra que $1/x^2 \to \infty$ conforme $x \to 0$. ■

Del mismo modo, la siguiente es una versión precisa de la definición 2.2.5. Esto se ilustra en la figura 11.

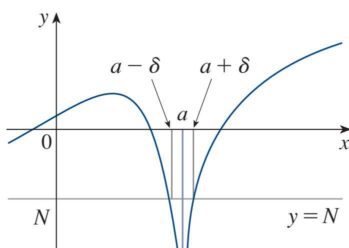


FIGURA 11

7 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

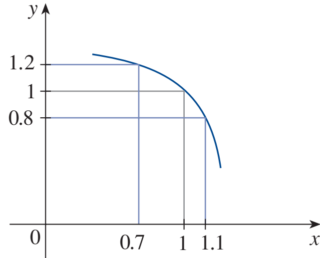
significa que para todo número negativo N existe un número positivo δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

2.4 EJERCICIOS

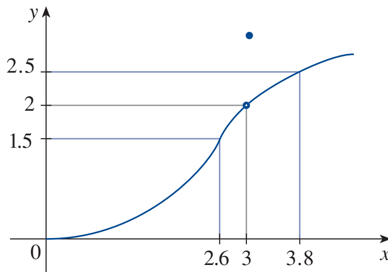
1. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

si $\quad |x - 1| < \delta \quad$ entonces $\quad |f(x) - 1| < 0.2$



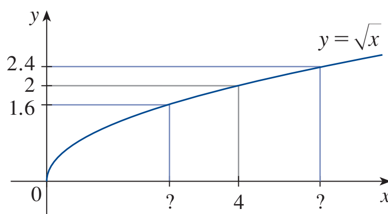
2. Utilice la gráfica de f para encontrar un número δ tal que

si $\quad 0 < |x - 3| < \delta \quad$ entonces $\quad |f(x) - 2| < 0.5$



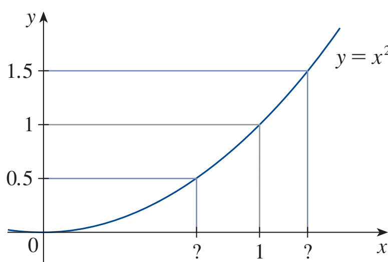
3. Utilice la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número tal δ que

si $\quad |x - 4| < \delta \quad$ entonces $\quad |\sqrt{x} - 2| < 0.4$



4. Utilice la gráfica dada de $f(x) = x^2$ para encontrar un número δ tal que

si $\quad |x - 1| < \delta \quad$ entonces $\quad |x^2 - 1| < \frac{1}{2}$



5. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

si $\quad \left|x - \dfrac{\pi}{4}\right| < \delta \quad$ entonces $\quad |\tan x - 1| < 0.2$

6. Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

si $\quad |x - 1| < \delta \quad$ entonces $\quad \left|\dfrac{2x}{x^2 + 4} - 0.4\right| < 0.1$

7. Para el límite

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 3x + 4) = 6$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = 0.1$.

8. Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

ilustre la definición 2 para encontrar valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

9. (a) Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

si $\quad 2 < x < 2 + \delta \quad$ entonces $\quad \dfrac{1}{\ln(x - 1)} > 100$

(b) ¿Qué límite sugiere el inciso (a) que es verdadero?

10. Dado que $\lim_{x \to \pi} \csc^2 x = \infty$, ilustre la definición 6, encontrando valores de δ que corresponden a (a) $M = 500$ y (b) $M = 1000$.

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco metálico circular con 1000 cm^2 de área.

(a) ¿Qué radio produce tal disco?

(b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm^2 en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso (a) debe el tornero mantener el radio?

(c) En términos de la definición ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿Qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Un horno de confección de cristales se utiliza en la investigación para determinar la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el idóneo, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la potencia de entrada en watts.

(a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200 °C?

(b) Si se permite una variación de temperatura de 200 °C en ±1 °C, ¿qué intervalo en watts se permite para la potencia de entrada?

(c) De acuerdo con la definición ε, δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

13. (a) Encuentre un número δ tal que si $|x - 3| < \delta$, entonces $|5x - 15| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.
(b) Repita el inciso (a) con $\varepsilon = 0.01$.

14. Dado que $\lim_{x\to 2}(5x - 7) = 3$, ilustre la definición 2 encontrando valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ y $\varepsilon = 0.01$.

15–18 Demuestre cada una de las proposiciones siguientes utilizando la definición ε, δ de límite e ilústrelo con un diagrama como el de la figura 9.

15. $\lim_{x\to 3}\left(1 + \frac{1}{3}x\right) = 2$

16. $\lim_{x\to 4}(2x - 5) = 3$

17. $\lim_{x\to 1}(2x + 3) = 5$

18. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

19–32 Demuestre cada una de los enunciados siguientes utilizando la definición ε, δ de límite.

19. $\lim_{x\to 1}\dfrac{2 + 4x}{3} = 2$

20. $\lim_{x\to 10}\left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

21. $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} = 6$

22. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

23. $\lim_{x\to a} x = a$

24. $\lim_{x\to a} c = c$

25. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x\to -6^+}\sqrt[8]{6 + x} = 0$

29. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 7) = 1$

31. $\lim_{x\to -2}(x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que otra posible elección para mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ en el ejemplo 4 es $\delta = \text{mín}\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique con argumentos geométricos que la mayor elección de δ para demostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ es $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

SAC **35.** (a) Para el límite $\lim_{x\to 1}(x^3 + x + 1) = 3$, utilice una gráfica para encontrar un valor que corresponda a $\varepsilon = 0.4$.
(b) Utilizando un sistema algebraico computacional para resolver la ecuación cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, encuentre el mayor valor posible de δ que funciona para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.
(c) Ponga $\varepsilon = 0.4$ en su repuesta del inciso (b) y compárela con su respuesta del inciso (a).

36. Demuestre que $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

37. Demuestre $\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

$$\left[\textit{Sugerencia:}\text{ utilice } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$$

38. Si H es la función de Heaviside definida en el ejemplo 2.2.6, demuestre, utilizando la definición 2, que $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe. [*Sugerencia*: utilice una demostración indirecta como sigue. Suponga que el límite es L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de límite y trate de llegar a una contradicción.]

39. Si la función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

40. Comparando las definiciones 2, 3 y 4, demuestre el teorema 2.3.1.

41. ¿Qué tan cerca de -3 tiene que tomar x de manera que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10{,}000?$$

42. Demuestre, utilizando la definición 6, que $\lim_{x\to -3}\dfrac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$.

44. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es un número real. Demuestre cada uno de los enunciados siguientes.
(a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty$
(b) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \infty$ si $c > 0$
(c) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$ si $c < 0$

2.5 Continuidad

En la sección 2.3, se vio que el límite de una función cuando x tiende a a, con frecuencia se obtiene simplemente calculando el valor de la función en a. Las funciones con esta propiedad son llamadas *continuas en a*. Se verá que la definición matemática de continuidad coincide notoriamente con el sentido de *continuidad* que la palabra tiene en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco.)

1 Definición Una función f es **continua en un número a** si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, entonces los puntos $(x, f(x))$ en la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica. Por lo que no existe ninguna separación en la curva.

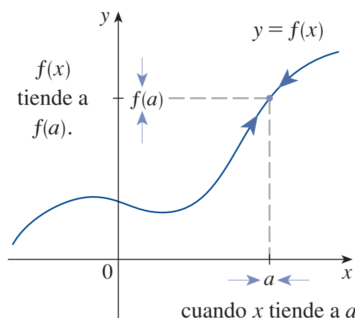


FIGURA 1

Observe que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas, si f es continua en a,

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La definición dice que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua f tiene la propiedad de que un pequeño cambio en x produce solo un pequeño cambio en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ se puede mantener tan pequeño como se quiera manteniendo el cambio en x suficientemente pequeño.

Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, excepto quizás en a), se dice que f es **discontinua en *a*** (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Los fenómenos físicos son generalmente continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían continuamente con el tiempo, como lo hace la estatura de una persona. Pero hay otras situaciones, como la corriente eléctrica, donde ocurren discontinuidades. [Véase el ejemplo 2.2.6, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 ya que el $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, una función continua en cada número de un intervalo se puede pensar como una función cuya gráfica no tiene interrupciones. La gráfica se puede dibujar sin levantar la pluma del papel.

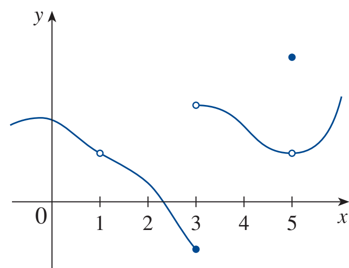


FIGURA 2

EJEMPLO 1 La figura 2 muestra la gráfica de una función f. ¿Para qué valores es f discontinua? ¿Por qué?

SOLUCIÓN Parece como si hubiera una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón formal de que f es discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definida.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón para la discontinuidad es diferente. Aquí, $f(3)$ está definida, pero el $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes). Por lo que f es discontinua en 3.

¿Qué hay en relación con $a = 5$? Aquí, $f(5)$ está definida y el $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son iguales). Pero

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

Por lo que f es discontinua en 5. ■

Ahora verá cómo detectar discontinuidades cuando una función está definida por una fórmula.

EJEMPLO 2 ¿Dónde es discontinua cada una de las funciones siguientes?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

(a) Observe que $f(2)$ no está definida, por lo que f es discontinua en 2. Más tarde verá por qué f es continua en todos los otros números.

(b) Aquí $f(0) = 1$ está definida, pero

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el ejemplo 2.2.8.) Así f es discontinua 0.

(c) Aquí $f(2) = 1$ está definida y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

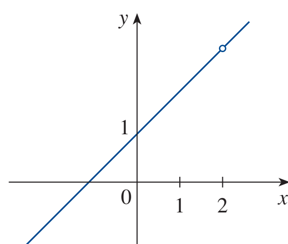
existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

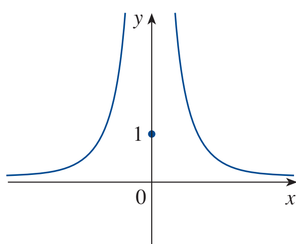
por lo que f no es continua en 2.

(d) La función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque el $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véase el ejemplo 2.3.10 y el ejercicio 2.3.53). ■

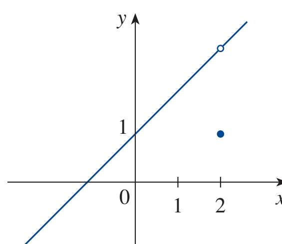
La figura 3 muestra las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En cada caso la gráfica no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel porque hay un agujero o ruptura o salto en la gráfica. El tipo de discontinuidad que se muestra en los incisos (a) y (c) se llama **removible** porque se puede quitar la discontinuidad redefiniendo f solo en 2. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad en el inciso (b) se llama **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades en el inciso (d) se llaman **discontinuidades de salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



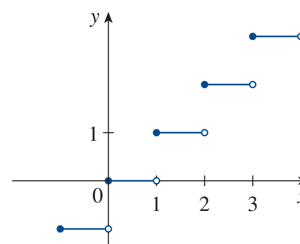
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$



(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$



(d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3
Gráficas de las funciones del ejemplo 2

2 Definición Una función f es **continua por la derecha en un número a** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua por la izquierda en a** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [Véase la figura 3(d)] es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero $$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$ ■

3 Definición Una función f es **continua en un intervalo** si es continua en cada número en el intervalo. (Si f está definida solo en un lado de un punto final del intervalo, entienda que *continua* en el punto final significa *continua por la derecha* o *continua por la izquierda*.)

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$, entonces utilizando las leyes de los límites, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x\to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x\to a} (1 - x^2)} && \text{(por 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Así, por la definición 1, f es continua en a si $-1 < a < 1$. Cálculos similares muestran que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

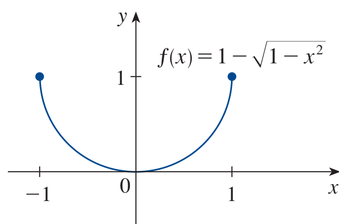


FIGURA 4

de manera que f es continua por la derecha en -1 y continua por la izquierda en 1. Por tanto, de acuerdo con la definición 3, f es continua en $[-1, 1]$.

La gráfica de f está trazada en la figura 4 y es la mitad inferior de la circunferencia

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$ ■

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para verificar la continuidad de una función como se hizo en el ejemplo 4, a menudo es conveniente utilizar el siguiente teorema, que muestra cómo construir funciones continuas complicadas a partir de otras simples.

4 Teorema Si f y g son continuas en a y c es una constante, entonces las funciones siguientes son también continuas en a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Cada uno de los cinco incisos de este teorema se sigue de las correspondientes leyes de los límites de la sección 2.3. Por ejemplo, se da la demostración del inciso 1. Ya que f y g son continuas en a, se tiene

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] \\ &= \lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x) \qquad \text{(por la ley 1)} \\ &= f(a)+g(a) \\ &= (f+g)(a)\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f+g$ es continua en a. ■

Del teorema 4 y de la definición 3 se deduce que si f y g son continuas en un intervalo, entonces también lo son las funciones $f+g$, $f-g$, cf, fg y (si g no es cero) f/g. El siguiente teorema se estableció en la sección 2.3 como la propiedad de sustitución directa.

5 Teorema

(a) Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio; es decir, es continua en $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$.

(b) Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; esto es, es continua en su dominio.

DEMOSTRACIÓN

(a) Una función polinomial es de la forma

$$P(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

donde $c_0, c_1, \cdots, c_n$ son constantes. Se sabe que

$$\lim_{x\to a}c_0=c_0 \qquad \text{(por la ley 7)}$$

y que

$$\lim_{x\to a}x^m=a^m \qquad m=1,2,\ldots,n \qquad \text{(por 9)}$$

Esta ecuación es precisamente el enunciado de que la función $f(x)=x^m$ es una función continua. Así, por el inciso 3 del teorema 4, la función $g(x)=cx^m$ es continua. Ya que P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, se sigue del inciso 1 del teorema 4 que P es continua.

(b) Una función racional es una de la forma

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. El dominio de f es $D=\{x\in\mathbb{R}\mid Q(x)\neq 0\}$. Se sabe del inciso (a) que P y Q son continuas en todo su dominio. Así, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todo número en D. ■

Como una ilustración del teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ muestra que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s, entonces la altura de la pelota en metros, t segundos después, está dada por la fórmula $h=20t-4.9t^2$. Otra vez, esta es una función polinomial, por lo que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber qué funciones son continuas nos permite evaluar muy rápidamente algunos límites como se ve en el siguiente ejemplo. Compárelo con el ejemplo 2.3.2(b).

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, por lo que por el teorema 5 es continua en su dominio, que es $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. Por tanto,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$ ■

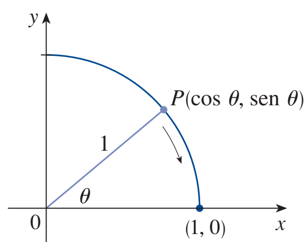


FIGURA 5

Resulta que la mayor parte de las funciones conocidas son continuas en todo número de su dominio. Por ejemplo, la ley 10 (página 96) es exactamente la proposición de que las funciones raíz son continuas.

Del aspecto de las gráficas de las funciones seno y coseno (figura 1.2.18), se podría suponer con toda certeza que son continuas. De acuerdo con la definición de sen θ y cos θ, las coordenadas del punto P de la figura 5 son (cos θ, sen θ). Cuando $\theta \to 0$, vea que P tiende al punto (1, 0), y así cos $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. Así,

6 $$\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Otra manera de establecer los límites en (6) es utilizar el teorema de la compresión con la desigualdad sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), que se demuestra en la sección 3.3.

Ya que cos 0 =1 y sen 0 = 0, las ecuaciones en 6 afirman que las funciones coseno y seno son continuas en 0. Entonces se pueden utilizar las fórmulas de adición para senos y cosenos para deducir que estas funciones son continuas donde sea (ejercicios 64 y 65).

Del inciso 5 del teorema 4, se deduce que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

es continua, excepto donde cos $x = 0$. Esto sucede cuando x es un número entero impar múltiplo de $\pi/2$, por lo que $y = \tan x$ tiene infinitas discontinuidades cuando $x = \pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, y así sucesivamente (figura 6).

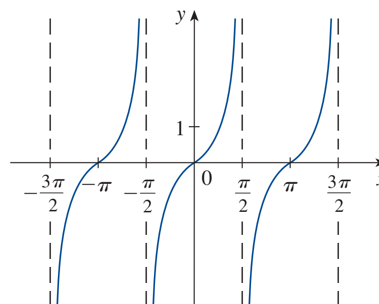


FIGURA 6
$y = \tan x$

La función inversa de cualquier función continua inyectiva también es continua. (Este hecho se demuestra en el apéndice F, pero la intuición geométrica lo hace parecer razonable: la gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f a través de la recta $y = x$. Por lo que si la gráfica de f no tiene ruptura alguna, tampoco la tiene la gráfica de f^{-1}.) De este modo, las funciones trigonométricas inversas son continuas.

En la sección 1.4 se definió la función exponencial $y = b^x$ para rellenar los huecos en la gráfica de la función $y = b^x$ donde x es racional. En otras palabras, la simple definición de $y = b^x$ la hace una función continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, su función inversa $y = \log_b x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

Las funciones trigonométricas inversas se repasaron en la sección 1.5.

7 Teorema Los tipos de funciones siguientes son continuos en todo número de sus dominios:

- polinomios
- funciones racionales
- funciones raíz
- funciones trigonométricas
- funciones trigonométricas inversas
- funciones exponenciales
- funciones logarítmicas

EJEMPLO 6 ¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7 se sabe que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y $y = \tan^{-1} x$ es continua en $\mathbb{R}$. Así, por el inciso 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1} x$ es continua en $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es una función polinomial, de modo que es continua para toda x. Por tanto, por el inciso 5 del teorema 4, f es continua en todos los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Por lo que f es continua en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El teorema 7 dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función en el denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y por tanto es continua. Observe que esta función nunca es 0 porque $\cos x \geqslant -1$ para toda x y, en consecuencia, $2 + \cos x > 0$ para toda x. Por lo que, el cociente

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continuo para toda x. Por tanto, por la definición de función continua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$ ■

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del siguiente teorema.

Este teorema expresa que un símbolo de límite se puede brincar dentro de un símbolo de función si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, puede invertirse el orden de estos dos símbolos.

8 Teorema Si f es continua en b y $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Intuitivamente, el teorema 8 es razonable porque si x está cerca de a, entonces $g(x)$ está cerca de b, y como f es continua en b, si $g(x)$ está cerca de b, entonces $f(g(x))$ está cerca de $f(b)$. En el apéndice F se presenta una demostración del teorema 8.

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

SOLUCIÓN Ya que arcsen es una función continua, aplique el teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

■

Aplique el teorema 8 en el caso especial donde $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo. Entonces

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y

$$f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Si sustituye estas expresiones en el teorema 8 se obtiene

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

con lo que queda demostrada la ley 11 de los límites. (Suponiendo que las raíces existen.)

9 **Teorema** Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

DEMOSTRACIÓN Como g es continua en a, se tiene

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Puesto que f es continua en $b = g(a)$, se puede aplicar el teorema 8 para obtener

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que es precisamente la proposición de que la función $h(x) = f(g(x))$ es continua en a; es decir, $f \circ g$ es continua en a. ■

EJEMPLO 9 ¿En dónde son continuas las funciones siguientes?

(a) $h(x) = \text{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

(a) Se tiene $h(x) = f(g(x))$, donde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \text{sen } x$$

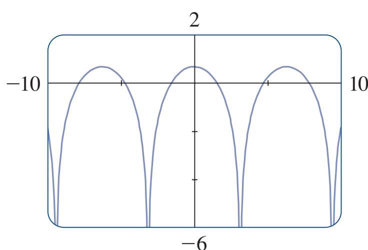


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Ahora g es continua en $\mathbb{R}$ puesto que es una función polinomial, y f también es continua para toda x. Por lo que $h = f \circ g$ es continua en $\mathbb{R}$ por el teorema 9.

(b) Con base en el teorema 7, se sabe que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (ya que tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por tanto, del teorema 9, $f(x) = f(g(x))$ es continua siempre que esté definida. Ahora $\ln(1 + \cos x)$ está definida cuando $1 + \cos x > 0$. De este modo, no está definido cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Así, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua en los intervalos entre estos valores (véase la figura 7). ■

Una propiedad importante de las funciones continuas se expresa con el teorema siguiente, cuya demostración se encuentra en libros más avanzados de cálculo.

> **10 Teorema del valor intermedio** Suponga que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio establece que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Observe que el valor N se puede tomar una vez [como en el inciso (a)] o más de una vez [como en el inciso (b)].

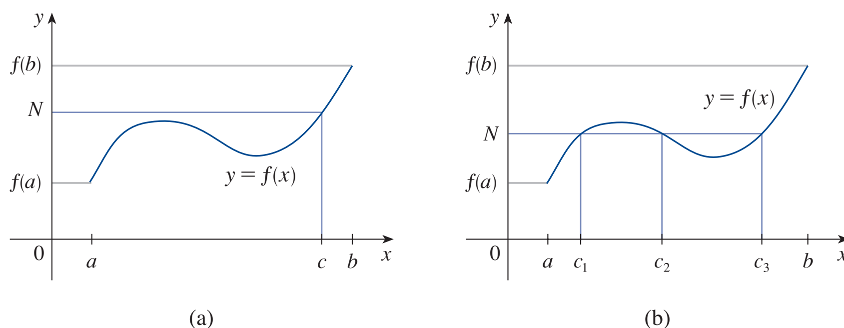


FIGURA 8

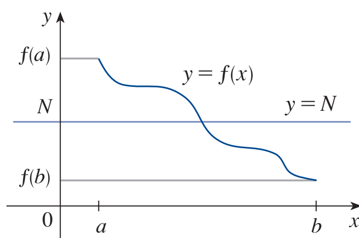


FIGURA 9

Si piensa en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene huecos o rupturas, es fácil creer que el teorema del valor intermedio es verdadero. En términos geométricos, dice que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, entonces la gráfica de f no puede saltar la recta: debe intersecar a $y = N$ en alguna parte.

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para funciones discontinuas (véase el ejercicio 50).

Un uso del teorema del valor intermedio es en la búsqueda de las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 10 Demuestre que existe una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Busque una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por tanto, tome $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$ en el teorema 10, y obtenga

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Así, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es un polinomio, de modo que el teorema del valor intermedio dice que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, se puede localizar con mayor precisión una raíz aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Ya que,

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz debe estar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por ensayo y error,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

por lo que la raíz está en el intervalo $(1.22, 1.23)$. ■

Se puede utilizar una calculadora graficadora o computadora para ilustrar el uso del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. La figura 10 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, y puede usted ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. La figura 11 muestra el resultado de un acercamiento en un rectángulo de vista $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

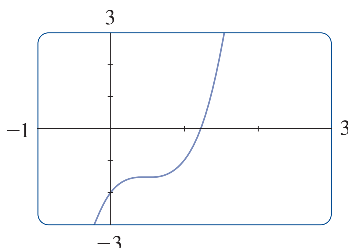


FIGURA 10

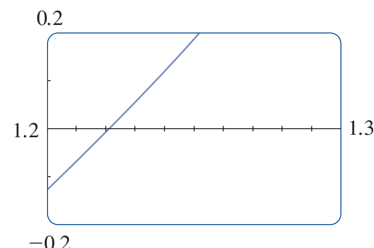


FIGURA 11

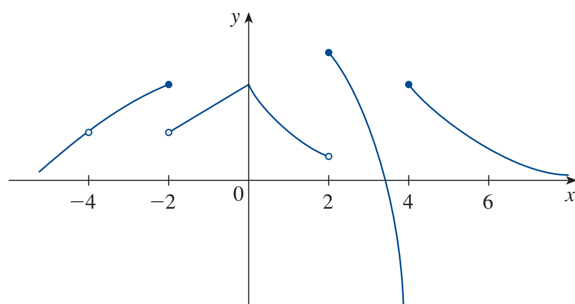
De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un papel importante en el modo en que funcionan estos dispositivos de graficación. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y activa los pixeles que contienen estos puntos calculados. Supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. Por lo que la computadora "conecta los puntos" activando los pixeles intermedios.

2.5 EJERCICIOS

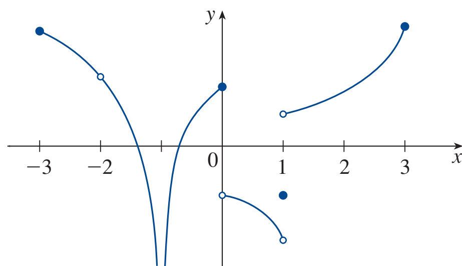
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua en $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su gráfica?

3. (a) A partir de la gráfica de f, establezca el número en el cual f es discontinua y explique por qué.
   (b) Para cada uno de los números que se obtuvieron en el inciso (a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



4. A partir de la gráfica de g, establezca los intervalos sobre los que g es continua.



5–8 Trace la gráfica de una función f que es continua, a excepción de la discontinuidad indicada.

5. Discontinua, pero continua por la derecha, en 2.

6. Discontinuidades en -1 y 4, pero continuas por la izquierda en -1 y por la derecha en 4.

7. Discontinuidad removible en 3, discontinuidad de salto en 5.

8. Ni por la izquierda ni por la derecha es continua en -2, continua solo por la izquierda en 2.

9. El peaje T que se cobra por conducir en un determinado tramo de una carretera es de \$5, excepto durante las horas pico (entre las 7 y las 10 y entre las 16 y 19 horas) cuando el peaje es de \$7.
   (a) Trace una gráfica de T como una función del tiempo t, medido en horas pasada la medianoche.
   (b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que utiliza la carretera.

10. Explique por qué cada una de las funciones siguientes es continua o discontinua.
   (a) La temperatura en una localidad específica como una función del tiempo.
   (b) La temperatura en un tiempo dado como una función de la distancia al oeste de París.
   (c) La altitud sobre el nivel del mar como una función de la distancia al oeste de París.
   (d) El costo de transportarse en taxi como una función de la distancia de traslado.
   (e) La corriente en un circuito de iluminación en una habitación como una función del tiempo.

11–14 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las funciones siguientes es continua en el número dado a.

11. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4$

12. $g(t) = \dfrac{t^2 + 5t}{2t + 1}, \quad a = 2$

13. $p(v) = 2\sqrt{3v^2 + 1}, \quad a = 1$

14. $f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}, \quad a = 2$

15–16 Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las funciones siguientes es continua en el intervalo dado.

15. $f(x) = x + \sqrt{x - 4}, \quad [4, \infty)$

16. $g(x) = \dfrac{x - 1}{3x + 6}, \quad (-\infty, -2)$

17–22 Explique por qué cada una de las funciones siguientes es discontinua en el número dado a. Trace la gráfica de la función.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 2^x & \text{si } x > -1 \end{cases} \qquad a = -1$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

23–24 ¿Cómo podría "remover la discontinuidad" en cada una de las funciones siguientes? En otras palabras, ¿cómo redefiniría $f(2)$ para que sean continuas en 2?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

25–32 Utilizando los teoremas 4, 5, 7 y 9, explique por qué cada una de las funciones siguientes es continua en todo número de su dominio. Determine el dominio.

25. $F(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$

26. $G(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - x - 1}$

27. $Q(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x - 2}}{x^3 - 2}$

28. $R(t) = \dfrac{e^{\operatorname{sen} t}}{2 + \cos \pi t}$

29. $A(t) = \operatorname{arcsen}(1 + 2t)$

30. $B(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

32. $N(r) = \tan^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33–34 Identifique las discontinuidades de cada una de las funciones siguientes e ilústrelas con una gráfica.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

34. $y = \ln(\tan^2 x)$

35–38 Utilice la continuidad para evaluar cada uno de los límites siguientes.

35. $\lim\limits_{x \to 2} x\sqrt{20 - x^2}$

36. $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

37. $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\dfrac{5 - x^2}{1 + x}\right)$

38. $\lim\limits_{x \to 4} 3^{\sqrt{x^2 - 2x - 4}}$

39–40 Demuestre que f es continua en $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

41–43 Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f.

41. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leqslant 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 4 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

44. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G la constante gravitacional. ¿Es F una función continua de r?

45. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

46. Encuentre los valores de a y b que hacen a f continua para todo x.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

47. Suponga que f y g son funciones continuas tales que $g(2) = 6$ y $\lim_{x \to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encuentre $f(2)$.

48. Sea $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/x^2$.

(a) Encuentre $(f \circ g)(x)$.

(b) ¿Es $f \circ g$ continua para todo x? Explique.

49. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en a? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

50. Suponga que una función f es continua en [0, 1], excepto en 0.25 y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos posibles graficas de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

51. Si $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 1000$.

52. Suponga que f es continua sobre [1, 5] y las únicas soluciones de la ecuación $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, explique por qué $f(3) > 6$.

53–56 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz en cada una de las ecuaciones dadas en el intervalo especificado.

53. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

54. $\ln x = x - \sqrt{x}, \quad (2, 3)$

55. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

56. $\operatorname{sen} x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

57–58 Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene cuando menos una raíz real. (b) Utilice su calculadora para encontrar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

57. $\cos x = x^3$

58. $\ln x = 3 - 2x$

59–60 (a) Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene cuando menos una raíz real. (b) Utilice un dispositivo de graficación para encontrar la raíz redondeada hasta tres cifras decimales.

59. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

60. $\arctan x = 1 - x$

61–62 Demuestre sin hacer la gráfica que la función tiene al menos dos intersecciones con el eje x en el intervalo dado.

61. $y = \operatorname{sen} x^3, \quad (1, 2)$

62. $y = x^2 - 3 + 1/x, \quad (0, 2)$

63. Demuestre que f es continua en a si y solo si

$$\lim_{h\to 0} f(a + h) = f(a)$$

64. Para demostrar que la función seno es continua necesita demostrar que $\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Por el ejercicio 63, un enunciado equivalente es

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Utilice 6 para demostrar que esto es verdadero.

65. Demuestre que la función coseno es continua.

66. (a) Demuestre el teorema 4, inciso 3.
(b) Demuestre el teorema 4, inciso 5.

67. ¿Para qué valores de x es f continua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

68. ¿Para qué valores de x es g continua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

69. ¿Existe un número que es exactamente 1 más que su cubo?

70. Si a y b son números positivos, demuestre que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tiene por lo menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

71. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, \infty)$

72. (a) Demuestre que la función valor absoluto $F(x) = |x|$ es continua para toda x.
(b) Demuestre que si f es una función continua en un intervalo, entonces también lo es $|f|$.
(c) ¿Lo inverso del enunciado del inciso (b) también es verdadero? En otras palabras, si $|f|$ es continua, ¿se deduce que f es continua? Si es así, demuéstrelo. Si no, encuentre un contraejemplo.

73. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 y emprende su camino habitual hacia la cima de la montaña, adonde llega a las 19:00. La mañana siguiente inicia el regreso desde la cima por la misma ruta a las 7:00 y llega al monasterio a las 19:00. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe un punto a lo largo de la ruta que el monje cruzará exactamente a la misma hora en ambos días.

2.6 Límites al infinito; asíntotas horizontales

En las secciones 2.2 y 2.4 se trataron los límites infinitos y las asíntotas verticales. Ahí se hizo tender x a un número y se vio que los valores de y se volvían arbitrariamente grandes (ya fueran positivos o negativos). En esta sección se hará a x arbitrariamente grande (positivo y negativo) y observe qué ocurre con y.

Inicie por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998

conforme x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función redondeados a seis decimales, y en la figura 1 se ha trazado la gráfica de f con una computadora.

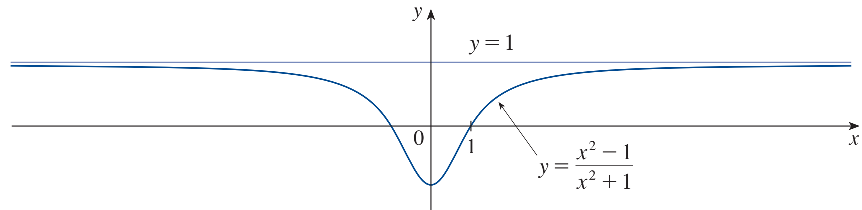


FIGURA 1

Conforme x crece más y más, se puede ver que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. (La gráfica de f se acerca a la recta horizontal $y = 1$ cuando se ve hacia la derecha.) De hecho, parece que los valores de $f(x)$ se pueden acercar lo que se quiera a 1 eligiendo una x suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica al escribir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, utilice la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace más y más grande.

1 Definición intuitiva de un límite al infinito Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar arbitrariamente a L tanto como se quiera, eligiendo a x suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa un número. No obstante, la expresión $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ con frecuencia se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x se va al infinito, es L"

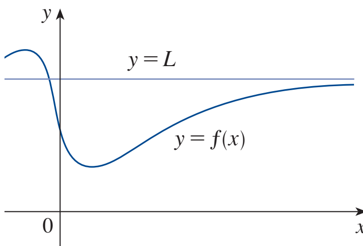
o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L".

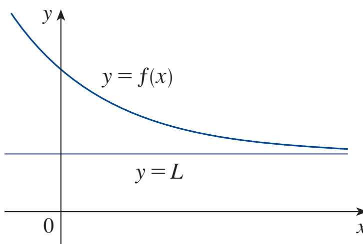
El significado de estas frases está dado por la definición 1. Al final de esta sección, se encuentra una definición más precisa, utilizando la definición ε, δ de la sección 2.4.

En la figura 2 se muestran ilustraciones geométricas de la definición 1. Observe que hay varias maneras de aproximar la gráfica de f a la recta $y = L$ (la cual se llama *asíntota horizontal*) a medida que usted ve hacia el extremo derecho de cada gráfica.

Si regresa a la figura 1, verá que para valores negativos de x grandes en magnitud, los valores de $f(x)$ están cercanos a 1. Al decrecer x sin cota mediante valores negativos, se puede acercar $f(x)$ a 1 tanto como se quiera. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$





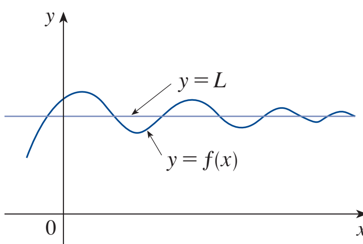
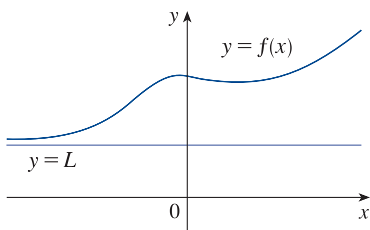


FIGURA 2
Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$.



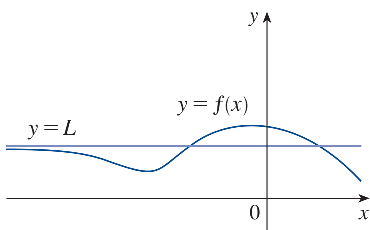


FIGURA 3
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

La definición general es la siguiente.

2 Definición Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea suficientemente negativa.

Nuevamente el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ con frecuencia se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende a menos infinito, es L".

La definición 2 se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica tiende a la recta $y = L$ a medida que ve hacia el extremo izquierdo de cada gráfica.

3 Definición La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1} x$. (Véase la figura 4.)

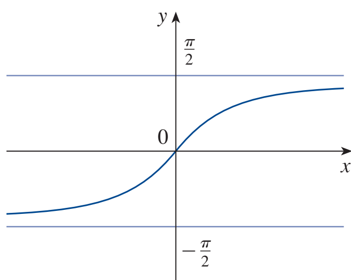


FIGURA 4
$y = \tan^{-1} x$

4
$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se sigue del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de la función tangente.)

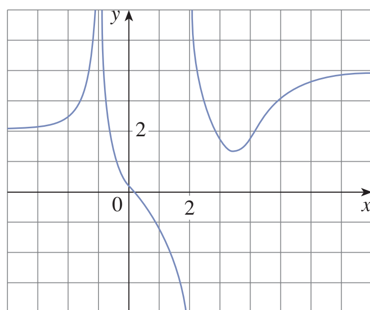


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la figura 5.

SOLUCIÓN Vea que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \to -1$ por ambos lados, así

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Observe que $f(x)$ se hace negativo grande en magnitud cuando x tiende a 2 por la izquierda, pero se hace grande positivo cuando x tiende a 2 por la derecha. De este modo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Por lo que ambas rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x es muy grande, parece que $f(x)$ tiende a 4. Pero, conforme x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales. ■

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeño. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si elige una x suficientemente grande, puede aproximar $1/x$ a 0 cuanto quiera. Por tanto, de acuerdo con la definición 1, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar hace ver que cuando x es negativo grande en magnitud, $1/x$ es pequeño negativo; de este modo, también se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se sigue que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$ (que es una hipérbola equilátera; véase la figura 6). ■

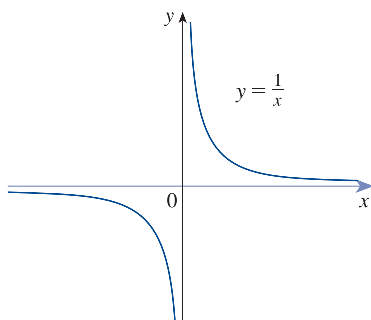


FIGURA 6

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

La mayor parte de las leyes de los límites que se dieron en la sección 2.3 también se cumplen para los límites en el infinito. Se puede demostrar que *las leyes de los límites, cuya lista se da en la sección 2.3 (con la excepción de las leyes 9 y 10), también son válidas si "$x \to a$" se reemplaza con "$x \to \infty$" o con "$x \to -\infty$"*. En particular, si combina las leyes 6 y 11 con los resultados del ejemplo 2, se obtiene la siguiente regla importante para el cálculo de límites.

5 Teorema Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique cuáles propiedades de los límites se utilizaron en cada paso.

SOLUCIÓN Cuando x es muy grande, tanto numerador como denominador son muy grandes, por lo que no es obvio qué pasa con su cociente. Necesita hacer algo de álgebra preliminar.

Para evaluar el límite en el infinito de cualquier función racional, primero divida el numerador y el denominador entre la potencia mayor de x que hay en el denominador. (Suponga que $x \neq 0$, ya que está interesado solo en valores muy grandes de x). En este caso, la mayor potencia del denominador es x^2, así se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(por la ley de los límites 5)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(por las leyes 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{(por la ley 7 y el teorema 5)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

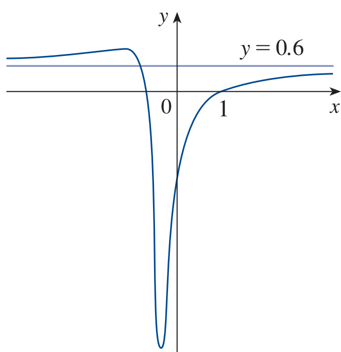


FIGURA 7

$$y = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Un cálculo semejante muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5} = 0.6$. ■

EJEMPLO 4 Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUCIÓN Al dividir entre x tanto el numerador como el denominador y aplicar las propiedades de los límites, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x}}{\dfrac{3x - 5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{x^2}}}{\dfrac{3x - 5}{x}} \qquad \left(\text{ya que } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - 5\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

En el cálculo del límite conforme $x \to -\infty$, se debe recordar que para $x < 0$, se tiene $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Por lo que cuando se divide el numerador entre x, para $x < 0$ se obtiene

$$\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x} = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}} = -\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}} = -\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2+\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{3-5\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Así la recta $y = -\sqrt{2}/3$ también es una asíntota horizontal.

Es probable que haya una asíntota vertical cuando el denominador, $3x - 5$, es 0; esto es, cuando $x = \frac{5}{3}$. Si x está cerca de $\frac{5}{3}$ y $x > \frac{5}{3}$, entonces el denominador está cerca de 0 y $3x - 5$ es positivo. El numerador $\sqrt{2x^2+1}$ es siempre positivo, por lo que $f(x)$ es positivo. Por tanto,

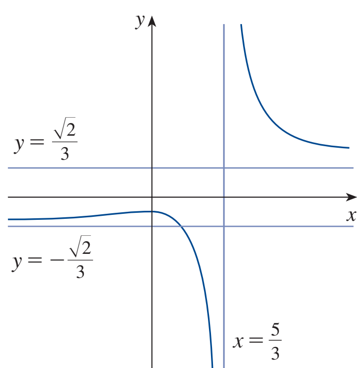


FIGURA 8

$y = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

$$\lim_{x\to(5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty$$

(Observe que el numerador *no* tiende a 0 cuando $x \to 5/3$).

Si x está cerca de $\frac{5}{3}$, pero $x < \frac{5}{3}$, entonces $3x - 5 < 0$ y así $f(x)$ es negativo grande, por lo que,

$$\lim_{x\to(5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

La asíntota vertical es $x = \frac{5}{3}$. Las tres asíntotas se muestran en la figura 8. ■

EJEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

SOLUCIÓN Ya que tanto $\sqrt{x^2+1}$ como x son muy grandes cuando x es grande, es difícil ver qué pasa con su diferencia, por lo que utilice el álgebra para reescribir la función. Primero multiplique el numerador y el denominador por el radical conjugado:

Se puede pensar que la función dada tiene un denominador igual a 1.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Observe que el denominador de esta última expresión $(\sqrt{x^2+1} + x)$ resulta muy grande cuando $x \to \infty$ (más grande que x). Así

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

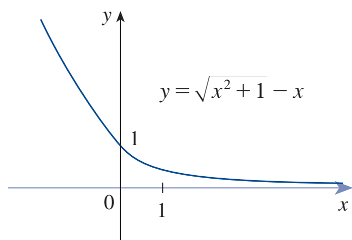


FIGURA 9

La figura 9 ilustra este resultado. ■

EJEMPLO 6 Evalúe el $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$.

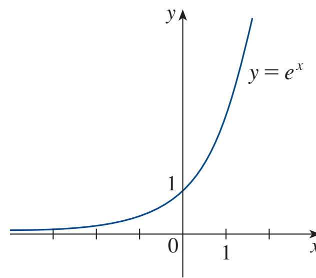
SOLUCIÓN Si $t = 1/(x-2)$, se sabe que $t \to \infty$ cuando $x \to 2^+$. Por tanto, por la segunda ecuación en 4, se tiene

$$\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$ ■

La gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ tiene a la recta $y = 0$ (el eje x) como una asíntota horizontal. (Lo mismo es verdadero para cualquier función exponencial con base $b > 1$.) De hecho, de la gráfica en la figura 10 y la correspondiente tabla de valores, vea que

6 $$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

Observe que los valores de e^x se aproximan a 0 muy rápidamente.



x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

FIGURA 10

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

PS La estrategia de resolución de problemas para los ejemplos 6 y 7 *es Introduzca algo extra* (véase la página 71). Aquí, algo extra, la ayuda auxiliar, es la nueva variable *t*.

SOLUCIÓN Si se hace $t = 1/x$, se sabe que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por tanto, por (6),

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

(Véase el ejercicio 81.) ■

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Conforme x crece, los valores de sen x oscilan infinitamente entre 1 y -1, por lo que no se aproximan a ningún número definido. En consecuencia, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existe. ■

Límites infinitos en el infinito

La notación

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

se utiliza para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grandes cuando x se hace muy grande.

Un significado similar está asociado con los símbolos siguientes:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

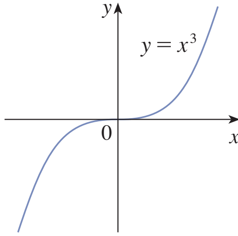


FIGURA 11
$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty, \ \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to \infty} x^3$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x se hace grande, x^3 también se hace grande. Por ejemplo,

$$10^3 = 1000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1000^3 = 1\,000\,000\,000$$

De hecho, se puede hacer x^3 tan grande como quiera tomando x suficientemente grande. Por esta razón, se puede escribir

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

Del mismo modo, cuando x es muy grande negativo, también lo es x^3. Por lo que

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Estos límites establecidos también se pueden ver en la gráfica de $y = x^3$ en la figura 11. ■

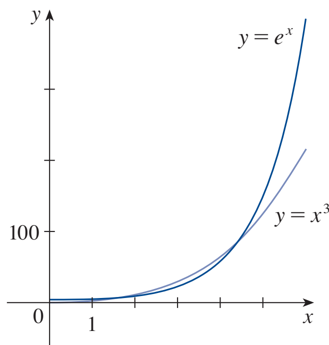


FIGURA 12
e^x es mucho más grande que x^3 cuando x es muy grande.

En la figura 10 vea que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

pero como se observa en la figura 12, $y = e^x$ se hace más grande cuando $x \to \infty$, con mucha mayor rapidez que $y = x^3$.

EJEMPLO 10 Encuentre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Sería un **error** escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no pueden aplicarse a límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ no se puede definir). Sin embargo, *se puede* escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

debido a que tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por tanto, también su producto. ■

EJEMPLO 11 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, se dividió el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador, que es justamente x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

ya que $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to 0 - 1 = -1$ conforme $x \to \infty$. ■

El siguiente ejemplo muestra que, utilizando límites infinitos al infinito, además de las intersecciones, se puede tener una idea general de la gráfica de una función polinomial sin tener que disponer de un gran número de puntos.

EJEMPLO 12 Trace la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ utilizando sus intersecciones y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN La intersección con el eje y es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y las intersecciones con el eje x, $x = 2, -1, 1$ se encuentran haciendo $y = 0$. Observe que puesto que $(x - 2)^4$ es positivo, la función no cambia de signo en 2; por lo que la gráfica no cruza el eje x en 2. La gráfica interseca el eje x en -1 y 1.

Cuando x es un número positivo muy grande, todos los factores son muy grandes, así que

$$\lim_{x \to \infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x es un número negativo muy grande, el primero de los factores es un número positivo muy grande y los factores segundo y tercero son negativos muy grandes, por lo que

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Combinando esta información, se obtiene el trazo de la gráfica de la figura 13. ■

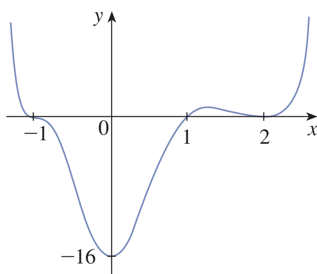


FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$

Definición precisa

La definición 1 se puede establecer de manera precisa como sigue.

> **7 Definición precisa de un límite al infinito** Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
>
> significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que
>
> $$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

En palabras, esto indica que los valores de $f(x)$ se pueden acercar arbitrariamente a L (dentro de una distancia ε, donde ε es cualquier número positivo) tomando x suficientemente grande (más grande que N, donde N depende de ε). Gráficamente, esto dice que eligiendo x suficientemente grande (más grande que algún número N) se puede hacer que la gráfica de f esté atrapada entre las rectas horizontales dadas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ como en la figura 14. Esto debe ser verdadero sin importar qué tan pequeño elija ε.

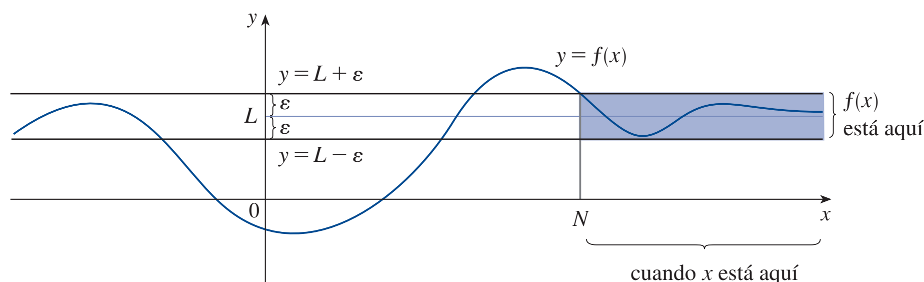


FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

La figura 15 muestra que si elige un valor de ε muy pequeño, entonces se puede necesitar un valor de N muy grande.

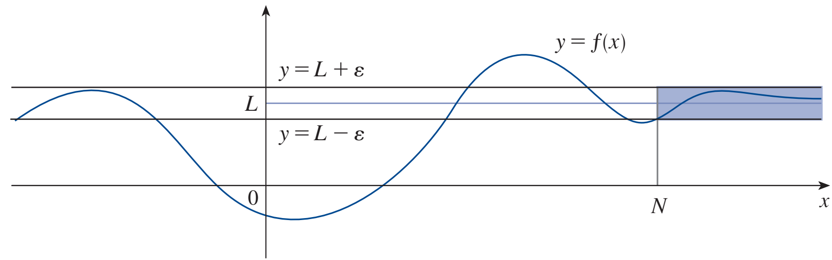


FIGURA 15
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Del mismo modo, una versión precisa de la definición 2 está dada por la definición 8, que se ilustra en la figura 16.

8 Definición Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente número N tal que

$$\text{si} \quad x < N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

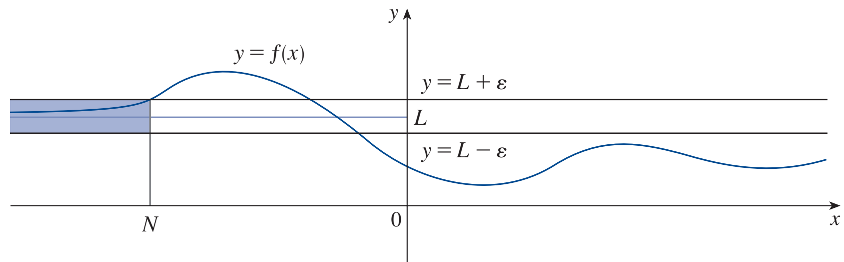


FIGURA 16
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

En el ejemplo 3 se calculó que el

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

En el siguiente ejemplo utilice una calculadora o computadora para relacionar este enunciado con la definición 7, con $L = \frac{3}{5} = 0.6$ y $\varepsilon = 0.1$.

TEC En Module 2.4/2.6 puede explorar la definición precisa de límite de manera gráfica o numérica.

EJEMPLO 13 Utilice una gráfica para encontrar un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

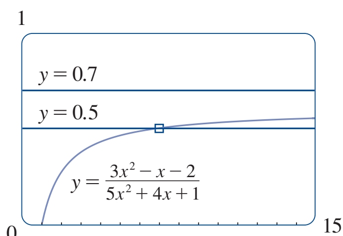


FIGURA 17

SOLUCIÓN Se reescribe la desigualdad dada como

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

Necesita determinar los valores de x para los cuales la curva dada está entre las rectas horizontales $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Las gráficas de la curva y de estas rectas se muestran en la figura 17. Luego utilice el cursor para calcular que la curva cruza la recta $y = 0.5$ cuando $x \approx 6.7$. A la derecha de este número parece que la curva está entre las rectas $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Redondeando, se puede decir que

$$\text{si} \quad x > 7 \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

En otras palabras, para $\varepsilon = 0.1$ se puede elegir $N = 7$ (o cualquier otro número mayor) en la definición 7. ■

EJEMPLO 14 Utilice la definición 7 para demostrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Dado $\varepsilon > 0$, se quiere encontrar N tal que

$$\text{si} \qquad x > N \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

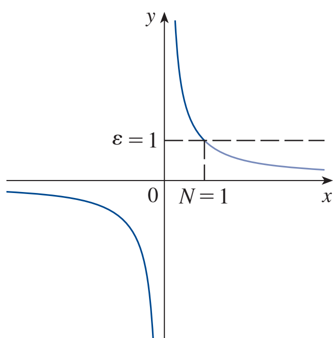
Al calcular el límite se puede suponer que $x > 0$. Entonces $1/x < \varepsilon \Longleftrightarrow x > 1/\varepsilon$. Sea $N = 1/\varepsilon$. Por lo que

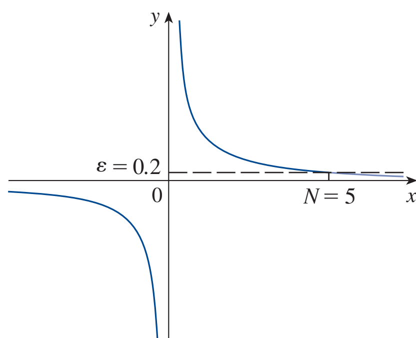
$$\text{si} \qquad x > N = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Por tanto, de la definición 7

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

La figura 18 ilustra la demostración mostrando algunos valores de ε y los correspondientes valores de N.





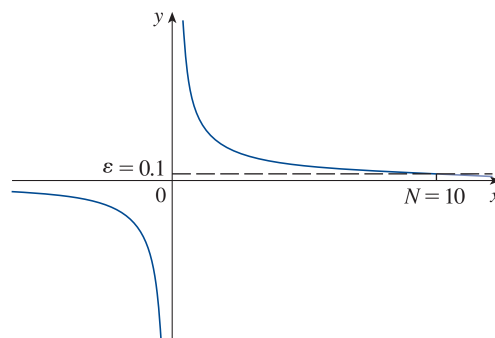


FIGURA 18 ■

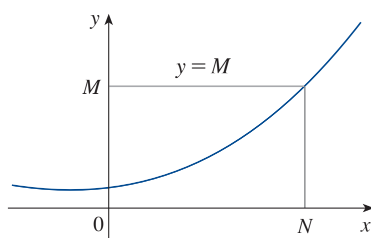


FIGURA 19
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Por último, observe que un límite infinito al infinito puede definirse como sigue. En la figura 19 se muestra una ilustración geométrica.

9 Definición de un límite infinito al infinito Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M existe un correspondiente número positivo N tal que

$$\text{si} \quad x > N \qquad \text{entonces} \qquad f(x) > M$$

Definiciones similares se aplican cuando el símbolo ∞ se reemplaza por $-\infty$. (Véase el ejercicio 80.)

2.6 EJERCICIOS

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada uno de los límites siguientes

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. (a) ¿Puede la gráfica de $y = f(x)$ intersecar una asíntota vertical? ¿Puede intersecar una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.

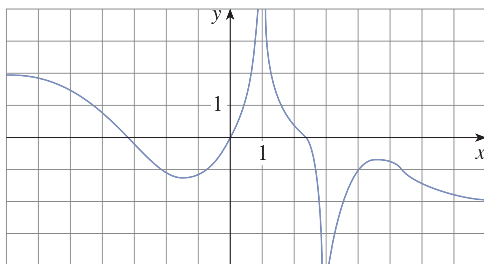
(b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas que muestren las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica está dada, determine lo siguiente:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(e) Las ecuaciones de las asíntotas

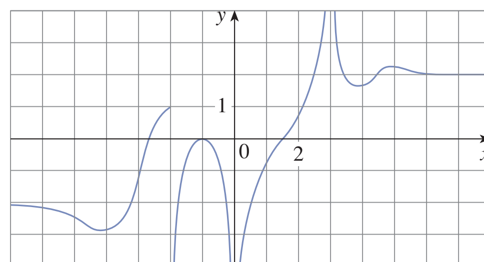


4. Para la función g cuya gráfica está dada, determine lo siguiente.

(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} g(x)$

(e) $\lim_{x\to-2^+} g(x)$ (f) Las ecuaciones de las asíntotas



5–10 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

5. $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -5$

6. $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, f es impar

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\text{lií}_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

11. Conjeture el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. Después, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

12. (a) Utilice la gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para calcular el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con una aproximación de dos cifras decimales.

(b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para calcular el límite con cuatro cifras decimales.

13–14 Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 7}{5x^2 + x - 3}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{9x^3 + 8x - 4}{3 - 5x + x^3}}$

15–42 Encuentre el límite o demuestre que no existe.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x + 3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^6}}{2 - x^3}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^6}}{2 - x^3}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + 3x^2}}{4x - 1}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + 3x^2}{4x - 1}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

28. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x} + 2x\right)$

29. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

30. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

31. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

33. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x^7)$

34. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan(e^x)$

36. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

41. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\ln(1 + x^2) - \ln(1 + x)]$

42. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [\ln(2 + x) - \ln(1 + x)]$

43. (a) Para $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ determine cada uno de los límites siguientes.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$

(b) Utilice una tabla de valores para calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(c) Utilice la información de los incisos (a) y (b) para hacer un trazo de la gráfica de f.

44. Para $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\ln x}$ determine cada uno de los límites siguientes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$

(e) Utilice la información de los incisos (a)-(d) para hacer un trazo de la gráfica de f.

45. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

al trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para inferir el valor del límite.

(c) Demuestre que su estimación es correcta.

46. (a) Utilice una gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Para obtener el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con un decimal de precisión.

(b) Utilice una tabla de valores de $f(x)$ para calcular el límite con cuatro decimales de precisión.

(c) Encuentre el valor exacto del límite.

47–52 Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo de graficación, verifique su trabajo al trazar la gráfica de la curva y determinando las asíntotas.

47. $y = \dfrac{5 + 4x}{x + 3}$

48. $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x^2 + 2x - 1}$

49. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

50. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

51. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

52. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

53. Calcule la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

al hacer gráfica de f para $-10 \leq x \leq 10$. Después obtenga la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explica la discrepancia?

54. (a) Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Utilice la gráfica para estimar el valor de los límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calcule algunos valores de $f(x)$ y proporcione estimaciones numéricas de los límites del inciso (a).

(c) Calcule los valores exactos de los límites en el inciso (a). ¿Obtiene el mismo valor o valores diferentes de esos dos límites? [De acuerdo con su respuesta al inciso (a), tendrá que verificar su cálculo para el segundo límite.]

55. Sea P y Q polinomios. Determine

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es (a) menor que el grado de Q y (b) mayor que el grado de Q.

56. Realice un trazo de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los cinco casos siguientes:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n impar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n impar
(v) $n < 0$, n par

Luego use estos trazos para encontrar los límites siguientes.

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x \to 0^-} x^n$

(c) $\lim_{x \to \infty} x^n$ (d) $\lim_{x \to -\infty} x^n$

57. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

58. Determine una fórmula para una función que tiene asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

59. Una función f es un cociente de funciones cuadráticas y tiene una asíntota vertical $x = 4$ y una intersección con el eje x en $x = 1$. Se sabe que f tiene una discontinuidad removible en $x = -1$ y $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$. Evalúe

(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

60–64 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para trazar la gráfica como en el ejemplo 12.

60. $y = 2x^3 - x^4$

61. $y = x^4 - x^6$

62. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

63. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

64. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

65. (a) Utilice el teorema de la compresión para evaluar $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\text{sen } x}{x}$.

(b) Trace la gráfica de $f(x) = (\text{sen } x)/x$. ¿Cuántas veces cruza la gráfica la asíntota?

66. Por el *comportamiento en los extremos* de una función se entiende una descripción de lo que sucede con sus valores $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

(a) Describa y compare el *comportamiento en los extremos* de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

al trazar la gráfica de las dos funciones en los rectángulos de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$.

(b) Se dice que dos funciones tienen el *mismo comportamiento en los extremos* si su cociente tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento final en los extremos.

67. Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

68. (a) Un depósito contiene 5000 l de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito a una rapidez de 25 l/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $x \to \infty$?

69. En el capítulo 9 se demostrará que, bajo ciertas hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t, es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad terminal* de la gota de lluvia.

(a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

(b) Trace la gráfica de $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s y $g = 9.8$ m/s². ¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance 99% de su velocidad terminal?

70. (a) Al trazar la gráfica de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.
(b) ¿Puede resolver el inciso (a) sin un dispositivo de graficación?

71. Utilice una gráfica para determinar un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

72. Para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -3$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.05$.

73. Para el límite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 3$$

ilustre la definición 8 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.05$.

74. Para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x \ln x} = \infty$$

ilustre la definición 9 mediante la determinación de un valor de N que corresponda a $M = 100$.

75. (a) ¿Qué tan grande se tiene que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?
(b) Tomando $r = 2$ en el teorema 5, se tiene el enunciado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrelo directamente utilizando la definición 7.

76. (a) ¿Qué tan grande se debe tomar x de manera que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ en el teorema 5, se tiene el enunciado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrelo directamente utilizando la definición 7.

77. Utilice la definición 8 para demostrar que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

78. Demuestre, utilizando la definición 9, que $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

79. Utilice la definición 9 para demostrar que $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

80. Formule una definición precisa de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Luego utilice su definición para demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

81. (a) Demuestre que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

si estos límites existen.
(b) Utilice el inciso (a) y el ejercicio 65 para encontrar

$$\lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

2.7 Derivadas y razones de cambio

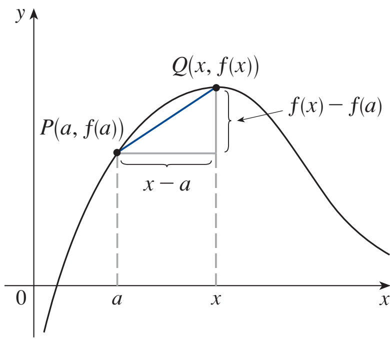
El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto implican encontrar el mismo tipo de límite, como se vio en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y se puede interpretar como una razón de cambio en las ciencias naturales o sociales y en ingeniería.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y uno quiere encontrar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Luego, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces se define la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m.



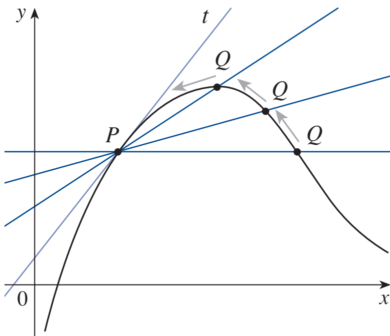


FIGURA 1

(Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la figura 1.)

> **1 Definición** La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente
>
> $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> siempre que este límite exista.

En nuestro primer ejemplo, se confirma la suposición que se hizo en el ejemplo 2.1.1.

EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1,1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se encuentra que la ecuación de la recta tangente en (1, 1) es

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$ ■

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como **la pendiente de la curva** en el punto. La idea es que, si uno se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Cuanto más se acerque uno, tanto más la parábola se parece a una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

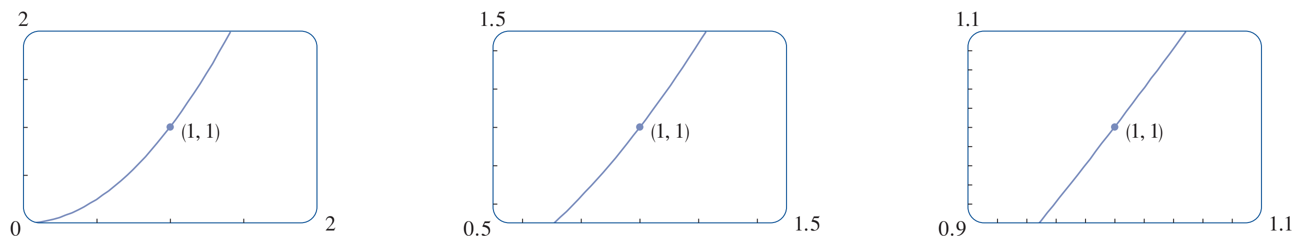


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) de la parábola $y = x^2$

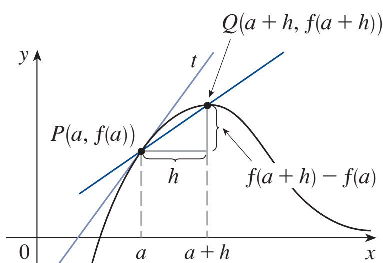


FIGURA 3

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(Véase la figura 3, donde se ilustra lo que pasa cuando $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Observe que conforme x se aproxima a a, h se acerca a 0 (puesto que $h = x - a$) y por ello la expresión de la pendiente de la recta tangente, en la definición 1, se convierte en

2
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, de acuerdo con la ecuación 2, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3 + h)}{3 + h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3 + h} = -\frac{1}{3}$$

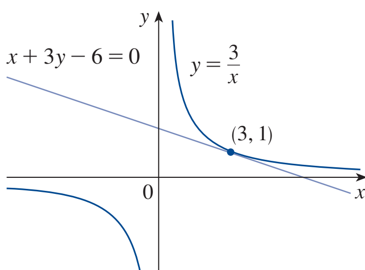


FIGURA 4

Por tanto una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica a $$x + 3y - 6 = 0$$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente. ■

Velocidades

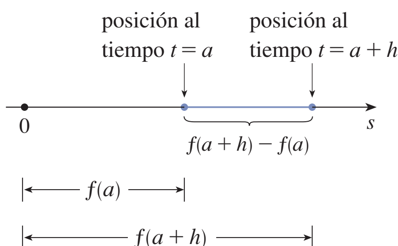
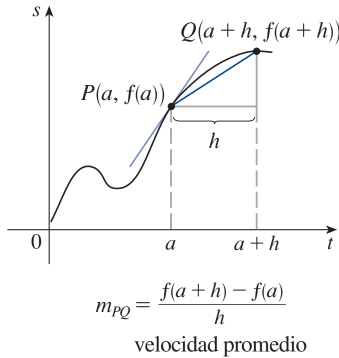


FIGURA 5

En la sección 2.1 se investigó el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN, y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre períodos de tiempo cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ a $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.)



$m_{PQ} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

velocidad promedio

FIGURA 6

La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a-h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P (compare las ecuaciones 2 y 3).

Ahora que sabe calcular límites, considere nuevamente el problema de la pelota que cae.

EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el nivel del suelo.

(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?

(b) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

Recuerde, de la sección 2.1, que la distancia (en metros) que recorre la pelota cayendo después de t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Se necesita encontrar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera que es conveniente determinar la velocidad en un tiempo general t. Usando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, se tiene

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2 - t^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2th + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4.9h(2t + h)}{h} = \lim_{h \to 0} 4.9(2t + h) = 9.8t$$

(a) La velocidad después de 5 segundos es $v(5) = (9.8)(5) = 49 \text{ m/s}$.

(b) Puesto que la plataforma de observación está a 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t, cuando $s(t) = 450$; es decir,

$$4.9t^2 = 450$$

Esto da

$$t^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v\left(\sqrt{\frac{450}{4.9}}\right) = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$ ■

■ Derivadas

Se ha visto que para determinar la pendiente de una recta tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3) surge la misma clase de límite. De hecho, límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surgen cuando se calcula una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite se presenta muy a menudo, se le da un nombre y una notación especial.

4 Definición La **derivada de una función *f* en un número *a*,** denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

$f'(a)$ se lee "*f* prima de *a*".

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y solo si x tiende a a. Por consiguiente, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como se vio en la búsqueda de rectas tangentes, es

5
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

EJEMPLO 4

Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

Las definiciones 4 y 5 son equivalentes, así que se puede usar cualquiera de los dos para calcular la derivada. En la práctica, la definición 4 conduce a menudo a cálculos más simples.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$ ■

Se define la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m, dada por la ecuación 1 o 2. Ya que, por la definición 4, esta es la misma que la derivada $f'(a)$, se puede decir lo siguiente.

> La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si utiliza la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se puede escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

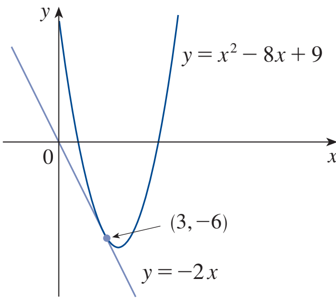


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 se sabe que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Por lo que la ecuación de la recta tangente, que se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{o} \qquad y = -2x$$ ■

Razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y se expresa como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

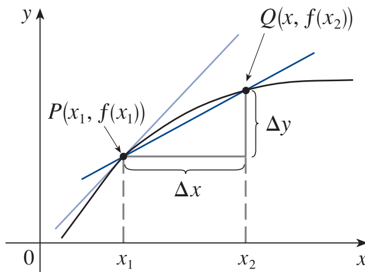
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



razón de cambio promedio $= m_{PQ}$

razón de cambio instantánea = pendiente de la tangente en P

FIGURA 8

se llama **razón de cambio promedio de y con respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8.

Por analogía con la velocidad, se considera la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por tanto, haciendo que Δx tienda a 0. El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de y con respecto a x** en x_1, que se interpreta (al igual que en el caso de la velocidad) como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

6 $$\text{Razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se reconoce este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Se sabe que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora se tiene una segunda interpretación:

> La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x cuando $x = a$.

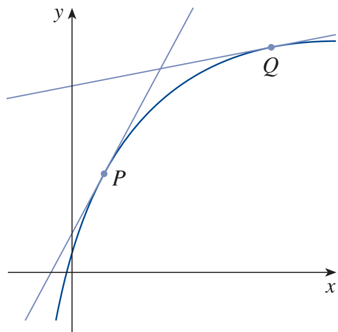


FIGURA 9
Los valores de y cambian rápidamente en P y lentamente en Q.

La conexión con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, en consecuencia, la curva es pronunciada, como en el punto P de la figura 9), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto Q), y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s respecto al tiempo t. En otras palabras, $f'(a)$ *es la velocidad de la partícula en el tiempo* $t = a$. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que está definida verbalmente.

EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con ancho fijo. El costo de producir x metros de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1000) = 9$?
(c) ¿Cuál piensa que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay respecto a $f'(5000)$?

SOLUCIÓN
(a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción respecto al número de metros producidos. (Los economistas llaman a esta rapidez de cambio *costo marginal*. Esta idea se analiza con más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Ya que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades de $f'(x)$ son las mismas que las unidades del cociente de diferencias $\Delta C/\Delta x$. Puesto que ΔC se mide en dólares y Δx en metros, las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada metro.

(b) La afirmación $f'(1000) = 9$ significa que, después de fabricar 1000 metros de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de \$9/m. (Cuando $x = 1000$, C se incrementa 9 veces más rápido que x.)

Aquí se está suponiendo que la función costo se comporta bien; es decir, que $C(x)$ no oscila muy rápido cerca de $x = 1000$.

Dado que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1000$, podría usarse la aproximación

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y se dice que el costo de fabricación del 1000-ésimo metro (o del 1001) es de casi 9 dólares.

(c) La razón a la cual se incrementa el costo de producción (por metro) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación del 500-ésimo

metro es menor que el costo del 50-ésimo) debido a la escala económica. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, conforme se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será ineficiente y posiblemente existan costos por horas extra de trabajo. En estos términos, es posible que la razón de aumento de los costos empezará con el tiempo a subir. De este modo, es posible que suceda que

$$f'(5000) > f'(500)$$ ■

En el ejemplo siguiente se calcula la razón de cambio de la deuda nacional respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino con una tabla de valores.

t	$D(t)$
1994	414.0
1996	469.5
1998	467.3
2000	456.4
2002	442.3

EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional canadiense en el tiempo t. La tabla en el margen da valores aproximados de esta función calculados a mitad de año, en miles de millones de dólares, para distintos valores entre 1994 y 2002. Interprete y calcule el valor de $D'(1998)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1998)$ significa la razón de cambio de D respecto a t cuando $t = 1998$, es decir, la razón de incremento de la deuda nacional en 1998.

De acuerdo con la ecuación 5,

$$D'(1998) = \lim_{t \to 1998} \frac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$$

Por lo que calcule y tabule los valores del cociente de diferencias (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	Intervalo de tiempo	Razón de cambio promedio $= \dfrac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$
1994	[1994, 1998]	13.3
1996	[1996, 1998]	−1.1
2000	[1998, 2000]	−5.5
2002	[1998, 2002]	−6.3

Una nota sobre unidades
Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades de ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, miles de millones de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, por lo que se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

A partir de esta tabla se ve que $D'(1998)$ se localiza en alguna parte entre -1.1 y -5.5 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuó de manera errática entre 1998 y el 2000.] Se estima que la razón de incremento de la deuda nacional de Canadá en 1998 fue el promedio de estos dos números, específicamente

$$D'(1998) \approx -3.3 \text{ miles de millones de dólares por cada año.}$$

El signo menos significa que la deuda fue *disminuyendo* con el tiempo.

Otro método sería una gráfica de la función deuda y calcular la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1998$. ■

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda respecto al tiempo es de interés en la economía. Existen otras razones de cambio: en física, la razón de cambio de trabajo respecto al tiempo se llama *potencia*. Los químicos que estudian una reacción química

están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (llamada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la razón de cambio de la población de una colonia de bacterias respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería, e incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio son derivadas y por tanto se pueden interpretar como pendientes de rectas tangentes. Esto le da un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que usted resuelve problemas en que intervienen rectas tangentes, no solo resuelve un problema de geometría. También se está resolviendo en forma implícita gran variedad de problemas de ciencias y de ingeniería, que implican razones de cambio.

2.7 EJERCICIOS

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
(a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
(b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Trace la curva $y = e^x$ en los rectángulos de vista $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué nota acerca de la curva cuando hace un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Trace la gráfica de la parábola y la recta tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la recta tangente sean indistinguibles.

4. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Trace la curva y la recta tangente en rectángulos de vista cada vez más pequeños centrados en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5–8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

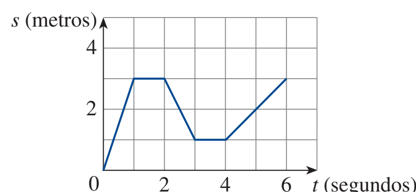
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

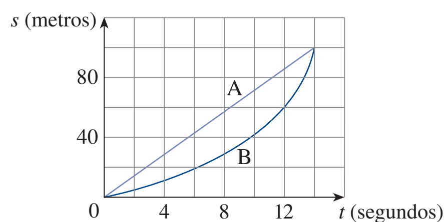
9. (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x + 3$ en el punto donde $x = a$.
(b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
(c) Trace la gráfica de la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

10. (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
(b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Trace la gráfica de la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

11. (a) Una partícula empieza moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra enseguida. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?
(b) Trace una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones posición de dos corredoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



(a) Describa y compare cómo desarrollaron la carrera las competidoras.
(b) ¿En qué momento hay la mayor distancia entre las competidoras?
(c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) una vez que transcurren t segundos está dada por $y = 10t - 4.9t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

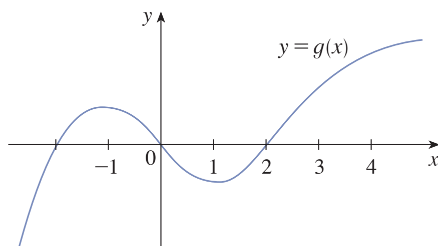
14. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 10t - 1.86t^2$.
(a) Encuentre la velocidad de la roca después de un segundo.
(b) Encuentre la velocidad de la roca cuando $t = a$.
(c) ¿Cuándo caerá la roca a la superficie?
(d) ¿Con qué velocidad chocará la roca contra la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

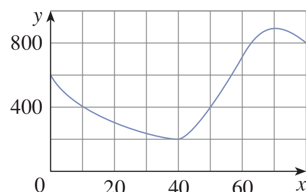
16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo:
(i) [3, 4] (ii) [3.5, 4]
(iii) [4, 5] (iv) [4, 4.5]
(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
(c) Trace la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio en el inciso (a). Luego, dibuje la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea en el inciso (b).

17. Para la función g cuya gráfica está dada, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



18. Se muestra la gráfica de una función f.
(a) Encuentre la razón de cambio promedio de f en el intervalo [20, 60].
(b) Identifique un intervalo en el que la razón de cambio promedio de f es 0.
(c) ¿Qué intervalo da una mayor razón de cambio, [40, 60] o [40, 70]?
(d) Calcule $\dfrac{f(40) - f(10)}{40 - 10}$ ¿qué representa geométricamente este valor?



19. Para la gráfica de la función f del ejercicio 18:
(a) Calcule el valor $f'(50)$.
(b) ¿Es $f'(10) > f'(30)$?
(c) ¿Es $f'(60) > \dfrac{f(80) - f(40)}{80 - 40}$? Explique su respuesta.

20. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

21. Si una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

22. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en (4, 3) pasa a través del punto (0, 2), encuentre $f(4)$ y $f'(4)$.

23. Trace la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

24. Trace la gráfica de una función g para la cual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

25. Trace la gráfica de una función g que es continua en su dominio $(-5, 5)$ y donde $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$, $g'(-2) = 0$, $\lim_{x\to-5^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to5^-} g(x) = 3$.

26. Trace la gráfica de una función f donde el dominio es $(-2, 2)$, $f'(0) = -2$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$, f es continua en todos los números dentro de su dominio excepto en ±1, y f es impar.

27. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto (1, 2).

28. Si $g(x) = x^4 - 2$ encuentre $g'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto (1, −1).

29. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto (2, 2).

(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

30. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y utilícela para encontrar las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos (2, 8) y (3, 9).

(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

31–36 Encuentre $f'(a)$.

31. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

32. $f(t) = 2t^3 + t$

33. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

34. $f(x) = x^{-2}$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

36. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

37–42 Cada uno de los límites siguientes representa la derivada de alguna función f en algún número a. Establezca una f y una a en cada caso.

37. $\displaystyle \lim_{h\to0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

38. $\displaystyle \lim_{h\to0} \frac{e^{-2+h} - e^{-2}}{h}$

39. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^6 - 64}{x - 2}$

40. $\lim_{x \to 1/4} \dfrac{\dfrac{1}{x} - 4}{x - \frac{1}{4}}$

41. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

42. $\lim_{\theta \to \pi/6} \dfrac{\operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2}}{\theta - \pi/6}$

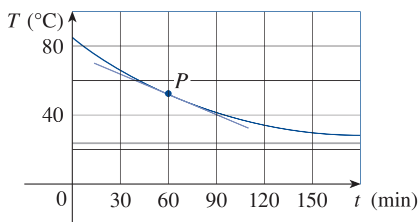
43–44 Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la rapidez cuando $t = 4$.

43. $f(t) = 80t - 6t^2$

44. $f(t) = 10 + \dfrac{45}{t + 1}$

45. Una lata de gaseosa tibia se pone a enfriar en un refrigerador. Trace la gráfica de la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la razón de cambio después de una hora?

46. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 85 °C y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde la temperatura es de 24 °C. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la recta tangente, calcule la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



47. Investigadores midieron la concentración promedio de alcohol en la sangre $C(t)$ de ocho hombres comenzando después de una hora del consumo de 30 ml de etanol (correspondiente a dos bebidas alcohólicas).

t (horas)	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$C(t)$ (mg/mL)	0.33	0.24	0.18	0.12	0.07

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a t para cada intervalo de tiempo:
(i) [1.0, 2.0] (ii) [1.5, 2.0]
(iii) [2.0, 2.5] (iv) [2.0, 3.0]
En cada caso, incluya las unidades.

(b) Calcule la razón de cambio instantánea en $t = 2$ e interprete su resultado. ¿Cuáles son las unidades?

Fuente: Adaptado de P. Wilkinson *et al*., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State", *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5 (1977): 207–224.

48. En la tabla se proporciona el número N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 1 de octubre.)

Año	2004	2006	2008	2010	2012
N	8569	12,440	16,680	16,858	18,066

(a) Determine la tasa promedio de crecimiento
(i) de 2006 a 2008
(ii) de 2008 a 2010
En cada caso incluya las unidades. ¿Qué concluye?

(b) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2010 considerando el promedio de dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?

(c) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2010 midiendo la pendiente de una recta tangente.

49. La tabla muestra el número de pasajeros P que llegaron a Irlanda por aire, en millones.

Año	2001	2003	2005	2007	2009
P	8.49	9.65	11.78	14.54	12.84

(a) Encuentre la tasa promedio de incremento de P
(i) de 2001 a 2005 (ii) de 2003 a 2005
(iii) de 2005 a 2007
En cada caso, incluya las unidades.

(b) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2005 tomando el promedio de dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?

50. La tabla muestra valores de la carga viral $V(t)$ en el paciente 303 con VIH, medido en copias de ARN/mL, t días después de que se comenzó con el tratamiento ABT-538.

t	4	8	11	15	22
$V(t)$	53	18	9.4	5.2	3.6

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de V con respecto a t en cada intervalo de tiempo:
(i) [4, 11] (ii) [8, 11]
(iii) [11, 15] (iv) [11, 22]
¿Cuáles son las unidades?

(b) Estime e interprete el valor de la derivada $V'(11)$.

Fuente: Adaptada de D. Ho *et al*., "Rapid Turnover of Plasma Virions and CD4 Lymphocytes in HIV-1 Infection", *Nature* 373 (1995): 123–126.

51. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a x, cuando cambia el nivel de producción:
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encuentre la razón de cambio instantáneo de C con respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

52. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 litros de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, entonces la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t)\ 5\ 100\,000\left(1-\tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantáneo de V con respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una frase o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

53. El costo de producir x kilogramos de oro a partir de una reciente mina de oro es $C = f(x)$ dólares.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿Que significa el enunciado $f'(50) = 36$?

(c) ¿Qué piensa usted: los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto plazo? ¿Y a largo plazo? Explique.

54. El número de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Suponga que existe una cantidad de espacio y nutrientes para las bacterias. ¿Cree que es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrientes, ¿afectaría su conclusión? Explique.

55. Sea $H(t)$ el costo diario (en dólares) para acondicionar una oficina de un edificio cuando la temperatura exterior es de t grados Celsius.

(a) ¿Qué significa $H'(15)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿Esperaría que $H'(15)$ fuera positiva o negativa? Explique su respuesta.

56. La cantidad (en kilogramos) de un café en grano gourmet que vende una empresa a un precio de p dólares por kilogramo es $Q = f(p)$.

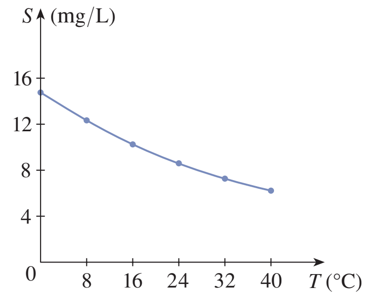
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿Es $f'(8)$ positivo o negativo? Explique su respuesta.

57. La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura de esta. (De esa manera la contaminación térmica influye en el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Calcule e interprete el valor de $S'(16)$.

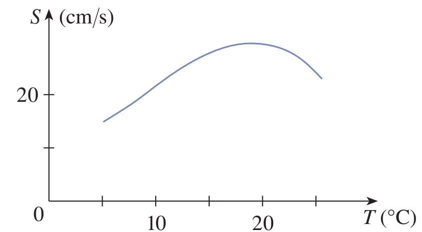


Fuente: C. Kupchella *et al.*, *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2a. ed. (Boston: Allyn and Bacon, 1989).

58. La gráfica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado S del salmón Coho.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Calcule los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



59–60 Determine si $f'(0)$ existe.

59. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

60. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

---

61. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{1000}\operatorname{sen}(1000x)$ en el rectángulo de vista $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$. ¿Qué pendiente parece que tiene la gráfica en el origen?

(b) Haga un acercamiento para la venta de vista $[-0.4, 0.4]$ por $[-0.25, 0.25]$ y calcule el valor de $f'(0)$. ¿Esto concuerda con la respuesta del inciso (a)?

(c) Ahora haga un acercamiento a la ventana de vista $[-0.008, 0.008]$ por $[-0.005, 0.005]$. ¿Desea revisar su cálculo para $f'(0)$?

PROYECTO DE REDACCIÓN PRIMEROS MÉTODOS PARA ENCONTRAR TANGENTES

La primera persona en formular explícitamente las ideas de límites y derivadas fue Sir Isaac Newton en la década de 1660. Pero Newton reconoció: "Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes". Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601-1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para encontrar rectas tangentes, y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las referencias siguientes contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias de estas referencias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, utilice el método de la sección 2.7 para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto $(1, 3)$ y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, indique las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.

2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.

3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.

4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.8 La derivada como una función

En la sección anterior se consideró la derivada de una función f en un número fijo a:

1
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ahora se cambiará el punto de vista y hará que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, se obtiene

2
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Dado cualquier número x para el cual este límite existe, asigne a x el número $f'(x)$. De modo que considere a f' como una nueva función, llamada **derivada de *f*** y definida por medio de la ecuación 2. Se sabe que el valor de f' en x, $f'(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de encontrar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

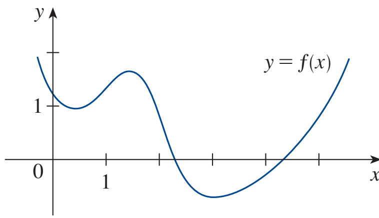


FIGURA 1

EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Utilícela para dibujar la gráfica de la derivada f'.

SOLUCIÓN Se puede calcular el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la recta tangente en P de la figura 2(a) y estime su pendiente alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. (La pendiente de la gráfica de f se convierte en el valor de y sobre la gráfica de f'.) Si repite este procedimiento en varios puntos, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2(b). Observe que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 ahí, y la gráfica de f' cruza el eje x (donde $y = 0$) en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva ahí. (La gráfica está arriba del eje x.) Pero entre B y C las tangentes tienen pendiente negativa, de modo que $f'(x)$ ahí es negativa.

TEC Visual 2.8 presenta una animación de la figura 2 para diferentes funciones.

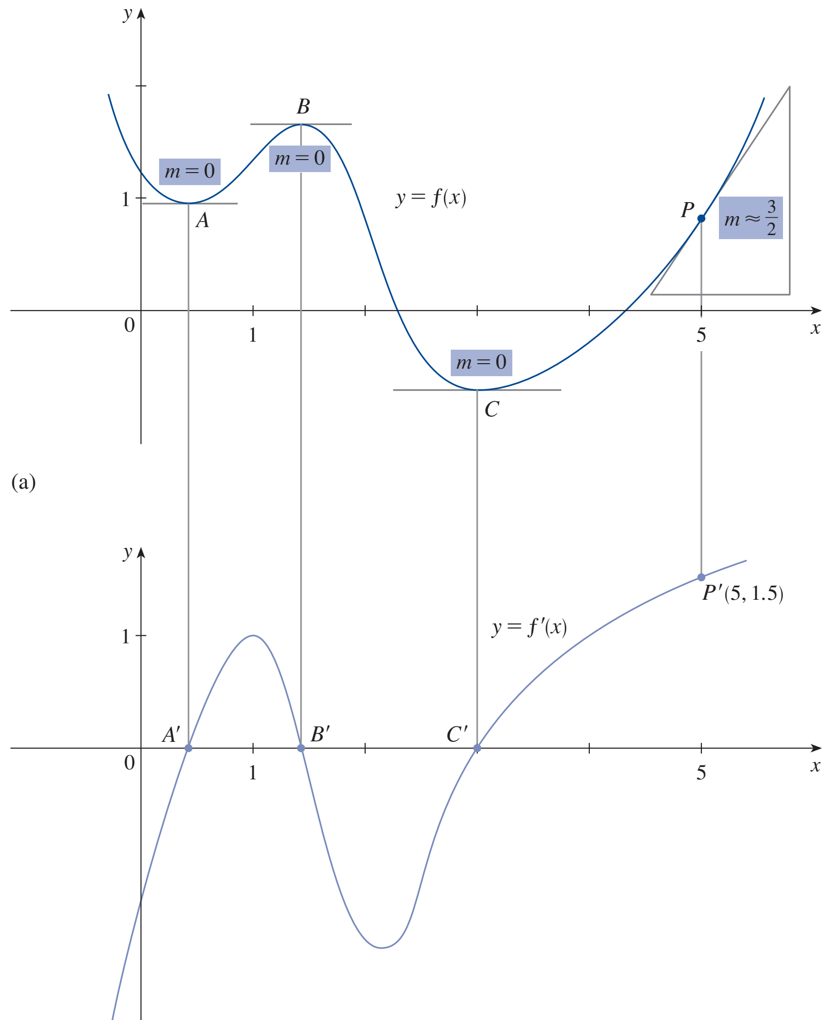


FIGURA 2

EJEMPLO 2

(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.

(b) Ilustre esta fórmula comparando las gráficas de f y f'.

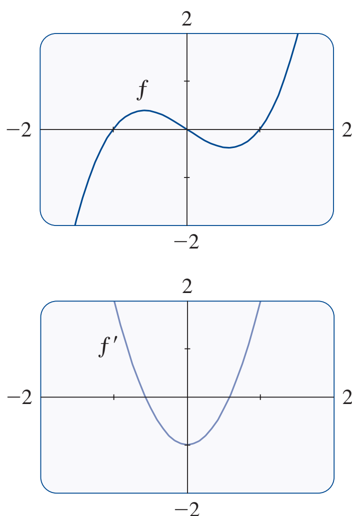


FIGURA 3

SOLUCIÓN

(a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x + h)^3 - (x + h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

(b) Use un dispositivo de graficación para trazar las gráficas de f y f' de la figura 3. Observe que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas gráficas sirven como comprobación de nuestro trabajo del inciso (a). ■

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Indique el dominio de f'.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

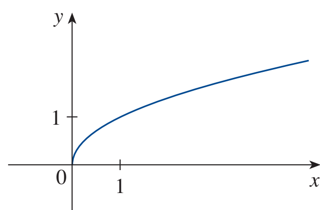
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} \right) \quad \text{(Racionalice el numerador)}$$

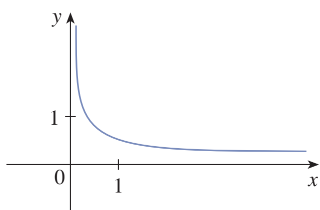
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$. Este es, ligeramente menor que el dominio de f, que es $[0, \infty)$. ■



(a) $f(x) = \sqrt{x}$



(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las gráficas de f y f' en la figura 4. Cuando x está cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por tanto, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ es muy grande, y esto corresponde a rectas tangentes muy pronunciadas cerca de $(0, 0)$ de la figura 4(a), y a valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 4(b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeña, y esto corresponde a rectas tangentes más aplanadas en el extremo derecho de la gráfica de f y a la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1 - (x + h)}{2 + (x + h)} - \dfrac{1 - x}{2 + x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 - x - h)(2 + x) - (1 - x)(2 + x + h)}{h(2 + x + h)(2 + x)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2 - x - 2h - x^2 - xh) - (2 - x + h - x^2 - xh)}{h(2 + x + h)(2 + x)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2 + x + h)(2 + x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2 + x + h)(2 + x)} = -\frac{3}{(2 + x)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad local, donde se graduó de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones políticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar a las Iglesias católica y protestante.

Su estudio formal de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en matemáticas y en ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En particular, su versión del cálculo, que publicó en 1684, estableció la notación y las reglas para encontrar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgió una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del cálculo, pero —debido a su temor a la controversia—, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

Otras notaciones

Si usa la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de derivación, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx, introducido por Leibniz, no se debe considerar como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con la ecuación 2.7.6, se puede reescribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico a, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$. La barra vertical significa "evaluar en".

3 Definición Una función f es **derivable en a** si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y se puede elegir h suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$, de aquí que $|x + h| = x + h$. Por tanto, para $x > 0$ se tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y, por consiguiente, f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ y se puede elegir h suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por tanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

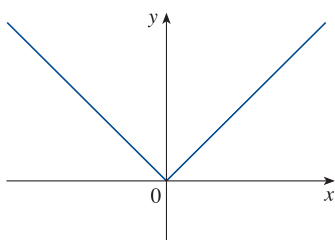
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

por lo que f es derivable para cualquier $x < 0$.

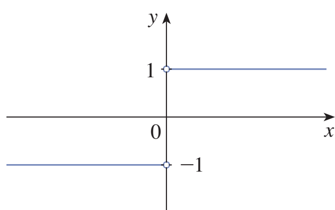
Para $x = 0$ se debe investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \qquad \text{(si existe)}$$



(a) $y = f(x) = |x|$



(b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Calcule por separado los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto en $x = 0$.

Una fórmula para f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la figura 5(b). El hecho de que $f'(0)$ no exista se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5(a).] ■

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades.

4 Teorema Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar que f es continua en a, se debe demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Para esto empiece por probar que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en a; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

SP Un aspecto importante de la solución de problemas es intentar encontrar una conexión entre lo dado y lo desconocido. Consulte el paso 2 (Piense en un plan) en *Principios para la resolución de problemas*, en la página 71.

existe (véase la ecuación 2.7.5). Para relacionar lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es posible cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

De este modo, si usa la ley del producto y la ecuación (2.7.5), se puede escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Para utilizar lo que se acaba de demostrar, se comienza con $f(x)$ y se suma y se resta $f(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a) \end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en a. ■

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas, pero que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 2.3.7.) Pero en el ejemplo 5 se demostró que f no es derivable en 0.

¿Cómo deja de ser derivable una función?

En el ejemplo 5 se vio que la función $y = |x|$ no es derivable en 0 y en la figura 5(a) se muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable ahí. [Al intentar calcular $f'(a)$, se encuentra que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 da otra forma en que una función no tiene derivada. Este dice que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en a. Por lo que, en cualquier discontinuidad (por ejemplo, una discontinuidad de salto), f no es derivable.

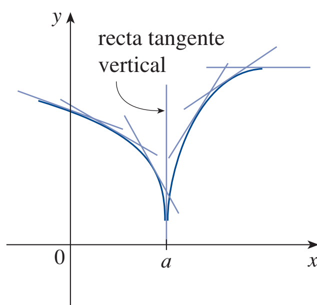


FIGURA 6

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en a y

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7(c) muestra otra. Las tres posibilidades que se acaban de analizar se ilustran en la figura 7.

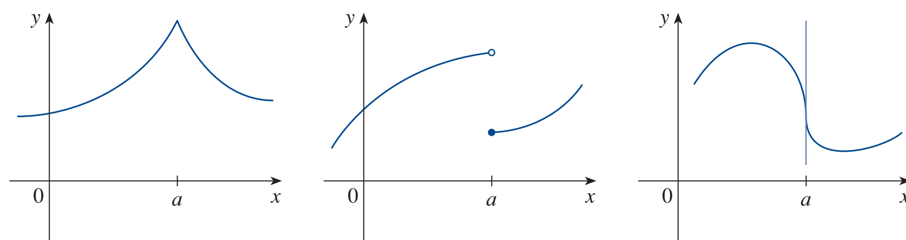


FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en a

(a) Una esquina (b) Una discontinuidad (c) Una tangente vertical

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en a, entonces, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica se alinea y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo específico es la figura 2.7.2.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7(a), no puede eliminar el pico o esquina (véase la figura 9).

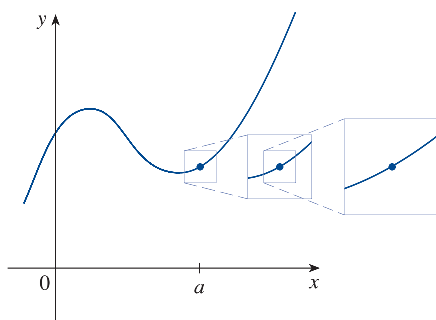


FIGURA 8
f es derivable en a

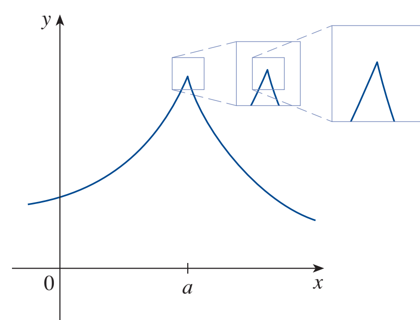


FIGURA 9
f no es derivable en a

Derivadas superiores

Si f es una función derivable, entonces su derivada f también es una función, por lo que f puede tener una derivada de sí misma, denotada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se llama **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{derivada de}} \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{primera derivada}} = \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segunda derivada}}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 se encuentra que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Por lo que la segunda derivada es

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x$$

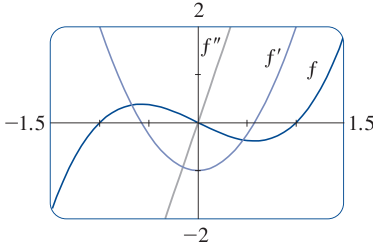


FIGURA 10

Las gráficas de f, f' y f'' se muestran en la figura 10.

Se puede interpretar $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y es positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos. ■

TEC En Module 2.8 usted puede ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f y cómo afectan el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

En general, una segunda derivada se puede interpretar como una razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea con respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La aceleración es el cambio de velocidad que se siente cuando se acelera o se desacelera en un auto.

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Por lo que, $f(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

Se puede interpretar físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Es un nombre apropiado porque un gran jerk significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

El proceso de derivación puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, se escribe

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 se encuentra que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y así, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Por tanto f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. Por tanto, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

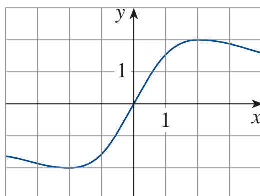
■

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' da información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 se verá cómo la segunda derivada y las derivadas superiores nos permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

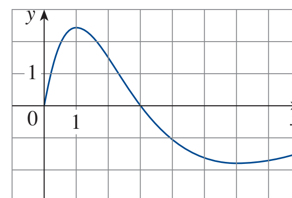
2.8 EJERCICIOS

1–2 Utilice la gráfica que se proporciona para calcular el valor de cada derivada. Luego trace la gráfica de f'.

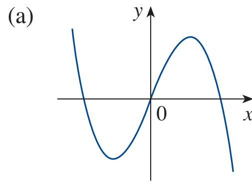
1. (a) $f'(-3)$ (b) $f'(-2)$ (c) $f'(-1)$ (d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$ (f) $f'(2)$ (g) $f'(3)$

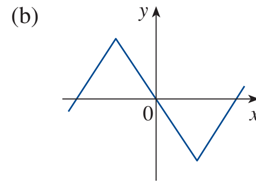


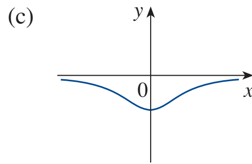
2. (a) $f'(0)$ (b) $f'(1)$ (c) $f'(2)$ (d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$ (f) $f'(5)$ (g) $f'(6)$ (h) $f'(7)$

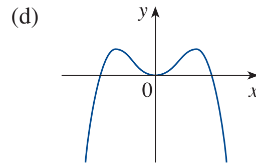


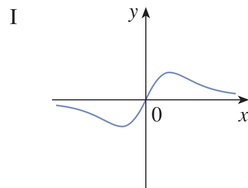
3. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I-IV. Dé las razones para sus selecciones.

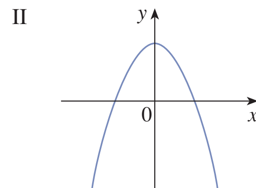


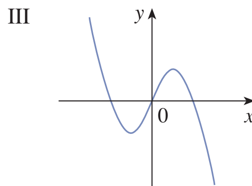


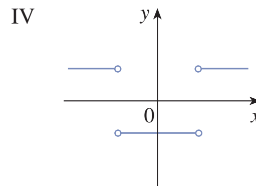






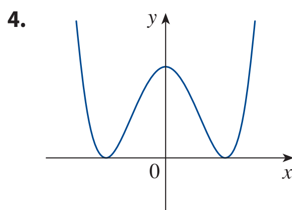




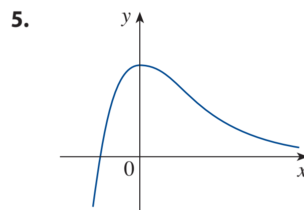


4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de esta.

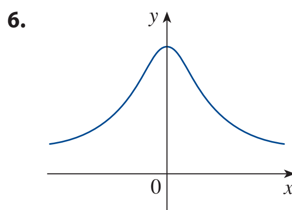
4.



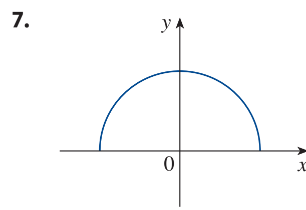
5.



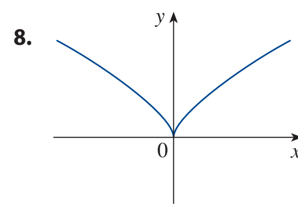
6.



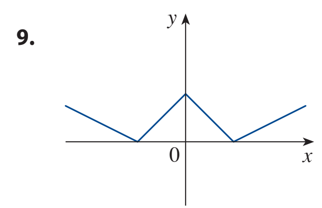
7.



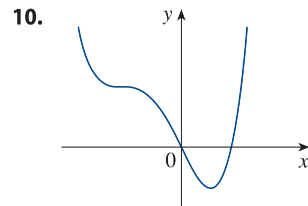
8.



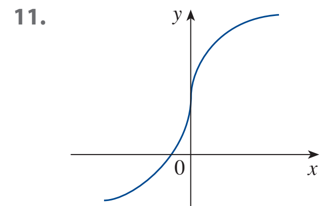
9.



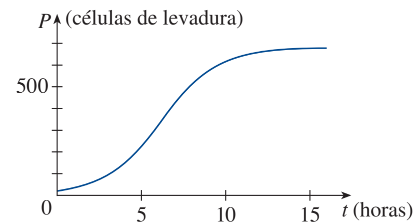
10.



11.



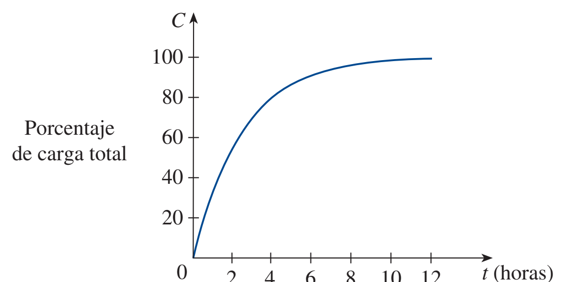
12. Se muestra la gráfica de la función población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?



13. Una batería recargable se conecta con un cargador. La gráfica muestra $C(t)$, el porcentaje de capacidad que la batería alcanza como una función del tiempo t transcurrido (en horas).

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $C'(t)$?

(b) Trace la gráfica de $C'(t)$. ¿Qué le indica la gráfica?

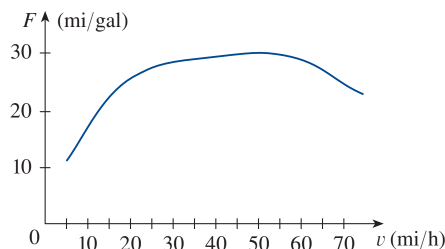


14. La gráfica (del Departamento de Energía de EE. UU.) muestra cómo afecta la rapidez de manejo el consumo de combustible. La economía F se mide en millas por galón, y la rapidez v se mide en millas por hora.

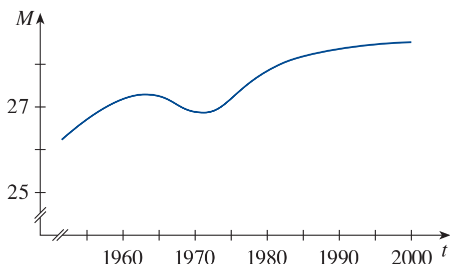
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $F'(v)$?

(b) Trace la gráfica de la derivada de $F'(v)$.

(c) ¿A qué rapidez debería manejar si quiere ahorrar combustible?



15. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo xx. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



16–18 Trace una gráfica cuidadosa de f y debajo de esta la gráfica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4-11. ¿Puede intuir una fórmula para $f(x)$ a partir de su gráfica?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **17.** $f(x) = e^x$ **18.** $f(x) = \ln x$

19. Sea $f(x) = x^2$.

(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(1)$ y $f'(2)$ usando un dispositivo de graficación para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.

(b) Utilice la simetría para deducir los valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.

(c) Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para $f'(x)$.

(d) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso (c) es correcta.

20. Sea $f(x) = x^3$.

(a) Calcule los valores de $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ usando un dispositivo de graficación para hacer un acercamiento de la gráfica de f.

(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.

(c) Utilice los valores de los incisos (a) y (b) para trazar la gráfica de f'.

(d) Infiera una fórmula para $f'(x)$.

(e) Aplique la definición de derivada para demostrar que su propuesta del inciso (d) es correcta.

21–31 Encuentre la derivada de cada una de las funciones siguientes usando la definición de derivada. Indique los dominios de la función y de su derivada.

21. $f(x) = 3x - 8$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 2.5t^2 + 6t$

24. $f(x) = 4 + 8x - 5x^2$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

32. (a) Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ comenzando con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ aplicando las transformaciones de la sección 1.3.

(b) Use la gráfica del inciso (a) para trazar la gráfica de f'.

(c) Aplique la definición de derivada para encontrar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?


(d) Utilice un dispositivo de graficación para trazar la grafica de f' y compárela con su trazo del inciso (b).

33. (a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.


(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

34. (a) Si $f(x) = x + 1/x$, encuentre $f'(x)$.


(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

35. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla da el porcentaje de desempleo en la fuerza laboral australiana medida a medio año de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8.1	2000	6.2
1996	8.0	2001	6.9
1997	8.2	2002	6.5
1998	7.9	2003	6.2
1999	6.7	2004	5.6

(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Construya una tabla de valores estimados para $U'(t)$.

36. Sea $P(t)$ el porcentaje de población de Filipinas arriba de 60 años de edad en el instante t. La tabla da las proyecciones de los valores de esta función de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5.2	2010	6.7
2000	5.5	2015	7.7
2005	6.1	2020	8.9

(a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $P'(t)$.
(c) Trace la gráfica de P y P'.

37. La tabla da la altura conforme pasa el tiempo de un árbol de pino típico de madera en un sitio administrado.

Edad tres (años)	14	21	28	35	42	49
Altura (pies)	41	54	64	72	78	83

Fuente: Arkansas Forestry Commission

Si $H(t)$ es la altura del árbol después de t años, construya una tabla de valores calculados para H' y trace su gráfica.

38. La temperatura del agua afecta la tasa de crecimiento de la trucha de arroyo. La tabla muestra la cantidad de peso ganado por la trucha de arroyo después de 24 días con diferentes temperaturas del agua.

Temperatura (°C)	15.5	17.7	20.0	22.4	24.4
Peso ganado (g)	37.2	31.0	19.8	9.7	−9.8

Si $W(x)$ es la ganancia de peso a la temperatura x, construya una tabla de valores estimados de W' y trace su gráfica. ¿Cuáles son las unidades de $W'(x)$?

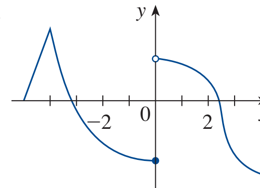
Fuente: Adaptado de J. Chadwick Jr., "Temperature Effects on Growth and Stress Physiology of Brook Trout: Implications for Climate Change Impacts on an Iconic Cold-Water Fish." *Masters Theses.* Paper 897. 2012. scholarworks.umass.edu/theses/897.

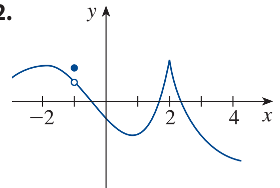
39. Sea P el porcentaje de energía eléctrica de una ciudad que se produce por paneles solares t años después del 1 de enero de 2000.
(a) ¿Qué representa dP/dt en este contexto?
(b) Interprete el enunciado

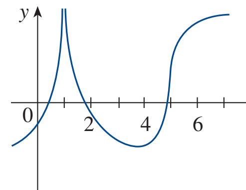
$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=2} = 3.5$$

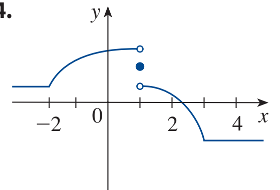
40. Suponga que N es el número de personas en Canadá que viajan en coche a otra provincia para vacacionar este año cuando el precio promedio de gasolina es de p dólares por litro. ¿Espera dN/dp sea positiva o negativa? Explique su respuesta.

41–44 Observe la gráfica de f. Indique, con razones, los números en los que f *no* es derivable.

41.


42.


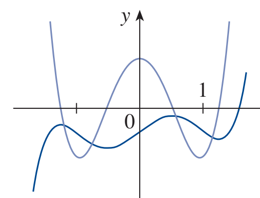
43.


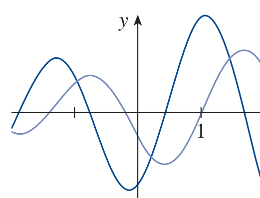
44.


45. Trace la gráfica de la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

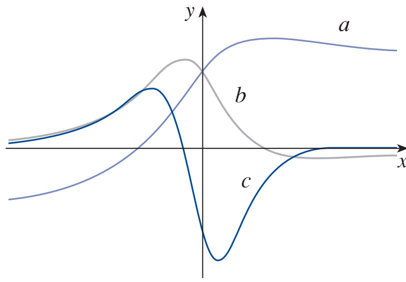
46. Haga un acercamiento hacia los puntos (1, 0), (0, 1) y $(-1, 0)$ en la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Qué observa? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

47–48 Se muestran las gráficas de una función f y su derivada f'. ¿Cuál es mayor $f'(-1)$ o $f''(-1)$?

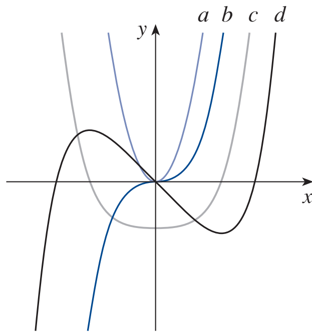
47.


48.


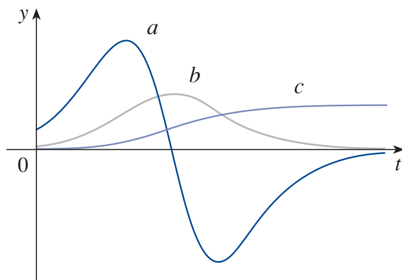
49. La figura muestra las gráficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique el porqué de su elección.



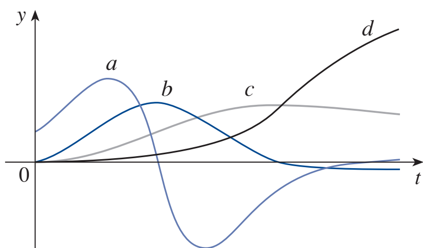
50. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



51. La figura muestra las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



52. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones. Una es la función de posición de un auto, la de velocidad, la de aceleración y la de su jerk. Identifique cada curva y explique los motivos de su elección.



53–54 Utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ y $f''(x)$. Luego, trace la gráfica de f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son razonables.

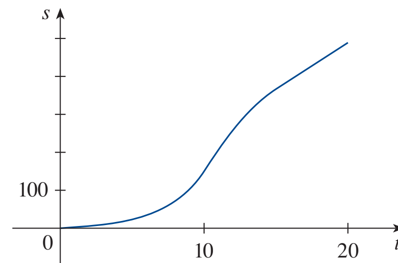
53. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

54. $f(x) = x^3 - 3x$

---

55. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$ encuentre $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Trace la gráfica de f, f', f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

56. (a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en metros y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuá1 es la aceleración en $t = 10$ segundos?



(b) Utilice la curva de aceleración del inciso (a) para calcular el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

57. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Si $a \neq 0$, utilice la ecuación 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.
(b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
(c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0). (Recuerde: la forma de la función de f. Véase la figura 1.2.13.)

58. (a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g''(0)$ no existe.
(b) Si $a \neq 0$, encuentre $g''(a)$.
(c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0).
(d) Ilustre el inciso (c) al trazar la gráfica de $y = x^{2/3}$.

59. Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

60. ¿Dónde no es derivable la función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$? Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

61. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x\,|x|$.
(b) ¿Para qué valores de x es f derivable?
(c) Encuentre una fórmula para f'.

62. (a) Trace la gráfica de la función $g(x) = x + |x|$.
(b) ¿Para qué valores de x es g derivable?
(c) Encuentre una fórmula para g'.

63. Recuerde que a una función f se le denomina *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio, e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Demuestre cada uno de los enunciados siguientes.
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

64. Las derivadas **por la izquierda** y **por la derecha** de f en a están definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y
$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen. Entonces $f'(a)$ existe si y solo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Determine $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Trace la gráfica de f.

(c) ¿Dónde es discontinua f?

(d) ¿Dónde f no es derivable?

65. Nick comienza a correr y corre cada vez más rápido durante 3 minutos, luego camina durante 5 minutos. Se detiene en un cruce por 2 minutos, corre bastante rápido durante 5 minutos y camina durante 4 minutos.

(a) Trace una posible gráfica de la distancia s que Nick ha cubierto después de t minutos.

(b) Trace una gráfica de ds/dt.

66. Cuando abre el grifo del agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.

(a) Trace una posible gráfica de T como función del tiempo t transcurrido desde que abrió el grifo.

(b) Describa cómo varía la razón de cambio de T con respecto a t, conforme esta aumenta.

(c) Trace la gráfica de la derivada de T.

67. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ forma con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ redondeado al grado más cercano.

2 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Explique qué significa cada uno de los enunciados siguientes e ilustre con un trazo.

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

(d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con gráficas.

3. Enuncie las leyes de los límites siguientes.

(a) Ley de la suma
(b) Ley de la diferencia
(c) Ley del múltiplo constante
(d) Ley del producto
(e) Ley del cociente
(f) Ley de la potencia
(g) Ley de la raíz

4. ¿Qué establece el teorema de la compresión?

5. (a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

(b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuáles de las curvas siguientes tienen asíntotas verticales? ¿Cuáles tienen asíntotas horizontales?

(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$ (c) $y = \tan x$

(d) $y = \tan^{-1}x$ (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$

(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) ¿Qué significa que f sea continua en a?

(b) ¿Qué significa que f sea continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de esta función?

8. (a) Dé ejemplos de funciones que sean continuas en $[-1, 1]$.

(b) Dé un ejemplo de una función que no sea continua en $[0, 1]$.

9. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?

10. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

11. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo se puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

12. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.

(a) La razón promedio de cambio de y con respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.

(b) La razón de cambio instantáneo de y con respecto a x en $x = x_1$.

13. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

14. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

15. (a) ¿Qué significa que f sea derivable en a?
(b) ¿Cuál es la relación entre derivabilidad y continuidad de una función?
(c) Trace la gráfica de una función que sea continua, pero no derivable en $a = 2$.

16. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con gráficas.

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{8}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4}-\lim_{x\to 4}\dfrac{8}{x-4}$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\dfrac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4}=\dfrac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. $\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$

5. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)$

6. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

7. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

8. Si no existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ y ni el $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ no existe.

9. Si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero no existe el $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ no existe.

10. Si existe el $\lim_{x\to 6} [f(x)g(x)]$ entonces el límite debe ser igual a $f(6)\,g(6)$.

11. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x\to b} p(x)= p(b)$

12. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = 0$.

13. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

14. Si f tiene dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

15. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

16. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

17. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

18. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1)= 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

19. Sea f una función tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Entonces existe un número positivo δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

20. Si $f(x)> 1$ para toda x y $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

21. Si f es continua en a, entonces f es derivable en a.

22. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x\to r} f(x)= f(r)$.

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

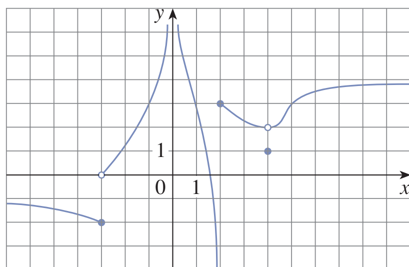
24. La ecuación $x^{10} + 10x^2 + 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 2)$.

25. Si f es continua en a, también lo es $|f|$.

26. Si $|f|$ es continua en a, también lo es f.

EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de f.



(a) Encuentre cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existen.

(i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to -3} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 4} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(vii) $\lim_{x\to \infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

(b) Exprese las ecuaciones de las asíntotas horizontales.
(c) Exprese las ecuaciones de las asíntotas verticales.
(d) ¿En qué números f es discontinua? Explique.

2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2,\quad \lim_{x\to \infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to -3} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2,$$

f es continua por la derecha en 3

3–20 Encuentre cada uno de los límites siguientes.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} e^{x^3-x}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

7. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^3+1}{h}$

8. $\displaystyle\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t^3-8}$

9. $\displaystyle\lim_{r\to 9} \frac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\displaystyle\lim_{v\to 4^+} \frac{4-v}{|4-v|}$

11. $\displaystyle\lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to \pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1-2x^2-x^4}{5+x-3x^4}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$

18. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} e^{x-x^2}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$

21–22 Utilice las gráficas para descubrir las asíntotas de la curva. Después, demuestre lo que ha descubierto.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}$

23. Si $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2\cos(1/x^2) = 0$.

25–28 Demuestre cada uno de los enunciados siguientes utilizando la definición precisa de límite.

25. $\displaystyle\lim_{x\to 2}(14-5x) = 4$

26. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = 0$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2-3x) = -2$

28. $\displaystyle\lim_{x\to 4^+}\frac{2}{\sqrt{x-4}} = \infty$

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3-x & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada límite si este existe.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) ¿Dónde es discontinua f?

(c) Trace la gráfica de f.

30. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2-x & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \\ x-4 & \text{si } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(a) Para cada uno de los números 2, 3 y 4, descubra si g es continua por la izquierda, por la derecha o continua en el número.

(b) Trace la gráfica de g.

31–32 Demuestre que cada una de las funciones siguientes es continua en su dominio. Exprese el dominio.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$

33–34 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

33. $x^5 - x^3 + 3x - 5 = 0$, $(1, 2)$

34. $\cos\sqrt{x} = e^x - 2$, $(0, 1)$

35. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 9 - 2x^2$ en el punto $(2, 1)$.

(b) Determine la ecuación de esta tangente.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{2}{1-3x}$$

y los puntos de abscisas 0 y -1.

37. El desplazamiento (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta está dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, donde t se mide en segundos.

(a) Encuentre la velocidad promedio en los períodos de tiempo siguientes:

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$ (iii) $[1, 1.5]$ (iv) $[1, 1.1]$

(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

38. De acuerdo con la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 4000$, donde P se mide en pascales y V en litros.

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de P cuando V se incrementa de 3 L a 4 L.

(b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón de cambio instantánea de V con respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de P.

39. (a) Utilice la definición de derivada para encontrar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$.

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto $(2, 4)$.



(c) Ilustre el inciso (b) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

40. Encuentre una función f y un número a tales que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^6-64}{h} = f'(a)$$

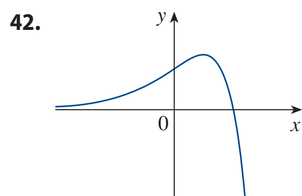
41. El costo total de pagar un préstamo para estudiante a una tasa de interés de r% por año es $C = f(r)$.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?

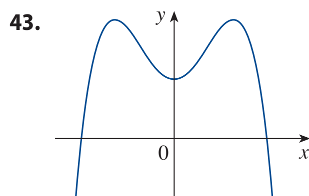
(b) ¿Qué significa el enunciado $f'(10) = 1200$?
(c) ¿Es $f'(r)$ siempre positiva o cambia de signo?

42–44 Trace o copie la gráfica de la función dada. Luego trace directamente debajo su derivada.

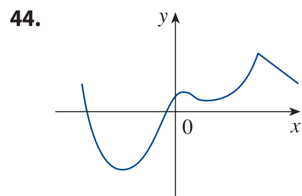
42.



43.



44.



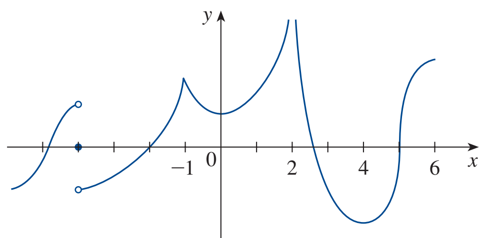
45. (a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$ utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.
(b) Encuentre los dominios de f y f'.

(c) Trace la gráfica de f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso (a) es razonable.

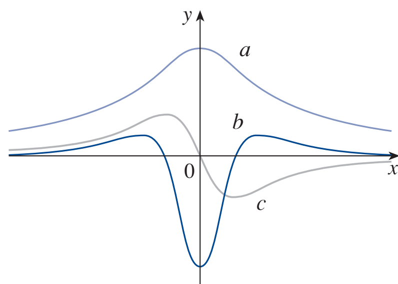
46. (a) Encuentre las asíntotas de la gráfica de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ y utilícelas para dibujar la gráfica.
(b) Utilice la gráfica del inciso (a) y trace la gráfica de f'.
(c) Utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.

(d) Utilice un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de f' y compárela con su trazo del inciso (b).

47. Se muestra la gráfica de f. Enuncie, con razones, los números en los que f no es derivable.



48. La figura muestra la gráfica de f, f' y f''. Identifique cada curva y explique su elección.



49. Trace la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes: el dominio de f es todos los números reales excepto 0, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $f'(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, $\lim_{x\to -\infty} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to \infty} f'(x) = 1$.

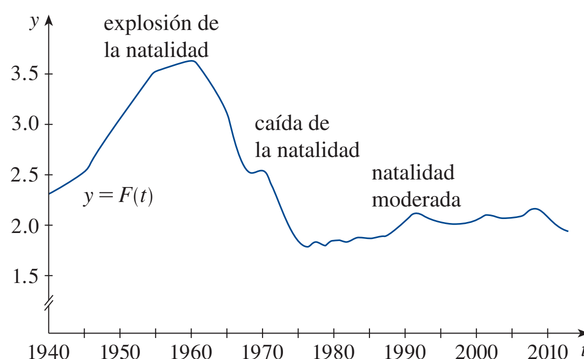
50. Sea $E(t)$ el valor del euro (la moneda europea) en términos del dólar de los Estados Unidos al tiempo t. La tabla da los valores de la función, a partir de mediados de año, de 2000 a 2004. Interprete $E'(2002)$ y calcule su valor.

t	2000	2001	2002	2003	2004
$E(t)$	0.955	0.847	0.986	1.149	1.218

51. Sea $B(t)$ el número de billetes de 20 dólares en circulación al tiempo t. La tabla da los valores de esta función de 1990 a 2010, al 31 de diciembre, en miles de millones. Interprete y calcule el valor de $B'(2000)$.

t	1990	1995	2000	2005	2010
$B(t)$	3.45	4.21	4.93	5.77	6.53

52. La *tasa de fertilidad total*, al tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos de cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en EE. UU., se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 2010.
(a) Calcule los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.
(b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?
(c) ¿Puede sugerir razones para los valores de estas derivadas?



53. Suponga que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, donde $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Encuentre $\lim_{x\to a} f(x)$.

54. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$
(a) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?
(b) ¿En qué números es discontinua la función f?

Problemas adicionales

En el análisis de los principios para la resolución de problemas, se consideró la estrategia para resolver problemas llamada *Introduzca algo extra* (véase la página 71). En el ejemplo siguiente se muestra cómo este principio resulta útil a veces cuando evalúa límites. La idea es cambiar la variable, introducir una nueva variable relacionada con la original, de tal manera que el problema se haga más sencillo. Más adelante, en la sección 5.5, se utilizará más esta idea general.

EJEMPLO Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, donde c es una constante.

SOLUCIÓN Como se ve, este límite parece desafiante. En la sección 2.3 se evaluaron varios límites en los que tanto el numerador como el denominador tendieron a 0. Ahí, la estrategia fue realizar cierto tipo de manipulación algebraica que condujo a una eliminación simplificadora, pero en este caso no está claro qué clase de álgebra se necesita.

Por tanto, se introduce una nueva variable t con la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

También se necesita expresar x en términos de t, por lo que se resuelve esta ecuación

$$t^3 = 1 + cx \qquad x = \frac{t^3 - 1}{c} \quad (\text{si } c \neq 0)$$

Observe que $x \to 0$ es equivalente a $t \to 1$. Esto permite convertir el límite dado en uno que implique a la variable t:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} \end{aligned}$$

El cambio de variable permitió reemplazar un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya se ha visto. Al factorizar el denominador como una diferencia de cubos, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3} \end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable se tuvo que excluir el caso en que $c = 0$. Pero si $c = 0$, la función es 0 para toda x distinta de cero y así este límite es 0. Por tanto, en todos los casos, el límite es $c/3$. ■

Los problemas siguientes sirven para poner a prueba y desafiar sus habilidades para resolver problemas. Algunos requieren una cantidad considerable de tiempo para pensar, de modo que no se desaliente si no los puede resolver de inmediato. Si tiene alguna dificultad, quizá le sirva consultar en la página 71 el análisis de los principios para la resolución de problemas.

PROBLEMAS

1. Evalúe el $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encuentre los números a y b tales que el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

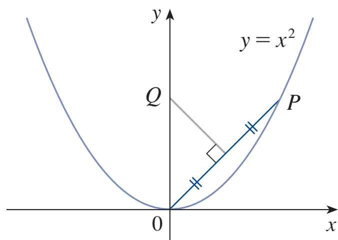


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

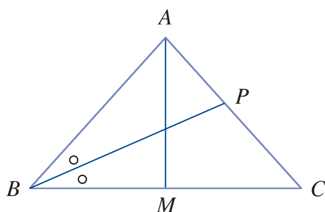


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

3. Evalúe $\lim_{x\to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

4. En la figura se muestra un punto P sobre la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde la bisectriz perpendicular de OP interseca al eje y. Conforme P se aproxima al origen, a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

5. Evalúe los límites siguientes, si estos existen, donde $[\![x]\!]$ denota la función parte entera.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{[\![x]\!]}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} x\,[\![1/x]\!]$

6. Trace la región en el plano definida por cada una de las ecuaciones siguientes:

(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$

(c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c; este permanece fijo.)

(a) Trace la gráfica de una función continua con dominio [0, 1] cuyo rango también se encuentre en [0, 1]. Localice un punto fijo de f.

(b) Intente graficar una función continua con dominio [0, 1] y rango en [0, 1] que no tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?

(c) Utilice el teorema de valor intermedio para comprobar que cualquier función continua con dominio [0, 1] y rango en [0, 1] debe tener un punto fijo.

9. Si $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = 1$, encuentre $\lim_{x\to a}[f(x)\,g(x)]$.

10. (a) En la figura se muestra un triángulo isósceles ABC con $\angle B = \angle C$. La bisectriz del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija, pero que la altura $|AM|$ del triángulo tiende a 0, de modo que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué sucede con P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

(b) Intente trazar la trayectoria recorrida por P durante este proceso. Luego encuentre la ecuación de esta curva y úsela para trazarla.

11. (a) Si parte de 0° de latitud y avanza en dirección oeste, puede denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo dado. Suponga que T es una función continua de x, y demuestre que, en cualquier tiempo fijo, existen por lo menos dos puntos opuestos sobre el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.

(b) ¿E1 resultado del inciso (a) se cumple para puntos que estén sobre cualquier circunferencia sobre la superficie de la Tierra?

(c) ¿El resultado del inciso (a) se cumple para la presión barométrica y para la altitud arriba del nivel del mar?

12. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$, utilice la definición de derivada para demostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponga que f es una función que satisface la ecuación

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos los números reales x y y. Suponga también que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encuentre $f(0)$. (b) Encuentre $f'(0)$. (c) Encuentre $f'(x)$.

14. Suponga que f es una función con la propiedad de que $|f(x)| \leqslant x^2$ para toda x. Demuestre que $f(0) = 0$. Luego muestre que $f'(0) = 0$.

3 Reglas de derivación



En el proyecto de la página 208 se calculará la distancia de una pista del aeropuerto en la que un piloto debe iniciar el descenso para un aterrizaje suave.

© Mechanik / Shutterstock.com

HASTA AQUÍ SE HA VISTO CÓMO INTERPRETAR las derivadas en términos de pendientes y razones de cambio. Se han estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También se ha aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y utilizado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso siempre tener que aplicar la definición, por lo que en este capítulo se desarrollan las reglas para determinar derivadas sin tener que usar directamente la definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad derivadas de funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. Entonces se usarán estas reglas para resolver problemas en que intervienen razones de cambio y la aproximación de funciones.

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, potencia, polinomiales y exponenciales.

Se empieza por la más sencilla de todas las funciones: la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, por lo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

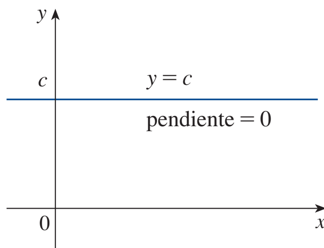


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$, por lo que $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

En la notación de Leibniz se escribe esta regla de la siguiente manera.

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Función potencia

Enseguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, que tiene pendiente 1 (véase la figura 2). Por lo que

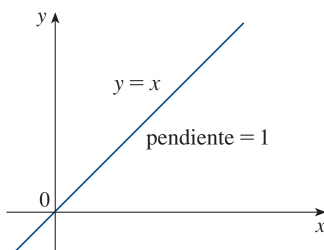


FIGURA 2
La gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, por lo que $f'(x) = 1$.

1 $$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

(También puede demostrar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya se ha investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 19 y 20) se encontró que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, se encontró la derivada de $f(x) = x^4$ como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Así

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones (1), (2) y (3), se observa un patrón emergente. Parece razonable presuponer que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto.

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN La fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

se puede verificar simplemente multiplicando el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, se puede utilizar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

El teorema del binomio se presenta en la página de referencia 1.

Al determinar la derivada de x^4, se tuvo que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, se necesita desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, se utiliza el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por tanto, tienden a 0. ■

En el ejemplo 1 se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. (b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.

(c) Si $y = t^4$, entonces . $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. (d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$ ■

¿Qué se puede decir acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 65 se pide al lector que verifique, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que se puede escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 3.2.64(c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 2.8.3 se encontró que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6 se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

> **Regla de la potencia (versión general)** Si n es cualquier número real, entonces
>
> $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

En la figura 3 se muestra la función y del ejemplo 2(b) y su derivada y'. Observe que y no es derivable en 0 (y' no está definida ahí).

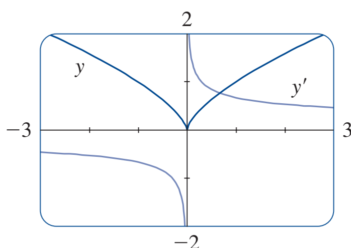


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EJEMPLO 2 Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.

(a) Dado que $f(x) = x^{-2}$, se utiliza la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$ ■

Observe de la figura 3 que la función y del ejemplo 2(b) está aumentando cuando y' es positiva y disminuye cuando y' es negativa. En el capítulo 4 se demostrará que, en general, *una función es creciente cuando su derivada es positiva y decreciente cuando su derivada es negativa.*

La regla de la potencia permite determinar rectas tangentes sin hacer uso de la definición de derivada. Además, permite encontrar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta a través de P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de la óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal a un lente.)

EJEMPLO 3 Determine la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto (1, 1). Ilustre trazando la curva y estas rectas.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

Por lo que, la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \tfrac{3}{2}$. Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente de tal manera que su pendiente es el recíproco negativo de $\tfrac{3}{2}$, es decir, $-\tfrac{2}{3}$. En estos términos, una ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

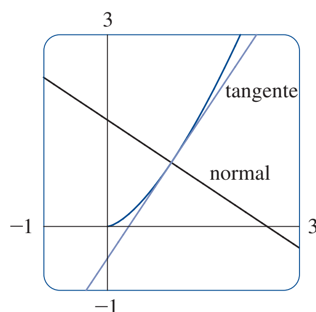


FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y las rectas tangente y normal. ■

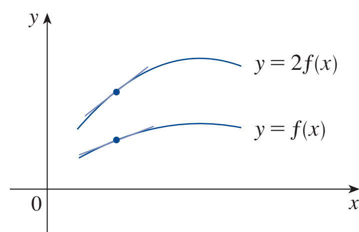
Nuevas derivadas a partir de anteriores

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustracción o multiplicación por una constante, sus derivadas se pueden calcular en términos de la derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la fórmula siguiente dice que *la derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.*

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Interpretación geométrica de la regla del múltiplo constante



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los desplazamientos permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 3 de los límites)}$$

$$= cf'(x)$$ ■

EJEMPLO 4

(a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$ ■

La regla siguiente dice que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas.*

Si se utiliza la notación con primas, puede escribir la regla de la suma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1 de los límites)} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$ ■

La regla de la suma puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces, se obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicar la regla de la suma y la del múltiplo constante, se obtiene la fórmula siguiente.

Regla de la diferencia Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Las reglas de múltiplo constante, la suma y la diferencia se pueden combinar con la regla de la potencia para derivar cualquier función polinomial, como se muestra en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

■

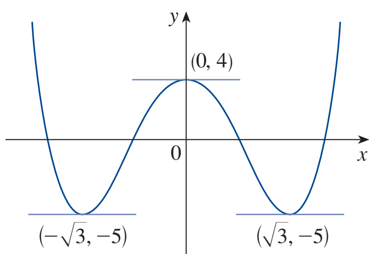


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus tangentes horizontales

EJEMPLO 6 Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)$$

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la curva dada tiene rectas tangentes horizontales cuando $x = 0$, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$, y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.) ■

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Determine la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14 \text{ cm}/\text{s}^2$. ■

■ Funciones exponenciales

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = b^x$, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^{x+h} - b^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{b^x b^h - b^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{b^x(b^h - 1)}{h}$$

El factor b^x no depende de h, por lo que puede llevarlo delante del límite:

$$f'(x) = b^x \lim_{h\to 0}\frac{b^h - 1}{h}$$

Observe que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = f'(0)$$

Por tanto, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = b^x$ es derivable en 0, entonces es derivable para cualquier x; por lo que

4 $$f'(x) = f'(0)b^x$$

Esta ecuación dice que la r*azón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la función misma*. (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla que aparece a la izquierda, se presenta una evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $b = 2$ y $b = 3$. (Los valores tienen una aproximación redondeada a cuatro decimales.) Parece que los límites existen y

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{para } b = 2, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{para } b = 3, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, se puede demostrar que estos límites existen y se redondean hasta seis decimales, los valores son

$$\left.\frac{d}{dx}(2^x)\right|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \left.\frac{d}{dx}(3^x)\right|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4, se tiene

5 $$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las elecciones posibles para la base b de la ecuación 4, se tiene la fórmula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de los cálculos de $f'(0)$ para $b = 2$ y $b = 3$, parece razonable que exista un número b entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es costumbre denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presentó e en la sección 1.4.) Así, se tiene la definición siguiente.

En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante se podrá demostrar que e con cinco dígitos (o posiciones) decimales es

$$e \approx 2.71828$$

Definición del número *e*

$$e \text{ es el número tal que } \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que, de todas las funciones exponenciales posibles $y = b^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en (0, 1) tiene pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse las figuras 6 y 7.)

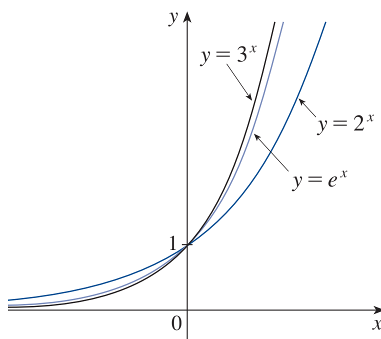


FIGURA 6

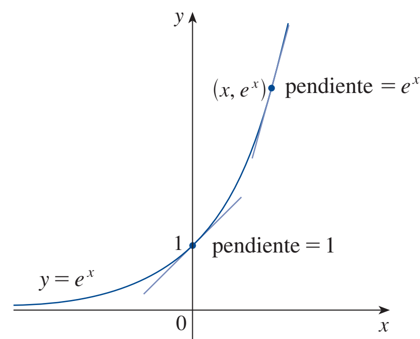


FIGURA 7

Si se hace $b = e$ y, por tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la siguiente importante fórmula de derivación.

TEC Visual 3.1 utiliza el comportamiento de una pendiente para ilustrar esta fórmula.

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

De aquí se ve que la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

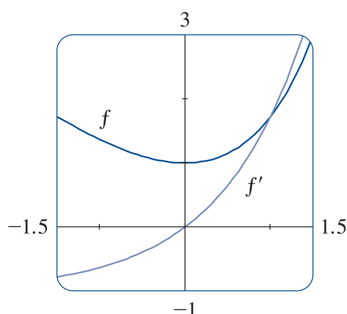


FIGURA 8

EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', por lo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una recta tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Observe también que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente. ■

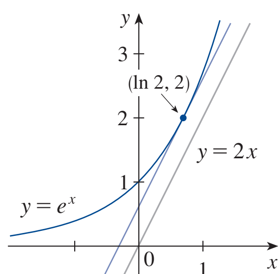


FIGURA 9

EJEMPLO 9 ¿En qué punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Puesto que $y = e^x$, se tiene $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, se tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.) ■

3.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{2.7^h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{2.8^h - 1}{h}$$

redondeelos hasta dos decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. (a) Trace a mano la función $f(x) = e^x$, poniendo particular atención a la forma en como la gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto?
(b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
(c) ¿Cuál de las dos funciones en el inciso (b) crece más rápidamente cuando x es muy grande?

3–32 Derive cada una de las funciones siguientes.

3. $f(x) = 186.5$ **4.** $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(x) = 5.2x + 2.3$ **6.** $g(x) = \frac{7}{4}x^2 - 3x + 12$

7. $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 4t$ **8.** $f(t) = 1.4t^5 - 2.5t^2 + 6.7$

9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$ **10.** $H(u) = (3u - 1)(u + 2)$

11. $y = x^{-2/5}$ **12.** $B(y) = ay^{-3}$

13. $F(r) = \dfrac{5}{r^3}$ **14.** $y = x^{5/3} - x^{2/3}$

15. $R(a) = (3a + 1)^2$ **16.** $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$ **18.** $y = \sqrt[3]{x}(2 + x)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$ **20.** $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$ **22.** $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$ **24.** $G(t) = \sqrt{5t} + \dfrac{\sqrt{7}}{t}$

25. $j(x) = x^{2.4} + e^{2.4}$ **26.** $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

27. $G(q) = (1 + q^{-1})^2$ **28.** $F(z) = \dfrac{A + Bz + Cz^2}{z^2}$

29. $f(v) = \dfrac{\sqrt[3]{v} - 2ve^v}{v}$ **30.** $D(t) = \dfrac{1 + 16t^2}{(4t)^3}$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$ **32.** $y = e^{x+1} + 1$

33–36 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

33. $y = 2x^3 - x^2 + 2$, $(1, 3)$

34. $y = 2e^x + x$, $(0, 2)$

35. $y = x + \dfrac{2}{x}$, $(2, 3)$ **36.** $y = \sqrt[4]{x} - x$ $(1, 0)$

37–38 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

37. $y = x^2 - x^4$, $(1, 0)$ **38.** $y^2 = x^3$, $(1, 1)$

39–40 Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto dado, a cada una de las curvas siguientes. Ilustre trazando la gráfica de la curva y de la recta tangente, en la misma pantalla.

39. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$ **40.** $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

41–42 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y utilícelas para explicar por qué su respuesta es razonable.

41. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

42. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

43. (a) Trace la gráfica de la función

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$$

en el rectángulo de vista $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
(b) Con la misma gráfica del inciso (a) estime las pendientes y trace a mano la gráfica de f'. (Véase el ejemplo 2.8.1.)
(c) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión para graficar f' con una calculadora graficadora. Compare con su trazo del inciso (b).

44. (a) Trace la gráfica de la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en el rectángulo de vista $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
(b) Utilizando la gráfica del inciso (a) para calcular pendientes, haga a mano un trazo aproximado de la gráfica de g'. (Véase el ejemplo 2.8.1.)
(c) Calcule $g'(x)$ y utilice esta expresión, con un dispositivo graficador, para trazar la gráfica de g'. Compare con su trazo del inciso (b).

45–46 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las funciones siguientes.

45. $f(x) = 0.001x^5 - 0.02x^3$ **46.** $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

47–48 Encuentre la primera y segunda derivadas de cada una de las funciones siguientes. Verifique para ver si sus respuestas son razonables, comparando las gráficas de f, f' y f''.

47. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$ **48.** $f(x) = e^x - x^3$

49. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Encuentre
(a) la velocidad y la aceleración como funciones de t,
(b) la aceleración después de 2 s, y
(c) la aceleración cuando la velocidad es cero.

50. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, donde s está en metros y t en segundos.
(a) Encuentre la velocidad y la aceleración como funciones de t.
(b) Encuentre la aceleración después de 1 s.
(c) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración, en la misma pantalla.

51. Los biólogos han propuesto un polinomio cúbico para modelar la longitud L del pescado de roca de Alaska de edad A:

$$L = 0.0155A^3 - 0.372A^2 + 3.95A + 1.21$$

donde L se mide en pulgadas y A en años. Calcule

$$\left.\frac{dL}{dA}\right|_{A=12}$$

e interprete su respuesta.

52. El número de especies de árbol S en un área dada A en la reserva forestal de Pasoh en Malasia se ha modelado por la función potencia

$$S(A) = 0.882A^{0.842}$$

donde A se mide en metros cuadrados. Determine $S'(100)$ e interprete su respuesta.

Fuente: Adaptado de K. Kochummen *et al.*, "Floristic Composition of Pasoh Forest Reserve, A Lowland Rain Forest in Peninsular Malaysia," *Journal of Tropical Forest Science* 3 (1991): 1–13.

53. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.
(a) Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa 0.106 m^3 a 25 °C es 50 kPa. Exprese V como una función de P.
(b) Calcule dV/dP cuando $P = 50$ kPa. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades?

54. Los neumáticos de automóvil deben ser inflados correctamente porque un alto o bajo inflado puede causar desgaste prematuro. Los datos de la tabla muestran la vida L (en miles de kilómetros) para un determinado tipo de neumático a diversas presiones P (en kPa).

P	179	193	214	242	262	290	311
L	80	106	126	130	119	113	95

(a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar la vida del neumático con una función cuadrática de la presión.
(b) Utilice el modelo para calcular dL/dP cuando $P = 200$ y cuando $P = 300$. ¿Cuál es el significado de la derivada? ¿Cuáles son sus unidades? ¿Cuál es el significado de los signos de las derivadas?

55. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la recta tangente es horizontal.

56. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = e^x - 2x$ tiene una recta tangente horizontal?

57. Demuestre que la curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ no tiene una recta tangente cuya pendiente es 2.

58. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ que es paralela a la recta $32x - y = 15$.

59. Encuentre las ecuaciones de ambas rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ y paralela a la recta $3x - y = 15$.

60. ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$? Ilustre trazando la gráfica de la curva y de ambas rectas.

61. Determine una ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{x}$ que es paralela a la recta $2x + y = 1$.

62. ¿Dónde la recta normal a la parábola $y = x^2 - 1$ en el punto $(-1, 0)$ interseca la parábola por segunda vez? Ilustre con un trazo de la gráfica.

63. Dibuje un diagrama que muestre que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersectan la parábola.

64. (a) Encuentre las ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
(b) Demuestre que no hay una recta que pase por el punto $(2, 7)$ que sea tangente a la parábola. Luego dibuje un diagrama para ver por qué.

65. Utilice la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

66. Encuentre la n-ésima derivada de cada una de las funciones siguientes calculando algunas derivadas y observando el patrón de recurrencia.
(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

67. Encuentre un polinomio P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$, y $P''(2) = 2$.

68. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ es una **ecuación diferencial** porque implica una función desconocida y y sus derivadas y' y y''. Encuentre las constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación. (Las ecuaciones diferenciales se estudiarán en detalle en el capítulo 9.)

69. Encuentre una ecuación cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene rectas tangentes horizontales en los puntos $(-2, 6)$ y $(2, 0)$.

70. Encuentre una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$ y que pasa por el punto $(2, 15)$.

71. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

¿Es f derivable en 1? Trace las gráficas de f y f'.

72. ¿En qué números es derivable la función g siguiente?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

73. (a) ¿Para qué valores de x es la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable? Encuentre una fórmula para f'.
(b) Trace las gráficas de f y f'.

74. ¿Dónde es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Dé la función para h' y trace las gráficas de h y h'.

75. Encuentre la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya recta tangente en (1, 1) tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

76. Suponga que la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene una recta tangente cuando $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una recta tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 - 3x$. Encuentre los valores de a, b, c, y d.

77. ¿Para qué valores de a y b la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

78. Encuentre el valor de c tal que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$.

79. ¿Cuál es el valor de c tal que la recta $y = 2x + 3$ es tangente a la parábola $y = cx^2$?

80. La gráfica de cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Demuestre que el promedio de las pendientes de las rectas tangentes a la parábola en los puntos finales de cualquier intervalo $[p, q]$ es igual a la pendiente de la tangente en el punto medio del intervalo.

81. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre los valores de m y b que hacen que f sea derivable para todas.

82. Se dibuja una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto P.
(a) Demuestre que el punto medio del segmento de esta recta tangente comprendido entre los ejes de coordenadas es P.
(b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas siempre tiene la misma área, no importa dónde se encuentre P sobre la hipérbola.

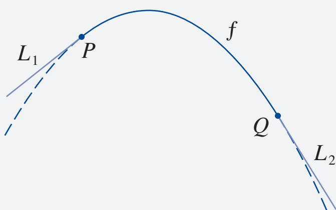
83. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

84. Dibuje un diagrama que muestre dos rectas perpendiculares que se intersecan en el eje y y que son ambas tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Dónde se intersecan estas rectas?

85. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas rectas que pasan por el punto $(0, c)$ son rectas normales a la parábola $y = x^2$? ¿Qué pasa si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

86. Trace las parábolas $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Piensa que existe una recta que es tangente a ambas curvas? Si es así, encuentre su ecuación. Si no es así, ¿por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN CONSTRUCCIÓN DE UNA MEJOR MONTAÑA RUSA



Suponga que le piden que diseñe la primera subida y bajada de una nueva montaña rusa. Luego de estudiar fotografías de sus montañas rusas favoritas, decide hacer la pendiente de la subida de 0.8 y la pendiente de la bajada de -1.6. Usted decide unir estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ con parte de la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en metros. Para que la pista sea suave no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo que se quiere que los segmentos rectos L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. (Véase la figura). Para simplificar las ecuaciones, decide ubicar el origen en P.

1. (a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es de 30 m. Escriba las ecuaciones en a, b y c que aseguren que la pista sea suave en los puntos de transición.
(b) Resuelva las ecuaciones del inciso (a) para a, b, y c para encontrar una fórmula para $f(x)$.
(c) Trace L_1, f, y L_2 para verificar gráficamente que las transiciones son suaves.
(d) Determine la diferencia de elevación de P y Q.

2. La solución en el problema 1 podría *parecer* suave, pero se puede no *sentir* suave ya que la función está definida en partes [que consiste de $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 30$, y



$L_2(x)$ para $x > 30$] no tiene una segunda derivada continua. Por lo que decide mejorar el diseño utilizando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ solo en el intervalo $3 \leq x \leq 27$ y unir las funciones lineales con dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leq x < 3$$

$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 27 < x \leq 30$$

(a) Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que garanticen que las funciones y sus dos primeras derivadas coinciden en los puntos de transición.

SAC (b) Resuelva las ecuaciones del inciso (a) con un sistema algebraico computacional para encontrar las fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

(c) Trace la gráfica de L_1, g, q, h, y L_2, y compare con la gráfica del problema 1(c).

3.2 Reglas del producto y el cociente

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría tener la tentación de suponer, como Leibniz lo hizo hace tres siglos, que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por tanto, la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, por lo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Por lo que, $(fg)' \neq f'g'$. La fórmula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

Antes de enunciar la regla del producto, vea cómo podría descubrirla. Inicie por suponer que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones positivas derivables. Entonces se puede interpretar el producto uv como el área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, entonces los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

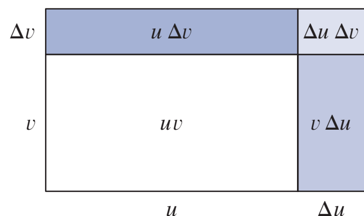


FIGURA 1
Geometría de la regla del producto

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, se puede interpretar como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

1 $$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$= \text{suma de las tres áreas sombreadas}$$

Si se divide entre Δx, se obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivada se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora se hace que $\Delta x \to 0$, se obtiene la derivada de uv:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}$$

2 $$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ ya que f es derivable y, por tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observe que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) Por lo que se ha demostrado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones derivables u y v.

En notación prima:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En palabras, la regla del producto dice que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función.*

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Determine la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

SOLUCIÓN

(a) Por la regla del producto se tiene que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x$$

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 1 y su derivada f'. Observe que $f'(x)$ es positiva cuando f es creciente y negativa cuando f es decreciente.

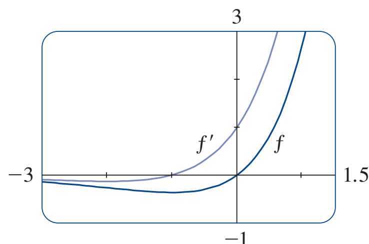


FIGURA 2

(b) Aplicando la regla del producto una segunda vez, se obtiene

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x]$$

$$= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x$$

Las aplicaciones de la regla del producto siguientes dan

$$f'''(x) = (x + 3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^x$$

De hecho, cada derivada sucesiva agrega otro término e^x, por lo que

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$$

■

En el ejemplo 2, a y b son constantes. Es habitual en matemáticas el uso de las primeras letras del alfabeto, para representar constantes y las últimas para representar variables.

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$.

SOLUTION 1 Utilizando la regla del producto, se tiene que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a + bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right) \\ &= \sqrt{t}\cdot b + (a + bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= b\sqrt{t} + \frac{a + bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a + 3bt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero se utilizan las leyes de los exponentes para reescribir $f(t)$, entonces se puede proceder directamente sin utilizar la regla del producto.

$$\begin{aligned} f(t) &= a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2} \end{aligned}$$

que es equivalente a la respuesta dada en la solución 1. ■

El ejemplo 2 muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones antes de derivar que utilizar directamente la regla del producto. En el ejemplo 1, sin embargo, la regla del producto es el único método posible.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\,g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Aplicando la regla del producto, se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\,g'(x) + g(x)\cdot \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \sqrt{x}\,g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Por lo que $$f'(4) = \sqrt{4}\,g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \frac{2}{2\cdot 2} = 6.5$$ ■

■ Regla del cociente

Se encontró una regla para derivar el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ en gran parte de la misma manera que se ha encontrado la regla del producto.

Si x, u y v cambian en cantidades Δx, Δu y Δv, entonces el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

por tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta v \to 0$, porque $v = g(x)$ es derivable y, por consiguiente, continua. Así, al aplicar las leyes de los límites, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}(v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

En notación prima:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En palabras: la regla del cociente dice que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

La regla del cociente y las otras fórmulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Se puede utilizar un dispositivo de graficación para verificar que la respuesta al ejemplo 4 es razonable. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función del ejemplo 4 y su derivada. Observe que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cerca de 0.

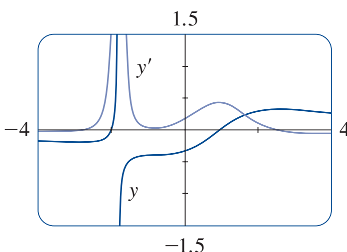


FIGURA 3

EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

■

EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x \dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - 2x + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

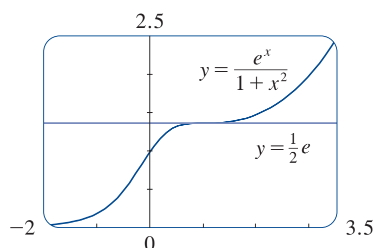


FIGURA 4

Por lo que la pendiente de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es horizontal, y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Observe que la función es creciente y cruza su recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.] ■

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil reescribir un cociente en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente, es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A continuación, se resumen las fórmulas de derivación que ha aprendido hasta el momento.

Tabla de fórmulas de derivación

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 EJERCICIOS

1. Encuentre la derivada de $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

en dos maneras diferentes: utilizando la regla del cociente y simplificando primero. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3–26 Derive.

3. $f(x) = (3x^2 - 5x)e^x$

4. $g(x) = \left(x + 2\sqrt{x}\right)e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 - t^2}$

9. $H(u) = \left(u - \sqrt{u}\right)\left(u + \sqrt{u}\right)$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$

14. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2 + x}$

15. $y = \dfrac{t^3 + 3t}{t^2 - 4t + 3}$

16. $y = \dfrac{1}{t^3 + 2t^2 - 1}$

17. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

18. $h(r) = \dfrac{ae^r}{b + e^r}$

19. $y = \dfrac{s - \sqrt{s}}{s^2}$

20. $y = (z^2 + e^z)\sqrt{z}$

21. $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{t - 3}$

22. $V(t) = \dfrac{4 + t}{te^t}$

23. $f(x) = \dfrac{x^2e^x}{x^2 + e^x}$

24. $F(t) = \dfrac{At}{Bt^2 + Ct^3}$

25. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Determine $f'(x)$ y $f''(x)$ de cada una de las funciones siguientes.

27. $f(x) = (x^3 + 1)e^x$

28. $f(x) = \sqrt{x}\,e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + e^x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

31–32 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

31. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$, $(1, 0)$

32. $y = \dfrac{1 + x}{1 + e^x}$, $\left(0, \tfrac{1}{2}\right)$

33–34 Determine las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a cada una de las curvas dadas en el punto que se especifica.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $(1, 1)$

35. (a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se llama **bruja de María Agnesi**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \tfrac{1}{2}\right)$.


(b) Ilustre el inciso (a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

36. (a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.


(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

37. (a) Si $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encuentre $f'(x)$.


(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

38. (a) Si $f(x) = e^x/(2x^2 + x + 1)$, determine $f'(x)$.


(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

39. (a) Si $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, determine $f'(x)$ y $f''(x)$.


(b) Verifique si sus respuestas en el inciso (a) son razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''.

40. (a) Si $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, determine $f'(x)$ y $f''(x)$.


(b) Verifique para comprobar que sus respuestas en el inciso (a) son razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''.

41. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, determine $f''(1)$.

42. Si $g(x) = x/e^x$, determine $g^{(n)}(x)$.

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes

(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$ (c) $(g/f)'(5)$

44. Suponga que $f(4) = 2$, $g(4) = 5$, $f'(4) = 6$ y $g'(4) = -3$. Encuentre $h'(4)$.

(a) $h(x) = 3f(x) + 8g(x)$

(b) $h(x) = f(x)g(x)$

(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x) + g(x)}$

45. Si $f'(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, determine $f'(0)$.

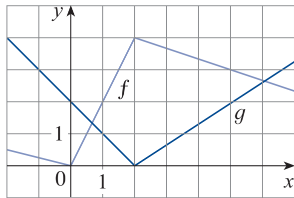
46. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

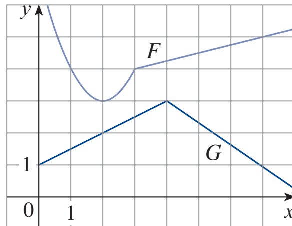
47. Si $g(x) = xf(x)$, donde $f(3) = 4$ y $f'(3) = -2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto donde $x = 3$.

48. Si $f(2) = 10$ y $f'(x) = x^2 f(x)$ para toda x, encuentre $f''(2)$.

49. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encuentre $u'(1)$. (b) Encuentre $v'(5)$.



50. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran
(a) Encuentre $P'(2)$. (b) Encuentre $Q'(7)$.



51. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$

(c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

52. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

54. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

55. Encuentre $R'(0)$, donde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Sugerencia: en vez de encontrar primero $R'(x)$, sea $f(x)$ el numerador y $g(x)$ el denominador de $R(x)$ y calcule $R'(0)$ usando $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ y $g'(0)$.

56. Utilice el método del ejercicio 55 para calcular $Q'(0)$, donde

$$Q(x) = \frac{1 + x + x^2 + xe^x}{1 - x + x^2 - xe^x}$$

57. En este ejercicio, calcule la proporción a la que está creciendo el ingreso personal total en el área metropolitana de Richmond-Petersburg, Virginia. En 1999, la población de esta área era 961 400 y la población aumentaba en alrededor de 9200 personas al año. El ingreso anual promedio era $30 593 per cápita, y este promedio se incrementaba en cerca de $1400 al año (ligeramente por arriba del promedio nacional de alrededor de $1225 al año). Use la regla del producto y estas cifras para calcular la proporción en la que estaba aumentando el ingreso personal total en el área de Richmond-Petersburg en 1999. Explique el significado de cada término en la regla del producto.

58. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en metros) que se vende es función del precio de venta p (en dólares por metro), de modo que $q = f(p)$. Entonces, el ingreso total que se percibe con el precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.
(a) ¿Qué significa decir que $f(20) = 10\,000$ y $f'(20) = -350$?
(b) Suponiendo los valores del inciso (a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

59. La ecuación de Michaelis-Menten de la enzima quimotripsina es

$$v = \frac{0.14[S]}{0.015 + [S]}$$

donde v es la velocidad de una reacción enzimática y $[S]$ es la concentración de un sustrato S. Calcule $dv/d[S]$ e interprétela.

60. La *biomasa* $B(t)$ de la población de peces es la masa total de los miembros de la población en el tiempo t. Es el producto del número de especímenes $N(t)$ en la población y la masa promedio $M(t)$ de los peces al tiempo t. En el caso de los guppies, la reproducción ocurre continuamente. Suponga que al tiempo $t = 4$ semanas la población es de 820 guppies y está creciendo a un ritmo de 50 guppies por semana, mientras que la masa promedio es de 1.2 g y está aumentando a una tasa de 0.14 g/semana. ¿Con qué razón está aumentando la biomasa cuando $t = 4$?

61. (a) Utilice la regla del producto dos veces para probar que, si f, g y h son derivables, entonces $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
(b) Tomando $f = g = h$ en el inciso (a), demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Use el inciso (b) para diferenciar $y - e_{3x}$.

62. (a) Si $F(x) = f(x)\, g(x)$, donde f y g son derivables en todos los órdenes, demuestre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.
(b) Determine fórmulas similares para F''' y $F^{(4)}$.
(c) Intente una fórmula para $F^{(n)}$.

63. Determine expresiones para las primeras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. ¿Observa algún patrón en estas expresiones? Infiera una fórmula para $f^{(n)}(x)$ y demuéstrela por medio de inducción matemática.

64. (a) Si g es derivable la **regla del recíproco** indica que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Utilice la regla del cociente para demostrar la regla del recíproco.
(b) Utilice la regla del recíproco para derivar la función del ejercicio 16.
(c) Utilice la regla del recíproco para comprobar que la regla de la potencia es válida para números enteros negativos, es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los números enteros positivos n.

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas

En el apéndice D se presenta un repaso de las funciones trigonométricas.

Antes de iniciar esta sección, quizá necesite repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante que recuerde que cuando habla de la función f definida para todos los números reales x, mediante

$$f(x) = \text{sen}\, x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot se cumple con una convención similar. Recuerde de la sección 2.5 que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si traza la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\, x$ y utiliza la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la recta tangente a la curva seno para trazar la gráfica de f' (véase el ejercicio 2.8.16), parece que la gráfica de f' es la misma que la curva coseno (véase la figura 1).

TEC Visual 3.3 muestra una animación de la figura 1.

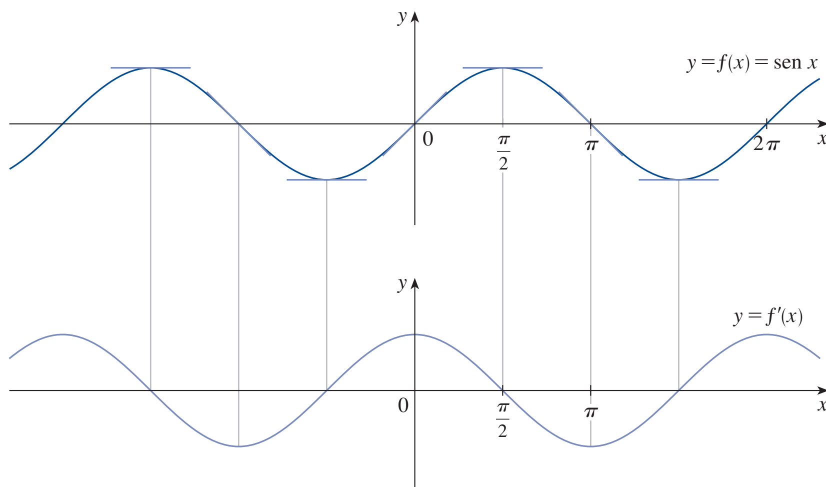


FIGURA 1

Intente confirmar la conjetura de que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada, se tiene

Se utilizó la fórmula de adición para el seno. Véase el apéndice D.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

1 $$= \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que se considera a x como constante al calcular un límite cuando $h \to 0$, se tiene

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 2.2.3 se infiere que

2 $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

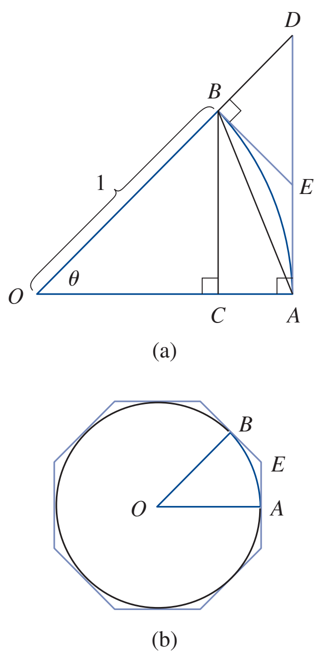


FIGURA 2

Ahora se utilizará un argumento geométrico para demostrar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2(a) se muestra un sector de circunferencia con centro en O, ángulo central θ, y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián, se tiene que arco $AB = \theta$. También, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Con base en el diagrama, se observa que

$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

Por tanto $\qquad \operatorname{sen} \theta < \theta \qquad$ tal que $\qquad \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$

Suponga que las rectas tangentes en A y B se intersecan en E. Se puede ver de la figura 2(b), que la circunferencia es menor que la longitud del polígono circunscrito, y por lo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leqslant \tan \theta$ a partir de la

definición de la longitud de arco, sin recurrir a la intuición geométrica, como se hizo aquí.) Por tanto, se tiene que

$$\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

por lo que

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

Se sabe que $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$, por lo que, por el teorema de la compresión

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una función par, por lo que sus límites por la derecha y por la izquierda deben ser iguales. Por tanto, se tiene

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

por lo que se ha demostrado la ecuación 2.

Se puede deducir el valor del límite restante en (1) como sigue:

Multiplique el numerador y el denominador por $\cos\theta + 1$ para poner la función de manera que pueda usar los límites que conoce.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1}\right) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}\right)$$

$$= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}$$

$$= -1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)}$$

3 $$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

Si ahora se ponen los límites (2) y (3) en (1), se obtienen

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen} x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$

Por lo que se ha demostrado la fórmula para la derivada de la función seno:

4 $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

La figura 3 muestra las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Observe que $y' = 0$ siempre que y tenga una recta tangente horizontal.

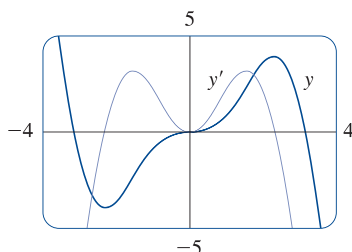


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)\\ &= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

■

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, puede demostrarse (véase el ejercicio 20) que

5 $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

También puede derivar la función tangente utilizando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

6 $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

También es fácil determinar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véanse los ejercicios 17-19). En la tabla siguiente aparecen todas las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas. Recuerde que son válidas solo cuando x se mide en radianes.

Cuando memorice esta tabla, resulta útil observar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

SOLUCIÓN Por la regla del cociente se tiene que

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

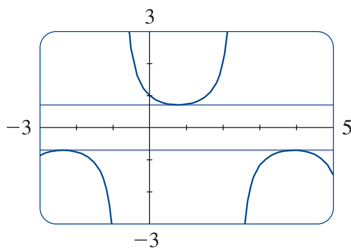


FIGURA 4
Las tangentes horizontales del ejemplo 2.

En la simplificación de la respuesta se ha utilizado la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Ya que $\sec x$ nunca es 0, vea que $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4). ■

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, ondas, movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, se pueden describir usando funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente se analiza un caso de movimiento armónico simple.

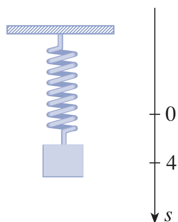


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm más allá de su posición en reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

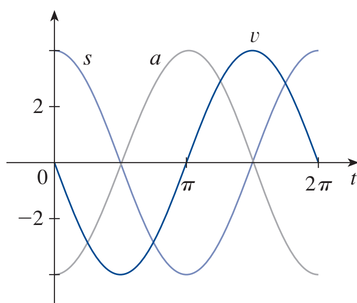


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El período de la oscilación es 2π, el período de $\cos t$.

La rapidez es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. Por lo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6. ■

EJEMPLO 4 Determine la vigésima séptima derivada de cos x.

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ son como sigue:

SP Busque un patrón.

$$f'(x) = -\text{sen}\, x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \text{sen}\, x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\text{sen}\, x$$

Se observó que las derivadas sucesivas ocurren en un ciclo de longitud 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. Por tanto,

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

y, derivando tres veces más, se tiene

$$f^{(27)}(x) = \text{sen}\, x$$ ■

La principal aplicación del límite en la ecuación 2 ha sido comprobar la fórmula de derivación de la función seno. Pero este límite también se aplica en la búsqueda de otros límites trigonométricos, como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicarla por 7 y dividirla entre 7:

Observe que sen $7x \neq 7$ sen x.

$$\frac{\text{sen}\, 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\text{sen}\, 7x}{7x}\right)$$

Si se hace $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, conforme $x \to 0$, por lo que, por la ecuación 2 se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\, 7x}{7x}\right)$$
$$= \frac{7}{4} \lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\, \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$ ■

EJEMPLO 6 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto el numerador como el denominador entre x:

$$\lim_{x\to 0} x \cot x = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x}{\text{sen}\, x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\text{sen}\, x}{x}} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos x}{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}}$$
$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(por la continuidad del coseno y la ecuación 2)}$$
$$= 1$$ ■

3.3 EJERCICIOS

1–16 Derive cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

2. $f(x) = x \cos x + 2 \tan x$

3. $f(x) = e^x \cos x$

4. $y = 2 \sec x - \csc x$

5. $g(t) = t^3 \cos t$

6. $g(t) = 4 \sec t + \tan t$

7. $h(\theta) = \csc \theta + e^\theta \cot \theta$

8. $y = e^u(\cos u + cu)$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$

10. $y = \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

11. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

13. $y = \dfrac{t \operatorname{sen} t}{1 + t}$

14. $y = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \tan t}$

15. $f(\theta) = \theta \cos \theta \operatorname{sen} \theta$

16. $f(t) = te^t \cot t$

---

17. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$.

18. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.

19. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

20. Demuestre, usando la definición de derivada que si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes, en el punto dado.

21. $y = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad (0, 1)$

22. $y = e^x \cos x, \quad (0, 1)$

23. $y = \cos x - \operatorname{sen} x, \quad (\pi, -1)$

24. $y = x + \tan x, \quad (\pi, \pi)$

---

25. (a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.
(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. (a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x + 6 \cos x$ en el punto $(\pi/3, \pi + 3)$.
(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

27. (a) Si $f(x) = \sec x - x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe para ver que su respuesta al inciso (a) es razonable trazando las gráficas de f y f' para $|x| < \pi/2$.

28. (a) Si $f(x) = e^x \cos x$, obtenga $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Verifique que su respuesta del inciso (a) sea razonable trazando la gráfica de f, f' y f[.

29. Si $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, determine $H'(\theta)$y $H''(\theta)$.

30. Si $f(t) = \sec t$, determine $f''(\pi/4)$.

31. (a) Utilice la regla del cociente para derivar la función

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique la expresión para $f(x)$ expresándola en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, y enseguida determine $f'(x)$.
(c) Demuestre que sus respuestas a los incisos (a) y (b) son equivalentes.

32. Suponga $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea $g(x) = f(x)\operatorname{sen} x$ y $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Determine
(a) $g'(\pi/3)$ (b) $h'(\pi/3)$

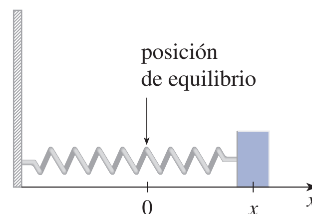
33–34 ¿Para qué valores de x la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

34. $f(x) = e^x \cos x$

---

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada (véase la figura). Su ecuación de movimiento es $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, donde t está en segundos y x en centímetros.
(a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
(b) Encuentre la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?



36. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente. La ecuación de movimiento es $s = 2 \cos t + 3 \operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tome la dirección positiva correspondiente hacia abajo.)
(a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
(b) Dibuje las funciones velocidad y aceleración.
(c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
(d) ¿Cuán lejos de su posición de equilibrio viaja la masa?
(e) ¿Cuándo es máxima la rapidez?

37. Una escalera de 6 m de largo está apoyada sobre una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquella hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿qué tan rápido cambia x respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

38. Un objeto con masa m es arrastrado a lo largo de un plano horizontal, por una fuerza que actúa a lo largo de una

cuerda sujeta al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*.

(a) Encuentre la razón de cambio de F respecto a θ.

(b) ¿Cuándo es igual a 0 esta razón de cambio?


(c) Si $m = 20$ kg y $g = 9.8$ m/s^2, y $\mu = 0.6$, dibuje la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de θ para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿Es coherente el valor con su respuesta al inciso (b)?

39–50 Determine cada uno de los límites siguientes.

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{3x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$

41. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

42. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{5x^3 - 4x}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x}{x^2}$

45. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$

46. $\lim\limits_{x\to 0} \csc x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

47. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos \theta - 1}{2\theta^2}$

48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

49. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

50. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

51–52 Encuentre la derivada que se muestra, mediante la búsqueda de las primeras derivadas y observando el patrón que aparece.

51. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\operatorname{sen} x)$

52. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}(x \operatorname{sen} x)$

53. Encuentre constantes A y B tales que la función $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

54. (a) Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

(b) Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.


(c) Ilustre los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de $y = x \operatorname{sen}(1/x)$.

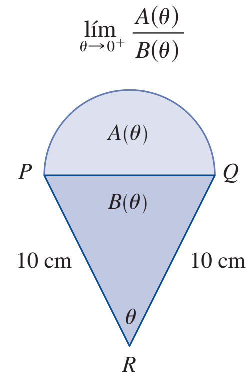
55. Derive cada una de las identidades trigonométricas siguientes para obtener una identidad nueva (o conocida).

(a) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ (b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \cot x}{\csc x}$

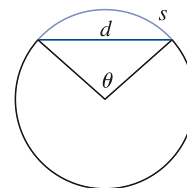
56. Un semicírculo con diámetro PQ descansa sobre un triángulo isósceles PQR para formar una región en forma de cono para helados como el que se muestra en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triángulo, determine

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



57. En la figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, los dos están subtendidos por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{s}{d}$$



58. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

(a) Trace la gráfica de f. ¿Qué tipo de discontinuidad parece tener en 0?

(b) Calcule los límites por la izquierda y por la derecha en 0. ¿Confirman estos valores su respuesta al inciso (a)?

3.4 La regla de la cadena

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que usted aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no le permiten calcular $F'(x)$.

Véase la sección 1.3 para un repaso de funciones compuestas.

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces se puede escribir $y = F(x) = f(g(x))$; es decir, $F = f \circ g$. Se sabe cómo derivar tanto f como g, por lo que sería útil contar con una regla que indique cómo determinar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Esto parece verosímil si se interpretan las derivadas como razones de cambio. Considere du/dx como la razón de cambio de u respecto a x, dy/du como la razón de cambio de y respecto a u, y dy/dx como la razón de cambio de y respecto a x. Si u cambia dos veces más rápido que x y y varía tres veces más rápido que u, entonces parece razonable que y se modifique seis veces más rápido que x, y, por lo que, se espera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

James Gregory

El primero en formular la regla de la cadena fue el matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien también diseñó el primer telescopio práctico. Gregory descubrió las ideas básicas del cálculo en la misma época que Newton. Se convirtió en el primer profesor de matemáticas en la Universidad de St. Andrews y más tarde realizó la misma actividad en la Universidad de Edimburgo. Pero un año después de aceptar ese cargo, falleció a la edad de 36 años.

COMENTARIOS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x; es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

1

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$ porque g es continua.)

El único defecto de este razonamiento es que en (1) podría suceder que $\Delta u = 0$ (aun cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no se puede dividir entre 0. No obstante, este razonamiento *sugiere* por lo menos que la regla de la cadena es verdadera. Al final de esta sección se da una demostración completa de la regla de la cadena. ■

La regla de la cadena se puede escribir en notación prima

2 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque si dy/du y du/dx fueran cocientes, entonces se podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y du/dx no se debe pensar como un cociente real.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Utilizando la ecuación 2): al principio de esta sección, se expresa a F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

se tiene
$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

SOLUCIÓN 2 (Utilizando la ecuación 3): Si se hace $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$ ■

Al utilizar la fórmula 3, se debe tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando esta se considera como función de x (llamada la *derivada de y respecto a x*), mientras que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y respecto a u). Por lo que, en el ejemplo 1, y se puede considerar como función de x ($y = \sqrt{x^2 + 1}$) y también como una función de u ($y = \sqrt{u}$). Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \text{mientras que} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, se trabajó de afuera hacia adentro. La fórmula 2 expresa que *se deriva la función exterior [en la función interior $g(x)$] y, luego se multiplica por la derivada de la función interior*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en la}\\\text{función}\\\text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la}\\\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en la}\\\text{función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la}\\\text{función}\\\text{interior}}}$$

EJEMPLO 2 Derive (a) $y = \text{sen}(x^2)$ y (b) $y = \text{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a) Si $y = \text{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno, y la interior es la función elevar al cuadrado, por lo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\text{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada}\\ \text{en la}\\ \text{función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la}\\ \text{función}\\ \text{exterior}}} \underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada}\\ \text{en la}\\ \text{función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la}\\ \text{función}\\ \text{interior}}}$$

$$= 2x \cos(x^2)$$

(b) Observe que $\text{sen}^2 x = (\text{sen}\, x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado, y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\text{sen}\, x)^2}_{\substack{\text{función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la}\\ \text{función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{evaluada}\\ \text{en la}\\ \text{función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la}\\ \text{función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta se puede dejar como $2 \,\text{sen}\, x \cos x$, o se escribe como $\text{sen}\, 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como fórmula del ángulo doble). ■

Véase la página de referencia 2 o el apéndice D.

En el ejemplo 2(a), se combinó la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \text{sen}\, u$, donde u es una función derivable de x, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Por lo que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\, u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas se pueden combinar con la regla de la cadena.

Se hace explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces se puede escribir $y = f(u) = u^n$ donde $u = g(x)$. Si se aplica la regla de la cadena y luego la regla de la potencia, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Observe que la derivada en el ejemplo 1 pudo calcularla tomando $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Haciendo $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$ en (4), se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$

$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

■

EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescriba a f: $\quad f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

Así
$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

■

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la regla de la cadena y la regla del cociente, se obtiene

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$

$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$

■

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo se debe aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$

$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$

$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)$$

$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

Observe que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, por lo que se puede factorizar y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

■

En la figura 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Observe que y' es grande cuando y crece con rapidez, y $y' = 0$ cuando y tiene una recta tangente horizontal. Por lo que la respuesta parece ser razonable.

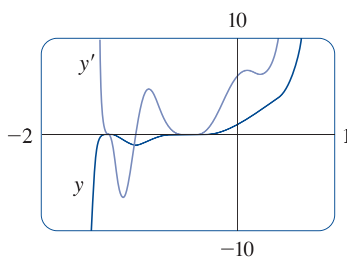


FIGURA 1

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$, y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por tanto, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$ ■

Más generalmente, la regla de la cadena da:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

Se puede aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $b > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.5, que $b = e^{\ln b}$. De este modo,

$$b^x = (e^{\ln b})^x = e^{(\ln b)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\frac{d}{dx}(b^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln b)x}) = e^{(\ln b)x}\frac{d}{dx}(\ln b)x$$

$$= e^{(\ln b)x} \cdot \ln b = b^x \ln b$$

porque $\ln b$ es una constante. Por lo que se tiene la fórmula

No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5 $$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

En particular, si $b = 2$, se obtiene

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, se dio la estimación

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta (6) porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

La razón para el nombre "regla de la cadena" queda clara cuando se ve como analogía de agregar eslabones para alargar una cadena. Suponga que $y = f(u)$, $u = g(x)$, y $x = h(t)$, donde f, g y h son funciones derivables. Entonces, para calcular la derivada de y respecto a t, se utiliza dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

EJEMPLO 8 Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x)$$

$$= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x$$

Observe que se ha aplicado dos veces la regla de la cadena. ■

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función de en medio es la función secante y la función interna es el triple de la función. Por lo que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta} \frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta) \\ &= e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \tan 3\theta \frac{d}{d\theta}(3\theta) \\ &= 3e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \tan 3\theta\end{aligned}$$

Cómo demostrar la regla de la cadena

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

De acuerdo con la definición de derivada, se tiene que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por lo que, si se denota por ε el cociente de diferencias y la derivada, se obtiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si se define ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, entonces ε se convierte en una función continua de Δx. Por lo que, para una función derivable f, se puede escribir

7 $$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \qquad \varepsilon \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite demostrar la regla de la cadena.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en a y $y = f(u)$ es derivable en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x, y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, entonces se puede aplicar la ecuación 7 para escribir

8 $$\Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. De manera análoga,

9 $$\Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ conforme $\Delta u \to 0$. Si ahora se sustituye la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, se obtiene

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

por lo que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

A medida que $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 muestra que $\Delta u \to 0$. Por tanto $\varepsilon_1 \to 0$ como $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)\, g'(a) = f'(g(a))\, g'(a)$$

Esto demuestra la regla de la cadena. ■

3.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx de cada una de las funciones siguientes.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$ **2.** $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$ **4.** $y = \tan(\operatorname{sen} x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \sqrt{2 - e^x}$

7–46 Obtenga la derivada de cada una de las funciones siguientes.

7. $F(x) = (5x^6 + 2x^3)^4$ **8.** $F(x) = (1 + x + x^2)^{99}$

9. $f(x) = \sqrt{5x + 1}$ **10.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

11. $f(\theta) = \cos(\theta^2)$ **12.** $g(\theta) = \cos^2 \theta$

13. $y = x^2 e^{-3x}$ **14.** $f(t) = t \operatorname{sen} \pi t$

15. $f(t) = e^{at} \operatorname{sen} bt$ **16.** $g(x) = e^{x^2 - x}$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \sqrt{\dfrac{x}{x + 1}}$ **22.** $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$

23. $y = e^{\tan \theta}$ **24.** $f(t) = 2^{t^3}$

25. $g(u) = \left(\dfrac{u^3 - 1}{u^3 + 1}\right)^8$ **26.** $s(t) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}}$

27. $r(t) = 10^{2\sqrt{t}}$ **28.** $f(z) = e^{z/(z-1)}$

29. $H(r) = \dfrac{(r^2 - 1)^3}{(2r + 1)^5}$ **30.** $J(\theta) = \tan^2(n\theta)$

31. $F(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}$ **32.** $F(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^3 + 1}}$

33. $G(x) = 4^{C/x}$ **34.** $U(y) = \left(\dfrac{y^4 + 1}{y^2 + 1}\right)^5$

35. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$ **36.** $y = \sec^2(m\theta)$

37. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$ **38.** $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$

39. $f(t) = \tan(\sec(\cos t))$ **40.** $y = e^{\operatorname{sen} 2x} + \operatorname{sen}(e^{2x})$

41. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$ **42.** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$ **44.** $y = 2^{3^{4^x}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$ **46.** $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Encuentre y' y y''.

47. $y = \cos(\operatorname{sen} 3\theta)$ **48.** $y = \dfrac{1}{(1 + \tan x)^2}$

49. $y = \sqrt{1 - \sec t}$ **50.** $y = e^{e^x}$

51–54 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = 2^x$, $(0, 1)$ **52.** $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$ **54.** $y = xe^{-x^2}$, $(0, 0)$

55. (a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.


(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

56. (a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ se llama *curva nariz de bala*. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto (1, 1).


(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de la curva y la recta tangente, en la misma pantalla.

57. (a) Si $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encuentre $f'(x)$.


(b) Verifique que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.


58. La función $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$), surge en aplicaciones a la sintonía de frecuencia modulada (FM).
(a) Utilice una gráfica de f producida por una calculadora graficadora para realizar un trazo aproximado de la gráfica de f'.
(b) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión, para trazar la gráfica de f' con una calculadora graficadora. Compare con su trazo del inciso (a).

59. Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de la función $f(x) = 2\,\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

60. ¿En qué puntos de la curva $y = \sqrt{1 + 2x}$, es la recta tangente perpendicular a la recta $6x + 2y = 1$?

61. Si $F(x) = f(g(x))$, donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$, determine $F'(5)$.

62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, determine $h'(1)$.

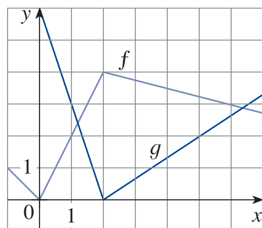
63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

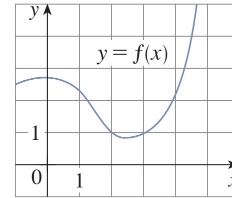
(a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.
(b) Si $H(x) = g(f(x))$, determine $H'(1)$.

64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.
(a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.
(b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

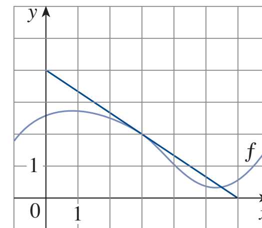
65. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran; sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. Si no existe, explique por qué.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



66. Si f es la función cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para calcular el valor de cada derivada.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Si $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde f es la gráfica que se muestra, evalúe $g'(3)$.



68. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

69. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

70. Sea $g(x) = e^{cx} + f(x)$ y $h(x) = e^{kx}f(x)$, donde $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$, y $f''(0) = -2$.
(a) Encuentre $g'(0)$ y $g''(0)$ en términos de c.
(b) En términos de k, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto donde $x = 0$.

71. Si $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, encuentre $r'(1)$.

72. Si g es una función dos veces derivable y $f(x) = xg(x^2)$, determine f'' en términos de g, g' y g''.

73. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, encuentre $F'(0)$.

74. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, determine $F'(1)$.

75. Demuestre que la función $y = e^{2x}(A\cos 3x + B\,\text{sen}\, 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$.

76. ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

77. Encuentre la derivada cincuenta de $y = \cos 2x$.

78. Encuentre la derivada mil de $f(x) = xe^{-x}$.

79. El desplazamiento de una partícula sobre una cuerda vibrante está dada por la ecuación $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\,\text{sen}(10\pi t)$ donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula después de t segundos.

80. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple*.

(a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
(b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

81. Una estrella variable Cefeida tiene una brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0, y cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de Delta Cefeida en el tiempo t, donde t se mide en días, se ha modelado por la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35\,\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

(a) Determine la razón de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Encuentre, la razón de aumento después de un día, redondeada a dos decimales.

82. En el ejemplo 1.3.4, se obtuvo un modelo para la duración de la luz diurna (en horas) en Ankara, Turquía, en el t-ésimo día del año:

$$L(t) = 12 + 2.8\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Utilice este modelo para comparar cómo aumentan las horas de luz diurna en Ankara el 21 de marzo y el 21 de mayo.

83. El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\,\text{sen}\,2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad después que transcurren t segundos y grafique las funciones de posición y de velocidad para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

84. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce de acuerdo con la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la sección 9.4 se verá que esta es una ecuación razonable para $p(t)$.]

(a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} p(t)$.
(b) Determine la rapidez de esparcimiento del rumor.



(c) Grafique p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$, con t medido en horas. Utilice la gráfica para calcular cuánto tiempo transcurrirá para que 80% de la población escuche el rumor.

85. La concentración de alcohol en sangre (BAC, por su sigla en inglés) de ocho sujetos masculinos se midió después del consumo de 15 mL de etanol (correspondiente a una bebida alcohólica). Los datos resultantes fueron modelados por la función de la concentración

$$C(t) = 0.0225te^{-0.0467t}$$

donde t se mide en minutos después del consumo y C se mide en mg/mL.

(a) ¿Qué tan rápido aumentó la BAC después de 10 minutos?
(b) ¿Qué tan rápido disminuyó una media hora más tarde?

Fuente: Adaptado de P. Wilkinson *et al.*, "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State," *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5 (1977): 207–224.

86. En la sección 1.4 se modeló la población mundial de 1900 a 2010 con la función exponencial

$$P(t) = (1436.53) \cdot (1.01395)^t$$

donde $t = 0$ corresponde al año 1900 y $P(t)$ se mide en millones. De acuerdo con este modelo, ¿cuál fue la razón de incremento de la población mundial en 1920? ¿En 1950? ¿Y en el año 2000?

87. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de las derivadas dv/dt y dv/ds.

88. Se bombea aire dentro de un globo esférico para el clima. En cualquier tiempo t, el volumen del globo es $V(t)$, y su radio es $r(t)$.

(a) ¿Qué representan las derivadas dV/dr y dV/dt?
(b) Exprese dV/dt en términos de dr/dt.



89. El flash de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se activa el obturador. Los datos siguientes describen la carga Q que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos).

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

(a) Determine, usando una calculadora graficadora o una computadora, un modelo exponencial para la carga.
(b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo del flash. Con el resultado del inciso (a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2.1.2.

90. En la tabla se presenta la población de México (millones) en los años censados en el siglo XX.

Año	Población	Año	Población
1900	13.6	1960	34.9
1910	15.2	1970	48.2
1920	14.3	1980	66.8
1930	16.6	1990	81.2
1940	19.7	2000	97.5
1950	25.8		

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para ubicar los datos con una función exponencial. Trace los puntos correspondientes a los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bien ajustan?
(b) Estime las tasas de crecimiento de la población en 1950 y 1960 promediando las pendientes de las rectas secantes.
(c) Use el modelo exponencial del inciso (a) para estimar las tasas de crecimiento de la población mexicana en el siglo XX.
(d) Utilice el modelo exponencial del inciso (c) para predecir las tasas de crecimiento de la población en 1950 y 1960. Compare con sus estimaciones del inciso (b).

SAC **91.** Los sistemas algebraicos computacionales (SAC) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga; en consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.
(a) Use un SAC para determinar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Después, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.
(b) Utilice un SAC para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las rectas tangentes horizontales?

SAC **92.** (a) Use un SAC para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.
(b) ¿En dónde tiene la gráfica de f rectas tangentes horizontales?
(c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso (b)?

93. Mediante la regla de la cadena demuestre lo siguiente.
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

94. Utilice la regla de la cadena y la regla del producto para obtener una demostración alternativa de la regla del cociente.
[*Sugerencia:* escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

95. (a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^n x \cos nx) = n \,\text{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

(b) Determine una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que es similar a la del inciso (a).

96. Suponga que $y = f(x)$ es una curva que siempre queda arriba del eje x y nunca tiene una recta tangente horizontal, donde f es derivable para toda x. ¿Para qué valor de y la razón de cambio de y^5 respecto a x es 80 veces la razón de cambio de y respecto a x?

97. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, entonces

$$\frac{d}{d\theta}(\text{sen}\,\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da un argumento para justificar la convención de que siempre se use el radián cuando se manejen funciones trigonométricas en cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usara el grado como medida.)

98. (a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

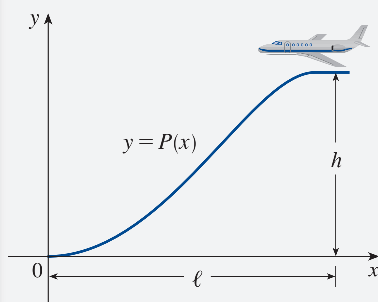
(b) Si $f(x) = |\text{sen}\, x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde f no es derivable?
(c) Si $g(x) = \text{sen}|x|$, determine $g'(x)$ y trace las gráficas de g y g'. ¿En dónde g no es derivable?

99. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

100. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g tienen tercera derivada, obtenga una fórmula para d^3y/dx^3 parecida a la que se da en el ejercicio 99.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿DÓNDE DEBERÍA UN PILOTO INICIAR EL DESCENSO?



En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión, que satisface las condiciones siguientes:

(i) La altura de crucero es h cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

(ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante en todo el descenso.

(iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe sobrepasar una constante k (la cual es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Encuentre un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga la condición (i), imponiendo condiciones adecuadas sobre $P(x)$ y $P'(x)$ en el inicio del descenso y el contacto con la pista.

2. Use las condiciones (ii) y (iii) para demostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponga que una aerolínea comercial decide no permitir que la aceleración vertical de un avión sea mayor que $k = 1385 \text{ km/h}^2$. Si la altitud de crucero de un avión es de 11 000 m y la rapidez es de 480 km/h, ¿a qué distancia del aeropuerto debe el piloto iniciar el descenso?

4. Trace la gráfica de la trayectoria de aproximación si se satisfacen las condiciones que se enuncian en el problema 3.

3.5 Derivación implícita

Las funciones que se han encontrado hasta ahora se pueden describir expresando una variable explícitamente en términos de la otra variable, por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

1 $$x^2 + y^2 = 25$$

o

2 $$x^3 + y^3 = 6xy$$

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de ese tipo para y como una función explícita (o varias funciones) de x. Por ejemplo, si se resuelve la ecuación 1 para y, se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, por lo que dos de las funciones determinadas por la ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son las semicircunferencias superior e inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. (Véase la figura 1.)

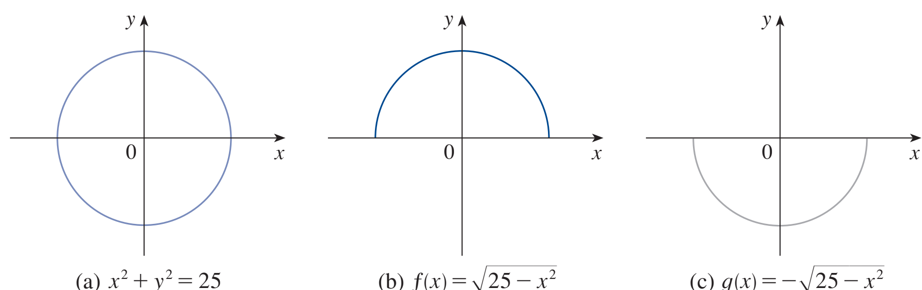


FIGURA 1 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil resolver explícitamente la ecuación 2 para y como función x. (Con un sistema algebraico computacional no hay dificultad, pero las expresiones que se obtienen son muy complicadas). Sin embargo, (2) es la ecuación de una curva llamada **folium de Descartes**, que se muestra en la figura 2 y, que de manera implícita define a y como varias funciones de x. En la figura 3 se muestran las gráficas de esas tres funciones. Cuando se dice que f es una función definida implícitamente por la ecuación 2, significa que la ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6x f(x)$$

es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f.

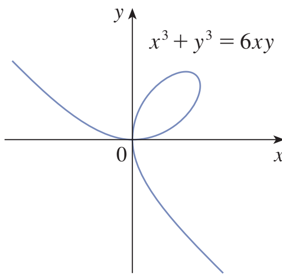


FIGURA 2 Folium de Descartes

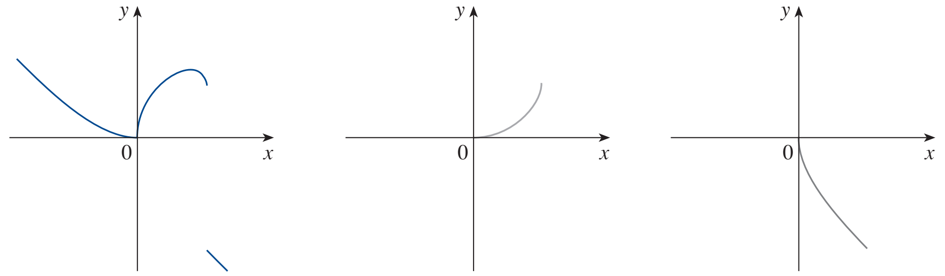


FIGURA 3 Gráficas de tres funciones definidas por el folium de Descartes

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x para determinar la derivada de y. En lugar de ello, se aplica el **método de derivación implícita**. Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios de esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina a y implícitamente como una función derivable de x, por lo que se puede aplicar el método de derivación implícita.

EJEMPLO 1

(a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, en el punto (3, 4).

SOLUCIÓN 1

(a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, por lo que hay que utilizar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por tanto $$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora se resuelve esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) En el punto (3, 4) se tiene que $x = 3$ y $y = 4$, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Por tanto, la ecuación de la tangente a la circunferencia, en (3, 4), es

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

(b) Al resolver $x^2 + y^2 = 25$, para y, se obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto (3, 4) se encuentra en la semicircunferencia superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y, por consiguiente, considere la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Al derivar f usando la regla de la cadena, se tiene

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

En el ejemplo 1 se ilustra que aun cuando es posible resolver una ecuación explícita para y en términos de x puede ser más fácil aplicar la derivación implícita.

Por lo que $$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

y, como en la solución 1, la ecuación de la recta tangente es $3x + 4y = 25$. ■

NOTA 1 La expresión $dy/dx = -x/y$ en la solución 1 da la derivada en términos tanto de x como de y. Esto es correcto sin importar cuál función y queda determinada por la ecuación dada. Por ejemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

en tanto que para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EJEMPLO 2

(a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.
(b) Determine la recta tangente al folium de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$, en el punto (3, 3).
(c) ¿En cuál punto en el primer cuadrante es horizontal la recta tangente?

SOLUCIÓN

(a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ respecto a x, considerando a y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3, y la regla del producto en el término $6xy$, se obtiene

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o $$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora se resuelve para y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

(b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

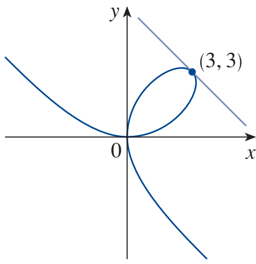


FIGURA 4

un vistazo a la figura 4 confirma que es un valor razonable para la pendiente en (3, 3). Por lo que, la ecuación de la recta tangente al folium en (3, 3) es

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{o} \qquad x + y = 6$$

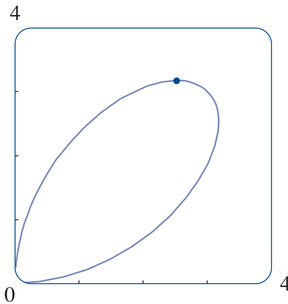


FIGURA 5

(c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Si se utiliza la expresión para y' del inciso (a), se observa que $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$ (siempre que $y^2 - 2x \neq 0$). Al sustituir $y = \frac{1}{2}x^2$ en la ecuación de la curva, se obtiene

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

lo cual se simplifica para quedar $x^6 = 16x^3$. Ya que $x \neq 0$ en el primer cuadrante, se tiene $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, entonces $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Por tanto, la recta tangente es horizontal en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$ que es aproximadamente (2.5198, 3.1748). Al estudiar la figura 5, es claro que la respuesta es razonable. ■

NOTA 2 Existe una fórmula para obtener las tres raíces de una ecuación cúbica, que es semejante a la fórmula cuadrática, pero mucho más complicada. Si se utiliza esta fórmula (o un sistema algebraico computacional) para resolver la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$ para y en términos de x, se obtienen tres funciones determinadas por la ecuación:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

y

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Estas son las tres funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3.) Usted puede ver que el método de la derivación implícita ahorra una cantidad enorme de trabajo en casos como este. Más aún, la derivación implícita funciona con igual facilidad para ecuaciones como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

en las cuales es *imposible* determinar una expresión similar para y en términos de x.

Abel y Galois

En 1824, el matemático noruego Niels Abel demostró que no puede darse una fórmula general para la obtención de las raíces de una ecuación de quinto grado. Tiempo después, el matemático francés Evariste Galois demostró que es imposible determinar una fórmula general para las raíces de una ecuación de *n*-ésimo grado (en términos de operaciones algebraicas sobre los coeficientes), si *n* es cualquier entero mayor que 4.

EJEMPLO 3 Encuentre y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Si se deriva implícitamente respecto a x y se considera que y es una función de x, se obtiene

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Note que en el lado izquierdo se ha aplicado la regla de la cadena y, en el derecho, la regla de la cadena y la regla del producto). Si se agrupa los términos que contienen a y', se obtiene

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Por tanto
$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

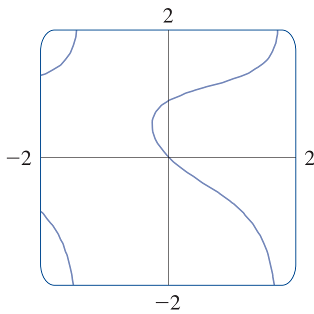


FIGURA 6

En la figura 6, trazada con la instrucción de construcción de gráficas en forma implícita de un sistema algebraico computacional, se muestra parte de la curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como comprobación del cálculo, se observa que $y' = -1$, cuando $x = y = 0$ y, al parecer de la gráfica, la pendiente es aproximadamente -1 en el origen. ■

Las figuras 7, 8 y 9 muestran tres curvas más, producidas por computadora. En los ejercicios 41-42 se tendrá oportunidad de crear y analizar curvas atípicas de esta naturaleza.

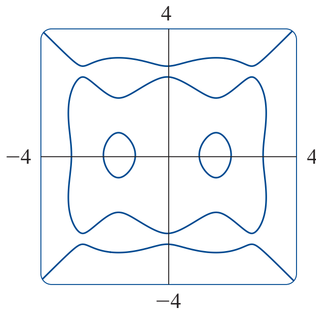


FIGURA 7
$(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$
$= y^2(y^2 - 4)(y^2 - 9)$

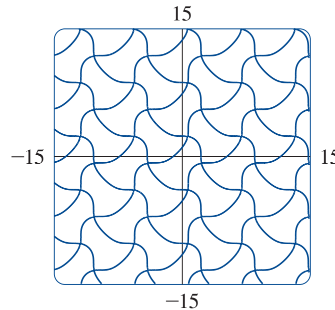


FIGURA 8
$\cos(x - \operatorname{sen} y) = \operatorname{sen}(y - \operatorname{sen} x)$

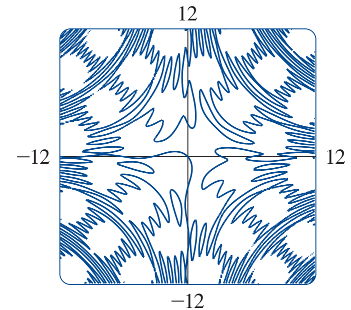


FIGURA 9
$\operatorname{sen}(xy) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

En el siguiente ejemplo se muestra cómo encontrar la segunda derivada de una función que está definida implícitamente.

EJEMPLO 4 Determinar y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUCIÓN Derivando la ecuación de manera implícita respecto a x, se obtiene

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolviendo para y' se obtiene

3
$$y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

Para determinar y'' se deriva esta expresión para y' aplicando la regla del cociente, considerando que y es una función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si se sustituye la ecuación 3 en esta expresión, se obtiene

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero los valores de x y y deben satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$, por lo que la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$ ■

La figura 10 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del ejemplo 4. Observe que es una versión extendida y achatada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Por esta razón algunas veces se le llama *circunferencia gorda*. Empieza muy empinada a la izquierda, pero rápidamente se hace muy plana. Esto se puede ver en la expresión

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

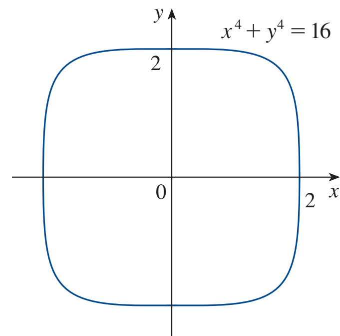


FIGURA 10

■ Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas se repasan en la sección 1.5. En la sección 2.5 se analiza su continuidad, y en la sección 2.6, sus asíntotas. Aquí se usa la derivación implícita para determinar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, suponiendo que estas funciones son derivables. [En efecto, si f es una función inyectiva derivable, se puede demostrar que su función inversa f también es derivable, excepto donde sus rectas tangentes son verticales. Esto es posible porque la gráfica de una función derivable no tiene vértices ni giros y, por esta razón, si se refleja a través de $y = x$, la gráfica de su función inversa tampoco tiene vértices ni giros.]

Recuerde la definición de la función arco seno:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \qquad \text{significa} \qquad \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Al derivar implícitamente $\operatorname{sen} y = x$ respecto a x, se obtiene

$$\cos y\,\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$, debido a que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, por lo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

El mismo método se puede utilizar para determinar una fórmula para la derivada de cualquier función inversa. Véase el ejercicio 77.

Por tanto
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

En la figura 11 se muestra la gráfica de $f(x) = \tan^{-1}x$ y su derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Observe que f es creciente y $f'(x)$ es siempre positiva. El hecho de que $\tan^{-1}x \to \pm\,\pi/2$ cuando $x \to \pm\,\infty$ se refleja en el hecho de que $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\,\infty$.

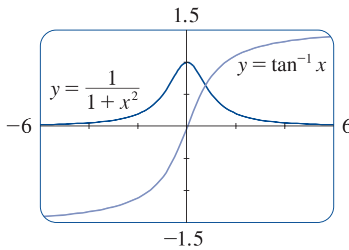


FIGURA 11

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semejante. Si $y = \tan^{-1}x$, entonces $\tan y = x$. Si se deriva esta última ecuación implícitamente respecto a x, se tiene

$$\sec^2 y\,\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

EJEMPLO 5 Derive (a) $y = \dfrac{1}{\sin^{-1}x}$ y (b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\,\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1 - x^2}}$$

Recuerde que $\arctan x$ es una notación alternativa para $\tan^{-1} x$.

(b)
$$f'(x) = x\,\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \arctan\sqrt{x}$$ ■

Las funciones trigonométricas inversas que se presentan con mayor frecuencia son las que se acaban de analizar. Las derivadas de las cuatro restantes se presentan en la tabla siguiente. Las demostraciones de las fórmulas se dejan como ejercicios.

Las fórmulas para las derivadas de $\csc^{-1}x$ y $\sec^{-1}x$ dependen de las definiciones que se apliquen para estas funciones. Véase el ejercicio 64.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

3.5 EJERCICIOS

1–4
(a) Encuentre y' por derivación implícita.
(b) Resuelva la ecuación explícita para y y derive para obtener y' en términos de x.
(c) Compruebe la coherencia de sus soluciones en los incisos (a) y (b) sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ **4.** $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 4$

5–20 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^2 - 4xy + y^2 = 4$ **6.** $2x^2 + xy - y^2 = 2$

7. $x^4 + x^2y^2 + y^3 = 5$ **8.** $x^3 - xy^2 + y^3 = 1$

9. $\dfrac{x^2}{x + y} = y^2 + 1$ **10.** $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$ **12.** $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $\sqrt{x + y} = x^4 + y^4$ **14.** $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$ **16.** $xy = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$ **18.** $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $\operatorname{sen}(xy) = \cos(x + y)$ **20.** $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

21. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, encuentre $f'(1)$.

22. Si $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, determine $g'(0)$.

23–24 Considere y como la variable independiente y x como la variable dependiente y utilice la derivación implícita para calcular dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y \sec x = x \tan y$

25–32 Utilice la derivación implícita para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

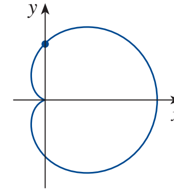
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$

26. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

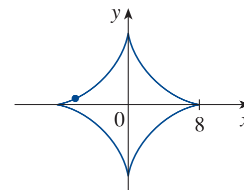
27. $x^2 - xy - y^2 = 1$, $(2, 1)$ (hipérbola)

28. $x^2 + 2xy + 4y^2 = 12$, $(2, 1)$ (elipse)

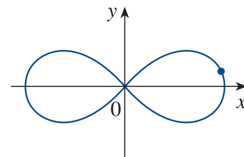
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, (cardioide)



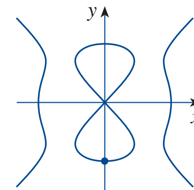
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $\left(-3\sqrt{3}, 1\right)$, (astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, $(3, 1)$, (lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$, $(0, -2)$, (curva del diablo)



33. (a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama **campila de Eudoxo**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 2)$.
 (b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de la curva y la recta tangente, en una pantalla común. (Si su dispositivo graficador puede trazar gráficas de curvas definidas implícitamente, entonces utilice esa capacidad. Si no es así, puede trazar esta curva trazando sus mitades superior e inferior por separado.)

34. (a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, -2)$.
(b) ¿En cuáles puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales?
 (c) Ilustre los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de la curva y las rectas tangentes en una pantalla común.

35–38 Determine y'' por derivación implícita.

35. $x^2 + 4y^2 = 4$

36. $x^2 + xy + y^2 = 3$

37. $\operatorname{sen} y + \cos x = 1$

38. $x^3 - y^3 = 7$

39. Si $xy + e^y = e$, encuentre el valor de y'' en el punto donde $x = 0$.

40. Si $x^2 + xy + y^3 = 1$, encuentre el valor de y''' en el punto donde $x = 1$.

SAC **41.** Es posible crear formas caprichosas con las capacidades de trazado implícito de los sistemas algebraicos computacionales.

(a) Trace la gráfica de la curva con ecuación

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

¿En cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Estime las coordenadas x de estos puntos.

(b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos (0, 1) y (0, 2).

(c) Determine las coordenadas x exactas de los puntos del inciso (a).

(d) Cree curvas incluso más caprichosas modificando la ecuación del inciso (a).

SAC **42.** (a) La curva con ecuación

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

se ha relacionado a un carretón que rebota. Utilice un sistema algebraico computacional para la curva y descubra por qué.

(b) ¿En cuántos puntos esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Encuentre las coordenadas x de estos puntos.

43. Determine los puntos de la lemniscata del ejercicio 31 donde la recta tangente sea horizontal.

44. Demuestre por derivación implícita que la recta tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

45. Determine una ecuación para la recta tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0).

46. Demuestre que la suma de las intersecciones en x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ es igual a c.

47. Demuestre, usando derivación implícita que cualquier recta tangente en un punto P a una circunferencia con centro O es perpendicular al radio OP.

48. La regla de la potencia se puede demostrar por medio de la derivación implícita para el caso donde n es un número racional, $n = p/q$, y $y = f(x) = x^n$ es una función derivable. Si $y = x^{p/q}$, entonces $y^q = x^p$. Utilizando la derivación implícita demuestre que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

49–60 Determine la derivada de cada una de las funciones siguientes. Simplifique donde sea posible.

49. $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$

50. $y = \sqrt{\tan^{-1} x}$

51. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \arccos\sqrt{x}$

53. $F(x) = x \sec^{-1}(x^3)$

54. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

56. $R(t) = \operatorname{arcsen}(1/t)$

57. $y = x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\operatorname{sen}^{-1} t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \; a > b > 0$

60. $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

61–62 Encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arcsen} x$

62. $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

63. Demuestre la fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ por el mismo método utilizado para demostrar $(d/dx)(\operatorname{sen}^{-1}x)$.

64. (a) Una manera de definir $\sec^{-1}x$ es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leqslant y < \pi/2$, o $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Demuestre que, con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Otro modo de definir $\sec^{-1}x$ que se utiliza a veces es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq \pi/2$. Demuestre que, con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

65–68 Dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias de curvas dadas son **trayectorias ortogonales** entre sí; es decir, cualquier curva en una familia es ortogonal a cualquier curva en la otra familia. Trace ambas familias de curvas usando los mismos ejes de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

69. Demuestre que la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y la hipérbola $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ son trayectorias ortogonales si $A^2 < a^2$ y $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (la elipse y la hipérbola tienen los mismos focos).

70. Encuentre el valor del número a tal que las familias de curvas $y = (x + c)^{-1}$ y $y = a(x + k)^{1/3}$ son trayectorias ortogonales.

71. (a) La *ecuación de van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V es el volumen y T es la temperatura del gas. La constante R es la constante universal de los gases, y a y b son constantes positivas que son características de un gas particular. Si T permanece constante, utilice derivación implícita para obtener dV/dP.

(b) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión de 1 mol de dióxido de carbono a un volumen de $V = 10$ L y una presión de $P = 2.5$ atm. Utilice $a = 3.592$ L^2-atm/mol^2 y $b = 0.04267$ L/mol.

72. (a) Utilice derivación implícita para encontrar y' si

$$x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$$

SAC (b) Trace la gráfica de la curva del inciso (a). ¿Qué observa? Demuestre que lo que ve es correcto.

(c) En vista del inciso (b), ¿qué puede decir acerca de la expresión para y' que encontró en el inciso (a)?

73. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa una "elipse rotada"; es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en que esta elipse cruza el eje x y demuestre que las rectas tangentes en estos puntos son paralelas.

74. (a) ¿Dónde interseca por segunda vez la recta normal en el punto $(-1, 1)$ a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$?



(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de la elipse y la recta normal.

75. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

76. Determine las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 3)$.

77. (a) Suponga que f es una función inyectiva derivable y que su función inversa f^{-1} también es derivable. Utilice la derivación implícita para demostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el denominador sea diferente de 0.

(b) Si $f(4) = 5$ y $f'(4) = \frac{2}{3}$, encuentre $(f^{-1})'(5)$.

78. (a) Demuestre que $f(x) = x + e^x$ es inyectiva.

(b) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(1)$?

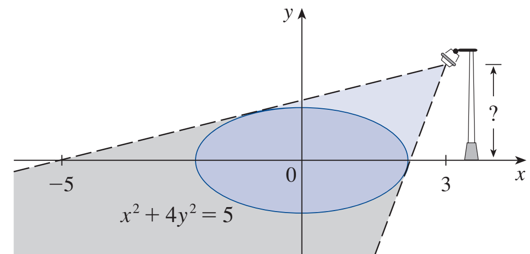
(c) Utilice la fórmula del ejercicio 77(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.

79. La **función de Bessel** de orden 0, $y = J(x)$, satisface la ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos los valores de x, y su valor en 0 es $J(0) = 1$.

(a) Encuentre $J'(0)$.

(b) Utilice la derivación implícita para encontrar $J''(0)$.

80. En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leqslant 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿qué tan arriba del eje x está colocada la lámpara?



PROYECTO DE LABORATORIO SAC FAMILIA DE CURVAS IMPLÍCITAS

En este proyecto se explorarán las formas cambiantes de curvas implícitamente definidas cuando varían las constantes en una familia y se determinarán las características comunes a todas las funciones de la familia.

1. Si se considera la familia de curvas

$$y^2 - 2x^2(x + 8) = c[(y + 1)^2(y + 9) - x^2]$$

(a) Trazando la gráfica de las curvas con $c = 0$ y $c = 2$, determine cuántos puntos de intersección hay. (Usted puede hacer acercamientos con el zoom para encontrarlos.)

(b) Ahora añada las curvas con $c = 5$ y $c = 10$ a sus gráficas del inciso (a). ¿Qué observa? ¿Qué pasa con otros valores de c?

2. (a) Trace la gráfica de varios miembros de la familia de curvas

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = 1$$

Describa cómo cambia la gráfica cuando cambia el valor de c.

(b) ¿Qué sucede con la curva cuando $c = -1$? Describa lo que aparece en la pantalla. ¿Puede probarlo algebraicamente?

(c) Encuentre y' por derivación implícita. Para el caso $c = -1$, ¿es coherente la expresión y' con lo que descubrió en el inciso (b)?

3.6 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección se utilizará la derivación implícita para determinar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_b x$ y, en particular, de la función logaritmo natural $y = \ln x$. [A partir de sus gráficas, es posible probar que las funciones logarítmicas son derivables (véase la figura 1.5.12).]

1
$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_b x$. Entonces

$$b^y = x$$

La fórmula 3.4.5 dice que

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

Si mediante la fórmula (3.4.5) se deriva esta ecuación de manera implícita respecto a x, se obtiene

$$b^y(\ln b)\frac{dy}{dx} = 1$$

y, por consiguiente,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b^y \ln b} = \frac{1}{x \ln b}$$
■

Si en la fórmula 1 se hace $b = e$, entonces el factor $\ln b$ en el lado derecho se convierte en $\ln e = 1$ y se obtiene la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si se comparan las fórmulas 1 y 2, se evidencia una de las razones principales por la que se usan los logaritmos naturales (logaritmos con base e) en el cálculo. La fórmula de derivación es más sencilla cuando $b = e$, porque $\ln e = 1$.

EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para utilizar la regla de la cadena, se hace $u = x^3 + 1$. Entonces $y = \ln u$, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$
■

En general, si se combina la fórmula 2 con la regla de la cadena como en el ejemplo 1, se obtiene

3
$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Utilizando (3), se tiene que

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x$$ ■

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, por lo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$ ■

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Si se usa la fórmula 1 con $b = 10$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10} \end{aligned}$$ ■

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función f del ejemplo 5, junto con la gráfica de su derivada. Da una comprobación visual de nuestro cálculo. Observe que $f'(x)$ es grande negativa cuando f está decreciendo con rapidez.

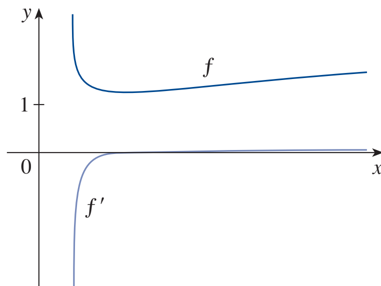


FIGURA 1

EJEMPLO 5 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\ &= \frac{x - 2 - \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero se simplifica la función dada aplicando las leyes de los logaritmos, entonces la derivación se vuelve más fácil:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Esta respuesta se puede dejar como está, pero si se usara un denominador común, se vería que da la misma respuesta en la solución 1). ■

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$ del ejemplo 6 y la de su derivada $f'(x) = 1/x$. Observe que cuando x es pequeña, la gráfica de $y = \ln|x|$ es muy empinada y, así $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

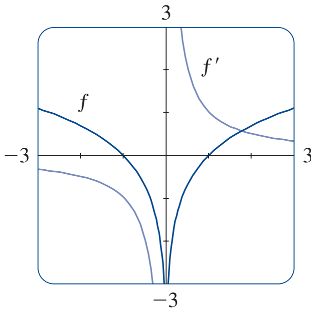


FIGURA 2

EJEMPLO 6 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$:

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se sigue que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo que, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$. ■

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 6:

4 $$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias se puede simplificar tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica.**

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos, para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente respecto a x, se obtiene

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Si no se hubiera utilizado la derivación logarítmica en el ejemplo 7, se habría tenido que aplicar tanto la regla del cociente como la regla del producto. El proceso de cálculo habría sido horrendo.

Puesto que se tiene una expresión explícita para y, se puede sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$ ■

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tome logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilice las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derive implícitamente respecto a x.
3. Resuelva la ecuación resultante para y'.

Si $f(x) < 0$ para algunos valores de x, entonces $\ln f(x)$ no está definida, pero se puede escribir $|y| = |f(x)|$ y utilizar la ecuación 4. Este procedimiento se ilustra demostrando la versión general de la regla de la potencia, como se prometió en la sección 3.1.

Regla de la potencia Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$ y utilice derivación logarítmica:

Si $x = 0$, se puede demostrar directamente que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ a partir de la definición de derivada.

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Por tanto,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

Por lo que,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$ ■

Debe distinguir con cuidado la regla de la potencia $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, donde la base es variable y el exponente constante, de la regla para derivar funciones exponenciales $[(b^x)' = b^x \ln b]$, donde la base es constante y el exponente es variable.

En general, se tienen cuatro casos para exponentes y bases:

Base constante, exponente constante

1. $\frac{d}{dx}(b^n) = 0 \qquad$ (b y n son constantes)

Base variable, exponente constante

2. $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$

Base constante, exponente variable

3. $\frac{d}{dx}[b^{g(x)}] = b^{g(x)}(\ln b)g'(x)$

Base variable, exponente variable

4. Para determinar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, se puede aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Dado que la base y el exponente son variables, se utiliza la derivación logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

La figura 3 ilustra el ejemplo 8 mostrando las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

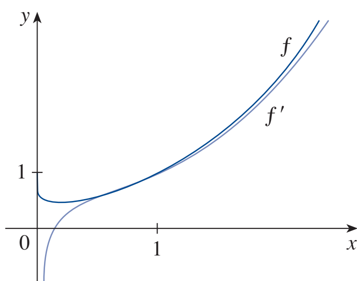


FIGURA 3

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\,\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\,\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

■

El número *e* como un límite

Se ha demostrado que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$. Debido a esto, $f'(1) = 1$. Se utilizará este hecho para expresar el número e como un límite.

A partir de la definición de derivada como un límite, se tiene que

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1 + x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x}$$

Ya que $f'(1) = 1$, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Luego, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial, se tiene que

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$$

5 $$e = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$$

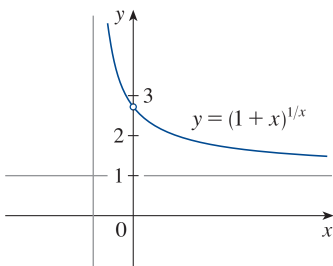


FIGURA 4

x	$(1 + x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

En la figura 4 se ilustra la fórmula 5 mediante la gráfica de la función $y = (1 + x)^{1/x}$ y una tabla para valores pequeños de x. Esto ilustra el hecho que redondeada a siete decimales

$$e \approx 2.7182818$$

Si se hace $n = 1/x$ en la fórmula 5, entonces $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y, por lo que, una expresión alternativa para e es

6 $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3.6 EJERCICIOS

1. Explique por qué en cálculo se usa con mucha más frecuencia la función logarítmica natural $y = \ln x$, que las otras funciones logarítmicas, $y = \log_b x$.

2–22 Derive la función.

2. $f(x) = x \ln x - x$

3. $f(x) = \text{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\text{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

6. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

7. $f(x) = \log_{10}(1 + \cos x)$

8. $f(x) = \log_{10} \sqrt{x}$

9. $g(x) = \ln(xe^{-2x})$

10. $g(t) = \sqrt{1 + \ln t}$

11. $F(t) = (\ln t)^2 \,\text{sen}\, t$

12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

14. $P(v) = \dfrac{\ln v}{1 - v}$

15. $F(s) = \ln \ln s$

16. $y = \ln |1 + t - t^3|$

17. $T(z) = 2^z \log_2 z$

18. $y = \ln(\csc x - \cot x)$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

21. $y = \tan[\ln(ax + b)]$

22. $y = \log_2(x \log_5 x)$

23–26 Encuentre y' y y'' en cada una de las funciones siguientes.

23. $y = \sqrt{x} \ln x$

24. $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$

25. $y = \ln |\sec x|$

26. $y = \ln(1 + \ln x)$

27–30 Derive f y encuentre el dominio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Si $f(x) = \ln(x + \ln x)$, determine $f'(1)$.

32. Si $f(x) = \cos(\ln x^2)$, determine $f'(1)$.

33–34 Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$

34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

35. Si $f(x) = \text{sen}\, x + \ln x$, encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = (\ln x)/x$, en los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1/e)$. Ilustre lo anterior trazando la curva y sus rectas tangentes.

37. Sea $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. ¿Para qué valores de c es $f'(\pi/4) = 6$?

38. Sea $f(x) = \log_b(3x^2 - 2)$. ¿Para qué valor de b es $f'(1) = 3$?

39–50 Utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de la función.

39. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

40. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$

42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$

43. $y = x^x$

44. $y = x^{\cos x}$

45. $y = x^{\text{sen}\, x}$

46. $y = \left(\sqrt{x}\right)^x$

47. $y = (\cos x)^x$

48. $y = (\text{sen}\, x)^{\ln x}$

49. $y = (\tan x)^{1/x}$

50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Determine y' si $x^y = y^x$.

53. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

54. Encuentre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

55. Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

56. Demuestre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para cualquier $x > 0$.

3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales

Se sabe que si $y = f(x)$, entonces la derivada dy/dx se puede interpretar como la razón de cambio de y respecto a x. En esta sección se analizan algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Recuerde de la sección 2.7, la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x varía de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

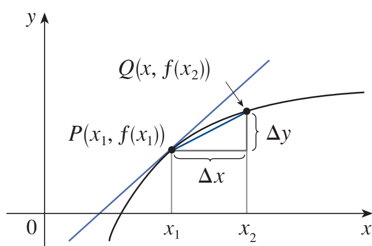
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = razón de cambio promedio
$m = f'(x_1)$ = razón de cambio instantáneo

FIGURA 1

es la **razón de cambio promedio de *y* respecto a *x*** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual se puede interpretar como la **razón de cambio instantáneo de *y* respecto a *x***, o la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, se escribe el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la sección 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades de y divididas entre las unidades de x.) Vea ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y sociales.

Física

Si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve en una línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ representa el promedio de la velocidad en un período Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo). La razón de cambio instantáneo de la velocidad respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se discutió en las secciones 2.7 y 2.8, pero ahora que se conocen las fórmulas de derivación, se pueden resolver con más facilidad problemas que implican el movimiento de objetos.

EJEMPLO 1 La posición de una partícula está dada por la función siguiente

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
(c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
(d) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
(e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
(f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.
(g) Determine la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.

(h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
(i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo la disminuye?

SOLUCIÓN

(a) La función velocidad es la derivada de la función posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$; esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.

(d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$; es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los intervalos de tiempo $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

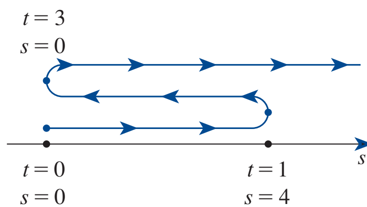


FIGURA 2

(e) Utilizando la información del inciso (d), en la figura 2 se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje s).

(f) A partir de lo aprendido en los incisos (d) y (e), se necesita calcular las distancias recorridas durante los intervalos de tiempo [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m.

(g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

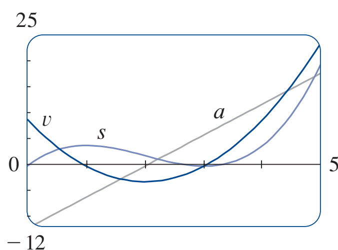


FIGURA 3

(h) La figura 3 muestra las gráficas de s, v, y a.

(i) La rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, la rapidez de la partícula aumenta cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo. (La partícula se empuja en la misma dirección en que se está moviendo.) En la figura 3 se ve que esto sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula disminuye su rapidez cuando v y a tienen signos opuestos; es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula.

TEC En Module 3.7 puede ver una animación de la figura 4 con una expresión para s que puede elegir usted mismo.

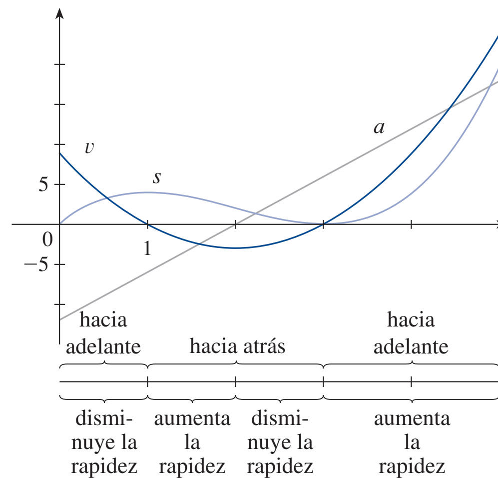


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, entonces su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea, sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es $m = f(x)$, como se muestra en la figura 5.

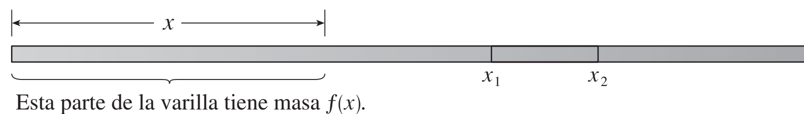


FIGURA 5

La masa de la parte de la varilla que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$ está dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, por lo que la densidad promedio de esa sección de la varilla es

$$\text{densidad promedio} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora se hace que $\Delta x \to 0$ (es decir, $x_2 \to x_1$), se calcula la densidad promedio sobre un intervalo cada vez más pequeño. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estas densidades promedio cuando $\Delta x \to 0$; es decir, la densidad lineal es la razón de cambio de la masa respecto a la longitud. En forma simbólica,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Por lo que, la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, donde x se mide en metros y m en kilogramos, entonces la densidad promedio de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48 \text{ kg/m}$$

mientras que la densidad en $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50 \text{ kg/m}$$ ■

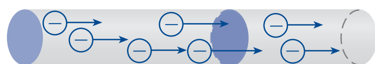


FIGURA 6

EJEMPLO 3 Siempre que las cargas eléctricas se mueven, hay corriente. En la figura 6 se muestra parte de un alambre con electrones que se mueven a través de una superficie plana, mostrada en gris oscuro. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un período Δt, entonces la corriente promedio durante este intervalo de tiempo se define como

$$\text{corriente promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si se toma el límite de esta corriente promedio sobre intervalos de tiempo más y más pequeños, se obtiene lo que se llama **corriente *I*** en un tiempo dado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Por lo que, la corriente es la rapidez con que la carga fluye por una superficie; se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (con frecuencia coulombs por segundo, llamados amperes). ■

La velocidad, la densidad y la corriente no son las únicas razones de cambio de importancia para la física. Otras incluyen la potencia (la rapidez a la cual se realiza trabajo), la razón de flujo de calor, el gradiente de temperatura (la razón de cambio de la temperatura respecto a la posición) y la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva en física nuclear.

■ Química

EJEMPLO 4 El resultado de una reacción química en la formación de una o más sustancias (llamadas *productos*) a partir de uno o más materiales (*reactivos*). Por ejemplo, la "ecuación"



$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de agua. Considere la reacción



$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles (1 mol $= 6.022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro y se denota con [A]. La concentración varía durante una reacción, por lo que [A], [B] y [C] son todas funciones del tiempo (t). La rapidez promedio de reacción del producto C en un intervalo de tiempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

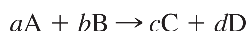
Pero los químicos tienen más interés en la **rapidez de reacción instantánea**, la cual se obtiene tomando el límite de la rapidez promedio de reacción cuando el intervalo Δt tiende a 0:

$$\text{rapidez de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

Dado que la concentración del producto aumenta a medida que la reacción avanza, la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$ será positiva, y así la rapidez de reacción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción, por lo que, para que la rapidez de reacción de A y B sean números positivos, se ponen signos negativos delante de las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Dado que [A] y [B] disminuyen con la misma rapidez que [C] crece, se tiene que

$$\text{rapidez de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

De modo más general, resulta que para una reacción de la forma



$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \rightarrow c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

se tiene que

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La rapidez de reacción se puede determinar a partir de datos y con métodos gráficos. En algunos casos existen fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo que permiten calcular la rapidez de reacción (véase el ejercicio 24). ■

EJEMPLO 5 Una de las cantidades de interés en termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a una temperatura constante, entonces su volumen depende de su presión P. Se puede considerar la razón de cambio del volumen respecto a la presión: a saber, la derivada dV/dP. Conforme P crece, V decrece, por lo que $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Por lo cual β mide qué tan rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25 °C está relacionado con la presión P (en kilopascales) mediante la ecuación

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio de V respecto a P cuando $P = 50$ kPa, es

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2500} = -0.00212 \text{ m}^3/\text{kPa}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\frac{5.3}{50}} = 0.02 \ (\text{m}^3/\text{kPa})/\text{m}^3$$ ■

Biología

EJEMPLO 6 Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas al tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, por lo que la razón de crecimiento promedio durante el período $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{razón de crecimiento promedio} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **razón de crecimiento instantáneo** se obtiene a partir de esta razón de crecimiento promedio al hacer que el período Δt tienda a 0:

$$\text{razón de crecimiento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

En términos estrictos, esto no es muy exacto porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ sería una función escalón que es discontinua siempre que ocurre un nacimiento o una muerte y, por tanto, no es derivable. Sin embargo, para una población grande de animales o plantas, es posible reemplazar la gráfica con una curva de aproximación uniforme como en la figura 7.

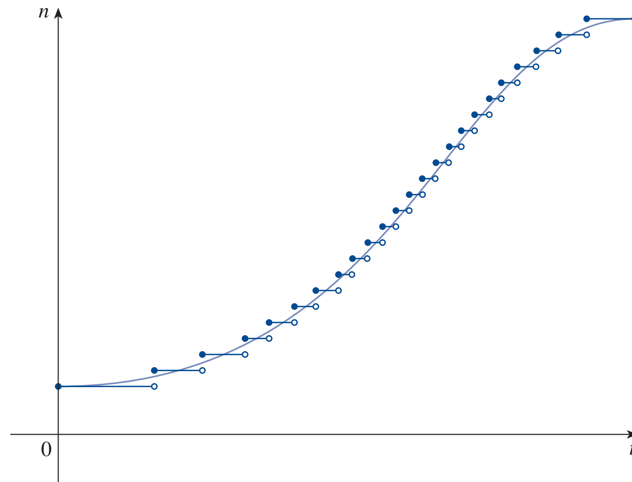
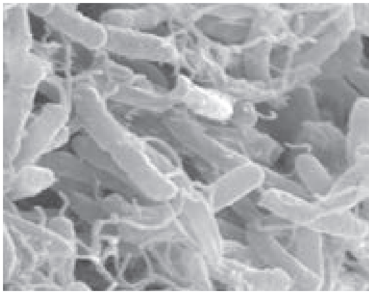


FIGURA 7
Una curva suave que se aproxima a una función de crecimiento



Las bacterias *E.coli* tienen aproximadamente dos micrómetros (μm) de longitud y 0.75 μm de ancho. La imagen se obtuvo con un microscopio electrónico de barrido.

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, entonces

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

y, en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la sección 3.4 se demostró que

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

Por lo que la razón de crecimiento de la población de bacterias en el tiempo t, es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por ejemplo, suponga que se tiene una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. Entonces, la razón de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias crece en una cantidad de casi 1109 bacterias por hora. ■

EJEMPLO 7 Cuando se considera el flujo de sangre por un vaso sanguíneo, como una vena o una arteria, este vaso puede tomar la forma de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l como se muestra en la figura 8.

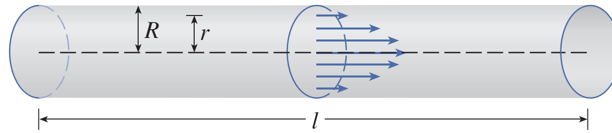


FIGURA 8
Flujo de sangre dentro de una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia r al eje, hasta que v es igual a 0 en la pared. La relación entre v y r está dada por la **ley del flujo laminar** descubierta por el físico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. En esta se establece que

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, entonces v es función de r, con dominio $[0, R]$.

Para información más detallada, véase W. Nichols y M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 5a. ed. (Nueva York, 2005).

La razón de cambio promedio de la velocidad, al moverse desde $r = r_1$ hacia afuera hasta $r = r_2$, está dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si se hace que $\Delta r \to 0$, se obtiene el **gradiente de velocidad**, es decir, la razón de cambio instantáneo de la velocidad respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Utilizando la ecuación 1, se obtiene

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las arterias humanas más pequeñas, puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm y $P = 4\,000$ dinas/cm², lo que da

$$v = \frac{4000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2)$$
$$\approx 1.85 \times 10^4(6.4 \times 10^{-5} - r^2)$$

En $r = 0.002$ cm la sangre fluye a una rapidez de

$$v(0.002) \approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6})$$
$$= 1.11 \text{ cm/s}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para tener una idea de lo que esto significa, se cambian las unidades de centímetros a micrómetros (1 cm = 10 000 μm). Entonces el radio de la arteria es de 80 μm. La velocidad en el eje central es de 11 850 μm/s, que disminuye hasta 11 110 μm/s a una distancia de $r = 20$ μm. El hecho de que $dv/dr = -74$ (μm/s)/μm significa que cuando $r = 20$ μm, la velocidad disminuye en una cantidad de casi 74 μm/s por cada micrómetro que se aleja del centro. ■

Economía

EJEMPLO 8 Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al producir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el número de artículos producidos se incrementa desde x_1 hasta x_2, entonces el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, y la razón de cambio promedio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

El límite de esta cantidad conforme $\Delta x \to 0$, es decir, a la razón de cambio instantáneo del costo los economistas le llaman **costo marginal**, respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Ya que x suele tomar solo valores enteros, quizá no tenga sentido hacer que Δx tienda a 0, pero siempre podrá reemplazar $C(x)$ con una función suave de aproximación uniforme, como en el ejemplo 6.]

Si se toma $\Delta x = 1$ y n grande (de tal manera que Δx sea pequeño en comparación con n), se tiene que

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Así, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de producir una unidad más [la $(n + 1)$-ésima unidad].

Con frecuencia resulta apropiado representar con un polinomio una función de costo total

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (alquiler, calefacción, mantenimiento) y los demás términos representan el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender en parte de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y a las faltas de eficiencia relacionadas con las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0.01x^2$$

Entonces, la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{artículo}$$

Esto da la cantidad a la que se incrementan los costos respecto al nivel de producción cuando $x = 500$ y predice el costo del artículo 501.

El costo real de producir el artículo 501 es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\qquad - [10\,000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Observe que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$. ■

Los economistas también estudian la demanda, el ingreso y la utilidad marginal, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Estas se consideran en el capítulo 4, después de desarrollar las técnicas para determinar los valores máximos y mínimos de funciones.

Otras ciencias

Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la razón a la cual una masa incrustada de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la proporción a la cual el agua fluye hacia dentro o hacia fuera de una represa. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población en una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo tiene interés por la razón de cambio de la presión atmosférica respecto a la altura (véase el ejercicio 3.8.19).

En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudian la curva del aprendizaje, que se presenta en forma de gráfica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprende una habilidad, como función del tiempo de capacitación t. Tiene un interés particular la razón a la cual mejora el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir, dP/dt.

En sociología, el cálculo diferencial se aplica al análisis de la divulgación de rumores (o de innovaciones, novedades o moda). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que conoce un rumor en el momento t, entonces la derivada dp/dt denota la razón de divulgación de ese rumor (véase el ejercicio 3.4.84).

Una sola idea, varias interpretaciones

La velocidad, la densidad, la corriente, la potencia y el gradiente de temperatura, en física; la velocidad de reacción y la compresibilidad, en química; la rapidez de crecimiento y el gradiente de velocidad de la sangre, en biología; el costo marginal y la

utilidad marginal, en economía; la rapidez de flujo del calor, en geología; la rapidez de mejora del rendimiento, en psicología; y la rapidez de divulgación de un rumor, en sociología; son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.

Esta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas descansa en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diferentes en cada ciencia. Cuando se desarrollen las propiedades del concepto matemático, de una vez y por todas, podrá dar la vuelta y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo expresó de manera sucinta: "Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los unen".

3.7 EJERCICIOS

1–4 Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 1 s?
(c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia la dirección positiva?
(e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 6 segundos.
(f) Dibuje un diagrama, como el de la figura 2, para ilustrar el movimiento de la partícula.
(g) Determine la aceleración en el tiempo t y después de 1 segundo.
(h) Trace la gráfica de las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 6$.
(i) ¿Cuándo la partícula aumenta su rapidez? ¿Cuándo disminuye?

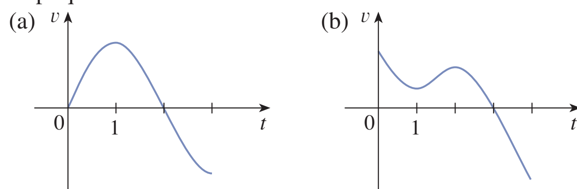
1. $f(t) = t^3 - 8t^2 + 24t$

2. $f(t) = \dfrac{9t}{t^2 + 9}$

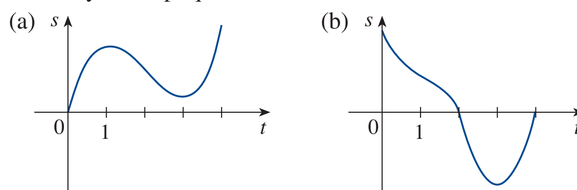
3. $f(t) = \text{sen}(\pi t/2)$

4. $f(t) = t^2e^{-t}$

5. Se muestran las gráficas de las funciones *velocidad* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo incrementa su rapidez cada partícula? ¿Cuándo la disminuyen? Explique.



6. Se muestran las gráficas de las funciones de *posición* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo incrementa su rapidez cada una de las partículas? ¿Cuándo la disminuyen? Explique.



7. La altura (en metros) de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba, desde un punto a 2 m por encima del nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5 m/s es $h = 2 + 24.5t - 4.9t^2$ después de t segundos.
(a) Encuentre la velocidad después de 2 s y después de 4 s.
(b) ¿Cuándo alcanza el proyectil su altura máxima?
(c) ¿Cuál es su altura máxima?
(d) ¿En qué momento cae al suelo?
(e) ¿Con qué velocidad cae al suelo?

8. Si un balón es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24.5 m/s, entonces su altura después de t segundos es $s = 24.5\,t - 4.9t^2$.
(a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el balón?
(b) ¿Cuál es la velocidad del balón cuando está a 29.4 m por encima del suelo en su camino ascendente? ¿Y en su camino en descenso?

9. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba desde la superficie de Marte, con una velocidad de 15 m/s, su altura después de t segundos es $h = 15t - 1.86t^2$.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la roca después de que transcurren 2 s?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la roca una vez que ha alcanzado una altura de 25 m durante el ascenso? ¿Y en su descenso?

10. Una partícula se mueve de acuerdo con la función posición

$$s = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t \qquad t \geqslant 0$$

(a) ¿En qué momento la partícula tiene una velocidad de 20 m/s?
(b) ¿En qué momento su aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de este valor de t?

11. (a) Una compañía fabrica chips para computadora a partir de placas cuadradas de silicio. Se desea conservar la longitud del lado de esas placas muy próxima a 15 mm y, asimismo, saber cómo cambia el área $A(x)$ de ellas cuando varía la longitud x del lado. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.
(b) Demuestre que la rapidez de cambio del área de uno de los cuadrados respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro. Trate de explicar geométricamente por qué esto es cierto, dibujando un cuadrado cuya longitud x del lado se incrementa en una cantidad Δx. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δx es pequeño?

12. (a) Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x por lado, calcule dV/dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.
(b) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es cierto y argumente por analogías con el ejercicio 11(b).

13. (a) Encuentre la razón de cambio promedio del área de un círculo respecto a su radio r cuando r cambia de
(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2.5 (iii) 2 a 2.1
(b) Encuentre la razón de cambio instantáneo cuando $r = 2$.
(c) Demuestre que la razón de cambio del área de un círculo respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto dibujando un círculo cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área ΔA si Δr es pequeño?

14. Se deja caer una piedra en un lago, lo que crea una onda circular que viaja hacia afuera con una rapidez de 60 cm/s. Encuentre la razón a la que aumenta el área dentro del círculo después de (a) 1 s, (b) 3 s, y (c) 5 s. ¿Qué puede concluir?

15. Se está inflando un globo esférico. Encuentre la razón de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) respecto al radio r, cuando r es igual a (a) 20 cm, (b) 40 cm, y (c) 60 cm. ¿A qué conclusiones llega?

16. (a) El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros (1 μm $= 10^{-6}$ m). Encuentre la razón de cambio promedio de V respecto a r, cuando cambia de
(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5.1 μm
(b) Determine la razón de cambio instantáneo de V respecto a r, cuando $r = 5$ μm.
(c) Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 13(c).

17. La masa de la parte de una varilla metálica que se encuentra entre su extremo izquierdo y un punto x metros a la derecha es $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (véase el ejemplo 2) cuando x es (a) 1 m, (b) 2 m y (c) 3 m. ¿En dónde es más alta la densidad?, ¿dónde es más baja?

18. Si un tanque contiene 5000 litros de agua, la cual se drena desde el fondo del tanque en 40 min, entonces la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el tanque después de t minutos como

$$V = 5000\left(1 - \tfrac{1}{40}t\right) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encuentre la rapidez de drenado de agua después de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min, y (d) 40 min. ¿En qué momento fluye el agua más rápido hacia afuera? ¿Con mayor lentitud? Resuma sus hallazgos.

19. La cantidad de carga, Q, en coulombs (C) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando (a) $t = 0.5$ s y (b) $t = 1$ s. [Véase el ejemplo 3. La unidad de la corriente es el ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué momento la corriente es la más baja?

20. La ley de Newton de la gravitación dice que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.
(a) Encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?
(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

21. La fuerza F que actúa sobre un cuerpo con masa m y velocidad v es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento: $F = (d/dt)(mv)$. Si m es constante, esto se convierte en $F = ma$, donde $a = dv/dt$ es la aceleración. Pero en la teoría de la relatividad, la masa de una partícula varía con v como sigue: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. Demuestre que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

22. Algunas de las mareas más altas en el mundo se producen en la Bahía de Fundy en la costa atlántica de Canadá. En el cabo de Hopewell, la profundidad del agua durante la marea baja es aproximadamente 2.0 m y durante la marea alta es cerca de 12.0 m. El período natural de oscilación es un poco más de 12 horas, y el 30 de junio de 2009, la marea alta se produjo a las 6:45. Esto ayuda a explicar el siguiente modelo para la profundidad del agua D (en metros) en función del tiempo t (en horas después de la medianoche) ese día:

$$D(t) = 7 + 5\cos[0.503(t - 6.75)]$$

¿Con qué rapidez fue subiendo la marea (o cayendo) en los momentos siguientes?
(a) 3:00 (b) 6:00
(c) 9:00 (d) mediodía

23. La ley de Boyle establece que, cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.
(a) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión.
(b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.
(c) Demuestre que la compresibilidad isotérmica (véase el ejemplo 5) se expresa mediante $\beta = 1/P$.

24. Si, en el ejemplo 4, una molécula del producto C está formada por una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B y la concentración inicial de A y B tienen un valor común [A] = [B] = a moles/L, entonces

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.

(a) Encuentre la rapidez de reacción en el tiempo t.

(b) Demuestre que si $x = [C]$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) ¿Qué pasa con la concentración conforme $t \to \infty$?

(d) ¿Qué sucede con la velocidad de reacción conforme $t \to \infty$?

(e) ¿Qué significan los resultados de los incisos (c) y (d) en términos prácticos?

25. En el ejemplo 6 se considera una población de bacterias que se duplica cada hora. Suponga que otra población de bacterias se triplica cada hora y comienza con 400 bacterias. Encuentre una expresión para el número n de bacterias después de t horas y utilícela para calcular la tasa de crecimiento de la población de bacterias después de 2.5 horas.

26. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio aumenta rápidamente al principio, pero finalmente se nivela. La población es modelada por la función

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

donde t es medido en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 células y está aumentando a un ritmo de 12 células/hora. Encuentre los valores de a y b. De acuerdo con este modelo, ¿qué sucede con la población de levadura a largo plazo?

27. La tabla siguiente da la población del mundo $P(t)$, en millones, donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde al año 1900.

t	Población (millones)	t	Población (millones)
0	1 650	60	3 040
10	1 750	70	3 710
20	1 860	80	4 450
30	2 070	90	5 280
40	2 300	100	6 080
50	2 560	110	6 870

(a) Calcule la tasa de crecimiento poblacional en 1920 y en 1980 mediante el promedio de las pendientes de dos rectas secantes.

(b) Utilice una calculadora graficadora o computadora para encontrar una función cúbica (un polinomio de tercer grado) que modele los datos.

(c) Utilice el modelo del inciso (b) para encontrar un modelo para la tasa de crecimiento de la población.

(d) Utilice el inciso (c) para estimar las tasas de crecimiento en 1920 y 1980. Compare con sus estimaciones del inciso (a).

(e) En la sección 1.1 se modeló $P(t)$ con la función exponencial

$$f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

Use este modelo para encontrar un modelo para la tasa de crecimiento de la población.

(f) Utilice el modelo del inciso (e) para calcular la tasa de crecimiento en 1920 y 1980. Compare con sus cálculos de los incisos (a) y (d).

(g) Calcule la tasa de crecimiento en 1985.

28. La tabla muestra cómo ha variado la edad promedio del primer matrimonio de las mujeres japonesas desde 1950.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1985	25.5
1955	23.8	1990	25.9
1960	24.4	1995	26.3
1965	24.5	2000	27.0
1970	24.2	2005	28.0
1975	24.7	2010	28.8
1980	25.2		

(a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con una función polinomial de cuarto grado.

(b) Utilice el inciso (a) para encontrar un modelo para $A'(t)$.

(c) Calcule la razón de cambio de la edad de matrimonio en 1990.

(d) Trace la gráfica de los puntos de datos y los modelos para A y A'.

29. Refiérase a la ley de flujo laminar del ejemplo 7. Considere también un vaso sanguíneo con radio 0.01 cm, longitud 3 cm, diferencia de presión de 3000 dinas/cm² y una viscosidad de $\eta = 0.027$.

(a) Encuentre la velocidad de la sangre a lo largo de la línea central $r = 0$, en un radio $r = 0.005$ cm y en la pared $r = R = 0.01$ cm.

(b) Encuentre el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$ y $r = 0.01$.

(c) ¿Dónde es mayor la velocidad? ¿Dónde está el mayor cambio de velocidad?

30. La frecuencia de vibración de una cuerda de violín está dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el capítulo 11 en D. E. Hall, *Musical Acoustic*, 3a. ed. (Pacific Grove, California, 2002).]

(a) Encuentre la rapidez de cambio de la frecuencia respecto a

(i) la longitud (cuando T y ρ son constantes),

(ii) la tensión (cuando L y ρ son constantes), y

(iii) la densidad lineal (cuando L y T son constantes).

(b) El tono de una nota (qué tan altas o bajas son las notas) está determinado por la frecuencia f. (Cuanto mayor sea la frecuencia, mayor será el tono.) Utilice los signos

de las derivadas en el inciso (a) para determinar lo que sucede con el tono de una nota

(i) cuando se reduce la longitud efectiva colocando un dedo sobre la cuerda, haciendo que vibre solo una porción menor de la cuerda,

(ii) cuando se incrementa la tensión girando la llave de ajuste,

(iii) cuando aumenta la densidad lineal por cambiar a otra cuerda.

31. El costo en dólares de producir x pares de una nueva línea de jeans es

$$C(x) = 2000 + 3x + 0.01x^2 + 0.0002x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal.
(b) Obtenga $C'(100)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
(c) Compare $C'(100)$ con el costo de fabricar el par 101 de jeans.

32. La función de costo de producción de cierto artículo es

$$C(q) = 84 + 0.16q - 0.0006q^2 + 0.000003q^3$$

(a) Obtenga e interprete $C'(100)$.
(b) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

33. Si $p(x)$ es el valor total de la producción cuando hay x trabajadores en una planta, entonces la *productividad promedio* de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Determine $A'(x)$. ¿Por qué quiere la empresa contratar a más trabajadores si $A'(x) > 0$?
(b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

34. Si R denota la reacción del cuerpo a cierto estímulo de esfuerzo x, la *sensibilidad* S se define como la rapidez de cambio de la reacción respecto a x. Un ejemplo concreto es que cuando el brillo x de una fuente de luz aumenta, el ojo reacciona disminuyendo la zona R de la pupila. La fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

ha sido utilizada para modelar la dependencia de R sobre x cuando R se mide en milímetros cuadrados y x se mide en unidades apropiadas de brillo.
(a) Encuentre la sensibilidad.
(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica tanto de R como de S como funciones de x. Haga comentarios relacionados con los valores de R y S en bajos niveles de brillo. ¿Esto es lo que esperaría?

35. Los pacientes se someten a tratamiento de diálisis para eliminar urea de la sangre cuando sus riñones no están funcionando correctamente. La sangre se desvía del paciente a través de una máquina que filtra la urea. Bajo ciertas condiciones, la duración de la diálisis requerida, dado que la concentración inicial de urea es $c > 1$, está dado por la ecuación

$$t = \ln\left(\frac{3c + \sqrt{9c^2 - 8c}}{2}\right)$$

Calcule la derivada de t con respecto a c e interprétela.

36. Las especies invasoras con frecuencia muestran una onda de avance para colonizar nuevas áreas. Los modelos matemáticos basados en la reproducción y dispersión al azar han demostrado que la velocidad de dichas ondas en movimiento está dada por la función $f(r) = 2\sqrt{Dr}$, donde r es la tasa reproductiva de los individuos y D es un parámetro de cuantificación de la dispersión. Calcule la derivada de la velocidad de la onda con respecto a la tasa de reproducción r y explique su significado.

37. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en kelvin), la presión P (en atmósfera) y el volumen V (en litros) es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante del gas. Suponga que, en cierto instante, $P = 8.0$ atm y está aumentando a razón de 0.10 atm/min y $V = 10$ L y está disminuyendo a razón de 0.15 L/min. Encuentre la razón de cambio de T respecto al tiempo en ese instante si $n = 10$ mol.

38. En una granja piscícola se introduce una población de peces en un estanque y se cosechan con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población se expresa con la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la tasa de nacimientos de peces, P_c es la población máxima que el estanque puede contener (llamada *capacidad de carga*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.
(a) ¿Cuál valor de dP/dt correspondiente a una población estable?
(b) Si el estanque puede sostener 10 000 peces, la tasa de nacimiento es de 5% y la cantidad de cosecha es de 4%, encuentre el nivel estable de la población.
(c) Si β se eleva hasta 5%, ¿qué sucede?

39. En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los *modelos presa-depredador* para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado mediante las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) ¿Cuáles valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
(b) ¿Cómo se representaría matemáticamente el enunciado "Los caribúes van hacia la extinción"?
(c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ y $d = 0.0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones (C, W) que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en equilibrio o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

3.8 Crecimiento y decaimiento exponenciales

En muchos fenómenos naturales, las cantidades crecen o decrecen en una cantidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, si $y = f(t)$ es el número de individuos en una población de animales o bacterias en el tiempo t, entonces parece razonable esperar que la razón de crecimiento $f'(t)$ sea proporcional a la población $f(t)$; es decir, $f'(t) = kf(t)$ para alguna constante k. A propósito, bajo condiciones ideales (ambientes sin límites, nutrición adecuada, inmunidad a las enfermedades) el modelo matemático dado por la ecuación $f'(t) = kf(t)$ predice, sin duda, con precisión lo que realmente sucede. Otro ejemplo sucede en física nuclear donde la masa de una sustancia radiactiva decae en una cantidad proporcional a su masa. En química la velocidad de una reacción de primer orden unimolecular es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta de ahorros con interés compuesto se incrementa de manera continua en una cantidad proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la razón de cambio de y respecto a t es proporcional a su tamaño $y(t)$ en cualquier tiempo, entonces

1 $$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es una constante. Algunas veces la ecuación 1 se llama la **ley de crecimiento natural** (si $k > 0$) o **ley de decaimiento natural** (si $k < 0$). También, se le denomina **ecuación diferencial** porque implica una función desconocida y y su derivada dy/dt.

No es difícil intuir una solución de la ecuación 1. Esta ecuación pide determinar una función cuya derivada es un múltiplo constante de sí misma. En este capítulo se encontrarán tales funciones. Cualquier función exponencial en la forma $y(t) = Ce^{kt}$, donde C es una constante, satisface

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Se verá en la sección 9.4 que *cualquier* función que satisface $dy/dt = ky$ debe ser en la forma $y = Ce^{kt}$. Para ver el significado de la constante C, observe que

$$y(0) = Ce^{k\cdot 0} = C$$

Por tanto, C es el valor inicial de la función.

2 Teorema Las únicas soluciones de la ecuación diferencial $dy/dt = ky$ son las funciones exponenciales

$$y(t) = y(0)e^{kt}$$

Crecimiento de población

¿Cuál es el significado de la constante de proporcionalidad k? En el panorama del crecimiento de la población, cuando $P(t)$ es el tamaño de una población en el tiempo t, se escribe

3 $$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

La cantidad

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

es la tasa de crecimiento dividida entre el tamaño de la población, a la que se le denomina **tasa de crecimiento relativo**.

De acuerdo con (3), en lugar de decir "la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población" se puede decir "la razón o tasa de crecimiento relativo es constante". Por tanto, (2) indica que una población con crecimiento relativo constante debe crecer en forma exponencial. Observe que la tasa de crecimiento relativo k aparece como el coeficiente de t en la función exponencial Ce^{kt}. Por ejemplo, si

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

donde t se mide en años, entonces la rapidez de crecimiento relativo es $k = 0.02$ y el crecimiento de población a una rapidez relativa es de 2% por cada año. Si la población en el tiempo 0 es P_0, entonces la expresión para la población es

$$P(t) = P_0 e^{0.02t}$$

EJEMPLO 1 Utilice el hecho de que la población mundial fue 2560 millones en 1950 y 3040 millones en 1960, para modelar la población del mundo en la segunda mitad del siglo XX. (Suponga que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población). ¿Cuál es la rapidez de crecimiento relativo? Utilice el modelo para estimar la población mundial en 1993 y, del mismo modo, predecir la población en el año 2020.

SOLUCIÓN Mida el tiempo t en años y haga $t = 0$ en el año 1950. Mida la población $P(t)$ en millones de personas. Entonces, $P(0) = 2560$ y $P(10) = 3040$. Ya que se supone que $dP/dt = kP$, el teorema 2 da

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2560e^{kt}$$

$$P(10) = 2560e^{10k} = 3040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560} \approx 0.017185$$

La rapidez de crecimiento relativo es casi 1.7% por cada año, y el modelo es

$$P(t) = 2560e^{0.017185t}$$

Se estima que en 1993 la población mundial fue

$$P(43) = 2560e^{0.017185(43)} \approx 5360 \text{ millones}$$

El modelo predice que en 2020 la población será

$$P(70) = 2560e^{0.017185(70)} \approx 8524 \text{ millones}$$

La gráfica en la figura 1 muestra que el modelo ya es bastante exacto para finales del siglo XX (los puntos representan la población actual); de esta manera, la estimación para 1993 es completamente confiable, pero la predicción para el 2020 es aventurada.

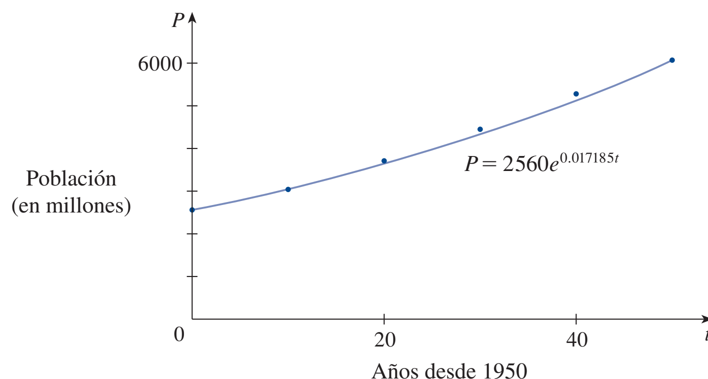


FIGURA 1
Un modelo para el crecimiento de la población mundial en la segunda mitad del siglo XX

Decaimiento radiactivo

Una sustancia radiactiva decae emitiendo radiación de manera espontánea. Si $m(t)$ es la masa que queda a partir de una masa inicial m_0 de la sustancia después del tiempo t, entonces la rapidez de decaimiento relativo

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

es constante según se ha verificado experimentalmente. (Ya que dm/dt es negativa, la rapidez de desintegración relativa es positiva.) Se sigue que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde k es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas decaen en una cantidad proporcional a la masa restante. Esto significa que se puede utilizar (2) para demostrar que la masa decae de manera exponencial:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos del tiempo de **vida media,** el tiempo que se requiere para que la mitad de cualquier cantidad conocida se desintegre.

EJEMPLO 2 El tiempo de vida media del radio-226 es 1590 años.
(a) Una muestra de radio-226 tiene una masa de 100 mg. Determine una fórmula para la masa de la muestra que permanece después de t años.
(b) Determine la masa exacta en miligramos, después de 1000 años.
(c) ¿Cuándo se reducirá la masa a 30 mg?

SOLUCIÓN
(a) Sea $m(t)$ la masa de radio-226 (en miligramos) que permanece después de t años. Entonces $dm/dt = km$ y $m(0) = 100$, por lo que (2) da

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

Para determinar el valor de k, se utiliza el hecho de que $m(1590) = \frac{1}{2}(100)$. Así,

$$100e^{1590k} = 50 \qquad \text{por lo que} \qquad e^{1590k} = \tfrac{1}{2}$$

y

$$1590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

Por tanto

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

Se puede utilizar el hecho de que $e^{\ln 2} = 2$ para escribir la expresión para $m(t)$ en la forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

(b) La masa después de 1000 años es

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) Se quiere encontrar el valor de t tal que $m(t) = 30$, es decir,

$$100e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \qquad \text{o} \qquad e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

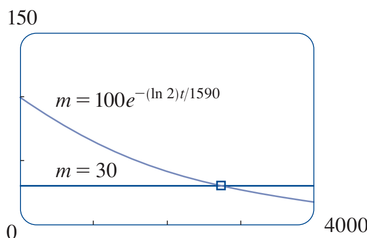


FIGURA 2

Resolviendo esta ecuación para t tomando el logaritmo natural de ambos lados:

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

Por tanto,
$$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762 \text{ años}$$ ■

Para una verificación del ejemplo 2, utilice un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de $m(t)$ de la figura 2 junto con la recta horizontal $m = 30$. Estas curvas se intersecan cuando $t \approx 2800$, y esto concuerda con la respuesta del inciso (c).

Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su ambiente, siempre que esta diferencia no sea muy grande. (Esta ley también se aplica al calentamiento.) Si se hace $T(t)$ la temperatura del objeto en el tiempo t y T_s la temperatura del ambiente, entonces se puede formular la ley de enfriamiento de Newton como una ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

donde k es una constante. Esta ecuación no es completamente la misma que la ecuación 1, por lo que se hace el cambio de variable $y(t) = T(t) - T_s$. Ya que T_s es constante, se tiene que $y'(t) = T'(t)$, por lo que la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Entonces se puede utilizar (2) para determinar una expresión para y en la que se puede encontrar T.

EJEMPLO 3 Una botella con una bebida gasificada a temperatura ambiente (22 °C) se coloca dentro de un refrigerador donde la temperatura es 7 °C. Después de media hora la bebida se ha enfriado hasta 16 °C.
(a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida después de otra media hora?
(b) ¿Cuánto tardará la bebida en enfriarse a 10 °C?

SOLUCIÓN
(a) Sea $T(t)$ la temperatura de la bebida después de t minutos. La temperatura ambiente es $T_s = 7$ °C, por lo que, la ley de enfriamiento de Newton se expresa como

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 7)$$

Si se hace $y = T - 7$, entonces $y(0) = T(0) - 7 = 22 - 7 = 15$, por lo que y es una solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 15$$

y por (2) se tiene que

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 15e^{kt}$$

Se tiene que $T(30) = 16$, por lo que $y(30) = 16 - 7 = 9$ y

$$15e^{30k} = 9 \qquad e^{30k} = \tfrac{3}{5}$$

Tomando logaritmos, se tiene que

$$k = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{30} \approx -0.01703$$

Por lo que

$$y(t) = 15e^{-0.01703t}$$

$$T(t) = 7 + 15e^{-0.01703t}$$

$$T(60) = 7 + 15e^{-0.01703(60)} \approx 12.4$$

Por tanto, después de la otra mitad de la hora, la bebida se ha enfriado a casi 12 °C.

(b) Se tiene T(t) = 10 cuando

$$7 + 15e^{-0.01703t} = 10$$

$$e^{-0.01703t} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0.01703} \approx 94.5$$

La bebida se enfría a 10 °C después de casi 1 hora 35 minutos. ■

Observe que en el ejemplo 3, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (7 + 15e^{-0.01703t}) = 7 + 15 \cdot 0 = 7$$

lo cual se esperaba. La gráfica de la función temperatura se muestra en la figura 3.

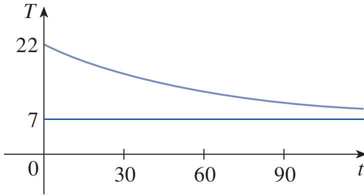


FIGURA 3

Interés compuesto continuamente

EJEMPLO 4 Si se invierten \$1000 a 6% de interés compuesto anualmente, entonces, después de 1 año la inversión es valorada en \$1000(1.06) = \$1060, después de 2 años su valor es \$[1000(1.06)]1.06 = \$1123.60 y después de t años su valor es \$1000$(1.06)^t$. En general, si se invierte una cantidad A_0 a una tasa de interés r ($r = 0.06$, en este ejemplo), entonces, después de t años su valor es de $A_0(1 + r)^t$. No obstante, por lo general el interés es compuesto con más frecuencia, es decir, n veces al año. Por tanto, en cada período de capitalización, la tasa de interés es r/n y hay nt períodos en t años, por lo que el valor de la inversión es

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por ejemplo, una inversión de 1000 dólares después de 3 años a 6% de interés estarán valorados en

$$\$1000(1.06)^3 = \$1191.02 \quad \text{compuesto anualmente}$$

$$\$1000(1.03)^6 = \$1194.05 \quad \text{compuesto semestralmente}$$

$$\$1000(1.015)^{12} = \$1195.62 \quad \text{compuesto trimestralmente}$$

$$\$1000(1.005)^{36} = \$1196.68 \quad \text{compuesto mensualmente}$$

$$\$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = \$1197.20 \quad \text{compuesto diariamente}$$

Se puede ver que el pago del interés se incrementa cuando el número de períodos compuestos (n) se incrementa. Si se hace que $n \to \infty$, entonces estará componiendo el interés **continuamente**, y el valor de la inversión será

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad \text{(donde } m = n/r\text{)} \end{aligned}$$

Pero el límite en esta expresión es igual al número e (véase la ecuación 3.6.6). Por lo que, componiendo en forma continua con una tasa de interés r, la cantidad después de t años es

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

Si se deriva esta función, se obtiene

$$\frac{dA}{dt} = rA_0 e^{rt} = rA(t)$$

la cual dice que, componiendo continuamente el interés, la tasa de incremento de una inversión es proporcional a su tamaño.

Regresando al ejemplo de 1000 dólares invertidos por 3 años a 6% de interés anual, el valor de la inversión será

$$A(3) = \$1000e^{(0.06)3} = \$1197.22$$

Observe cómo se acerca esto a la cantidad calculada por componer diariamente \$1197.20, pero es más fácil calcular la cantidad si se aplica la composición continua. ■

3.8 EJERCICIOS

1. Una población de protozoarios se desarrolla con una tasa de crecimiento relativo constante de 0.6028 por miembro por cada día. En el día cero la población consiste de dos miembros. Encuentre el tamaño de la población después de siete días.

2. Un habitante común del intestino humano es la bacteria *Escherichia coli,* llamada así por el pediatra alemán Theodor Escherich, quien la identificó en 1885. Una célula de esta bacteria en un caldo nutriente se divide en dos células cada 20 minutos. La población inicial de un cultivo es de 50 células.
(a) Determine la tasa de crecimiento relativo.
(b) Encuentre una expresión para el número de células después de t horas.
(c) Calcule el número de células después de 6 horas.
(d) Determine la tasa de crecimiento después de 6 horas.
(e) ¿Cuándo alcanzará la población de un millón de células?

3. Un cultivo de bacterias al inicio contiene 100 células y crece en una cantidad proporcional a su tamaño. Después de 1 hora la población se ha incrementado a 420.
(a) Determine una expresión para el número de bacterias después de t horas.
(b) Calcule el número de bacterias después de 3 horas.
(c) Encuentre la tasa de crecimiento después de 3 horas.
(d) ¿Cuándo alcanza la población el valor 10 000?

4. Un cultivo de bacterias crece con una tasa de crecimiento relativo constante. Después de 2 horas existen 400 bacterias y después de 6 horas la cuenta es de 25 600.

(a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo? Exprese su respuesta en porcentaje.
(b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?
(c) Encuentre una expresión para el número de bacterias después de t horas.
(d) Encuentre el número de células después de 4.5 horas.
(e) Encuentre la tasa de crecimiento después de 4.5 horas.
(f) ¿Cuándo alcanzará la población 50 000?

5. La tabla da estimaciones de la población mundial, en millones, de 1750 al 2000.

Año	Población	Año	Población
1750	790	1900	1650
1800	980	1950	2560
1850	1260	2000	6080

(a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de población para 1750 y 1800 para predecir la población mundial en 1900 y en 1950. Compare con las cifras actuales.
(b) Utilice el modelo exponencial y las cifras de población para 1850 y 1900 para predecir la población mundial en 1950. Compare con la población real en ese año.
(c) Emplee el modelo exponencial y las cifras de población en 1900 y 1950 para predecir la población mundial en el 2000. Compare con la población real e intente explicar la discrepancia.

6. La tabla proporciona la población de Indonesia, en millones, para la segunda mitad del siglo XX.

Año	Población
1950	83
1960	100
1970	122
1980	150
1990	182
2000	214

(a) Suponiendo que la población crece a una razón proporcional a su tamaño, utilice las cifras de censo para 1950 y 1960 para predecir la población en 1980. Compare con las cifras reales.
(b) Utilice las cifras del censo para 1960 y 1980 para predecir la población en el 2000. Compare con la población real.
(c) Utilice las cifras del censo para 1980 y 2000 para predecir la población en el 2010. Compare con la población real de 243 millones.
(d) Utilice el modelo del inciso (c) para predecir la población en 2020. ¿Cree qué la predicción será demasiado alta o muy baja? ¿Por qué?

7. Los experimentos muestran que si la reacción química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

se realiza a 45 °C, la velocidad de reacción del pentóxido de dinitrógeno es proporcional a su concentración como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(Véase el ejemplo 3.7.4.)

(a) Determine una expresión para la concentración $[N_2O_5]$ después de t segundos si la concentración inicial es C.
(b) ¿Cuánto tiempo le toma a la reacción reducir la concentración de N_2O_5 a 90% de su valor original?

8. El estroncio-90 tiene un tiempo de vida media de 28 días.

(a) Una muestra tiene originalmente una masa de 50 mg. Determine una fórmula para la masa que queda después de t días.
(b) Calcule la masa restante después de 40 días.
(c) ¿Cuánto tiempo le toma a la muestra reducir su masa a 2 mg?
(d) Trace la gráfica de la función masa.

9. El tiempo de vida media del cesio-137 es de 30 años. Suponga que se tiene una muestra de 100 mg.

(a) Establezca la masa que permanece después de t años.
(b) ¿Cuánto de la muestra permanece después de 100 años?
(c) ¿Después de cuánto tiempo permanece únicamente 1 mg?

10. Una muestra de tritio-3 se desintegró a 94.5% de su cantidad original después de 1 año.

(a) ¿Cuál es el tiempo de vida media del tritio-3?
(b) ¿Cuánto tardaría en decaer a 20% de su cantidad original?

11. Los científicos pueden establecer la edad de objetos antiguos mediante el método de *datación por radiocarbono*. El bombardeo de la atmósfera superior por los rayos cósmicos convierte al nitrógeno en un isótopo radioactivo de carbono, ^{14}C, con un tiempo de vida media aproximado de 5730 años. La vegetación absorbe dióxido de carbono a través de la atmósfera, y la vida animal asimila ^{14}C a través de la cadena alimenticia. Cuando una planta o un animal mueren, se detiene la sustitución de su carbono, y la cantidad de ^{14}C inicia su disminución a través de la desintegración radiactiva. Por tanto el nivel de radiactividad también decae de manera exponencial.

En un fragmento de pergamino se descubrió que había aproximadamente 74% de tanta radioactividad ^{14}C como en el material con el que se hace el pergamino que hay sobre la Tierra hoy en día. Estime la edad del pergamino.

12. Los fósiles de dinosaurios son demasiado viejos para ser datados en forma confiable usando carbono-14. (Véase el ejercicio 11). Suponga que se tuvo un fósil de dinosaurio de 68 millones de años de edad. ¿Qué fracción del ^{14}C que tuvo el dinosaurio permanece hoy? Suponga que la cantidad mínima detectable es de 0.1%. ¿Cuál es la edad máxima de un fósil que podríamos fechar usando el ^{14}C?

13. Los fósiles de dinosaurios se datan con frecuencia mediante el uso de un elemento que no sea carbono, como el potasio-40, que tiene una vida media más larga (en este caso, aproximadamente 1250 millones de años). Suponga que la cantidad mínima

detectable es de 0.1% y un dinosaurio se data con ^{40}K en 68 millones de años. ¿Es posible esta datación? En otras palabras, ¿cuál es la edad máxima de un fósil que se podría datar con ^{40}K?

14. Una curva pasa a través del punto (0, 5) y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en cualquier punto P es dos veces la coordenada y de P. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

15. De un horno se toma un pavo rostizado cuando su temperatura ha alcanzado 85 °C y se coloca sobre una mesa en un espacio donde la temperatura es 22 °C.
(a) Si la temperatura del pavo es 65 °C después de media hora, ¿cuál es la temperatura 45 minutos después?
(b) ¿Cuándo se enfriará el pavo a 40 °C?

16. En una investigación de asesinato, la temperatura del cadáver fue de 32.5 °C a las 13:30 y de 30.3 °C una hora más tarde. La temperatura corporal normal es de 37.0 °C y la temperatura del ambiente era de 20.0 °C. ¿Cuándo tuvo lugar el asesinato?

17. Cuando se saca una bebida fría del refrigerador, su temperatura es 5 °C. Después de 25 minutos dentro de una habitación a 20 °C su temperatura se incrementa a 10 °C.
(a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida 50 minutos después?
(b) ¿Cuándo estará su temperatura a 15 °C?

18. Una taza de café recién preparado tiene 95 °C de temperatura en una habitación a 20 °C. Cuando la temperatura es de 70 °C, se enfría con una rapidez de 1 °C por cada minuto. ¿Cuándo sucede esto?

19. La rapidez de cambio de la presión atmosférica P respecto a la altitud h es proporcional a P, siempre que la temperatura sea constante. A 15 °C la presión es 101.3 kPa al nivel del mar y 87.14 kPa en $h = 1000$ m.
(a) ¿Cuál es la presión a una altitud de 3000 m?
(b) ¿Cuál es la presión en la cima del monte McKinley, a una altitud de 6187 m?

20. (a) Si se prestan 1000 a 8% de interés, calcule la cantidad que se debe al final de 3 años si el interés es compuesto de forma: (i) anual, (ii) trimestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) diario, (vi) por hora y (vii) de manera continua.
(b) Suponga que se prestan 1000 dólares y el interés es compuesto de manera continua. Si $A(t)$ es la cantidad que se debe después de t años, donde $0 \leqslant t \leqslant 3$, trace la gráfica de $A(t)$ en una pantalla común, para cada una de las tasas de interés: 6%, 8% y 10%.

21. (a) Si invierten 3000 dólares a 5% de interés, calcule el valor de la inversión al final de 5 años si el interés es compuesto de forma (i) anual, (ii) semestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) por día y (vi) de manera continua.
(b) Si $A(t)$ es la cantidad de la inversión al tiempo t para el caso de composición continua, establezca una ecuación diferencial y una condición inicial que satisfaga $A(t)$.

22. (a) ¿Cuánto transcurrirá para que una inversión se duplique en valor si la tasa de interés anual es de 6% compuesto de manera continua?
(b) ¿Cuál es la tasa de interés anual equivalente?

PROYECTO DE APLICACIÓN — CONTROLAR LA PÉRDIDA DE GLÓBULOS ROJOS DURANTE UNA CIRUGÍA


© Condor 36 / Shutterstock.com

El volumen típico de sangre en el cuerpo humano es aproximadamente de 5 L. Un porcentaje de ese volumen (llamado el *hematocrito*) se compone de glóbulos rojos (GR); el hematocrito es aproximadamente el 45% en varones. Suponga que una cirugía dura cuatro horas y un paciente masculino pierde 2.5 L de sangre. Durante la cirugía, el volumen de sangre del paciente se mantiene en 5 L mediante inyección de solución salina, que rápidamente se mezcla con la sangre pero la diluye por lo que el hematocrito disminuye conforme pasa el tiempo.

1. Suponiendo que la tasa de pérdida de glóbulos rojos es proporcional al volumen de los glóbulos rojos, determine el volumen de GR del paciente al final de la operación.

2. Se ha desarrollado un procedimiento llamado *hemodilución normovolémica aguda* (ANH, por su sigla en inglés) que minimiza la pérdida de GR durante la cirugía. En este procedimiento se extrae sangre del paciente antes de la operación y se reemplaza con solución salina. Esta diluye la sangre del paciente, dando por resultado que se pierdan menos GR durante la hemorragia. Entonces después de la cirugía la sangre extraída se devuelve al paciente. Pero como solo se puede extraer una cantidad de sangre dada, debido a que nunca se puede permitir que la concentración de GR caiga por debajo de 25% durante la cirugía. ¿Cuál es la cantidad máxima de sangre que se puede extraer en el procedimiento de la ANH para la cirugía que se describe en este proyecto?

3. ¿Cuál es la pérdida de GR sin el procedimiento de la ANH? ¿Cuál es la pérdida si el procedimiento se realiza con el volumen calculado en el inciso 2?

3.9 Razones relacionadas

Si está inflando un globo, tanto su volumen como su radio se incrementan, y sus razones de incremento están relacionadas entre sí. Pero es más fácil medir de modo directo la rapidez de aumento de volumen que la rapidez de crecimiento del radio.

En un problema de razones de cambio relacionadas, la idea es calcular la razón de cambio de una cantidad en términos de la razón de cambio de otra cantidad (la que podría medirse con más facilidad). El procedimiento es determinar una ecuación que relacione las dos cantidades y luego se aplica la regla de la cadena para derivar ambos miembros con respecto al tiempo.

EJEMPLO 1 Se infla un globo esférico y su volumen crece a razón de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

SP De acuerdo con los principios para la resolución de problemas estudiados en la página 71, el primer paso es entender el problema. Esto incluye leer con cuidado el problema, identificar los datos y las incógnitas y proponer una notación adecuada.

SOLUCIÓN Se empieza por identificar dos cuestiones:

la *información dada* (datos):

la razón de incremento del volumen del globo es $100 \text{ cm}^3/\text{s}$

y lo que *no se conoce* (incógnitas):

la rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Para expresar estas cantidades en forma matemática, introduzca una *notación* sugerente:

sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que se debe tener presente es que las razones de cambio son derivadas. En este problema, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo t. La rapidez de incremento del volumen respecto al tiempo es la derivada dV/dt, y la rapidez del incremento del radio es dr/dt. Por tanto, replantee lo dado y lo que desconoce de la manera siguiente:

Datos: $$\frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

SP La segunda etapa de la resolución de problemas es concebir un plan para relacionar los datos con las incógnitas.

Incógnitas: $$\frac{dr}{dt} \quad \text{cuando } r = 25 \text{ cm}$$

Para relacionar dV/dt con dr/dt, primero se relaciona V con r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Para utilizar la información dada, derive respecto a t ambos miembros de la ecuación. Para derivar el lado derecho necesita utilizar la regla de la cadena:

Observe que, aunque dV/dt es constante, dr/dt no es constante

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora resuelva para la cantidad desconocida:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Si se sustituye $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, se obtiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo se incrementa a razón de $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s. ■

EJEMPLO 2 Una escalera de 5 m de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de 1 m/s, ¿qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 3 m del muro?

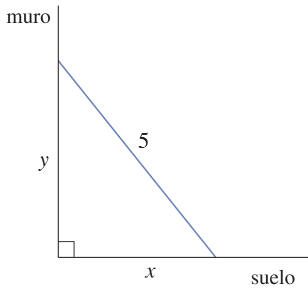


FIGURA 1

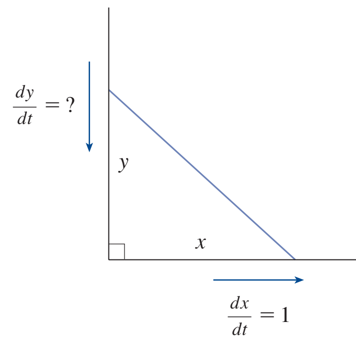


FIGURA 2

SOLUCIÓN Primero dibuje un esquema y etiquete los datos como se muestra en la figura 1. Sea x metros la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y metros la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones de t (tiempo medido en segundos).

Se sabe que $dx/dt = 1$ m/s, y se pide determinar dy/dt cuando $x = 3$ m (véase la figura 2). En este problema, la relación entre x y y está dada por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros usando la regla de la cadena se tiene

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

y al resolver esta ecuación para determinar la rapidez deseada, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 3$, el teorema de Pitágoras da $y = 4$ y al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(1) = -\frac{3}{4} \text{ m/s}$$

El hecho de que dy/dt sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo está *decreciendo* a razón de $\frac{3}{4}$ m/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo de la pared a razón de $\frac{3}{4}$ m/s. ■

EJEMPLO 3 Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m, y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a razón de 2 m³/min, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

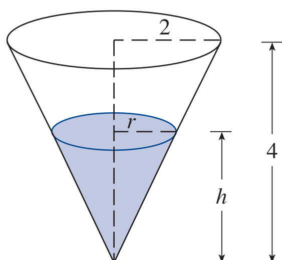


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero trace un diagrama del cono y denote la información como en la figura 3. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura al tiempo t, respectivamente, donde t se mide en minutos.

Dan $dV/dt = 2$ m³/min, y se nos pide determinar dh/dt cuando h es 3 m. Las cantidades V y h se relacionan con la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

pero es muy útil expresar V en función solo de h. Para eliminar r, utilice los triángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora se puede derivar cada miembro respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

Por lo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3$ m y $dV/dt = 2$ m³/min se tiene que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2} \cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

SP Reflexione: ¿qué ha aprendido de los ejemplos 1 a 3 que lo ayude a resolver problemas futuros?

El nivel del agua está subiendo a razón de $8/(9\pi)) \approx 0.28$ m/min. ■

ADVERTENCIA un error común es sustituir la información numérica conocida (por cantidades que varían con el tiempo) muy pronto. La sustitución se efectúa solo *después* de que se deriva. (El paso 7 sigue al paso 6.) Es decir, en el ejemplo 3 se tratan valores generales de h hasta que al último se sustituye $h = 3$ en la última etapa. (Si hubiera sustituido $h = 3$ desde antes, se habría obtenido $dV/dt = 0$, lo cual es evidentemente erróneo.)

Estrategia de resolución de problemas Es útil recordar algunos de los principios para la resolución de problemas que se encuentran en la página 71 y adaptarlos a las razones de cambio relacionadas, luego de la experiencia en los ejemplos 1-3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, utilice las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución (como en el ejemplo 3).
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

Los ejemplos siguientes son ilustraciones adicionales de la estrategia.

EJEMPLO 4 El automóvil A se dirige hacia el oeste a 90 km/h y el automóvil B viaja hacia el norte a 100 km/h. Ambos se dirigen hacia la intersección de las dos carreteras. ¿Con qué rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a 60 m y el automóvil B está a 80 m de la intersección?

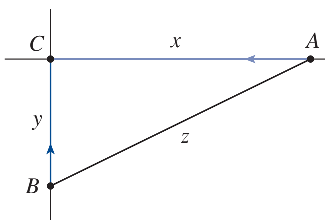


FIGURA 4

SOLUCIÓN Dibuje la figura 4, donde C es la intersección de las carreteras. En un tiempo dado t, sea x la distancia entre el automóvil A a C, sea y la distancia del automóvil B a C y sea z la distancia entre los vehículos, donde x, y y z se miden en kilómetros.

Dan que $dx/dt = -90$ km/h y $dy/dt = -100$ km/h. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z la da el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados respecto a t, se tiene

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.06$ km y $y = 0.08$ km, el teorema de Pitágoras da $z = 0.1$ km, por lo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.1}[0.06(-90) + 0.08(-100)]$$
$$= -134 \text{ km/h}$$

Los autos se aproximan entre sí a razón de 134 km/h. ■

EJEMPLO 5 Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 1.5 m/s. Un faro está situado al nivel de la tierra a 6 m de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con qué rapidez el faro gira cuando el hombre está a 8 m del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

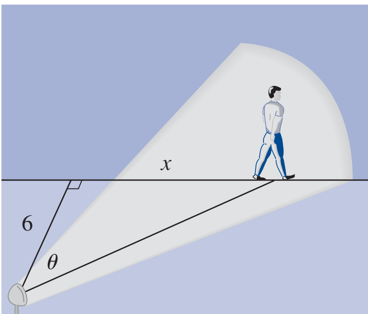


FIGURA 5

SOLUCIÓN Trace la figura 5 y haga que x sea la distancia desde el hombre hasta el punto sobre la trayectoria que esté más cercana al faro. Sea θ el ángulo entre el rayo desde el faro y la perpendicular a la trayectoria.

Se sabe que $dx/dt = 1.5$ m/s, y se pide calcular $d\theta/dt$ cuando $x = 8$. La ecuación que relaciona x con θ se puede escribir a partir de la figura 5:

$$\frac{x}{6} = \tan\theta \qquad x = 6\tan\theta$$

Al derivar respecto a t ambos miembros, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 6\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

por lo que
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{6}\cos^2\theta\,(1.5) = \frac{1}{4}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 8$, la longitud del rayo es 10, por lo que $\cos\theta = \frac{3}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{100} = 0.09$$

El faro gira con una rapidez de 0.09 rad/s. ■

3.9 EJERCICIOS

1. Si V es el volumen de un cubo con arista x, y el cubo se expande conforme pasa el tiempo, exprese dV/dt en términos de dx/dt.

2. (a) Si A es el área de un círculo cuyo radio es r, y el círculo se expande conforme pasa el tiempo, exprese dA/dt en términos de dr/dt.
(b) Suponga que se derrama aceite de un depósito agrietado y que se extiende siguiendo un patrón circular. Si el radio del derrame de aceite se incrementa con una rapidez constante de 1 m/s, ¿qué tan rápido se incrementa el área del derrame cuando el radio es de 30 m?

3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de 6 cm/s. ¿Con qué rapidez se incrementa el área del cuadrado cuando su área es de 16 cm^2?

4. El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho a razón de 3 cm/s. Cuando el largo es 20 cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

5. Un tanque cilíndrico con 5 m de radio se está llenando con agua a razón de 3 m^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura del agua?

6. El radio de una esfera se incrementa a razón de 4 mm/s. ¿Qué tan rápido se incrementa el volumen cuando el diámetro es de 80 mm?

7. El radio de una pelota esférica está aumentando a razón de 2 cm/min. ¿Con qué velocidad está aumentando la superficie de la pelota cuando el radio es de 8 cm?

8. El área de un triángulo con lados de longitudes a y b y ángulo contenido θ es

$$A = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

(a) Si $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, y θ aumenta a un ritmo de 0.2 rad/min, ¿qué tan rápido aumenta el área cuando $\theta = \pi/3$?
(b) Si $a = 2$ cm, b aumenta a razón de 1.5 cm/min, θ aumenta a razón de 0.2 rad/min, ¿qué tan rápido aumenta el área cuando $b = 3$ cm y $\theta = \pi/3$?
(c) Si a aumenta a razón de 2.5 cm/min, b aumenta a razón de 1.5 cm/min y θ aumenta a razón de 0.2 rad/min, ¿qué tan rápido está aumentando el área cuando $a = 2$ cm, $b = 3$ cm y $\theta = \pi/3$?

9. Suponga que $y = \sqrt{2x + 1}$, donde x y y son funciones de t.
(a) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = 4$.
(b) Si $dy/dt = 5$, encuentre dx/dt cuando $x = 12$.

10. Suponga que $4x^2 + 9y^2 = 36$, donde x y y son funciones de t.
(a) Si $dy/dt = \frac{1}{3}$, encuentre dx/dt cuando $x = 2$ y $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
(b) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = -2$ y $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

11. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $dx/dt = 5$ y $dy/dt = 4$, encuentre dz/dt cuando $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

12. Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola $xy = 8$. Cuando alcanza el punto (4, 2), la coordenada y disminuye con una rapidez de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto en movimiento en ese instante?

13–16
(a) ¿Qué cantidades se conocen en el problema?
(b) ¿Qué cantidades se desconocen?
(c) Trace un diagrama de la situación para cualquier tiempo t.
(d) Plantee una ecuación que relacione las cantidades.
(e) Termine de resolver el problema.

13. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 2 km y a una rapidez de 800 km/h y pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez con la que aumenta la distancia desde el avión a la estación cuando este se encuentra a 3 km de la estación.

14. Si una bola de nieve se derrite de tal modo que el área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, calcule la rapidez con la que disminuye el diámetro cuando es 10 cm.

15. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de 6 m de altura. Un hombre de 2 m de estatura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 1.5 m/s a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido se desplaza la punta de su sombra cuando el hombre está a 10 m del poste?

16. A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

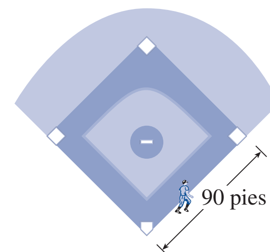
---

17. Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 30 km/h y el otro hacia el oeste a 72 km/h. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los automóviles dos horas después?

18. Un foco sobre el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde el foco hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s, ¿qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre la pared cuando está a 4 m del edificio?

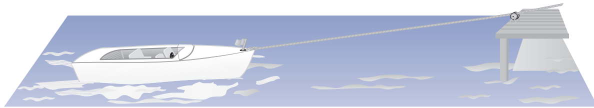
19. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 1.2 m/s desde un punto P. Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 1.6 m/s desde un punto a 200 m directo al este de P. ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?

20. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 pies/s.
(a) ¿Con qué rapidez decrece su distancia desde la segunda base cuando está a medio camino de la primera base?
(b) ¿Con qué rapidez se incrementa su distancia desde la tercera base en el mismo momento?



21. La altura de un triángulo se incrementa a razón de 1 cm/min, mientras que el área del triángulo aumenta a razón de 2 cm^2/min. ¿Con qué rapidez cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área es de 100 cm^2?

22. Un bote se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa y que pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 8 m?



23. A mediodía, el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 35 km/h, y el barco B va hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 16:00?

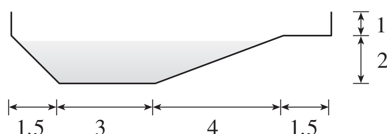
24. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = 2\,\text{sen}(\pi x/2)$. Cuando la partícula pasa por el punto $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, su coordenada x se incrementa a razón de $\sqrt{10}$ cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia desde la partícula al origen en este instante?

25. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a razón de 10 000 cm^3/min al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a razón constante. El depósito mide 6 m de altura, y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a razón de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, calcule la razón a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

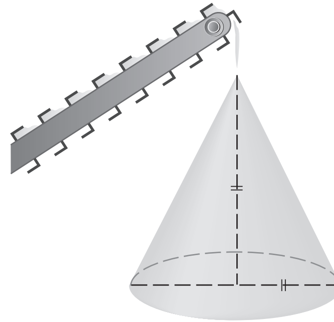
26. Se tiene un canal de 6 m de largo con extremos en forma de triángulos isósceles que están a 1 m en la parte superior y tiene una altura de 50 cm. Si el canal se está llenando de agua a razón de 1.2 m^3/min, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando se encuentra a 30 cm de profundidad?

27. Un canal de agua tiene 10 m de longitud y una sección transversal en forma de un trapecio isósceles con 30 cm de ancho en la parte inferior, 80 cm de ancho en la parte superior, y una altura de 50 cm. Si el canal se llena con agua a razón de 0.2 m^3/min, ¿qué tan rápido está aumentando el nivel del agua cuando se encuentra a 30 cm de profundidad?

28. Una piscina mide 5 m de ancho, 10 m de largo, 1 m de profundidad en el extremo de poco fondo y 3 m de profundidad en la parte más honda. En la figura se muestra una sección transversal de la piscina. Si esta se está llenando a razón de 0.1 m^3/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando tiene 1 m en el punto más hondo?



29. Se descarga grava por medio de una banda transportadora a razón de 3 m^3/min, y el grosor de granos es tal que forma una pila en forma de cono cuyo diámetro y altura son siempre iguales. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de la pila cuando esta mide 3 m de alto?



30. Un papalote que está a 50 m arriba de la superficie de la tierra se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 2 m/s. ¿Con qué rapidez disminuye el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 100 m de cuerda?

31. Los lados de un triángulo equilátero están aumentando a razón de 10 cm/min. ¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo cuando los lados tienen un largo de 30 cm?

32. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo entre el muro y la escalera en el ejemplo 2, cuando la parte inferior de la escalera está a 3 m del muro?

33. La parte superior de una escalera se desliza por una pared con una rapidez vertical de 0.15 m/s. En el momento en que la parte inferior de la escalera está a 3 m de la pared, se desliza alejándose de esta con una rapidez de 0.2 m/s. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

34. De acuerdo con el modelo que utilizamos para resolver el ejemplo 2, ¿qué pasa conforme la parte superior de la escalera se acerca al suelo? ¿Es adecuado el modelo para valores pequeños de y?

35. Si el minutero de un reloj tiene longitud r (en centímetros), encuentre la rapidez con la que barre el área en función de r.

36. Un grifo está llenando un recipiente hemisférico de 60 cm de diámetro, a razón de 2 L/min. Encuentre la rapidez a la que está aumentando el agua en el recipiente cuando está medio lleno. [Utilice los hechos: 1 L es 1000 cm^3. El volumen de la parte de una esfera con radio r desde la parte inferior a una altura h es $V = \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$, como se demostrará en el capítulo 6.]

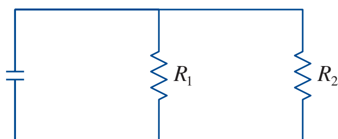
37. La ley de Boyle establece que, cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa a razón de 20 kPa/min ¿Con qué rapidez disminuye el volumen en ese instante?

38. Cuando el aire se expande en forma adiabática (no gana ni pierde calor), su presión P y su volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es 400 cm^3 y que la presión es 80 kPa y está disminuyendo a razón de 10 kPa/min. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen en este instante?

39. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como se muestra en la figura, entonces la resistencia total R, medida en ohms (Ω) está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

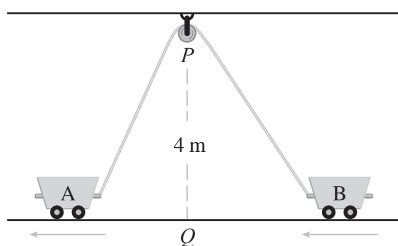
Si R_1 y R_2 se incrementan a razón de 0.3 Ω/s y 0.2 Ω/s, respectivamente, ¿qué tan rápido cambia R cuando $R_1 = 80$ Ω y $R_2 = 100$ Ω?



40. El peso B del cerebro en función del peso del cuerpo W en los peces se ha modelado mediante la función potencia $B = 0.007W^{2/3}$, donde B y W se dan en gramos. Un modelo para el peso corporal en función de la longitud del cuerpo L (medido en centímetros), es $W = 0.12L^{2.53}$. Si en 10 millones de años la longitud promedio de ciertas especies de peces evolucionaron de 15 a 20 cm a rapidez constante, ¿qué tan rápido creció el cerebro de estas especies cuando la longitud promedio era de 18 cm?

41. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 2°/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60º?

42. Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 12 m de longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto Q está en el suelo a 4 m directamente abajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de Q a una rapidez de 0.5 m/s. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia Q en el instante en que el carro A está a 3 m de Q?



43. Una cámara de televisión se instala a 1200 m de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la rapidez correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 200 m/s cuando se ha elevado 900 m.
(a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?
(b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

44. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km de distancia del punto P más cercano que se encuentra en una playa recta, y su luz da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P?

45. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de seguimiento en la superficie de la Tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está disminuyendo a razón de $\pi/6$ rad/min. ¿Con qué rapidez está viajando el avión en ese instante?

46. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando a razón de una revolución cada 2 min. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m del nivel del suelo?

47. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altitud de 1 km y se eleva con un ángulo de 30°. ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?

48. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 4 km/h, y la otra camina hacia el noreste a 2 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?

49. Un individuo corre por una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. Un amigo del corredor está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

50. La manecilla de los minutos de un reloj mide 8 mm de largo y la manecilla de las horas mide 4 mm de largo. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las puntas de las manecillas cuando es 13:00?

3.10 Aproximaciones lineales y diferenciales

Se ha visto que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, se observa que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2.7.2.) Esta observación es la base de un método para determinar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (o aun imposible) calcular valores cercanos de f. Por tanto, se recurre a los valores

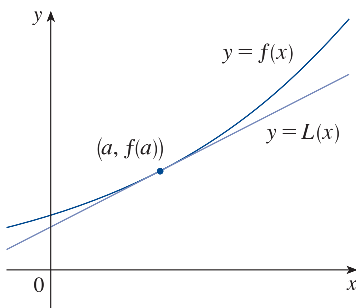


FIGURA 1

calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

En otras palabras, se utiliza la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

1 $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

2 $$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se le llama **linealización** de f en a.

EJEMPLO 1 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son sobreestimaciones o subestimaciones?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

y se tiene que $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Si se sustituyen estos valores en la ecuación 2, se observa que la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación lineal correspondiente (1) es

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ está cerca de 1)}$$

En particular, se tiene que

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

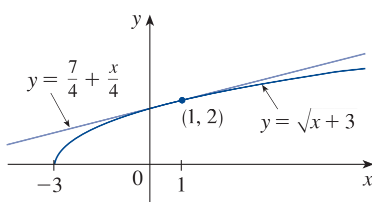


FIGURA 2

En la figura 2 se ilustra la aproximación lineal. En ella se observa que, en efecto, la recta tangente es una buena aproximación a la función dada cuando x está cerca de 1. También se observa que las aproximaciones son sobreestimaciones porque la recta tangente se encuentra por arriba de la curva.

Por supuesto, una calculadora podría dar aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal da una aproximación *sobre todo un intervalo*. ■

En la tabla siguiente se comparan las estimaciones de la aproximación lineal del ejemplo 1 con los valores reales. Observe en esta tabla, y también en la figura 2, que la aproximación con la recta tangente da buenas estimaciones cuando x está cerca de 1, pero la precisión de la aproximación disminuye cuando x está más lejos de 1.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176. . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373. . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000. . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117. . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567. . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797. . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974. . .

¿Qué tan buena es la aproximación obtenida en el ejemplo 1? El ejemplo siguiente muestra que usando una calculadora graficadora o una computadora es posible determinar un intervalo a lo largo del cual una aproximación lineal proporciona una precisión específica.

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5? ¿Qué puede decir de una exactitud con una diferencia menor que 0.1?

SOLUCIÓN Una exactitud con una diferencia menor que 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

De modo equivalente, se podría escribir

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

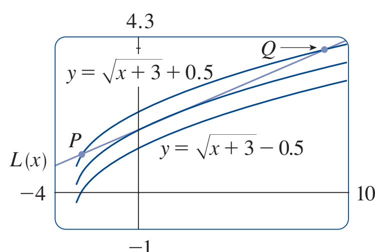


FIGURA 3

Esto expresa que la aproximación lineal debe encontrarse entre las curvas que se obtienen al desplazar la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. En la figura 3 se muestra la recta tangente $y = (7 + x)/4$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y Q. Al hacer un acercamiento y usar el cursor, en la computadora se estima que la coordenada x de P se aproxima a -2.66, y la coordenada x de Q es más o menos 8.66. Así, con base en la gráfica, la aproximación

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5 cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Se ha redondeado para quedar dentro del margen de seguridad.)

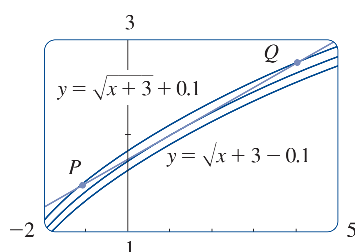


FIGURA 4

De manera análoga, en la figura 4 se observa que la aproximación es exacta con una diferencia menor que 0.1 cuando $-1.1 < x < 3.9$. ■

Aplicaciones en física

Las aproximaciones lineales se usan con frecuencia en la física. Al analizar las consecuencias de una ecuación, a veces un físico necesita simplificar una función sustituyéndola con una aproximación lineal. Por ejemplo, al derivar una fórmula para el período de un péndulo, los libros de texto de física obtienen la expresión $a_T = -g \operatorname{sen}\theta$ para la

aceleración tangencial, y luego sustituyen sen θ por θ haciendo la observación de que sen θ está muy cerca de θ si no es demasiado grande. [Véase, por ejemplo, *Physics: Calculus*, 2a. ed., por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), p. 431.] Se puede comprobar que la linealización de la función $f(x) = \text{sen } x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$, de manera que la aproximación lineal en 0 es

$$\text{sen } x \approx x$$

(véase el ejercicio 42). Por lo que, en efecto, la derivación de la fórmula para el período de un péndulo utiliza la aproximación a la recta tangente para la función seno.

Otro ejemplo se presenta en la teoría de la óptica, donde los rayos de luz que llegan con ángulos bajos en relación con el eje óptico se llaman *rayos paraxiales*. En la óptica paraxial (o gaussiana) tanto sen θ como cos θ se sustituyen con sus linealizaciones. En otras palabras, las aproximaciones lineales

$$\text{sen } \theta \approx \theta \qquad \text{y} \qquad \cos \theta \approx 1$$

se utilizan porque θ está cerca de 0. Los resultados de los cálculos que se efectúan con estas aproximaciones se convierten en la herramienta teórica básica que se utiliza para diseñar lentes. [Véase *Optics*, 4a. ed., por Eugene Hecht (San Francisco: 2002), p. 154.]

En la sección 11.11 aparecen varias aplicaciones de la idea de aproximación lineal a la física e ingeniería.

Diferenciales

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de diferenciales. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

Si $dx \neq 0$, se puede dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes ha visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo se puede interpretar en forma genuina como un cociente de diferenciales.

3
$$dy = f'(x)\, dx$$

Por lo que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx. Si dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f, entonces se determina el valor numérico de dy.

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f, y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

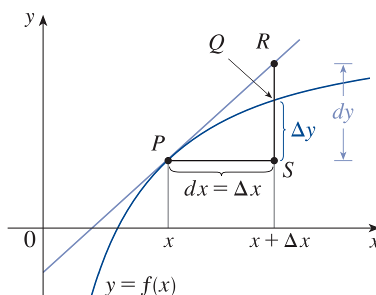


FIGURA 5

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por lo que, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

EJEMPLO 3 Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x cambia (a) de 2 a 2.05 y (b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN

(a) Se tiene que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

La figura 6 muestra la función del ejemplo 3 y una comparación de dy y Δy cuando $a = 2$. El rectángulo de vista es [1.8, 2.5] por [6, 18].

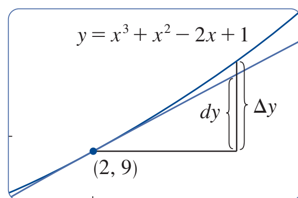


FIGURA 6

En general, $$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

(b) $$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.01 = 0.14$$ ■

Observe que, en el ejemplo 3, la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña. Observe también que es más fácil calcular dy que Δy. En el caso de funciones más complicadas, sería imposible calcular exactamente Δy. En estos casos, la aproximación mediante diferenciales es especialmente útil.

En la notación de diferenciales, la aproximación lineal (1) se puede escribir como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ del ejemplo 1, se tiene que

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, entonces

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y $$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

igual a lo que encontró en el ejemplo 1.

Este ejemplo final ilustra el uso de diferenciales para estimar los errores que ocurren debido a mediciones aproximadas.

EJEMPLO 4 Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en la medición de cuando mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

SOLUCIÓN Si el radio de la esfera es r, entonces el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el error en el valor medido de r se denota por medio de $dr = \Delta r$, entonces el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, que se puede aproximar mediante el diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se convierte en

$$dV = 4\pi(21)^2 0.05 \approx 277$$

El error máximo en el volumen calculado es de alrededor de 277 cm^3. ■

NOTA Si bien el posible error en el ejemplo 4 puede parecer bastante grande, el **error relativo** ofrece un mejor panorama del error; se calcula dividiendo el error entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Por esto, el error relativo en el volumen es aproximadamente tres veces el error relativo en el radio. En el ejemplo 4, el error relativo en el radio es $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de alrededor de 0.007 en el volumen. Los errores se pueden expresar asimismo como **errores de porcentaje** de 0.24% en el radio y 0.7% en el volumen.

3.10 EJERCICIOS

1–4 Encuentre la linealización $L(x)$ de la función en a.

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 3, \quad a = -2$

2. $f(x) = \text{sen}\, x, \quad a = \pi/6$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

4. $f(x) = 2^x, \quad a = 0$

5. Encuentre la aproximación lineal a la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$ en $a = 0$ y úsela para hacer una aproximación a los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Ilustre trazando la gráfica de f y la recta tangente.

6. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ en $a = 0$ y utilícela para hacer una aproximación a los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustre trazando la gráfica de g y la recta tangente.

7–10 Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. Luego determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es exacta hasta un valor menor que 0.1.

7. $\ln(1 + x) \approx x$

8. $\tan x \approx x$

9. $1/(1 + 2x)^4 \approx 1 - 8x$

10. $e^x \cos x \approx 1 + x$

11–14 Obtenga la derivada de cada una de las funciones siguientes.

11. (a) $y = xe^{-4x}$ (b) $y = \sqrt{1 - t^4}$

12. (a) $y = \dfrac{1 + 2u}{1 + 3u}$ (b) $y = \theta^2\, \text{sen}\, 2\theta$

13. (a) $y = \tan \sqrt{t}$ (b) $y = \dfrac{1 - v^2}{1 + v^2}$

14. (a) $y = \ln(\text{sen}\, \theta)$ (b) $y = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

15–18 (a) Encuentre la diferencial dy y (b) evalúe dy para los valores dados de x y dx en cada una de las funciones siguientes.

15. $y = e^{x/10}, \quad x = 0, \quad dx = 0.1$

16. $y = \cos \pi x, \quad x = \frac{1}{3}, \quad dx = -0.02$

17. $y = \sqrt{3 + x^2}, \quad x = 1, \quad dx = -0.1$

18. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}, \quad x = 2, \quad dx = 0.05$

19–22 Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego trace un diagrama como el de la figura 5 en el que se muestren los segmentos de recta con longitudes dx, dy y Δy.

19. $y = x^2 - 4x, \quad x = 3, \quad \Delta x = 0.5$

20. $y = x - x^3, \quad x = 0, \quad \Delta x = -0.3$

21. $y = \sqrt{x - 2}, \quad x = 3, \quad \Delta x = 0.8$

22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0.5$

23–28 Utilice la aproximación lineal (o diferenciales) para estimar cada uno de los números dados.

23. $(1.999)^4$

24. $1/4.002$

25. $\sqrt[3]{1001}$

26. $\sqrt{100.5}$

27. $e^{0.1}$

28. $\cos 29°$

29–31 Explique, en términos de aproximaciones lineales o diferenciales, por qué es razonable la aproximación de cada uno de los números siguientes.

29. $\sec 0.08 \approx 1$

30. $\sqrt{4.02} \approx 2.005$

31. $\dfrac{1}{9.98} \approx 0.1002$

32. Sean $f(x) = (x - 1)^2$ $g(x) = e^{-2x}$

y $h(x) = 1 + \ln(1 - 2x)$

(a) Encuentre la linealización de f, g y h en $a = 0$. ¿Qué observa? ¿Cómo explica lo que sucedió?


(b) Trace la gráfica de f, g y h y su aproximación lineal. ¿Para cuál función es mejor la aproximación lineal? ¿Para cuál es peor? Explique.

33. Se encontró que la arista de un cubo es 30 cm, con un posible error en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible, el error relativo y el porcentaje de error al calcular (a) el volumen del cubo y (b) el área superficial del cubo.

34. Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.
(a) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.
(b) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el porcentaje de error?

35. La circunferencia de una esfera se midió como 84 cm, con un posible error de 0.5 cm.
(a) Use diferenciales para calcular el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?
(b) Utilice diferenciales para calcular el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

36. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

37. (a) Utilice diferenciales para determinar una fórmula para el volumen aproximado de un cascarón cilíndrico de altura h, radio interno r y espesor Δr.
(b) ¿Cuál es el error que hay al utilizar la fórmula del inciso (a)?

38. Se sabe que un lado de un triángulo rectángulo es de 20 cm de longitud, y se mide el ángulo opuesto como 30º, con un posible error de $\pm 1°$.
(a) Utilice diferenciales para estimar el error al calcular la longitud de la hipotenusa.
(b) ¿Cuál es el porcentaje de error?

39. Si una corriente I pasa a través de un resistor con resistencia R, la ley de Ohm establece que la caída de voltaje es $V = RI$. Si V es constante y R se mide con un cierto error, utilice diferenciales para demostrar que el cálculo de I es aproximadamente el mismo (en magnitud) que el error relativo en R.

40. Cuando la sangre fluye por un vaso sanguíneo, el flujo F (el volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado) es proporcional a la cuarta potencia del radio R del vaso sanguíneo:

$$F = kR^4$$

(Esta se conoce como ley de Poiseuille; en la sección 8.4 se muestra el porqué es verdadera.) Una arteria parcialmente obstruida se puede expandir por medio de una operación llamada angioplastia, en la cual un catéter provisto de un globo en la punta se infla dentro del vaso para ensancharlo y restituir el flujo sanguíneo normal.

Demuestre que el cambio relativo en F es alrededor de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectará un aumento de 5% en el radio al flujo de sangre?

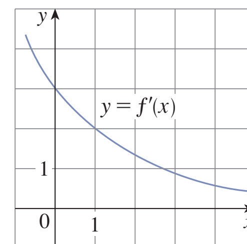
41. Establezca las reglas siguientes para trabajar con diferenciales (donde c es una constante y u y v son funciones de x).
(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$
(c) $d(u + v) = du + dv$ (d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$
(e) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ (f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. En la página 431 de *Physics: Calculus*, 2a. ed., por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), al derivar la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el período de un péndulo de longitud L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial del péndulo. Luego dice "para ángulos pequeños, el valor de θ en radianes está muy cerca del valor de sen θ; difieren menos que 2% hasta alrededor de 20°".
(a) Compruebe la aproximación lineal en 0 para la función seno:

$$\operatorname{sen} x \approx x$$


(b) Utilice un dispositivo graficador para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren menos de 2%. Luego compruebe la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados.

43. Suponga que la única información acerca de una función f es que $f(1) = 5$ y la gráfica de su *derivada* es como se muestra.
(a) Use una aproximación lineal para estimar $f(0.9)$ y $f(1.1)$.
(b) ¿Sus estimaciones para el inciso (a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.



44. Suponga que no tiene una fórmula para $g(x)$, pero sabe que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x.
(a) Use una aproximación lineal para estimar $g(1.95)$ y $g(2.05)$.
(b) ¿Sus estimaciones para el inciso (a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.

PROYECTO DE LABORATORIO POLINOMIOS DE TAYLOR

La aproximación por medio de una recta tangente $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$ cerca de $x = a$ porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma razón de cambio (derivada) en a. Para tener una mejor aproximación que una lineal, intente una aproximación de segundo grado (cuadrática) $P(x)$. En otras palabras, aproxime una curva mediante una parábola, en lugar de utilizar una recta. Para tener la seguridad de que la aproximación es buena, establezca lo siguiente:

(i) $P(a) = f(a)$ (P y f deben tener el mismo valor en a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P y f deben tener la misma razón de cambio en a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (Las pendientes de P y f deben tener la misma razón de cambio en a.)

1. Encuentre la aproximación cuadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para la función $f(x) = \cos x$, que satisfaga las condiciones (i), (ii) y (iii), con $a = 0$. Grafique P, f y la aproximación lineal $L(x) = 1$ en una pantalla común. Comente qué tan bien las funciones P y L se aproximan a f.

2. Determine los valores de x para los que la aproximación cuadrática $f(x) \approx P(x)$ del problema 1 es exacta con una diferencia menor que 0.1. [*Sugerencia*: trace la gráfica de $y = P(x)$, $y = \cos x - 0.1$ y $y = \cos x + 0.1$ en una pantalla común.]

3. Para aproximar una función f mediante una función cuadrática P cerca de un número a, lo mejor es escribir P en la forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Demuestre que la función cuadrática que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) es

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encuentre la aproximación para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ cerca de $a = 1$. Trace las gráficas de f, la aproximación cuadrática y la aproximación lineal del ejemplo 3.10.2 en una pantalla común. ¿Qué podría concluir?

5. En lugar de quedar conforme con una aproximación lineal o con una cuadrática para $f(x)$, cerca de $x = a$, intente determinar mejores aproximaciones con polinomios de grado más alto. Busque un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus n primeras derivadas tengan los mismos valores en $x = a$ como f y sus n primeras derivadas. Derive repetidas veces y haga $x = a$ para demostrar que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \tfrac{1}{2}f''(a)$ y, en general,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Se llama **polinomio de Taylor de *n*-ésimo grado de *f* centrado en *a***.

6. Encuentre el polinomio de Taylor de octavo grado, centrado en $a = 0$, para la función $f(x) = \cos x$. Trace la gráfica de f junto con los polinomios de Taylor T_2, T_4, T_6 y T_8, en rectángulos de vista $[-5, 5]$ por $[-1.4, 1.4]$ y comente qué tan bien se aproximan a f.

3.11 Funciones hiperbólicas

Ciertas combinaciones pares e impares de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} surgen con tanta frecuencia en matemáticas y sus aplicaciones que merecen recibir un nombre especial. En muchos aspectos son similares a las funciones trigonométricas y tienen la misma relación con la hipérbola que las funciones trigonométricas tienen con la circunferencia. Por esta razón, se les llama en forma colectiva **funciones hiperbólicas**, y de manera individual se les conoce como **seno hiperbólico**, **coseno hiperbólico**, y así sucesivamente.

Definición de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico se pueden trazar mediante la suma gráfica como en las figuras 1 y 2.

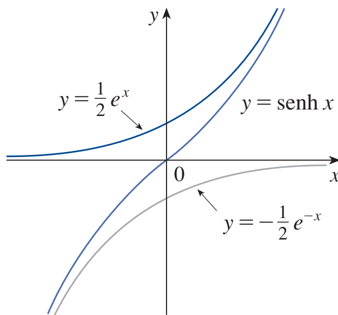


FIGURA 1
$y = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

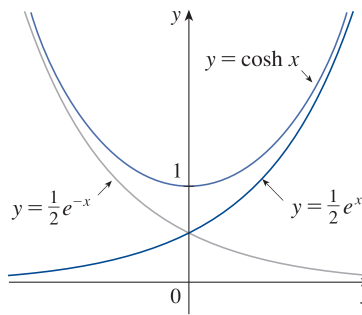


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

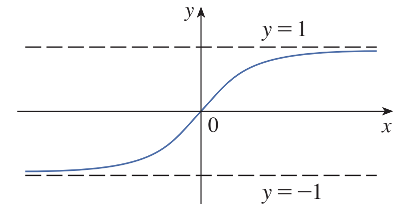


FIGURA 3
$y = \tanh x$

Observe que senh tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $\mathbb{R}$, mientras cosh tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $[1, \infty)$. En la figura 3 se muestra la gráfica de tanh, con sus asíntotas horizontales $y = \pm 1$. (Véase el ejercicio 23.)

Algunos de los usos matemáticos de las funciones hiperbólicas se tratan en el capítulo 7. Las aplicaciones en ciencia e ingeniería se tienen siempre que una entidad física como la luz, velocidad, electricidad o la radiactividad, se absorbe o se extingue en forma gradual, puesto que el decaimiento puede representarse mediante funciones hiperbólicas. La aplicación más famosa es el uso del coseno hiperbólico para describir la forma de un cable colgante. Se puede demostrar que si un cable pesado y flexible (como los que se usan para las líneas telefónicas o eléctricas) se tiende entre dos puntos a la misma altura, entonces el cable toma la forma de una curva con ecuación $y = c + a \cosh(x/a)$ que se denomina *catenaria* (véase la figura 4). (Esta palabra proviene de la palabra latina *catena* que significa "cadena".)

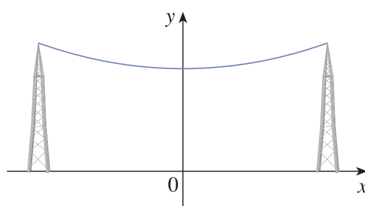


FIGURA 4
Una catenaria $y = c + a \cosh(x/a)$

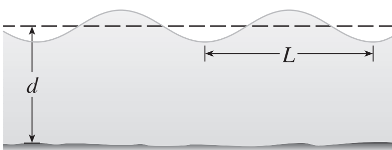


FIGURA 5
Ola de mar idealizada

Otra aplicación de las funciones hiperbólicas aparece en la descripción de las olas del mar: la velocidad de una ola con longitud L que se mueve a través de un cuerpo de agua con profundidad d se modela por la función

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (véanse la figura 5 y el ejercicio 49).

Las funciones hiperbólicas satisfacen un número de identidades que son similares a las muy bien conocidas identidades trigonométricas. A continuación, se presentan algunas de ellas, y la mayoría de las demostraciones se deja para los ejercicios.



© Stockbyte / Getty Images

El arco Gateway en St. Louis se diseñó utilizando una función coseno hiperbólico (véase el ejercicio 48).

Identidades hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

EJEMPLO 1 Demuestre que (a) $\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 1$ y (b) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

(b) Empiece con la identidad demostrada en el inciso (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Si divide los dos lados entre $\cosh^2 x$, obtiene

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

o

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$ ■

La identidad demostrada en el ejemplo 1(a) proporciona una pista sobre el nombre de funciones “hiperbólicas”.

Si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ queda sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ porque $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. De hecho, t se puede interpretar como la medida en radianes de $\angle POQ$ de la figura 6. Esta es la razón por la que las funciones trigonométricas se denominan algunas veces funciones *circulares*.

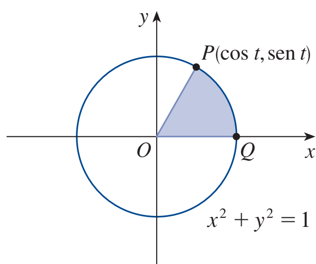


FIGURA 6

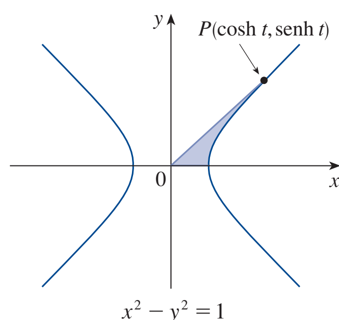


FIGURA 7

De manera similar, si t es cualquier número real, entonces el punto $P(\cosh t, \text{senh } t)$ queda en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ porque $\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$ y $\cosh t \geqslant 1$. Pero ahora t no representa la medida de un ángulo. Resulta que t representa el doble del área del sector hiperbólico sombreado de la figura 7, de la misma manera que en el caso trigonométrico t representa el doble del área del sector circular sombreado en la figura 6.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son fáciles de calcular. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\text{senh } x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

En la tabla 1 se da una lista de las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas. El resto de las demostraciones se dejan como ejercicios. Observe la similitud con las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas, pero observe que los signos son diferentes en algunos casos.

1 **Derivadas de las funciones hiperbólicas**

$$\frac{d}{dx}(\text{senh } x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\text{csch } x) = -\text{csch } x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \text{senh } x \qquad \frac{d}{dx}(\text{sech } x) = -\text{sech } x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\text{csch}^2 x$$

EJEMPLO 2 Cualquiera de estas reglas de derivación se puede combinar con la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh \sqrt{x}\right) = \text{senh } \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\text{senh } \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$ ■

Funciones hiperbólicas inversas

De acuerdo con las figuras 1 y 3, senh y tanh son funciones inyectivas por lo que tienen funciones inversas denotadas por senh^{-1} y $\tanh^{-1}$. En la figura 2 se observa que cosh no es inyectiva, pero que cuando queda restringida al dominio $[0, \infty)$ se transforma en inyectiva. La función coseno hiperbólico inversa se define como la inversa de esta función restringida.

2

$$y = \text{senh}^{-1} x \iff \text{senh } y = x$$

$$y = \cosh^{-1} x \iff \cosh y = x \quad \text{y} \quad y \geqslant 0$$

$$y = \tanh^{-1} x \iff \tanh y = x$$

Las funciones hiperbólicas inversas que faltan se definen de manera similar (véase el ejercicio 28).

Las funciones senh^{-1}, $\cosh^{-1}$ y $\tanh^{-1}$ se grafican en las figuras 8, 9 y 10 con ayuda de las figuras 1, 2 y 3.

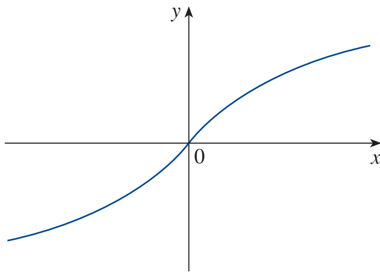


FIGURA 8 $y = \operatorname{senh}^{-1}x$
dominio $= \mathbb{R}$ rango $= \mathbb{R}$

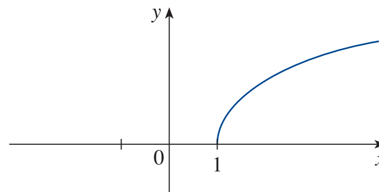


FIGURA 9 $y = \cosh^{-1}x$
dominio $= [1, \infty)$ rango $= [0, \infty)$

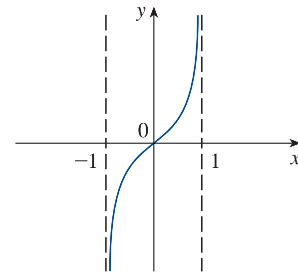


FIGURA 10 $y = \tanh^{-1}x$
dominio $= (-1, 1)$ rango $= \mathbb{R}$

Puesto que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no sorprende que las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de logaritmos. En particular, se tiene que:

La fórmula 3 se demuestra en el ejemplo 3. En los ejercicios 26 y 27 se piden las demostraciones de las fórmulas 4 y 5.

3 $$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

EJEMPLO 3 Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

SOLUCIÓN Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Entonces

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

por lo que

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

o, si multiplicamos por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Esto es ni más ni menos que una ecuación cuadrática en e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática, se obtiene

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $e^y > 0$, pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (porque $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Por lo que el signo menos es inadmisible y se tiene que

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Por tanto, $y = \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

Esto demuestra que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(Véase el ejercicio 25 para otro método.) ■

6 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Observe que, al parecer, las fórmulas para las derivadas de $\tanh^{-1}x$ y $\coth^{-1}x$ son idénticas, pero los dominios de estas funciones no tienen números comunes: $\tanh^{-1}x$ se define para $|x| < 1$, mientras que $\coth^{-1}x$ se define para $|x| > 1$.

Las funciones hiperbólicas inversas son derivables porque las funciones hiperbólicas también lo son. Las fórmulas de la tabla 6 se pueden demostrar por el método de las funciones inversas o mediante la derivación de las fórmulas 3, 4 y 5.

EJEMPLO 4 Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Entonces $\operatorname{senh} y = x$. Si se deriva esta ecuación en forma implícita respecto a x, se obtiene

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Puesto que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ y $\cosh y \geqslant 0$, se tiene $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUCIÓN 2 De acuerdo con la ecuación 3 (demostrada en el ejemplo 3) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Determine $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\text{sen } x)]$.

SOLUCIÓN Usando la tabla 6 y la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\text{sen } x)] = \frac{1}{1-(\text{sen } x)^2}\frac{d}{dx}(\text{sen } x)$$

$$= \frac{1}{1-\text{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$ ■

3.11 EJERCICIOS

1–6 Calcule el valor numérico de las expresiones siguientes.

1. (a) senh 0 (b) cosh 0

2. (a) tanh 0 (b) tanh 1

3. (a) cosh(ln 5) (b) cosh 5

4. (a) senh 4 (b) senh(ln 4)

5. (a) sech 0 (b) $\cosh^{-1} 1$

6. (a) senh 1 (b) $\text{senh}^{-1} 1$

7–19 Demuestre las identidades siguientes.

7. $\text{senh}(-x) = -\text{senh } x$
(Esto demuestra que senh x es una función impar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Esto demuestra que cosh x es una función par.)

9. $\cosh x + \text{senh } x = e^x$

10. $\cosh x - \text{senh } x = e^{-x}$

11. $\text{senh}(x+y) = \text{senh } x \cosh y + \cosh x \text{ senh } y$

12. $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y + \text{senh } x \text{ senh } y$

13. $\coth^2 x - 1 = \text{csch}^2 x$

14. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

15. $\text{senh } 2x = 2 \text{ senh } x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x$

17. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \text{senh } x)^n = \cosh nx + \text{senh } nx$
(n cualquier número real)

20. Si $\tanh x = \frac{12}{13}$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

21. Si $\cosh x = \frac{5}{3}$ y $x > 0$, calcule los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

22. (a) Utilice las gráficas de senh, cosh y tanh de las figuras 1 a 3 para dibujar las gráficas de csch, sech y coth.
 (b) Verifique las gráficas que trazó en el inciso (a) mediante una calculadora graficadora o una computadora.

23. Utilice las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar cada uno de los límites siguientes.
(a) $\lim_{x\to\infty} \tanh x$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \tanh x$
(c) $\lim_{x\to\infty} \text{senh } x$ (d) $\lim_{x\to-\infty} \text{senh } x$
(e) $\lim_{x\to\infty} \text{sech } x$ (f) $\lim_{x\to\infty} \coth x$
(g) $\lim_{x\to0^+} \coth x$ (h) $\lim_{x\to0^-} \coth x$
(i) $\lim_{x\to-\infty} \text{csch } x$ (j) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\text{senh } x}{e^x}$

24. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 1 para las derivadas de las funciones (a) cosh, (b) tanh, (c) csch , (d) sech (e) coth.

25. Encuentre una solución alternativa para el ejemplo 3 haciendo $y = \text{senh}^{-1}x$ y luego usando el ejercicio 9 y el ejemplo 1(a) en donde y reemplaza a x.

26. Demuestre la ecuación 4.

27. Demuestre la ecuación 5 utilizando (a) el método del ejemplo 3 y (b) el ejercicio 18 en donde y reemplaza a x.

28. Para cada una de las funciones siguientes (i) dé una definición como la (2), (ii) trace la gráfica, y (iii) encuentre una fórmula similar a la ecuación 3.
(a) csch^{-1} (b) sech^{-1} (c) $\coth^{-1}$

29. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 6 para las derivadas de las funciones siguientes.
(a) $\cosh^{-1}$ (b) $\tanh^{-1}$ (c) csch^{-1}
(d) sech^{-1} (e) $\coth^{-1}$

30–45 Encuentre la derivada. Simplifique tanto como sea posible.

30. $f(x) = e^x \cosh x$

31. $f(x) = \tanh \sqrt{x}$ **32.** $g(x) = \text{senh}^2 x$

33. $h(x) = \operatorname{senh}(x^2)$

34. $h(x) = \ln(\cosh x)$

35. $g(x) = \cosh(\ln x)$

36. $y = \operatorname{sech} x\,(1 + \ln \operatorname{sech} x)$

37. $y = e^{\cosh 3x}$

38. $f(t) = \dfrac{1 + \operatorname{senh} t}{1 - \operatorname{senh} t}$

39. $g(t) = t \coth \sqrt{t^2 + 1}$

40. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

41. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

42. $y = x \tanh^{-1}x + \ln \sqrt{1 - x^2}$

43. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

44. $y = \operatorname{sech}^{-1}(e^{-x})$

45. $y = \coth^{-1}(\sec x)$

---

46. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\sqrt[4]{\dfrac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}} = \frac{1}{2}e^{x/2}$.

47. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\arctan(\tanh x) = \operatorname{sech} 2x$.

48. El arco Gateway en St. Louis fue diseñado por Eero Saarinen y construido empleando la ecuación

$$y = 211.49 - 20.96 \cosh 0.03291765x$$

para la curva central del arco, donde x y y se miden en metros y $|x| \leqslant 91.20$.


(a) Trace la gráfica de la curva central.
(b) ¿Cuál es la altura del arco en su centro?
(c) ¿En qué punto la altura es de 100 m?
(d) ¿Cuál es la pendiente del arco en el punto del inciso (c)?

49. Si una ola con longitud L se mueve con velocidad v en un cuerpo de agua con profundidad d, entonces

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

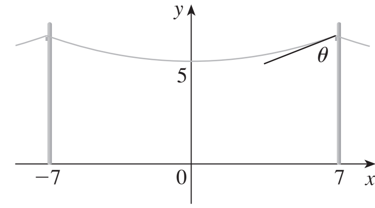
donde g es la aceleración debida a la gravedad (véase la figura 5). Explique por qué la aproximación.

$$v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

es apropiada en aguas profundas.


50. Un cable flexible colgante siempre forma una catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$, donde c y a son constantes y $a > 0$ (véanse la figura 4 y el ejercicio 52). Trace la gráfica de varios miembros de la familia de funciones $y = a\cosh(x/a)$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando a varía?

51. Un cable de teléfono cuelga entre dos postes que están separados entre sí 14 m y forma la catenaria $y = 20\cosh(x/20) - 15$, donde x y y se miden en metros.
(a) Encuentre la pendiente de esta curva donde se encuentra con el poste derecho.
(b) Calcule el ángulo θ entre el cable y el poste.



52. Usando principios de la física se puede demostrar que cuando un cable cuelga entre dos postes toma la forma de una curva $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, g es la aceleración de la gravedad y T es la tensión del cable en su punto más bajo y el sistema coordenado se elige en forma adecuada. Compruebe que la función

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

es una solución de esta ecuación diferencial.

53. Un cable con densidad lineal $\rho = 2$ kg/m se sujeta desde la parte alta de dos postes que están separados 200 m.
(a) Utilice el ejercicio 52 para calcular la tensión T que hay en el cable cuando está en su punto más bajo a 60 m del suelo. ¿Qué tan altos son los postes?
(b) Si se duplica la tensión, ¿cuál es el nuevo punto bajo del cable? ¿Qué tan altos son ahora los postes?

54. Un modelo para la velocidad de un objeto que está cayendo después de un tiempo t es

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)$$

donde m es la masa del objeto, $g = 9.8$ m/s² es la aceleración debida a la gravedad, k es una constante, t se mide en segundos y v en m/s.
(a) Calcule la velocidad terminal del objeto, es decir, $\lim_{t\to\infty} v(t)$.
(b) Si una persona cae desde un edificio, el valor de la constante k depende de su posición. Para una posición "pecho a tierra", $k = 0.515$ kg/s, pero para una posición de "pies por delante", $k = 0.067$ kg/s. Si una persona de 60 kg cae en posición pecho a tierra, ¿cuál es la velocidad terminal? ¿Y para pies por delante?

Fuente: L. Long *et al.*, "How Terminal Is Terminal Velocity?" *American Mathematical Monthly* 113 (2006): 752–755.

55. (a) Demuestre que cualquier función de la forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B \cosh mx$$

satisface la ecuación diferencial $y'' = m^2y$.
(b) Determine $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$ y $y'(0) = 6$.

56. Si $x = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$, demuestre que $\sec\theta = \cosh x$.

57. ¿En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1?

58. Investigue la familia de funciones

$$f_n(x) = \tanh(n \operatorname{sen} x)$$

donde n es un entero positivo. Describa qué pasa con la gráfica de f_n cuando n es muy grande.

59. Demuestre que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces existen números α y β tales que $ae^x + be^{-x}$ es igual

$$\alpha \operatorname{senh}(x + \beta) \quad \text{o} \quad \alpha \cosh(x + \beta)$$

En otras palabras, casi toda función de la forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ es una función seno hiperbólico o coseno hiperbólico desplazada o estirada.

3 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Exprese cada una de las reglas de derivación siguientes, tanto en símbolos como en palabras.
(a) Regla de la potencia
(b) Regla del múltiplo constante
(c) Regla de la suma
(d) Regla de la diferencia
(e) Regla del producto
(f) Regla del cociente
(g) Regla de la cadena

2. Obtenga las derivadas de cada una de las funciones siguientes.
(a) $y = x^n$
(b) $y = e^x$
(c) $y = b^x$
(d) $y = \ln x$
(e) $y = \log_b x$
(f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$
(h) $y = \tan x$
(i) $y = \csc x$
(j) $y = \sec x$
(k) $y = \cot x$
(l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
(m) $y = \cos^{-1} x$
(n) $y = \tan^{-1} x$
(o) $y = \operatorname{senh} x$
(p) $y = \cosh x$
(q) $y = \tanh x$
(r) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
(s) $y = \cosh^{-1} x$
(t) $y = \tanh^{-1} x$

3. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) Exprese e como un límite.
(c) ¿Por qué en cálculo se usa la función exponencial natural, $y = e^x$, con más frecuencia que las demás funciones exponenciales, $y = b^x$?
(d) ¿Por qué en cálculo se usa la función logarítmica natural, $y = \ln x$, más que las demás funciones logarítmicas, $y = \log_b x$?

4. (a) Explique cómo funciona la derivación implícita.
(b) Explique cómo funciona la derivación logarítmica.

5. Dé varios ejemplos de cómo se puede interpretar la derivada como una razón de cambio en física, química, biología, economía y otras ciencias.

6. (a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de crecimiento natural.
(b) ¿En qué circunstancias es un modelo adecuado para el crecimiento de la población?
(c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

7. (a) Escriba una expresión para la linealización de f en a.
(b) Si $y = f(x)$, escriba una expresión para la diferencial dy.
(c) Si $dx = \Delta x$, dibuje un esquema para mostrar el significado geométrico de Δy y dy.

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx} f\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Si $y = e^2$, entonces $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}\left|x^2 + x\right| = \left|2x + 1\right|$

11. La derivada de un polinomio es un polinomio.

12. Si $f(x) = (x^6 - x^4)^5$, entonces $f^{(31)}(x) = 0$.

13. La derivada de una función racional es una función racional.

14. La ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en $(-2, 4)$ es $y - 4 = 2x(x + 2)$.

15. Si $g(x) = x^5$, entonces $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

EJERCICIOS

1–50 Calcule y' en cada una de las funciones siguientes.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$

2. $y = \cos(\tan x)$

3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

4. $y = \dfrac{\tan x}{1 + \cos x}$

5. $y = x^2 \operatorname{sen} \pi x$

6. $y = x \cos^{-1} x$

7. $y = \dfrac{t^4 - 1}{t^4 + 1}$

8. $xe^y = y \operatorname{sen} x$

9. $y = \ln(x \ln x)$

10. $y = e^{mx} \cos nx$

11. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

12. $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2$

13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

14. $y = \ln \sec x$

15. $y + x \cos y = x^2 y$

16. $y = \left(\dfrac{u - 1}{u^2 + u + 1}\right)^4$

17. $y = \sqrt{\arctan x}$

18. $y = \cot(\csc x)$

19. $y = \tan\left(\dfrac{t}{1 + t^2}\right)$

20. $y = e^{x \sec x}$

21. $y = 3^{x \ln x}$

22. $y = \sec(1 + x^2)$

23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$

30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3 (3x - 1)^5}$

31. $y = x \tan^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

33. $y = \ln|\sec 5x + \tan 5x|$

34. $y = 10^{\tan \pi\theta}$

35. $y = \cot(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$

37. $y = \operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{1 + x^3}\right)$

38. $y = \arctan\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\right)$

39. $y = \tan^2(\operatorname{sen} \theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}\,(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

43. $y = x \operatorname{senh}(x^2)$

44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$

48. $y = x \tanh^{-1}\sqrt{x}$

49. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$

50. $y = \operatorname{sen}^2\left(\cos\sqrt{\operatorname{sen} \pi x}\right)$

---

51. Si $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, encuentre $f''(2)$.

52. Si $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, determine $g''(\pi/6)$.

53. Encuentre y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

54. Determine $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Utilice inducción matemática (página 72) para demostrar que si $f(x) = xe^x$, entonces $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Evalúe $\lim_{t \to 0} \dfrac{t^3}{\tan^3(2t)}$.

57–59 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

57. $y = 4 \operatorname{sen}^2 x, \quad (\pi/6, 1)$

58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad (0, -1)$

59. $y = \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen} x}, \quad (0, 1)$

60–61 Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a cada una de las curvas siguientes en el punto que se especifica.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13, \quad (2, 1)$

61. $y = (2 + x)e^{-x}, \quad (0, 2)$

---

62. Si $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, determine $f'(x)$. Trace la gráfica de f y f' en la misma pantalla y haga comentarios.

63. (a) Si $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, determine $f'(x)$.
(b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x\sqrt{5 - x}$ en los puntos $(1, 2)$ y $(4, 4)$.
(c) Ilustre el inciso (b) trazando la gráfica de la curva y las rectas tangentes, en la misma pantalla.
(d) Verifique si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

64. (a) Si $f(x) = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encuentre f' y f''.
(b) Verifique si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f, f' y f''.

65. ¿En qué puntos de la curva $y = \text{sen } x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, la tangente es una recta horizontal?

66. Encuentre los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde la recta tangente tiene pendiente 1.

67. Si $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, demuestre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

68. (a) Al derivar la fórmula del coseno del doble del ángulo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

obtenga la fórmula del doble del ángulo para la función seno.

(b) Al derivar la fórmula de la adición

$$\text{sen}(x + a) = \text{sen } x \cos a + \cos x \text{ sen } a$$

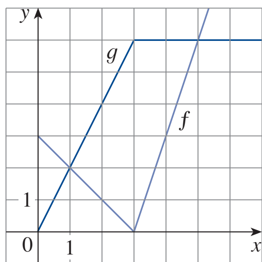
obtenga la fórmula de la adición para la función coseno.

69. Suponga que

$$f(1) = 2 \quad f'(1) = 3 \quad f(2) = 1 \quad f'(2) = 2$$
$$g(1) = 3 \quad g'(1) = 1 \quad g(2) = 1 \quad g'(2) = 4$$

(a) Si $S(x) = f(x) + g(x)$, determine $S'(1)$.
(b) Si $P(x) = f(x)g(x)$, determine $P'(2)$.
(c) Si $Q(x) = f(x)/g(x)$, determine $Q'(1)$.
(d) Si $C(x) = f(g(x))$, determine $C'(2)$.

70. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sea $P(x) = f(x)\,g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ y $C(x) = f(g(x))$. Encuentre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ y (c) $C'(2)$.



71–78 Encuentre f' en términos de g'.

71. $f(x) = x^2 g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln|g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79–81 Determine h' en términos de f' y g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\text{sen } 4x))$

 **82.** (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ en el rectángulo de vista $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) ¿Sobre qué intervalo es más grande la razón promedio de cambio: $[1, 2]$ o $[2, 3]$?
(c) ¿En qué valor de x es más grande la razón de cambio instantáneo: $x = 2$ o $x = 5$?
(d) Compruebe sus estimaciones visuales del inciso (c) calculando $f'(x)$ y comparando los valores numéricos de $f'(2)$ y $f'(5)$.

83. ¿En qué punto sobre la curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ es horizontal la recta tangente?

84. (a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$, que es paralela a la recta $x - 4y = 1$.
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ que pase por el origen.

85. Determine la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por el punto $(1, 4)$ y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 5$ tienen pendientes 6 y -2, respectivamente.

86. La función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$, se usa para modelar la concentración en el instante t de un medicamento que se inyecta en el torrente sanguíneo.
(a) Demuestre que $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.
(b) Encuentre $C'(t)$, la rapidez con la que cambia la concentración del medicamento durante la circulación.
(c) ¿Cuándo esta rapidez es igual a 0?

87. Una ecuación de movimiento en la forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa la oscilación amortiguada de un objeto. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto.

88. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal por lo que su coordenada en el instante t es $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geqslant 0$, donde b y c son constantes positivas.
(a) Encuentre las funciones velocidad y aceleración.
(b) Demuestre que la partícula siempre se desplaza en dirección positiva.

89. Una partícula se desplaza sobre una recta vertical de manera que su coordenada en el instante t es $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geqslant 0$.
(a) Encuentre las funciones velocidad y aceleración.
(b) ¿Cuándo se mueve hacia arriba la partícula y cuándo se mueve hacia abajo?
(c) Determine la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant 3$.
 (d) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 3$.
(e) ¿Cuándo la partícula aumenta su rapidez? ¿Cuándo disminuye su rapidez?

90. El volumen de un cono recto circular es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.
(a) Determine la razón de cambio del volumen respecto a la altura si el radio es constante.

(b) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto al radio si la altura es constante.

91. La masa de una parte de un alambre es $x(1 + \sqrt{x})$ kilogramos, donde x se mide en metros desde uno de los extremos del alambre. Encuentre la densidad lineal del alambre cuando $x = 4$ m.

92. El costo, en dólares, de producir x unidades de un cierto artículo es

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal.
(b) Determine $C'(100)$ y explique su significado.
(c) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

93. Inicialmente, un cultivo de bacterias contiene 200 células y crecen con una razón proporcional a su tamaño. Después de media hora la población se ha incrementado a 360 células.
(a) Encuentre el número de bacterias después de t horas.
(b) Calcule el número de bacterias después de 4 horas.
(c) Encuentre la rapidez de crecimiento después de 4 horas.
(d) ¿Cuándo la población alcanza 10 000?

94. El cobalto-60 tiene una vida media de 5.24 años.
(a) Determine la masa que queda de una muestra de 100 mg después de 20 años.
(b) ¿Cuánto tardaría la masa en decaer a 1 mg?

95. Sea $C(t)$ la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo. Cuando el cuerpo elimina el medicamento, $C(t)$ disminuye con una rapidez que es proporcional a la cantidad de medicamento que está presente en el tiempo t. En estos términos $C'(t) = -kC(t)$, donde k es un número positivo denominado *constante de eliminación* del medicamento.
(a) Si C_0 es la concentración en el tiempo $t = 0$, determine la concentración en el tiempo t.
(b) Si el cuerpo elimina la mitad del medicamento en 30 horas, ¿cuánto tiempo le toma eliminar 90% del medicamento?

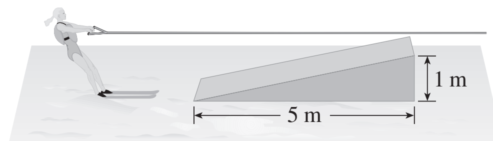
96. Una taza con chocolate caliente tiene una temperatura de 80 °C en una habitación que se mantiene en 20 ºC. Después de media hora, el chocolate caliente se enfría a 60 °C.
(a) ¿Cuál es la temperatura del chocolate después de otra media hora?
(b) ¿Cuándo se enfriará el chocolate a 40 °C?

97. El volumen de un cubo se incrementa a razón de 10 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa el área superficial cuando la longitud de un lado es de 30 cm?

98. Un vaso de papel tiene la forma de un cono de altura igual a 10 cm y radio de 3 cm (en la parte superior). Si el agua se vierte en el vaso a razón de 2 cm^3/s, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando tiene 5 cm de profundidad?

99. Un globo asciende con rapidez constante de 2 m/s. Un niño va en bicicleta por un camino recto a una rapidez de 5 m/s. Cuando pasa bajo el globo, este se halla a 15 m arriba de él. ¿Qué tan rápido se incrementa la distancia entre el niño y el globo 3 s más tarde?

100. Una esquiadora pasa encima de una rampa, como la que se ilustra en la figura, con una rapidez de 10 m/s. ¿Qué tan rápido se eleva cuando abandona la rampa?



101. El ángulo de elevación del sol decrece a razón de 0.25 rad/h. ¿Qué tan rápido se incrementa la sombra de un edificio de 400 pies de altura cuando el ángulo de elevación del sol es $\pi/6$?

102. (a) Encuentre la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ cerca de 3.
(b) Ilustre el inciso (a) trazando la gráfica de f y la aproximación lineal.
(c) ¿Para qué valores de x es exacta la aproximación lineal dentro de 0.1?

103. (a) Determine la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Establezca la aproximación lineal correspondiente y utilícela para proporcionar un valor aproximado para $\sqrt[3]{1.03}$.
(b) Determine los valores de x para los que la aproximación lineal dada en el inciso (a) sea exacta con una diferencia menor que 0.1.

104. Evalúe dy si $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ y $dx = 0.2$.

105. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm, con un posible error de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el máximo error posible al calcular el área de la ventana.

106–108 Exprese el límite como una derivada en cada una de las funciones siguientes y evalúelo.

106. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi/3} \frac{\cos\theta - 0.5}{\theta - \pi/3}$

---

109. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

110. Suponga que f es una función derivable tal que $f(g(x)) = x$ y $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Demuestre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

112. Demuestre que la longitud de la porción de cualquier recta tangente al astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cortada por los ejes de coordenadas es constante.

Problemas adicionales

Antes de trabajar en el ejemplo, cubra la solución e intente resolverlo usted primero.

EJEMPLO 1 ¿Cuántas rectas son tangentes a las dos parábolas $y = -1 - x^2$ y $y = 1 + x^2$? Calcule las coordenadas de los puntos en los cuales estas rectas tangentes tocan a las parábolas.

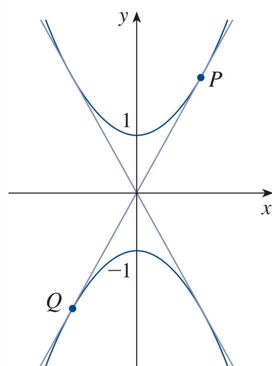


FIGURA 1

SOLUCIÓN Para entender este problema es esencial hacer un esquema. Por lo que se trazan las parábolas $y = 1 + x^2$ (que es la parábola estándar $y = x^2$ desplazada una unidad hacia arriba) y $y = -1 - x^2$ (que se obtiene al reflejar la primera parábola respecto al eje x). Si trata de dibujar una recta tangente para ambas parábolas, pronto descubrirá que solo hay dos posibilidades, que se ilustran en la figura 1.

Sea P un punto en el cual una de estas rectas tangentes toca la parábola superior y sea a su coordenada x. (Es muy importante elegir la notación para la incógnita. Por supuesto podía haber escogido b o c o x_0 o x_1, en lugar de a. Sin embargo, no se recomienda utilizar x en lugar de a porque se podría confundir con la variable x de la ecuación de la parábola). Entonces, ya que P está en la parábola $y = 1 + x^2$, su coordenada y debe ser $1 + a^2$. Debido a la simetría que se muestra en la figura 1, las coordenadas del punto Q donde la recta tangente toca a la parábola inferior deben ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar la información de que la recta es una tangente, iguale la pendiente de la recta PQ con la pendiente de la recta tangente en P. Se tiene

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Si $f(x) = 1 + x^2$, entonces la pendiente de la recta tangente en P es $f'(a) = 2a$. Por tanto, la condición que necesita utilizar es

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Al resolver esta ecuación, se tiene $1 + a^2 = 2a^2$, por lo que $a^2 = 1$ y $a = \pm 1$. Por tanto, los puntos son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. Por simetría, los dos puntos restantes son $(-1, 2)$ y $(1, -2)$. ■

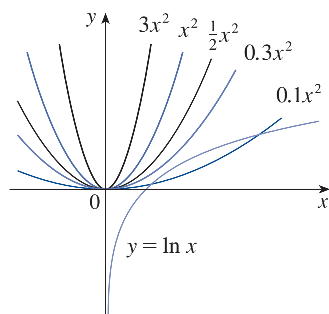


FIGURA 2

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de c la ecuación $\ln x = cx^2$ tiene exactamente una solución?

SOLUCIÓN Uno de los principios más importantes de la solución de problemas es dibujar un diagrama, incluso si el problema, según se enuncia, no menciona en forma explícita una situación geométrica. Este problema se puede formular de nuevo en términos geométricos como sigue: ¿para cuáles valores de c la curva $y = \ln x$ intersecta la curva $y = cx^2$ exactamente en un punto?

Empiece por trazar las gráficas de $y = \ln x$ y $y = cx^2$ para diversos valores de c. Se sabe que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ es una parábola que se abre hacia arriba si $c > 0$ y, hacia abajo, si $c < 0$. En la figura 2 se muestran las parábolas $y = cx^2$ para varios valores positivos de c. La mayor parte no se cruzan con $y = \ln x$ y una la corta dos veces. Se tiene la sensación de que debe haber un valor de c (en alguna parte entre 0.1 y 0.3) para el cual las curvas se cruzan exactamente una vez, como en la figura 3.

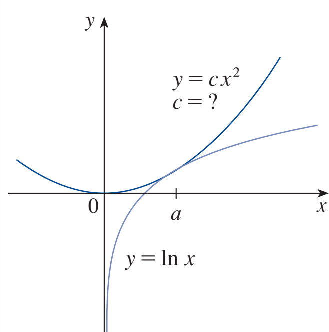


FIGURA 3

Para determinar ese valor de c en particular, sea a la coordenada x del punto único de intersección. En otras palabras, $\ln a = ca^2$, por lo que a es la única solución de la ecuación dada. En la figura 3 las curvas solo se tocan, por lo que tienen una recta tangente común cuando $x = a$. Esto significa que las curvas $y = \ln x$ y $y = cx^2$ tienen la misma pendiente cuando $x = a$. Por tanto,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Resolviendo las ecuaciones $\ln a = ca^2$ y $1/a = 2ca$, se obtiene

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

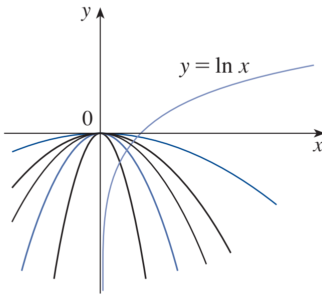


FIGURA 4

Por lo que $a = e^{1/2}$ y

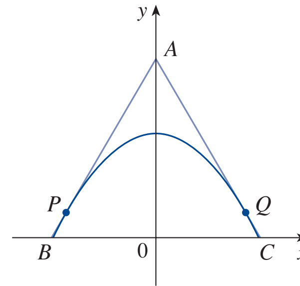
$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

Para los valores negativos de c se tiene la situación que se ilustra en la figura 4: todas las parábolas $y = cx^2$ con valores negativos de c cruzan $y = \ln x$ exactamente una vez. Y no olvide lo referente a $c = 0$. La curva $y = 0x^2 = 0$ que es justamente el eje x, que interseca a $y = \ln x$ exactamente una vez.

Para resumir, los valores requeridos de c son $c = 1/(2e)$ y $c \leqslant 0$. ■

Problemas

1. Determine los puntos P y Q sobre la parábola $y = 1 - x^2$ de tal manera que el triángulo ABC formado por el eje x y las rectas tangentes en P y Q sea un triángulo equilátero. (Véase la figura.)





2. Determine el punto donde las curvas $y = x^3 - 3x + 4$ y $y = 3(x^2 - x)$ son tangentes entre sí, es decir, tienen una recta tangente común. Ilustre mediante la representación gráfica de ambas curvas y la recta tangente.

3. Demuestre que las rectas tangentes a la parábola $y = ax^2 + bx + c$ en cualesquiera dos puntos con coordenadas x iguales a p y q se cruzan en un punto cuya coordenada x está a la mitad entre p y q.

4. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}\right) = -\cos 2x$$

5. Si $f(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{\sec t - \sec x}{t - x}$, encuentre el valor de $f'(\pi/4)$.

6. Encuentre los valores de las constantes a y b tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax + b} - 2}{x} = \frac{5}{12}$$

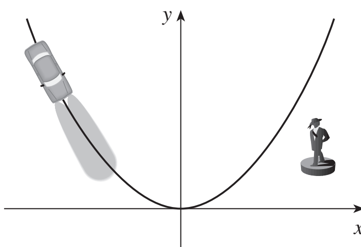


FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

7. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

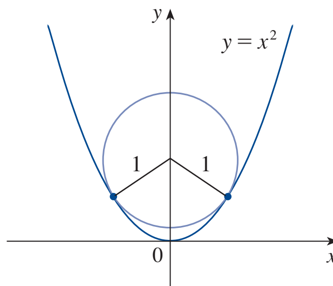
8. Un automóvil viaja por la noche por una carretera que tiene forma de parábola con vértice en el origen (véase la figura). El automóvil parte del punto 100 m al oeste y 100 m al norte del origen, y se desplaza en una dirección hacia el este. Hay una estatua localizada 100 m al este y 50 m al norte del origen. ¿En qué punto de la carretera los faros del vehículo iluminarán a la estatua?

9. Demuestre que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

10. Si f es derivable en a, donde $a > 0$, evalúe el siguiente límite en términos de $f'(a)$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

11. En la figura se muestra una circunferencia con radio 1 inscrita en la parábola $y = x^2$. Encuentre el centro de la circunferencia.



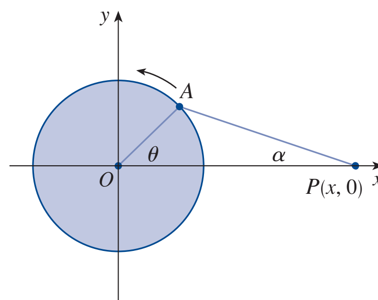
12. Determine todos los valores de c tales que las parábolas $y = 4x^2$ y $x = c + 2y^2$ se intersequen en ángulos rectos.

13. ¿Cuántas rectas son tangentes a ambas circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + (y - 3)^2 = 1$? ¿En qué puntos estas rectas tangentes tocan las circunferencias?

14. Si $f(x) = \dfrac{x^{46} + x^{45} + 2}{1 + x}$, calcule $f^{(46)}(3)$. Exprese su respuesta utilizando notación factorial: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n - 1) \cdot n$.

15. En la figura se muestra una rueda giratoria con radio de 40 cm y una barra AP de longitud 1.2 m. El extremo P de la barra se desliza hacia atrás y hacia adelante, a lo largo del eje x, conforme la rueda gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, con una rapidez de 360 revoluciones por minuto.

(a) Encuentre la velocidad angular de la barra, $d\alpha/dt$, en radianes por segundo, cuando $\theta = \pi/3$.
(b) Exprese la distancia $x = |OP|$, en términos de θ.
(c) Determine una expresión para la velocidad del extremo P, en términos de θ.



16. Se trazan las rectas tangentes T_1 y T_2 en los dos puntos P_1 y P_2 sobre la parábola $y = x^2$ y se intersecan en un punto P. Se traza otra recta tangente T en un punto entre P_1 y P_2; esta interseca a T_1 en Q_1 y T_2 en Q_2. Demuestre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

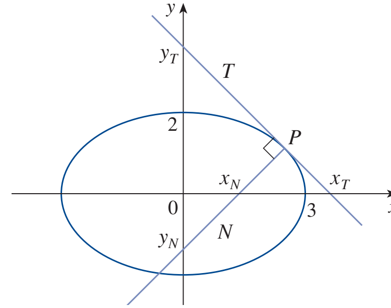
17. Demuestre que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax} \operatorname{sen} bx) = r^n e^{ax} \operatorname{sen}(bx + n\theta)$$

donde a y b son números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$, y $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

18. Evalúe $\lim_{x \to \pi} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$.

19. Sean T y N las rectas tangente y normal a la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ en cualquier punto P de la elipse en el primer cuadrante. Sean x_T y y_T las intersecciones de T con los ejes x y y, y x_N y y_N las intersecciones respectivas de N. Conforme P se mueve a lo largo de la elipse en el primer cuadrante (pero no sobre los ejes), ¿qué valores pueden adoptar x_T, y_T, x_N y y_N? En primer lugar, intente inferir las respuestas con solo ver la figura. A continuación, utilice el cálculo para resolver el problema y vea qué tan acertada es su intuición.



20. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$.

21. (a) Use la identidad para $\tan(x - y)$ [véase la ecuación 14b del apéndice D] para demostrar que si dos rectas L_1 y L_2 se intersecan a un ángulo, entonces

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

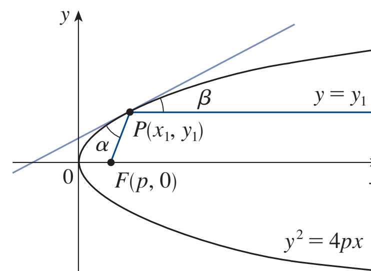
donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.

(b) El **ángulo entre las curvas** C_1 y C_2 en un punto de intersección se define como el ángulo entre las rectas tangentes a C_1 y C_2 en P (si estas rectas tangentes existen). Use el inciso (a) para determinar, redondeado al grado más cercano, el ángulo entre cada par de curvas en cada punto de intersección.

(i) $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ y $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

22. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la parábola $y^2 = 4px$ con foco $F(p, 0)$. Sea α el ángulo entre la parábola y el segmento rectilíneo FP, y sea β el ángulo entre la recta horizontal $y = y_1$ y la parábola, como en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (Por lo que, por un principio de óptica geométrica, la luz proveniente de una fuente colocada en F se reflejará a lo largo de una recta paralela al eje x. Esto explica por qué los *paraboloides*, las superficies que se obtienen al hacer girar las parábolas sobre sus ejes, se emplean como la forma de algunos faros delanteros de automóviles y espejos para telescopios.)



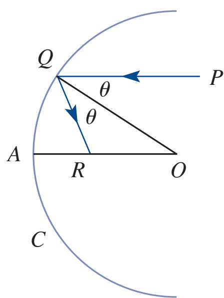


FIGURA PARA EL PROBLEMA 23

23. Suponga que remplaza el espejo parabólico que aparece en el problema 22 con un espejo esférico. Aunque el espejo no tiene foco, puede demostrar la existencia de un foco *aproximado*. En la figura, C es un semicírculo con centro O. Un rayo de luz que llega hacia el espejo paralelo al eje a lo largo de la recta PQ se reflejará hacia el punto R sobre el eje, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). ¿Qué sucede con el punto R conforme P se acerca cada vez más al eje?

24. Si f y g son funciones derivables con $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

25. Evalúe $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+2x) - 2\operatorname{sen}(a+x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$.

SAC **26.** (a) La función cúbica $f(x) = x(x-2)(x-6)$ tiene tres ceros distintos: 0, 2 y 6. Trace la gráfica de f y sus rectas tangentes en el *promedio* de cada par de ceros. ¿Qué observa?

(b) Suponga que la función cúbica $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ tiene tres ceros diferentes: a, b y c. Demuestre, con ayuda de un sistema algebraico computacional, que una recta tangente dibujada en el promedio de los ceros a y b interseca la gráfica de f en el tercer cero.

27. ¿Para qué valor de k la ecuación $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tiene exactamente una solución?

28. ¿Para qué números positivos a se cumple que $a^x \geqslant 1 + x$ para toda x?

29. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2-1} + \cos x}$$

demuestre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

30. Dada una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a \neq b$, encuentre la ecuación de todo el conjunto de puntos a partir de los cuales hay dos rectas tangentes a la curva cuyas pendientes son (a) recíprocos y (b) recíprocos negativos.

31. Encuentre los dos puntos sobre la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una recta tangente en común.

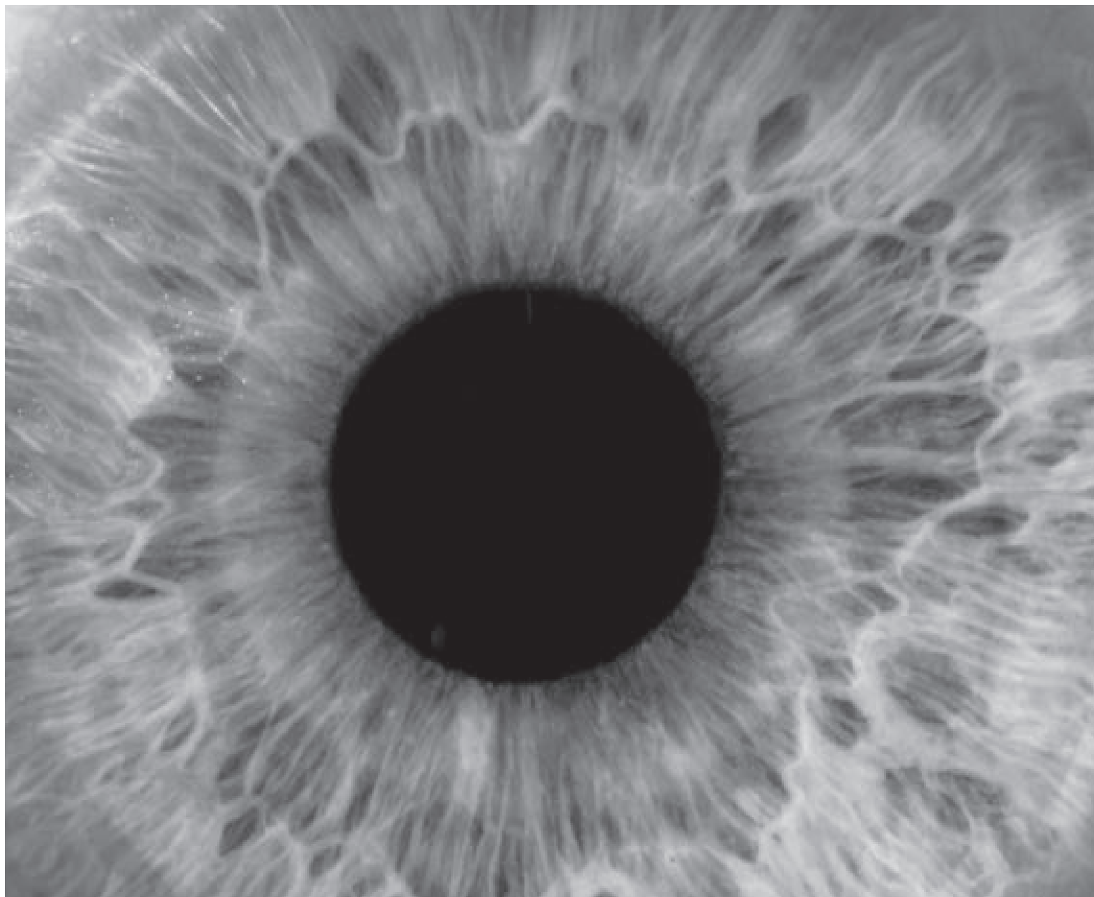
32. Suponga que tres puntos sobre la parábola $y = x^2$ tienen la propiedad de que sus rectas normales se cruzan en un punto común. Demuestre que la suma de sus coordenadas x es 0.

33. Un *punto de una red* sobre el plano es un punto con coordenadas enteras. Suponga que se dibujan circunferencias con radio r usando todos los puntos de la red como centros. Encuentre el valor más pequeño de r tal que cualquier recta con pendiente $\frac{2}{5}$ interseque alguna de estas circunferencias.

34. La punta de un cono de radio r centímetros y altura h centímetros se introduce con una rapidez de 1 cm/s en un cilindro alto de radio R centímetros que contiene una parte de agua. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua en el instante en que el cono está totalmente sumergido?

35. Un recipiente en forma de cono invertido tiene una altura de 16 cm y su radio mide 5 cm en la parte superior. Está lleno en parte con un líquido que escurre por los lados con una rapidez proporcional al área del recipiente que está en contacto con el líquido. [El área superficial de un cono es $\pi r l$, donde r es el radio y l es la altura inclinada.] Si vierte líquido en el recipiente a razón de 2 cm^3/min, entonces la altura del líquido disminuye a razón de 0.3 cm/min cuando la altura es de 10 cm. Si el objetivo es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿con qué rapidez debe verter líquido al recipiente?

4 Aplicaciones de la derivada



© Tatiana Makotra / Shutterstock.com

Cuando observa el mundo que lo rodea, la luz que entra al ojo cerca del centro de la pupila se percibe más brillante que la luz que entra más cerca de los bordes de la pupila. Este fenómeno, conocido como el *efecto Stiles-Crawford*, se explora conforme el radio de la pupila cambia en el ejercicio 80 de la página 313.

YA SE HAN INVESTIGADO ALGUNAS de las aplicaciones de la derivada, pero ahora que se conocen las reglas de derivación se está en mejor posición para continuar con mayor profundidad con las aplicaciones de la derivada. Aquí se aprenderá cómo las derivadas afectan la forma de una gráfica de una función y, en particular, cómo ayudan a localizar valores máximos y mínimos de funciones. Muchos problemas prácticos requieren minimizar un costo o maximizar un área, o encontrar el mejor resultado posible para una situación. En particular, se podrá investigar la forma óptima de una lata y explicar la ubicación de los arcoíris en el cielo.

4.1 Valores máximos y mínimos

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se requiere encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo. Algunos ejemplos de los problemas que se resolverán en este capítulo son:

- ¿Cuál debe ser la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuál es la aceleración máxima de un transbordador espacial? (Esta es una pregunta importante para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas pueden reducirse a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. Para empezar, primero se explicará exactamente lo que son estos valores.

En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f en la que el punto más alto es $(3, 5)$. En otras palabras, el valor más grande de f es $f(3) = 5$. Por otro lado, el valor más pequeño es $f(6) = 2$. Se dice que $f(3) = 5$ es el *máximo absoluto* de f y $f(6) = 2$ es el *mínimo absoluto*. En general, se usa la definición siguiente:

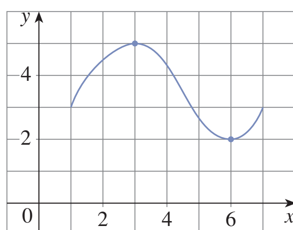


FIGURA 1

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f sobre D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f sobre D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

Un máximo o mínimo absoluto se le llama a veces máximo o mínimo **global**. Los valores máximo y mínimo de f se llaman **valores extremos** de f.

La figura 2 muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en d y mínimo absoluto en a. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto sobre la gráfica y $(a, f(a))$ es el punto más bajo. En la figura 2, si se consideran solo valores de x cercanos a b [por ejemplo, si se restringe la atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de estos valores de $f(x)$ y se llama *valor máximo local* de f. Por otro lado, $f(c)$ se llama *valor mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercana a c [en el intervalo (b, d), por ejemplo]. La función f también tiene un mínimo local en e. En general, se tiene la definición siguiente.

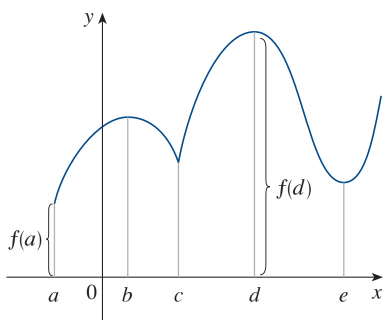


FIGURA 2
Mínimo absoluto $f(a)$, máximo absoluto $f(d)$, mínimos locales $f(c)$, $f(e)$, máximos locales $f(b)$, $f(d)$

2 Definición El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

En la definición 2 (y en otros lugares), si se dice que algo se cumple **cerca** de c, significa que se cumple en algún intervalo abierto que contiene a c. Por ejemplo, en la figura 3 se ve que $f(4) = 5$ es un mínimo local porque es el menor valor de f en el intervalo I. No es el mínimo absoluto porque $f(x)$ tiene valores menores cuando x está cerca de 12 (en el intervalo K, por ejemplo). De hecho, $f(12) = 3$ es un mínimo local y el mínimo absoluto. De modo similar, $f(8) = 7$ es un máximo local, pero no el máximo absoluto porque f toma valores más grandes cerca de 1.

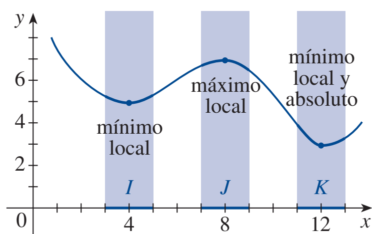


FIGURA 3

EJEMPLO 1 La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) igual a 1, infinitas veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para toda x. (Véase la figura 4.) Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero. ■

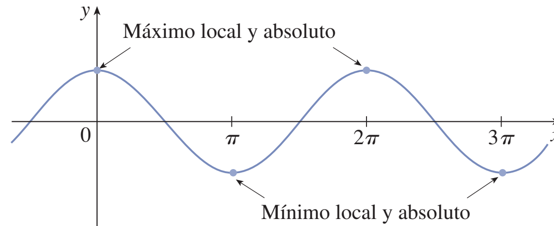


FIGURA 4
$y = \cos x$

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$ porque $x^2 \geqslant 0$ para toda x. Por tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 5.) Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo. ■

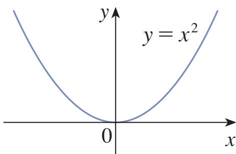


FIGURA 5
Valor mínimo = 0. No hay máximo

EJEMPLO 3 En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que se muestra en la figura 6, se ve que no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco tiene valores extremos locales. ■

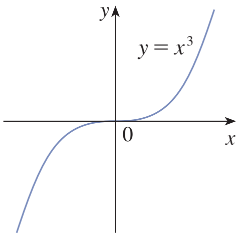


FIGURA 6
No tiene mínimo, ni máximo

EJEMPLO 4 La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

se muestra en la figura 7. Se puede observar que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto final.) También, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Observe que f no tiene máximo local ni absoluto en $x = 4$.

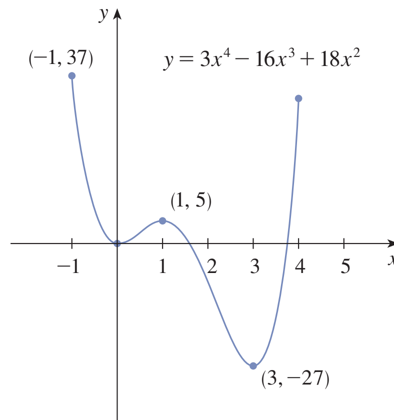


FIGURA 7 ■

Se ha visto que algunas funciones tienen valores extremos, mientras que otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función tenga valores extremos.

3 Teorema del valor extremo Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 8 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es muy fácil de aceptar a nivel intuitivo, su demostración es difícil, por lo que se omite.

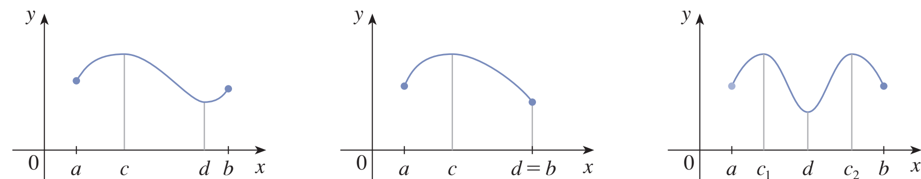


FIGURA 8 Las funciones continuas en un intervalo cerrado siempre alcanzan valores extremos.

En las figuras 9 y 10 se muestra que una función no necesita tener valores extremos si no se satisface cualesquiera de las dos hipótesis (continuidad o intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

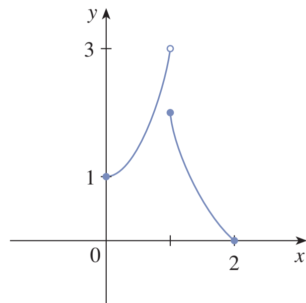


FIGURA 9
Esta función tiene un valor mínimo $f(2) = 0$, pero no tiene valor máximo.

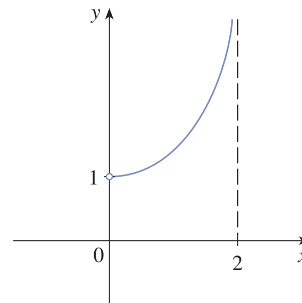


FIGURA 10
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 9, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$, pero no tiene valor máximo. (Observe que el rango de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua *pudiera* tener valores máximo y mínimo. Véase el ejercicio 13(b).]

La función g que se muestra en la figura 10 es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [El rango de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo indica que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no dice cómo encontrarlos. Observe en la figura 8 que los valores máximo y mínimo absolutos que están *entre* a y b están en los valores máximo y mínimo, por lo que se debe empezar por buscar los valores extremos locales.

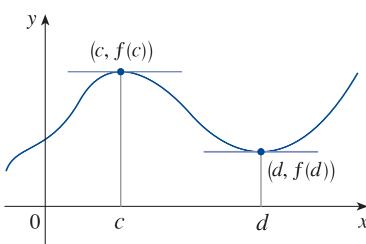


FIGURA 11

La figura 11 muestra la gráfica de una función f con un máximo local en c y un mínimo local en d. Parece que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por tanto, tiene pendiente 0. Se sabe que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que parece que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se dice que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

4 Teorema de Fermat Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Fermat

Se llama teorema de Fermat en honor de Pierre Fermat (1601-1665), un abogado francés que tomó las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para encontrar rectas tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención del límite y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del cálculo diferencial.

DEMOSTRACIÓN Para tratar un caso concreto, suponga que f tiene un máximo local en c. Entonces, de acuerdo con la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x está suficientemente cerca de c. Esto implica que, si h está lo suficiente cerca de 0, con h positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

y, por tanto,

5 $$f(c + h) - f(c) \leqslant 0$$

Se pueden dividir ambos lados de la desigualdad entre un número positivo. Así, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, se tiene

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando el límite por la derecha de ambos lados de la desigualdad (utilizando el teorema 2.3.2), se obtiene

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

Pero, dado que $f'(c)$ existe, se tiene

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

y con esto se demuestra que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad (5) se invierte cuando se divide entre h:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Así que tomando el límite por la izquierda, se tiene

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ya se ha mostrado que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Ya se ha demostrado el teorema de Fermat para el caso de un máximo local. El caso de un mínimo local se puede demostrar de modo similar, o bien, puede usar el ejercicio 78 para deducirlo del caso que ya ha demostrado (véase el ejercicio 79). ■

Los ejemplos siguientes advierten contra la interpretación excesiva del teorema de Fermat: No se puede esperar localizar valores extremos haciendo simplemente $f'(x) = 0$ y resolviendo para x.

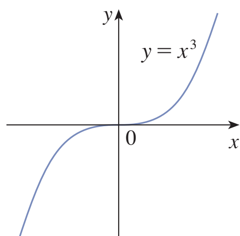


FIGURA 12
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero f no tiene máximo ni mínimo.

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo o mínimo en 0, como se puede ver en la gráfica de la figura 12. (U observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, pero $x^3 < 0$ para $x < 0$). El hecho de que $f'(0) = 0$ solo significa que la curva $y = x^3$ tiene una recta tangente horizontal en (0, 0). En lugar de tener un máximo o un mínimo en (0, 0), la curva cruza allí con su recta tangente horizontal. ■

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local y absoluto) en $x = 0$, pero ese valor no se puede determinar haciendo $f'(x) = 0$ porque, como ya se demostró en el ejemplo 2.8.5, $f'(0)$ no existe (véase la figura 13). ■

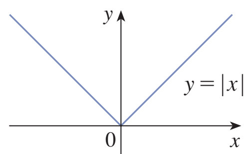


FIGURA 13
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

PRECAUCIÓN Los ejemplos 5 y 6 muestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en c. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat sugiere en realidad que, por lo menos, se deben *empezar* a buscar los valores extremos de f en los números c, donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

> **6 Definición** Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

EJEMPLO 7 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto da

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[Se obtienen los mismos valores escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Por tanto, $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$; es decir $x = \frac{3}{2}$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por tanto, los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0. ■

En la figura 14 hay una gráfica de la función f del ejemplo 7, que apoya nuestra respuesta, porque hay una recta tangente horizontal cuando $x = 1.5$ [donde $f'(x) = 0$] y una recta tangente vertical cuando $x = 0$ [donde $f'(x)$ no está definida].

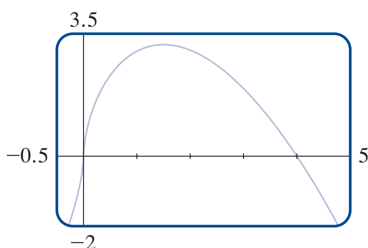


FIGURA 14

En términos de números críticos, el teorema de Fermat se puede replantear como sigue (compare la definición 6 con el teorema 4):

> **7** Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Para encontrar un máximo o un mínimo absoluto de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que es un extremo local [en cuyo caso, según (7), se presenta un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo, como se vio en los ejemplos de la figura 8. Por lo que el procedimiento de tres pasos siempre funciona.

Método del intervalo cerrado Para encontrar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Encuentre los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 8 Encuentre los valores absolutos máximo y mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Dado que f es continua sobre $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, se puede utilizar el método del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos valores críticos de f ocurren cuando $f'(x) = 0$; esto es, en $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos números críticos está en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los puntos extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

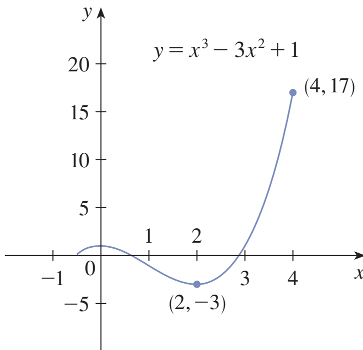


FIGURA 15

Comparando estos cuatro números, se ve que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

Observe que, en este ejemplo, el máximo absoluto ocurre en un extremo del intervalo, mientras que el mínimo absoluto ocurre en un número crítico. La gráfica de f se traza en la figura 15. ■

Si tiene una calculadora graficadora o una computadora con software de gráficos, es posible estimar los valores máximos y mínimos muy fácilmente. Pero, como se muestra en el ejemplo siguiente, es necesario el cálculo para encontrar los valores *exactos*.

EJEMPLO 9
(a) Utilice un dispositivo graficador para estimar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
(b) Utilice el cálculo para encontrar los valores máximo y mínimo exactos.

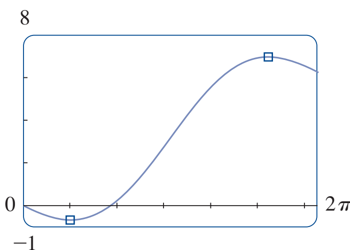


FIGURA 16

SOLUCIÓN
(a) La figura 16 muestra la gráfica de f en el rectángulo de vista de $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Moviendo el cursor cerca del punto máximo, se ve que las coordenadas y no cambian mucho en las proximidades del máximo. El valor máximo absoluto es aproximadamente 6.97 y ocurre cuando $x \approx 5.2$. Del mismo modo, moviendo el cursor cerca al punto mínimo, se ve que el valor mínimo absoluto es alrededor de -0.68 y se presenta cuando $x \approx 1.0$. Es posible obtener estimaciones más precisas al hacer acercamientos

hacia los puntos máximos y mínimos (o al utilizar una característica incorporada de máximos y mínimos), pero en vez de esto, se usará el cálculo.

(b) La función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, 2\pi]$. Ya que $f'(x) = 1 - 2\cos x$, se tiene que $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ y esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o $5\pi/3$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos finales son

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Comparando estos cuatro números y utilizando el método del intervalo cerrado, se ve que el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el máximo valor absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso (a) sirven para verificar el resultado. ■


© NASA

EJEMPLO 10 El telescopio espacial Hubble fue puesto en operación el 24 de abril de 1990, por el transbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.0003968t^3 - 0.02752t^2 + 7.196t - 0.9397$$

(en metros por segundo). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

SOLUCIÓN Se pide encontrar los valores extremos, no de la función velocidad dada, sino de la función aceleración. Por lo que primero se tiene que derivar para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0.0003968t^3 - 0.02752t^2 + 7.196t - 0.9397) \\ &= 0.0011904t^2 - 0.05504t + 7.196 \end{aligned}$$

Ahora se aplica el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.0023808t - 0.05504$$

El único número crítico ocurre cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.05504}{0.0023808} \approx 23.12$$

Evaluando $a(t)$ en el número crítico y en los puntos extremos del intervalo, se tiene

$$a(0) = 7.196 \qquad a(t_1) \approx 6.56 \qquad a(126) \approx 19.16$$

Por lo que la aceleración máxima es aproximadamente $19.16\ \text{m/s}^2$ y la aceleración mínima es aproximadamente $6.56\ \text{m/s}^2$. ■

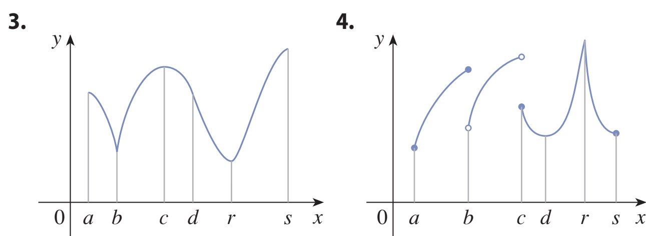
4.1 EJERCICIOS

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

2. Suponga que f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.
(a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto de f?
(b) ¿Qué pasos daría para encontrar los valores máximo y mínimo?

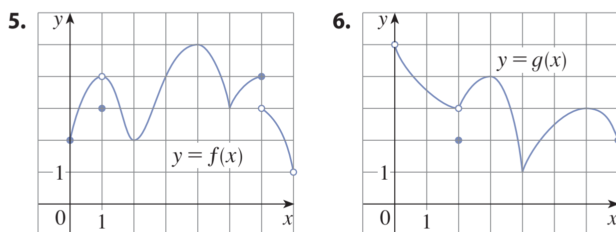
3–4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r y s, indique si la función cuya gráfica se muestra, tiene un máximo o mínimo absolutos, un máximo o mínimo locales, o ni un máximo ni un mínimo.

3. **4.**



5–6 Utilice la gráfica para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5. **6.**



7–10 Trace la gráfica de una función f que es continua sobre $[1, 5]$ y tiene las propiedades dadas.

7. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimos locales en 2 y 4

8. Máximo absoluto en 4, mínimo absoluto en 5, máximo local en 2, mínimo local en 3

9. Mínimo absoluto en 3, máximo absoluto en 4, máximo local en 2

10. Máximo absoluto en 2, mínimo absoluto en 5, 4 es un número crítico pero no hay máximo o mínimo local.

11. (a) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es derivable en 2.
(b) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es continua, pero no derivable, en 2.
(c) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y no es continua en 2.

12. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no máximo local.
(b) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo local, pero no máximo absoluto.

13. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto, pero no mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que es discontinua, pero que no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto.

14. (a) Trace la gráfica de una función que tiene dos máximos locales, un mínimo local y no tiene mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función que tiene tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15–28 Trace a mano la gráfica de f y utilícela para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas y transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$

17. $f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$

18. $f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$

20. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$

22. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2 - 3x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 4 - 2x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

29–44 Determine los números críticos de la función.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

32. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

33. $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2}\ln x$

45–46 Se da una fórmula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47–62 Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f en el intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, $[-3, 5]$

51. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$, $[-2, 3]$

52. $f(t) = (t^2 - 4)^3$, $[-2, 3]$

53. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $[0.2, 4]$

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$, $[0, 3]$

55. $f(t) = t - \sqrt[3]{t}$, $[-1, 4]$

56. $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + t^2}$, $[0, 2]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t$, $[0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2)$, $[\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = x^{-2}\ln x$, $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$

60. $f(x) = xe^{x/2}$, $[-3, 1]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$

62. $f(x) = x - 2\tan^{-1}x$, $[0, 4]$

63. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 — x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Utilice una gráfica para calcular los números críticos de $f(x) = |1 + 5x - x^3|$ redondeados a un decimal.

65–68
(a) Utilice una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo redondeados a dos decimales.
(b) Por medio del cálculo encuentre los valores máximo y mínimo.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^x + e^{-2x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x$, $-2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Después de consumir una bebida alcohólica, la concentración de alcohol en sangre (BAC, por sus siglas en inglés) surge conforme se absorbe el alcohol, seguido por un descenso gradual conforme se metaboliza el alcohol. La función

$$C(t) = 1.35te^{-2.802t}$$

modela la BAC promedio, medido en mg/mL, de un grupo de ocho sujetos masculinos después de t horas del consumo rápido de 15 mL de etanol (correspondiente a una bebida alcohólica). ¿Cuál es la BAC promedio máxima durante las primeras 3 horas? ¿Cuándo ocurre?
Fuente: Adaptado de P. Wilkinson et al., "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State", *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics 5* (1977): 207–224.

70. Después de que se toma una tableta de antibiótico, la concentración del antibiótico en el torrente sanguíneo se modela por la función

$$C(t) = 8(e^{-0.4t} - e^{-0.6t})$$

donde el tiempo t se mide en horas y C se mide en μg/mL. ¿Cuál es la concentración máxima de antibiótico durante las primeras 12 horas?

71. Entre 0 °C y 30 °C, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T está dado aproximadamente por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

72. Un objeto con masa m se arrastra a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a través de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva llamado el *coeficiente de fricción* y donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F es minimizada cuando $\tan\theta = \mu$.

73. Un modelo para el precio promedio en Estados Unidos de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003 está dado por la función

$$S(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t se mide en años desde agosto de 1993. Estime los años cuando el azúcar era más barata y más cara durante el período 1993-2003.

74. El 7 de mayo de 1992 el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo de un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.
(a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para encontrar el polinomio cúbico que modele de la mejor

manera la velocidad del transbordador para el intervalo de tiempo $t \in [0, 125]$. Luego, dibuje esta función polinomial.

(b) Encuentre un modelo para la aceleración del transbordador y utilícelo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 segundos.

Suceso	Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de maniobra de giro	10	56.4
Fin de maniobra de giro	15	97.2
Acelerador al 89%	20	136.2
Acelerador al 67%	32	226.2
Acelerador al 104%	59	403.9
Presión dinámica máxima	62	440.4
Separación de los cohetes auxiliares de combustible sólido	125	1265.2

75. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento en la presión de los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo que se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, este debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más ancho. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un espasmo de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad v de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se pone rígida bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\tfrac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).

(a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\tfrac{1}{2}r_0, r_0\right]$ en el cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se compara esto con la evidencia experimental?

(b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v sobre el intervalo?

(c) Trace la gráfica de v sobre el intervalo $[0, r_0]$.

76. Demuestre que 5 es un número crítico de la función

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

pero g no tiene un valor extremo local en 5.

77. Demuestre que la función

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

no tiene ni máximo local ni mínimo local.

78. Si f tiene un valor mínimo local en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ tiene un valor mínimo local en c.

79. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en que f tiene un mínimo local en c.

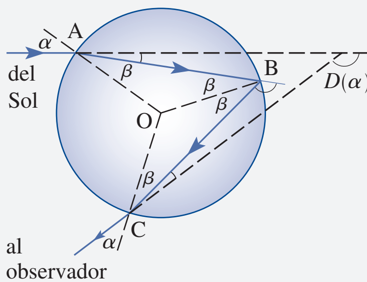
80. Una función cúbica es una función polinomial de tercer grado; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

(a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos, uno o no tener números críticos. Proporcione ejemplos y trazos para ilustrar las tres posibilidades.

(b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

PROYECTO DE APLICACIÓN EL CÁLCULO DE LOS ARCOÍRIS

Los arcoíris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto se siguen las ideas de Descartes y de Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcoíris.

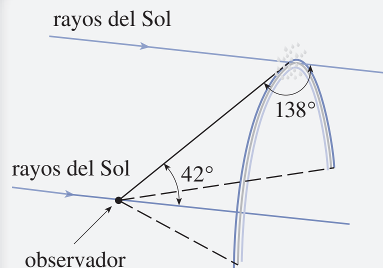


Formación del arcoíris primario

1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que atraviesa una gota esférica de lluvia en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Observe que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell dice que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \tfrac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja; pero, por el momento, hay más interés en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Observe que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por tanto,

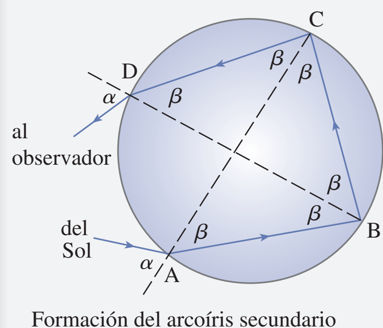
$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.



El significado de la desviación mínima es que cuando $\alpha \approx 59.4°$ se tiene $D'(\alpha) \approx 0$, por lo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que muchos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ resultan desviados en más o menos la misma cantidad. La *concentración* de los rayos que vienen de las cercanías de la desviación mínima crea el brillo del arcoíris primario. En la figura de la izquierda se muestra que el ángulo de elevación desde el observador hacia arriba hasta el punto más alto del arcoíris es $180° - 138° = 42°$. (A este ángulo se le llama *ángulo de arcoíris*).

2. En el problema 1 se explica la ubicación del arcoíris primario, pero ¿cómo explica los colores? La luz solar comprende una gama de longitudes de onda, desde el rojo hasta el naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Como Newton descubrió en sus experimentos con un prisma en 1666, el índice de refracción es diferente para cada color. (El efecto se llama *dispersión*.) Para la luz roja, el índice de refracción es $k \approx 1.3318$, en tanto que para la luz violeta es $k \approx 1.3435$. Al repetir el cálculo del problema 1 para estos valores de k, se demuestra que el ángulo del arcoíris es alrededor de 42.3° para el arco rojo y de 40.6° para el arco violeta. Por lo que el arcoíris consta en realidad de siete arcos separados que corresponden a los siete colores.



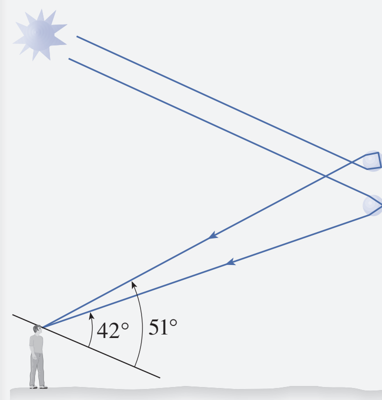
Formación del arcoíris secundario

3. Quizás haya visto un arcoíris secundario más tenue, arriba del arco primario. Se produce por la parte de un rayo que entra en una gota de lluvia y se refracta en A, se refleja dos veces (en B y C) y se refracta al salir de la gota en D (véase la figura que se encuentra a la izquierda). En esta ocasión, el ángulo de desviación $D(\alpha)$ es la magnitud total de rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj que describe el rayo en este proceso de cuatro etapas. Demuestre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

y $D(\alpha)$ tiene un valor mínimo cuando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$



Tomando $k = \frac{4}{3}$, demuestre que la desviación mínima es aproximadamente 129° y que el ángulo de arcoíris para el arcoíris secundario es aproximadamente de 51°, como se muestra en la figura a la izquierda.

4. Demuestre que los colores del arcoíris secundario aparecen en orden invertido al del primario.



4.2 Teorema del valor medio

Se verá que muchos de los resultados de este capítulo dependen de un hecho central llamado teorema del valor medio. Pero para llegar a este teorema, se verá primero el resultado siguiente.

Rolle
El teorema de Rolle fue publicado en 1691 por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719), en un libro titulado *Méthode pour resoudre les Egalitez*. Fue un crítico de los métodos de su tiempo y calificó al cálculo como una "colección de falacias ingeniosas". Más tarde, sin embargo, se convenció de la esencial exactitud de los métodos del cálculo.

Teorema de Rolle Sea f una función que satisface las tres hipótesis siguientes:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de dar la demostración, se verán las gráficas de algunas funciones típicas que satisfacen las tres hipótesis. La figura 1 muestra las gráficas de cuatro de estas funciones. En cada caso parece que hay al menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la recta tangente es horizontal y, por tanto, $f'(c) = 0$. Por lo que, el teorema de Rolle es razonable.

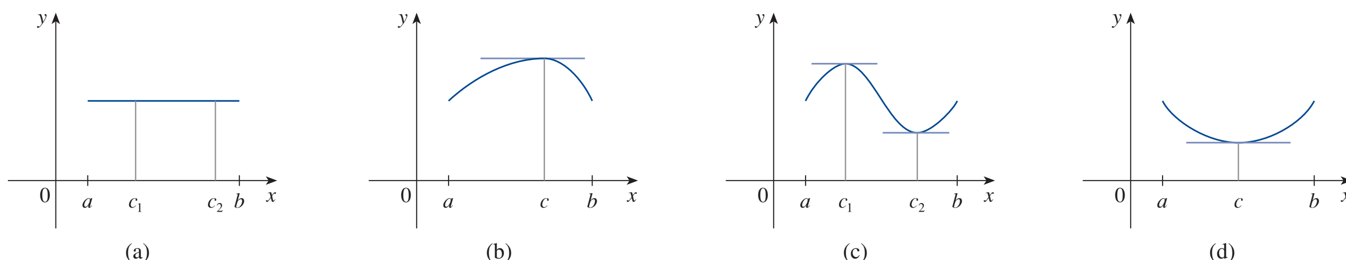


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN Hay tres casos:

SP Considere casos

CASO I $f(x) = k$, **una constante**
Entonces $f'(x) = 0$, por lo que el número c puede tomar *cualquier* número en (a, b).

CASO II $f(x) > f(a)$ **para algún** x **en** (a, b) [como en la figura 1(b) o (c)]
Por el teorema del valor extremo (que se puede aplicar por la hipótesis 1), f tiene un valor máximo en algún lugar de $[a, b]$. Ya que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar este valor máximo en un número c en el intervalo abierto (a, b). Entonces f tiene un máximo *local* en c y, por la hipótesis 2, f es derivable en c. Por tanto, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

CASO III $f(x) < f(a)$ **para algún** x **en** (a, b) [como en la figura l (c) o (d)]
Por el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$ y, como $f(a) = f(b)$, alcanza este valor mínimo en un número c en (a, b). Otra vez, $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat. ■

EJEMPLO 1 Se aplicará el teorema de Rolle a la función posición $s = f(t)$ de un objeto en movimiento. Si el objeto está en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle dice que hay algún instante de tiempo $t = c$ entre a y b donde $f'(c) = 0$; es decir, la velocidad es 0. (En particular, se puede ver que esto es cierto cuando se lanza una bola directamente hacia arriba.) ■

EJEMPLO 2 Demuestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

SOLUCIÓN Primero se utilizará el teorema del valor intermedio (2.5.10) para demostrar que existe una raíz. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. Entonces $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$.

La figura 2 muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x - 1$ analizada en el ejemplo 2. El teorema de Rolle muestra que no importa cuánto se amplíe el rectángulo de vista, nunca se podrá encontrar una segunda intersección con el eje x.

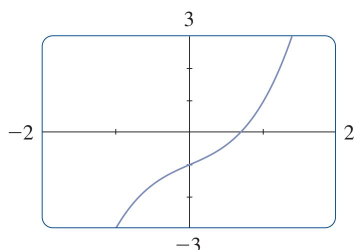


FIGURA 2

Ya que f es una función polinomial es continua, por lo que el teorema del valor intermedio establece que existe un número c entre 0 y 1 tal que $f(c) = 0$. De lo que se deduce que la ecuación dada tiene una raíz.

Para demostrar que la ecuación no tiene otras raíces reales, se utiliza el teorema de Rolle y se argumenta por contradicción. Suponga que se tienen dos raíces a y b. Entonces $f(a) = 0 = f(b)$ y, como f es una función polinomial, es derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$. Por tanto, por el teorema de Rolle, existe un número c entre a y b tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para toda } x$$

(ya que $x^2 \geqslant 0$), por lo que $f'(x)$ nunca puede ser 0. Esto conduce a una contradicción, por tanto, la ecuación no puede tener dos raíces reales. ■

El principal uso del teorema de Rolle es demostrar el siguiente teorema importante, establecido por primera vez por el matemático francés Joseph-Louis Lagrange.

El teorema del valor medio es un ejemplo de lo que se llama un teorema de existencia. Como el teorema del valor intermedio, el teorema del valor extremo y el teorema de Rolle, este garantiza que *existe* un número con cierta propiedad, pero no indica cómo encontrar el número.

Teorema del valor medio Si f es una función que satisface las hipótesis siguientes:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.

2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe un número c en (a, b) tal que

1 $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o en forma equivalente

2 $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demostrar este teorema, se puede ver su interpretación geométrica. Las figuras 3 y 4 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ en las gráficas de dos funciones derivables. La pendiente de la recta secante AB es

3 $$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es la misma expresión que en el lado derecho de la ecuación 1. Dado que $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la ecuación 1, indica que hay al menos un punto $P(c, f(c))$ en la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante AB. En otras palabras, hay un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB. (Imagine una recta paralela a AB, moviéndose desde lejos manteniéndose paralela hasta que toque la gráfica por primera vez.)

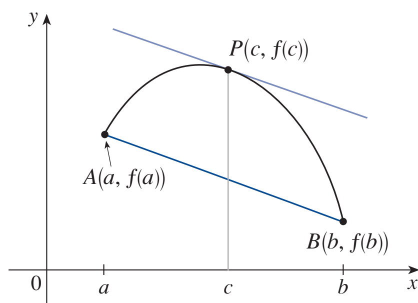


FIGURA 3

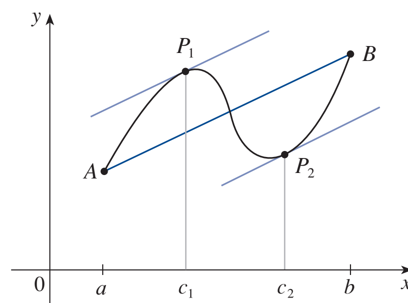


FIGURA 4

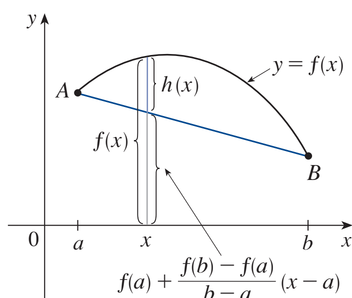


FIGURA 5

Lagrange y el teorema del valor medio

El teorema del valor medio fue formulado primero por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nacido en Italia, de padre francés y madre italiana. Fue un niño prodigio y se convirtió en profesor en Turín a la tierna edad de 19 años. Lagrange hizo grandes contribuciones a la teoría de números, teoría de las funciones, teoría de las ecuaciones y a la mecánica celeste y analítica. En particular, aplicó el cálculo en el análisis de la estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico, el Grande, sucedió a Euler en la Academia de Berlín y, cuando Federico murió, Lagrange aceptó la invitación a París del rey Luis XVI, donde recibió apartamentos en el Louvre y un cargo de profesor en la Escuela Politécnica. A pesar de todos los lujos y la fama, era un hombre tranquilo, que vivía solo para la ciencia.

DEMOSTRACIÓN Se aplicará el teorema de Rolle a una nueva función h definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la recta secante AB. Mediante la ecuación 3, se ve que la ecuación de la recta AB se puede escribir como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Así, como se muestra en la figura 5,

$$\boxed{4} \qquad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Primero, se debe verificar que h satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle.

1. La función h es continua en $[a, b]$ porque es la suma de f y una función polinomial de primer grado, ambas continuas.

2. La función h es derivable en (a, b) ya que f y la función polinomial de primer grado son derivables. De hecho, se puede calcular h' directamente de la ecuación 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Observe que f(a) y $[f(b)$ 2 $f(a)]/(b — a)$ son constantes.)

3.

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$

$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Por tanto, $h(a) = h(b)$.

Dado que h satisface las hipótesis del teorema de Rolle, que indica que existe un número c en (a, b) tal que $h'(c) = 0$, entonces se tiene

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

por lo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ ■

EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, se debe considerar $f(x) = x^3$ — x, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es una función polinomial, es continua y derivable para toda x, por lo que es ciertamente continua sobre $[0, 2]$ y derivable sobre $(0, 2)$. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número c en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2$ — 1, por lo que la ecuación resulta

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

que da $c^2 = \frac{4}{3}$, esto es, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero c debe estar en $(0, 2)$, por lo que $c = 2/\sqrt{3}$.

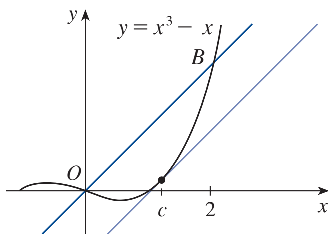


FIGURA 6

La figura 6 ilustra este cálculo: la recta tangente en este valor de c es paralela a la recta secante OB. ■

EJEMPLO 4 Si un objeto se mueve en línea recta de acuerdo con la función posición $s = f(t)$, entonces la velocidad promedio entre $t = a$ y $t = b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la velocidad en $t = c$ es $f'(c)$. Por lo que, el teorema del valor medio (en la forma de la ecuación 1) indica que en algún momento $t = c$ entre a y b la velocidad instantánea $f'(c)$ es igual a la velocidad promedio. Por ejemplo, si un automóvil viajaba 180 km en 2 horas, entonces el velocímetro debía tener una lectura de 90 km/h por lo menos una vez.

En general, el teorema del valor medio se puede interpretar diciendo que existe un número para el cual la razón de cambio instantáneo es igual a la razón de cambio promedio a lo largo de un intervalo. ■

El principal significado del teorema del valor medio es que permite obtener información acerca de una función a partir de aquella acerca de su derivada. En el caso siguiente se proporciona un ejemplo de este principio.

EJEMPLO 5 Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$?

SOLUCIÓN Se parte del hecho de que f es derivable (y, por tanto, continua) en todo su dominio. En particular, se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Existe un número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

por lo que

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Se tiene que $f'(x) \leqslant 5$ para toda x, por lo que, en particular, se sabe que $f'(c) \leqslant 5$. Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por 2, se tiene $2f'(c) \leqslant 10$, por lo que

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

El mayor valor posible para $f(2)$ es 7. ■

El teorema del valor medio se puede utilizar para establecer algunos de los hechos básicos del cálculo diferencial. Uno de estos hechos básicos es el teorema siguiente. Otros se encontrarán en las secciones siguientes.

5 Teorema Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en (a, b), con $x_1 < x_2$. Dado que f es derivable sobre (a, b), debe ser derivable sobre (x_1, x_2) y continua sobre $[x_1, x_2]$. Aplicando el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, se obtiene un número c tal que $x_1 < c < x_2$ y

6
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$ para toda x, se tiene $f'(c) = 0$, por lo que la ecuación 6 resulta

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Por tanto, f tiene el mismo valor que *cualesquiera* dos números x_1 y x_2 en (a, b). Esto significa que f es constante en (a, b). ■

El corolario 7 dice que si dos funciones tienen las mismas derivadas en un intervalo entonces sus gráficas deben ser las traslaciones verticales entre sí. En otras palabras, las gráficas tienen la misma forma, pero podrían estar corridas hacia arriba o hacia abajo.

7 Corolario Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante sobre (a, b); esto es, $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Así, por el teorema 5, F es constante; esto es, $f - g$ es constante. ■

NOTA Cuidado al utilizar el teorema 5. Sea

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de f es $D = \{x \mid x \neq 0\}$ y $f'(x) = 0$ para toda x en D. Pero f, evidentemente, no es una función constante. Esto no contradice el teorema 5 porque D no es un intervalo. Observe que f es constante sobre el intervalo $(0, \infty)$ y también sobre el intervalo $(-\infty, 0)$.

EJEMPLO 6 Demuestre la identidad $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Aunque no es necesario utilizar el cálculo para demostrar esta identidad, la demostración mediante él es muy sencilla. Si $f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

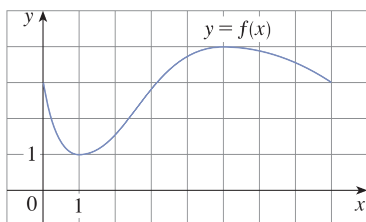
para todos los valores de x. Por tanto, $f(x) = C$, una constante. Para determinar el valor de C, se pone $x = 1$ [porque se puede evaluar $f(1)$ exactamente]. Entonces

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Así, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$. ■

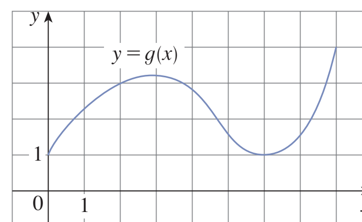
4.2 EJERCICIOS

1. Se muestra la gráfica de una función f. Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 8]. Después encuentre todos los números c en ese intervalo, que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.



2. Dibuje la gráfica de una función definida en [0, 8] tal que $f(0) = f(8) = 3$ y la función no satisface la conclusión del teorema de Rolle en [0, 8].

3. Se muestra la gráfica de una función g.



(a) Verifique que g satisface las hipótesis del teorema de valor medio en el intervalo [0, 8].

(b) Calcule el(los) valor(es) de c que satisfacen la conclusión del teorema de valor medio en el intervalo [0, 8].

(c) Calcule el(los) valor(es) de c que satisfacen la conclusión del teorema de valor medio en el intervalo [2, 6].

4. Dibuje la gráfica de una función que es continua en [0, 8] donde $f(0) = 1$ y $f(8) = 4$ y no satisface la conclusión del teorema de valor medio en [0, 8].

5–8 Verifique que la función satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Luego encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.

5. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \quad [-1, 3]$

6. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2, \quad [-2, 2]$

7. $f(x) = \operatorname{sen}(x/2), \quad [\pi/2, 3\pi/2]$

8. $f(x) = x + 1/x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

9. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$, pero no hay ningún número c en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?

10. Sea $f(x) = \tan x$. Demuestre que $f(0) = f(\pi)$ pero no hay un número c en $(0, \pi)$ tales que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el teorema de Rolle?

11–14 Verifique que la función satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado. Después encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio.

11. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$

12. $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad [-2, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}, \quad [1, 4]$

15–16 Encuentre el número c que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre el intervalo dado. Trace la gráfica de la función, la recta secante a través de los puntos finales y la recta tangente en $(c, f(c))$. ¿Son paralelas la recta secante y la tangente?

15. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

16. $f(x) = e^{-x}, \quad [0, 2]$

17. Sea $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Demuestre que no hay ningún valor de c en $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. ¿Por qué no contradice esto el teorema del valor medio?

18. Sea $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Demuestre que no hay valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

19–20 Demuestre que cada una de las ecuaciones siguientes tiene solo una raíz real.

19. $2x + \cos x = 0$

20. $x^3 + e^x = 0$

21. Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + c = 0$ tiene como máximo una raíz en el intervalo $[-2, 2]$.

22. Demuestre que la ecuación $x^4 + 4x + c = 0$ tiene como máximo dos raíces reales.

23. (a) Demuestre que una polinomial de grado 3 tiene a lo sumo tres raíces reales.

(b) Demuestre que una polinomial de grado n tiene como máximo n raíces reales.

24. (a) Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y tiene dos raíces. Demuestre que f' tiene al menos una raíz.

(b) Suponga que f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y tiene tres raíces. Demuestre que f'' tiene al menos una raíz.

(c) ¿Puede generalizar los incisos (a) y (b)?

25. Si $f(1) = 10$ y $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, ¿qué tan pequeño puede posiblemente ser $f(4)$?

26. Suponga que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. Demuestre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

27. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leqslant 2$ para toda x?

28. Suponga que f y g son continuas sobre $[a, b]$ y derivables sobre (a, b). Suponga también que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demuestre que $f(b) < g(b)$. [*Sugerencia:* utilice el teorema del valor medio para la función $h = f - g$.]

29. Demuestre que $\operatorname{sen} x < x$ si $0 < x < 2\pi$.

30. Suponga que f es una función impar y es derivable sobre todo su dominio. Demuestre que para todo número positivo b, existe un número c *en* $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

31. Utilice el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para toda } a \text{ y } b$$

32. Si $f'(x) = c$ (c es una constante) para toda x, utilice el corolario 7 para demostrar que $f(x) = cx + d$ para alguna constante d.

33. Sea $f(x) = 1/x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en su dominio. ¿Se puede concluir del corolario 7 que $f - g$ es constante?

34. Utilice el método del ejemplo 6 para demostrar la identidad

$$2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

35. Demuestre la identidad $\arcsen \dfrac{x - 1}{x + 1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2}$.

36. A las 14:00 horas el velocímetro de un automóvil marca 50 km/h. A las 14:10 horas marca 65 km/h. Demuestre que en algún momento entre las 14:00 y 14:10 horas la aceleración es exactamente 90 km/h^2.

37. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan en un empate. Demuestre que en algún momento durante la carrera tienen la misma velocidad. [*Sugerencia*: considere $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones de posición de los dos corredores.]

38. Un número a se llama **punto fijo** de una función f si $f(a) = a$. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x, entonces f tiene a lo sumo un punto fijo.

4.3 Cómo las derivadas afectan la forma de una gráfica

Muchas de las aplicaciones del cálculo dependen de nuestra capacidad para deducir hechos acerca de una función f a partir de la información que se obtiene de sus derivadas. Ya que $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, indica la dirección de la curva en cada punto. Así, es razonable esperar que la información relacionada con $f'(x)$ proporcione información asociada con $f(x)$.

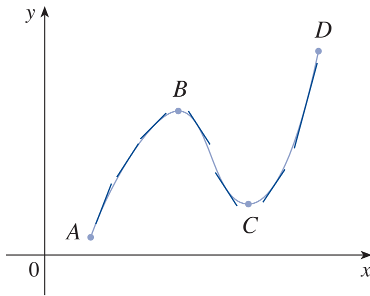


FIGURA 1

¿Qué dice f' respecto a f?

Para ver cómo la derivada de f puede decir dónde una función es creciente o decreciente, véase la figura 1. (Las funciones crecientes y las decrecientes fueron definidas en la sección 1.1.) Entre A y B y entre C y D, las rectas tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x) > 0$. Entre B y C, las rectas tangentes tienen pendiente negativa, por lo que $f'(x) < 0$. Por lo que parece que f crece cuando $f'(x)$ es positiva y decrece cuando $f'(x)$ es negativa. Para demostrar que este siempre es el caso, se usa el teorema del valor medio.

Se abrevia el nombre de esta prueba como Prueba C/D.

Prueba creciente/decreciente

(a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

(b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

DEMOSTRACIÓN

(a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo con $x_1 < x_2$. De acuerdo con la definición de una función creciente (página 19), se tiene que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Debido a que dan $f'(x) > 0$, se sabe que f es derivable en $[x_1, x_2]$, por lo que, por el teorema del valor medio, existe un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora $f'(c) > 0$ suponiendo que $x_2 - x_1 > 0$ ya que $x_1 < x_2$. Así, el lado derecho de la ecuación 1 es positivo, por lo que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

lo que demuestra que f es creciente.

El inciso (b) se demuestra de manera similar. ■

EJEMPLO 1 Encuentre dónde la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y dónde es decreciente.

SOLUCIÓN Se empieza por derivar f:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$$



Para utilizar la prueba C/D se tiene que investigar dónde $f'(x) > 0$ y dónde $f'(x) < 0$. Para resolver estas desigualdades se encuentra primero donde $f'(x) = 0$, es decir, en $x = 0$, 2 y -1. Estos son los números críticos de f, y se divide el dominio en cuatro intervalos (véase la recta numérica de la izquierda). Dentro de cada intervalo, $f'(x)$ debe ser siempre positiva o siempre negativa. (Véanse los ejemplos 3 y 4 en el apéndice A.) Se puede determinar cuál es el caso para cada intervalo a partir de los signos de los tres factores de $f'(x)$, es decir, $12x$, $x - 2$ y $x + 1$, como se muestra en la tabla siguiente. Un signo + indica que la expresión dada es positiva, y un signo − indica que es negativo. La última columna de la tabla da la conclusión basada en la

prueba C/D. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, por lo que f es decreciente en o sobre (0, 2). (También sería correcto decir que f es decreciente en o sobre el intervalo cerrado [0, 2].)

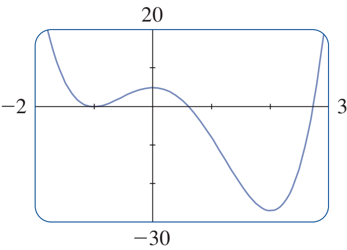


FIGURA 2

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	−	−	−	−	Decreciente sobre $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	−	−	+	+	Creciente sobre $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	+	−	+	−	Decreciente sobre $(0, 2)$
$x > 2$	+	+	+	+	Creciente sobre $(2, \infty)$

La gráfica de f que se muestra en la figura 2 confirma la información de la tabla. ■

Valores extremos locales

Recuerde de la sección 4.1 que si f tiene un máximo o mínimo local en c, entonces c debe ser un número crítico de f (por el teorema de Fermat), pero no todo número crítico da lugar a un máximo o mínimo. Por tanto, se necesita una prueba que diga si f tiene o no máximo o mínimo local en un número crítico.

Puede observarse en la figura 2 que $f(0) = 5$ es un valor máximo local de f porque f crece en $(-1, 0)$ y disminuye en $(0, 2)$. O, en términos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. En otras palabras, el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en 0. Esta observación es la base de la prueba siguiente.

Prueba de la primera derivada Suponga que c es un número crítico de una función continua f.

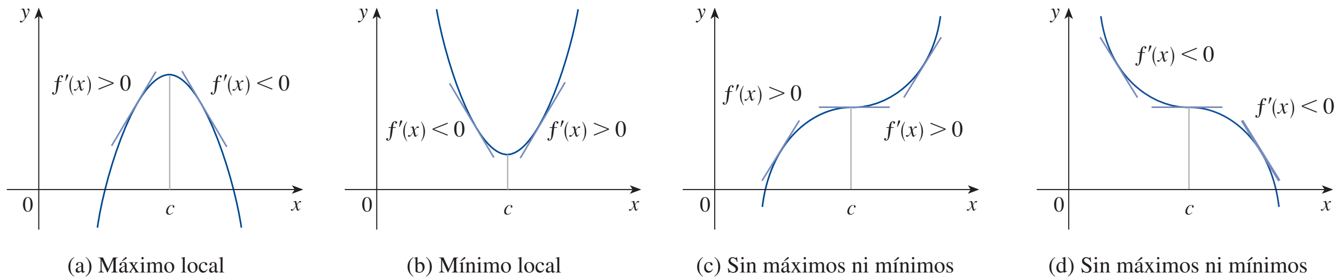
(a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

(b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

(c) Si f' es positiva por ambos lados de c, o negativa por ambos lados de c, entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

La prueba de la primera derivada es una consecuencia de la prueba C/D. En el inciso (a), por ejemplo, puesto que el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, f es creciente por la izquierda de c y decreciente por la derecha de c. Se deduce entonces que f tiene un máximo local en c.

Es fácil recordar la prueba de la primera derivada al ver el comportamiento de gráficas como las de la figura 3.



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Sin máximos ni mínimos (d) Sin máximos ni mínimos

FIGURA 3

EJEMPLO 2 Encuentre los valores mínimos y máximos locales de la función f en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN De la tabla en la solución del ejemplo 1 se ve que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en -1, por lo que $f(-1) = 0$ es un valor mínimo local por la prueba de la primera derivada. Del mismo modo, f' cambia de negativa a positiva en 2, por lo que $f(2) = -27$ también es un valor mínimo local. Como se ha indicado anteriormente, $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en 0. ■

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN Para encontrar los números críticos de g, se deriva:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Por lo que $g'(x) = 0$ cuando $\cos x = -\frac{1}{2}$. Las soluciones de esta ecuación son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Debido a que g es derivable para toda x, los únicos números críticos son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Se separa el dominio en intervalos de acuerdo con los números críticos. Dentro de cada intervalo, $g'(x)$ es ya sea siempre positiva o siempre negativa, por lo que se puede analizar g en la tabla siguiente.

Los signos + en la tabla vienen del hecho de que $g'(x) > 0$ cuando $\cos x > -\frac{1}{2}$. A partir de la gráfica de $y = \cos x$, esto es cierto en los intervalos indicados.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	Creciente en $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	Decreciente en $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	Creciente en $(4\pi/3, 2\pi)$

Ya que $g'(x)$ cambia de positiva a negativa en $2\pi/3$, la prueba de la primera derivada nos indica que existe un máximo local en $2\pi/3$ y el máximo valor local es

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

Asimismo, $g'(x)$ cambia de negativa a positiva en $4\pi/3$ y, por tanto,

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

es un valor mínimo local. La gráfica de g en la figura 4 apoya la conclusión. ■

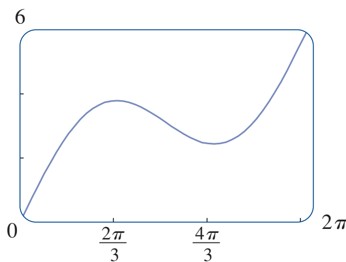


FIGURA 4
$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

■ ¿Qué dice f'' respecto a f?

La figura 5 muestra las gráficas de dos funciones crecientes sobre (a, b). Ambas gráficas unen el punto A al punto B, pero parecen diferentes porque se doblan en diferentes direcciones. ¿Cómo se puede distinguir entre estos dos tipos de comportamiento?

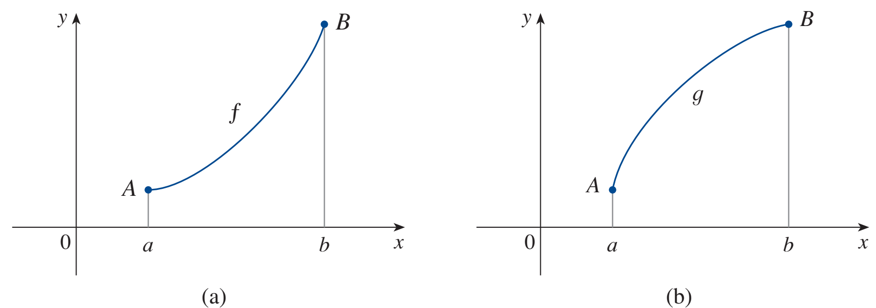
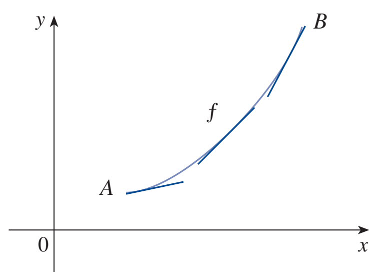
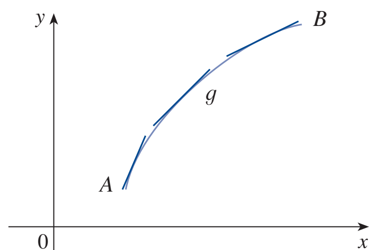


FIGURA 5



(a) Cóncava hacia arriba



(b) Cóncava hacia abajo

FIGURA 6

En la figura 6, las rectas tangentes a estas curvas se han dibujado en varios puntos. En (a) la curva se encuentra arriba de las rectas tangentes y se dice que f es *cóncava hacia arriba* en (a, b). En (b), la curva se encuentra debajo de las rectas tangentes y g se llama *cóncava hacia abajo* en (a, b).

Definición Si la gráfica de f se encuentra arriba de todas sus rectas tangentes en un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** en I. Si la gráfica de f se encuentra abajo de todas sus rectas tangentes en I, se dice que es **cóncava hacia abajo** en I.

La figura 7 muestra la gráfica de una función que es cóncava hacia arriba (abreviado CA) sobre los intervalos (b, c), (d, e) y (e, p), y cóncava hacia abajo (CB) sobre los intervalos (a, b), (c, d) y (p, q).

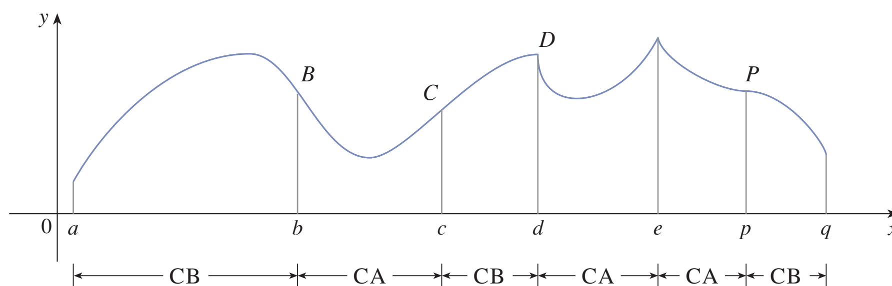


FIGURA 7

Véase cómo la segunda derivada ayuda a determinar los intervalos de concavidad. Al observar la figura 6(a), se puede ver que, de izquierda a derecha, la pendiente de la recta tangente es creciente. Esto significa que la derivada f' es una función creciente y, por tanto, su derivada f'' es positiva. Asimismo, en la figura 6(b) la pendiente de la recta tangente decrece de izquierda a derecha, por lo que f' decrece y, por tanto, f'' es negativa. Este razonamiento se puede invertir y sugiere que el teorema siguiente es verdadero. En el apéndice F se da una demostración con la ayuda del teorema del valor medio.

Prueba de concavidad

(a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

(b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

EJEMPLO 4 La figura 8 muestra una gráfica de la población de abejas de Chipre criadas en un colmenar. ¿Cómo cambia la tasa de crecimiento poblacional con el tiempo? ¿Cuándo esta tasa es más alta? ¿Sobre qué intervalos es P cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

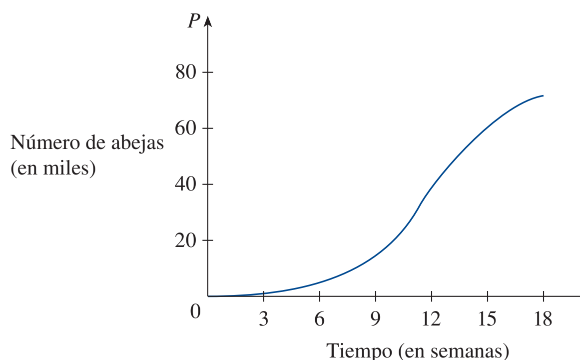


FIGURA 8

SOLUCIÓN Observando la pendiente de la curva cuando t aumenta, se ve que la tasa de crecimiento de la población es inicialmente muy pequeña, después aumenta hasta que llega a un máximo aproximadamente de $t = 12$ semanas y disminuye a medida que la población comienza a nivelarse. A medida que la población se acerca a su valor máximo de aproximadamente 75 000 (llamado la *capacidad de carga*), la tasa de crecimiento, $P'(t)$, se aproxima a 0. La curva parece ser cóncava hacia arriba en (0, 12) y cóncava hacia abajo en (12, 18). ■

En el ejemplo 4, la curva de la población ha cambiado de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en aproximadamente el punto (12, 38 000). Este punto se denomina *punto de inflexión* de la curva. La importancia de este punto es que la tasa de crecimiento de la población tiene allí su valor máximo. En general, un punto de inflexión es aquel donde una curva cambia de dirección la concavidad.

Definición Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama **punto de inflexión** si f es continua ahí y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Por ejemplo, en la figura 7, B, C, D y P son los puntos de inflexión. Observe que si una curva tiene una recta tangente en un punto de inflexión, entonces la curva corta la recta tangente en ese punto.

De acuerdo con la prueba de concavidad, existe un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

EJEMPLO 5 Trace una posible gráfica de una función f que cumpla con las condiciones siguientes:

(i) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $\quad f'(x) < 0$ en $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $\quad f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

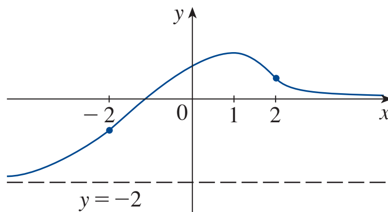


FIGURA 9

SOLUCIÓN La condición (i) indica que f es creciente sobre $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$. La condición (ii) dice que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-2, 2)$. De la condición (iii) se sabe que la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales: $y = -2$ (hacia la izquierda) e $y = 0$ (hacia la derecha).

Primero se dibuja la asíntota horizontal $y = -2$ como una recta discontinua (véase la figura 9). Después se dibuja la gráfica de f aproximándose a esta asíntota hacia el extremo izquierdo, creciendo a su punto máximo en $x = 1$ y decreciendo hacia el eje x hacia el extremo derecho. También se asegura que la gráfica tiene puntos de inflexión cuando $x = -2$ y $x = 2$. Observe que se hizo que la curva se doble hacia arriba para $x < -2$ y $x > 2$, y se doble hacia abajo cuando x está entre -2 y 2. ■

Otra aplicación de la segunda derivada es la prueba siguiente para los valores máximos y mínimos. Esta es una consecuencia de la prueba de concavidad, y sirve como una alternativa a la prueba de la primera derivada.

Prueba de la segunda derivada Suponga que f'' es continua cerca de c.

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.

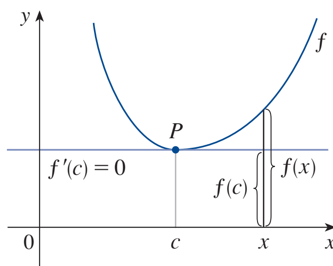


FIGURA 10
$f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba

Por ejemplo, el inciso (a) es cierto porque $f''(x) > 0$ cerca de c y, por tanto, f es cóncava hacia arriba cerca de c. Esto significa que la gráfica de f se encuentra arriba de su recta tangente horizontal en c y, por tanto, f tiene un mínimo local en c. (Véase la figura 10.)

EJEMPLO 6 Analice la curva $y = x^4 - 4x^3$ respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximo y mínimo local. Utilice esta información para trazar la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para encontrar los números críticos se hace $f'(x) = 0$ para obtener $x = 0$ y $x = 3$. (Observe que f' es una polinomial y por tanto está definida donde sea.) Para utilizar la prueba de la segunda derivada se evalúa f'' en estos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Ya que $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. [De hecho, la expresión para $f'(x)$ demuestra que f decrece a la izquierda de 3 y crece a la derecha de 3.] Como $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no da información sobre el número crítico 0. Pero ya que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada dice que f no tiene un máximo o mínimo local en 0.

Puesto que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 2$, se divide la recta real en intervalos con estos números como puntos finales y se completa la tabla siguiente.

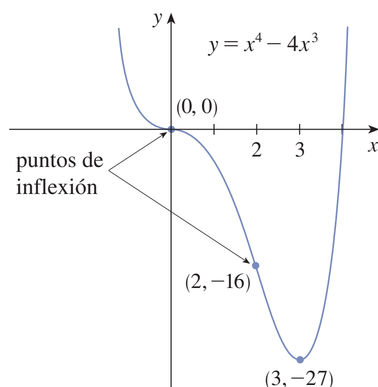


FIGURA 11

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	+	hacia arriba
$(0, 2)$	−	hacia abajo
$(2, \infty)$	+	hacia arriba

El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión, ya que la curva cambia ahí de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. También $(2, -16)$ es un punto de inflexión, ya que allí la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Utilizando el mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, se traza la curva de la figura 11. ■

NOTA La prueba de la segunda derivada es incierta cuando $f''(c) = 0$. En otras palabras, en tal punto puede haber un máximo, puede haber un mínimo, o podría no haber máximo o mínimo (como en el ejemplo 6). Esta prueba también falla cuando $f''(c)$ no existe. En estos casos, se debe utilizar la prueba de la primera derivada. De hecho, aun cuando se aplican ambas pruebas, la prueba de la primera derivada es a menudo más fácil de utilizar.

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

SOLUCIÓN Con las primeras dos derivadas se obtiene

Utilice las reglas de derivación para verificar estos cálculos.

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

Ya que $f'(x) = 0$ cuando $x = 4$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4 y 6.

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decreciente en $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	creciente en $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decreciente en $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decreciente en $(6, \infty)$

Para encontrar los valores extremos locales se utiliza la prueba de la primera derivada. Puesto que f' cambia de negativa a positiva en $x = 0$, $f(0) = 0$ es un mínimo local. Ya que f' cambia de positiva a negativa en $x = 4$, $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no cambia en $x = 6$, por lo que no hay mínimo o máximo. (La prueba de la segunda derivada se podría utilizar en $x = 4$, pero no en 0 o 6 ya que f'' no existe en ninguno de estos números.)

Observando la expresión para $f''(x)$ y tomando nota de que $x^{4/3} \geqslant 0$ para toda x, se tiene $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y para $0 < x < 6$, y $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Por lo que f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$ y cóncava hacia arriba en $(6, \infty)$, y el único punto de inflexión es $(6, 0)$. La gráfica se traza en la figura 12. Observe que la curva tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$ y $(6, 0)$ debido a que $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to 6$. ■

Intente reproducir la gráfica de la figura 12 con una calculadora graficadora o una computadora. Algunas máquinas producen la gráfica completa, algunas generan únicamente la parte de la derecha del eje y, y algunas otras producen únicamente la parte entre $x = 0$ y $x = 6$. Para una explicación y resolución de esto, véase el ejemplo 7 en "Graphing Calculators and Computers" en www.stewartcalculus.com. Una expresión equivalente que da la gráfica correcta es

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6 - x}{|6 - x|} |6 - x|^{1/3}$$

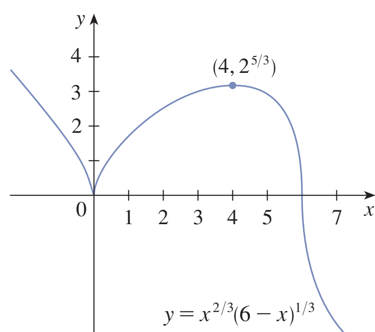


FIGURA 12

EJEMPLO 8 Utilice la primera y segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto con las asíntotas, para trazar su gráfica.

SOLUCIÓN Observe que el dominio de f es $\{x \mid x \neq 0\}$, por lo que se comprueba para asíntotas verticales calculando los límites por la izquierda y por la derecha cuando $x \to 0$. Cuando $x \to 0^+$, se sabe que $t = 1/x \to \infty$, por lo que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

y esto demuestra que $x = 0$ es una asíntota vertical. Cuando $x \to 0^-$, se tiene que $t = 1/x \to -\infty$, por lo que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

Cuando $x \to \pm\infty$, se tiene $1/x \to 0$ por lo que

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Esto demuestra que $y = 1$ es una asíntota horizontal (tanto a la izquierda como a la derecha).

Ahora se va a calcular la derivada. La regla de la cadena da

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Como $e^{1/x} > 0$ y $x^2 > 0$ para toda $x \neq 0$, se tiene $f'(x) < 0$ para toda $x \neq 0$. Por lo que f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$. No hay un número crítico, por lo que la función no tiene máximos ni mínimos locales. La segunda derivada es

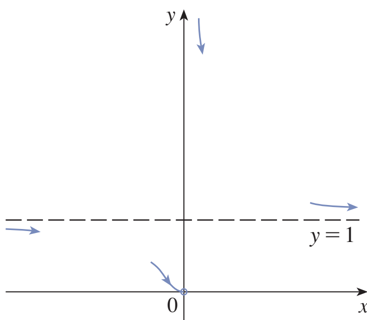
$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

Puesto que $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$ se tiene $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. Por lo que f es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y en $(0, \infty)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

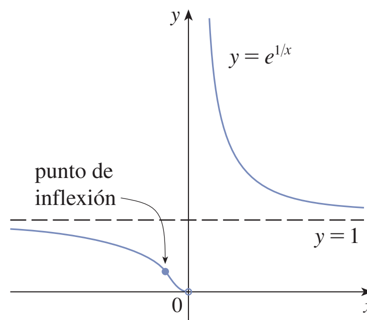
TEC En Module 4.3 puede usted practicar usando la información relacionada con f', f'' y las asíntotas para determinar la forma de la gráfica de f.

Para trazar la gráfica de f se dibuja primero la asíntota horizontal $y = 1$ (como una recta discontinua), junto con las partes de la curva cerca de la asíntota en un trazo

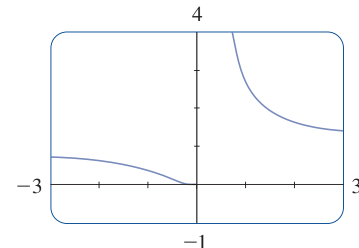
preliminar [figura 13(a)]. Estas partes reflejan la información relativa a los límites y el hecho de que f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Observe que se ha indicado que $f(x) \to 0$ conforme $x \to 0^-$, a pesar de que $f(0)$ no existe. En la figura 13(b) se termina el trazo incorporando la información relativa a la concavidad y el punto de inflexión. En la figura 13(c) se revisa el trabajo con un dispositivo graficador.



(a) Trazo preliminar



(b) Trazo terminado



(c) Confirmación de la computadora

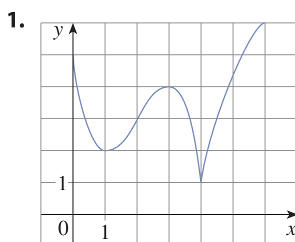
FIGURA 13

4.3 EJERCICIOS

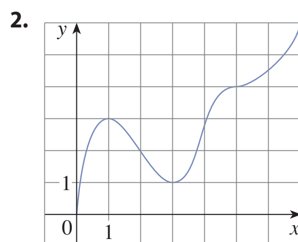
1–2 Utilice la gráfica de f para encontrar lo siguiente.

(a) Los intervalos abiertos en los que f es creciente.
(b) Los intervalos abiertos en los que f es decreciente.
(c) Los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia arriba.
(d) Los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia abajo.
(e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

1.



2.



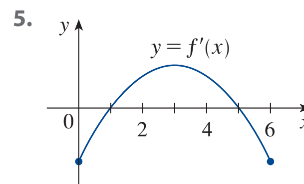
3. Suponga que se le da una fórmula para una función f.
(a) ¿Cómo determinaría dónde f es creciente o decreciente?
(b) ¿Cómo determinaría dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
(c) ¿Dónde se localizan los puntos de inflexión?

4. (a) Establezca la prueba de la primera derivada.
(b) Establezca la prueba de la segunda derivada. ¿Bajo qué circunstancias no son concluyentes? ¿Qué haría si no es válida?

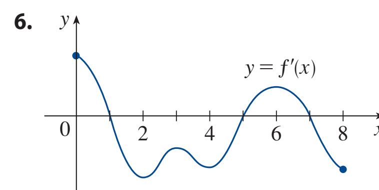
5–6 En los ejercicios 5 y 6, se muestran las gráficas de la *derivada* f' de una función f.

(a) ¿En qué intervalos f crece o decrece?
(b) ¿Para qué valores de x, f tiene un máximo o mínimo local?

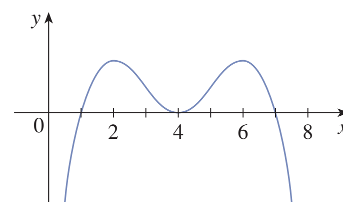
5.



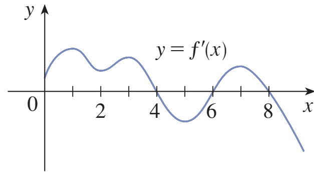
6.



7. En cada inciso establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión de f. Dé las razones de sus respuestas.
(a) La curva dada es la gráfica de f.
(b) La curva dada es la gráfica de f'.
(c) La curva dada es la gráfica de f''.



8. Se muestra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.
(a) ¿Sobre qué intervalos f es creciente? Explique.
(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.
(c) ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.
(d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



9–18
(a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.
(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

9. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

10. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f utilizando las pruebas de la primera y la segunda derivada. ¿Qué método prefiere?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

22. (a) Encuentre los números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) ¿Qué le dice la prueba de la segunda derivada acerca del comportamiento de f en estos números críticos?
(c) ¿Qué le dice la prueba de la primera derivada?

23. Suponga que f'' es continua en $(-\infty, \infty)$.
(a) Si $f'(2) = 0$ y $f''(2) = -5$, ¿qué puede decir acerca de f?
(b) Si $f'(6) = 0$ y $f''(6) = 0$, ¿qué puede decir acerca de f?

24–31 Trace la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones. dadas.

24. (a) $f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x
(b) $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x

25. (a) $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x
(b) $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x

26. $f'(1) = f'(-1) = 0, \quad f'(x) < 0$ si $|x| < 1$.
$f'(x) > 0$ si $1 < |x| > 2, \quad f'(x) = -1$ si $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0$, punto de inflexión $(0, 1)$

27. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 3, \quad f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

28. $f(x) > 0$ para toda $x \neq 1$, asíntota vertical $x = 1$,
$f''(x) > 0$ si $x < 1$ o $x > 3, \quad f''(x) < 0$ si $1 < x < 3$

29. $f'(5) = 0, \quad f'(x) < 0$ cuando $x < 5$,
$f'(x) > 0$ cuando $x > 5, \quad f''(2) = 0, f''(8) = 0$,
$f''(x) < 0$ cuando $x < 2$ o $x > 8$,
$f''(x) > 0$ para $2 < x < 8, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

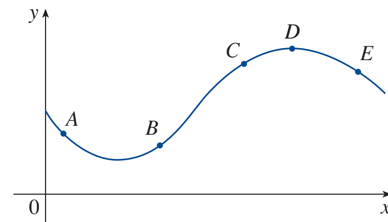
30. $f'(0) = f'(4) = 0, \quad f'(x) = 1$ si $x < -1$
$f'(x) > 0$ si $0 < x < 2$,
$f'(x) < 0$ si $-1 < x < 0$ o $2 < x < 4$ o $x > 4$
$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = -\infty$,
$f''(x) > 0$ si $-1 < x < 2$ o $2 < x < 4$,
$f''(x) < 0$ si $x > 4$

31. $f'(x) > 0$ si $x \neq 2, \quad f''(x) > 0$ si $x < 2$,
$f''(x) < 0$ si $x > 2$, f tiene punto de inflexión en $(2, 5)$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 8, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

32. Suponga que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ y $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x.
(a) Trace una posible gráfica para f.
(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$? ¿Por qué?
(c) ¿Es posible que $f'(2) = \frac{1}{3}$? ¿Por qué?

33. Suponga que f es una función continua donde $f(x) > 0$ para toda x, $f(0) = 4, \quad f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $x > 2$, $f'(x) < 0$ si $0 < x < 2, \quad f''(-1) = f''(1) = 0, \quad f''(x) > 0$ si $x < -1$ o $x > 1, \quad f''(x) < 0$ si $-1 < x < 1$.
(a) ¿Puede f tener un máximo absoluto? Si es así, trace una gráfica posible de f. Si no, explique por qué.
(b) ¿Puede f tener un mínimo absoluto? Si es así, trace una gráfica posible de f. Si no, explique por qué.
(c) Trace una gráfica posible para f que *no* alcance un mínimo absoluto.

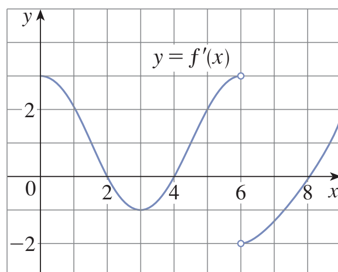
34. Se muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos?
(a) $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ son ambas positivas.
(b) $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ son ambas negativas.
(c) $\dfrac{dy}{dx}$ es negativa pero $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es positiva.



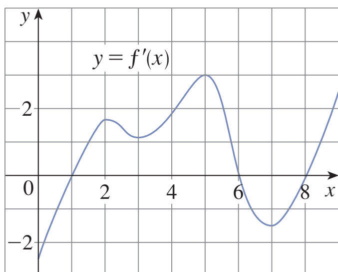
35–36 Se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.

(a) ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Decreciente?
(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿Y un mínimo local?
(c) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba? ¿Cóncava hacia abajo?
(d) Establezca las coordenadas x de los puntos de inflexión.
(e) Suponiendo que $f(0) = 0$, trace una gráfica de f.

35.



36.



37–48

(a) Encuentre los intervalos donde crece o decrece.
(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(d) Utilice la información de los incisos (a)-(c) para trazar la gráfica. Si tiene un dispositivo graficador, verifique sus respuestas.

37. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **38.** $f(x) = 2 + 3x - x^3$

39. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 3$ **40.** $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

41. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$ **42.** $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

43. $F(x) = x\sqrt{6 - x}$ **44.** $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

45. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$ **46.** $f(x) = \ln(x^2 + 9)$

47. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

48. $S(x) = x - \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

49–56

(a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
(b) Encuentre los intervalos donde crece o decrece.
(c) Determine los valores máximos y mínimos locales.
(d) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(e) Utilice la información de los incisos (a)-(d) para trazar la gráfica de f.

49. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **50.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

51. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ **52.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

53. $f(x) = e^{-x^2}$ **54.** $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

55. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ **56.** $f(x) = e^{\arctan x}$

57. Suponga que la derivada de una función f es $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. ¿En qué intervalo es f creciente?

58. Utilice los métodos de esta sección para trazar la curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, donde a es una constante positiva. ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de curvas? ¿Cómo difieren entre sí?

59–60

(a) Utilice la gráfica de f para estimar los valores máximos y mínimos. Después, encuentre los valores exactos.
(b) Estime el valor de x en el cual f crece más rápidamente. Luego, encuentre el valor exacto.

59. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **60.** $f(x) = x^2 e^{-x}$

61–62

(a) Utilice la gráfica de f para dar una estimación aproximada de los intervalos de concavidad y de las coordenadas de los puntos de inflexión.
(b) Utilice la gráfica de f'' para dar estimaciones mejores.

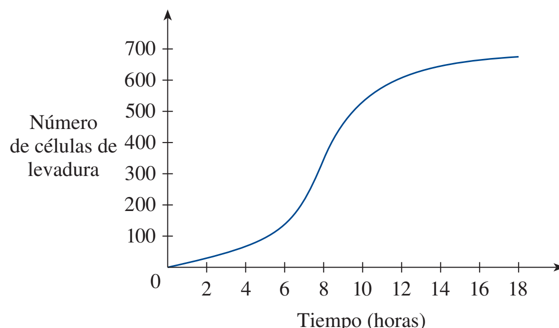
61. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

62. $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^3$

SAC **63–64** Estime los intervalos de concavidad redondeados a un decimal mediante un sistema algebraico computacional y la gráfica de f''.

63. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ **64.** $f(x) = \dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^3}$

65. Se muestra la gráfica de una población de células de levadura en un cultivo de un reciente laboratorio como una función del tiempo.



(a) Describa cómo varía la tasa de crecimiento de la población.

(b) ¿Cuándo la tasa es más alta?
(c) ¿En qué intervalos es la función de población cóncava hacia arriba o hacia abajo?
(d) Estime las coordenadas del punto de inflexión.

66. En las noticias nacionales en la televisión, el locutor dijo: "¡Aquí tenemos una buena noticia! Este año se logró que las calificaciones disminuyeran a un ritmo más lento". Interprete los enunciados del locutor en términos de una función y sus primeras y segundas derivadas.

67. El secretario de economía del gobierno anuncia que el déficit nacional va en aumento, pero a un ritmo decreciente. Interprete este enunciado en términos de una función y sus primeras y segundas derivadas.

68. Sea $f(t)$ la temperatura en el tiempo t donde usted vive y suponga que en el tiempo $t = 3$ se siente incómodamente acalorado. ¿Cómo se siente en relación con los datos dados en cada caso?
(a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$
(b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$
(c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$
(d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

69. Sea $K(t)$ una medida de los conocimientos que obtiene usted estudiando durante t horas para un examen. ¿Cuál cree que es más grande, $K(8) - K(7)$ o $K(3) - K(2)$? ¿Es la gráfica de K cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? ¿Por qué?

70. Se vierte café en una jarrita como la que se ilustra en la figura, con una rapidez constante (medida en unidades de volumen por unidad de tiempo). Trace una gráfica aproximada de la altura ocupada por el café como función del tiempo. Explique la forma de la gráfica en términos de la concavidad. ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?



71. Una *curva de respuesta a un medicamento* describe el nivel de medicación en el torrente sanguíneo después de que un medicamento es administrado. Con frecuencia se aplica una función de onda de impulso $S(t) = At^p e^{-kt}$ para modelar la curva de respuesta, lo que refleja un aumento inicial en el nivel de medicamento y luego un descenso más gradual. Si, para un medicamento particular, $A = 0.01$, $p = 4$, $k = 0.07$ y t se mide en minutos, calcule los tiempos correspondientes a los puntos de inflexión y explique su significado. Si usted dispone de un dispositivo graficador, utilícelo para trazar la gráfica de la curva de respuesta.

72. La familia de curvas de campana

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

se utiliza en probabilidad y estadística y se le denomina *función de densidad normal*. La constante μ se conoce como *media*, y la constante positiva σ es la *desviación estándar*. Por simplicidad, se cambia la escala de la función de modo que se elimine el factor $(1/\sigma\sqrt{2\pi})$ y se analiza el caso especial donde $\mu = 0$. Por tanto, se estudia la función

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encuentre la asíntota, el valor máximo y los puntos de inflexión de f.
(b) ¿Qué papel tiene σ en la forma de la curva?
(c) Ilustre al trazar la gráfica de cuatro miembros de esta familia en la misma pantalla del dispositivo graficador.

73. Encuentre una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga un valor máximo local de 3 en $x = -2$ y un valor mínimo local de 0 en $x = 1$.

74. ¿Para qué valores de los números a y b la función

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tiene el valor máximo $f(2) = 1$?

75. (a) Si la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene el valor mínimo local $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ en $x = 1/\sqrt{3}$, ¿cuáles son los valores de a y b?
(b) ¿Cuál de las rectas tangentes a la curva en el inciso (a) tiene la menor pendiente?

76. ¿Para qué valores de a y b es $(2, 2.5)$ y un punto de inflexión de la curva $x^2y + ax + by = 0$? ¿Qué puntos de inflexión adicionales tiene la curva?

77. Demuestre que la curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tiene tres puntos de inflexión y todos ellos se encuentran sobre una recta.

78. Demuestre que las curvas $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$ tocan la curva $y = e^{-x}$ sen x en sus puntos de inflexión.

79. Demuestre que los puntos de inflexión de la curva $y = x$ sen x están sobre la curva $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$.

80–82 Suponga que todas las funciones son dos veces derivables y las segundas derivadas nunca son 0.

80. (a) Si f y g son cóncavas hacia arriba en I, demuestre que $f + g$ es cóncava hacia arriba en I.
(b) Si f es positiva y cóncava hacia arriba en I, demuestre que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba en I.

81. (a) Si f y g son positivas, crecientes y funciones cóncavas hacia arriba en I, demuestre que la función producto fg es cóncava hacia arriba en I.
(b) Demuestre que el inciso (a) es verdadero si f y g son decrecientes.
(c) Suponga que f es creciente y g es decreciente. Muestre, dando tres ejemplos, que fg puede ser cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o lineal. ¿Por qué no funciona en este caso el argumento de los incisos (a) y (b)?

82. Suponga que f y g son cóncavas hacia arriba en $(-\infty, \infty)$. ¿Bajo qué condiciones sobre f será la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ cóncava hacia arriba?

83. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugerencia*: demuestre que $f(x) = \tan x - x$ es creciente en $(0, \pi/2)$.]

84. (a) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.
(b) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.
(c) Use inducción matemática para demostrar que para $x \geqslant 0$ y cualquier número entero positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

85. Demuestre que una función cúbica (una polinomial de tercer grado) siempre tiene exactamente un punto de inflexión. Si la gráfica tiene tres intersecciones en x: x_1, x_2 y x_3, demuestre que la coordenada x del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

86. ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tiene dos puntos de inflexión? ¿Un punto de inflexión? ¿Ninguno? Ilustre al trazar la gráfica de P para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c decrece?

87. Demuestre que si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f y f'' existe en un intervalo abierto que contiene a c, entonces $f''(c) = 0$. [*Sugerencia*: aplique la prueba de la primera derivada y el teorema de Fermat a la función $g = f'$.]

88. Demuestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

89. Demuestre que la función $g(x) = x\,|\,x\,|$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, pero $g''(0)$ no existe.

90. Suponga que f''' es continua y $f'(c) = f''(c) = 0$, pero $f'''(c) > 0$. ¿f tiene un máximo o mínimo local en c? ¿f tiene un punto de inflexión en c?

91. Suponga que f es derivable sobre un intervalo I y $f'(x) > 0$ para todos los números x en I, excepto por un único número c. Demuestre que f es creciente sobre todo el intervalo I.

92. Para qué valores de c la función

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + 3}$$

es creciente sobre $(-\infty, \infty)$?

93. Los tres casos en la prueba de la primera derivada cubren las situaciones que uno se encuentra con frecuencia, pero no agotan todas las posibilidades. Considere las funciones f, g y h cuyos valores en 0 son todas cero y, para $x \neq 0$,

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

(a) Demuestre que 0 es un número crítico de las tres funciones, pero sus derivadas cambian de signo infinitamente por ambos lados de 0.
(b) Demuestre que f no tiene un máximo local ni un mínimo local en 0, g tiene un mínimo local y h tiene un máximo local.

4.4 Formas indeterminadas y regla de L'Hôpital

Suponga que se trata de analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aunque F no está definida cuando $x = 1$, se necesita saber cómo se comporta *cerca* de 1. En particular, le gustaría saber el valor del límite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Para el cálculo de este límite no se puede aplicar la ley 5 de los límites (el límite de un cociente es el cociente de los límites, consulte la sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aunque en la expresión (1) existe el límite, su valor no es obvio porque el numerador y denominador tienden a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido.

En general, si se tiene un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to 0$ como $g(x) \to 0$ conforme $x \to a$, entonces este límite puede o no puede existir y se llama **forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.** Se encuentran algunos límites de este tipo en el capítulo 2. Para funciones racionales, se pueden eliminar factores comunes:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

Se utiliza un argumento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Pero estos métodos no funcionan para límites como los de (1), por lo que en esta sección se presenta un método sistemático, conocido como *regla de L'Hôpital*, para la evaluación de formas indeterminadas.

Otra situación en la que no es evidente un límite es cuando se busca una asíntota horizontal de F y se necesita evaluar el límite

2 $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

No es obvio cómo evaluar este límite porque tanto el numerador como el denominador son muy grandes conforme $x \to \infty$. Hay una lucha entre numerador y denominador. Si gana el numerador, el límite será ∞ (el numerador crece significativamente más rápido que el denominador); si gana el denominador, la respuesta será 0. O puede haber algún comportamiento intermedio, en cuyo caso la respuesta será algún número finito positivo.

En general, si se tiene un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde ambos $f(x) \to \infty$ (o $-\infty$) y $g(x) \to \infty$ (o $-\infty$), entonces el límite puede o no puede existir y se llama **forma indeterminada de tipo ∞/∞**. Se vio en la sección 2.6 que este tipo de límite se puede evaluar para ciertas funciones, incluyendo funciones racionales, dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de x en el denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Este método no funciona para límites como (2), pero la regla de L'Hôpital también se aplica a este tipo de forma indeterminada.

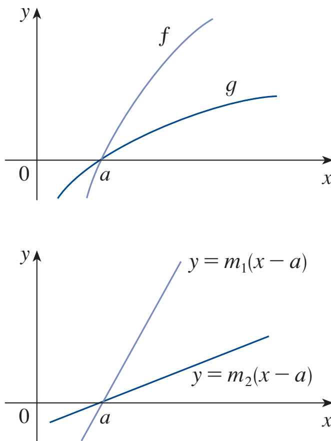


FIGURA 1

La figura 1 sugiere visualmente por qué la regla de L'Hôpital puede ser cierta. La primera gráfica muestra dos funciones derivables f y g, donde ambas se acercan a 0 cuando $x \to a$. Si se pudiera acercar hacia el punto $(a, 0)$, las gráficas empezarían a parecerse a una recta. Pero si realmente las funciones *fueran* lineales, como en la segunda gráfica, entonces su razón sería

$$\frac{m_1(x - a)}{m_2(x - a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

que es la razón de sus derivadas. Esto sugiere que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regla de L'Hôpital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que $$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, se tiene una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite del lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

NOTA 1 La regla de L'Hôpital indica que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se cumpla con las condiciones

dadas. Es especialmente importante verificar las condiciones impuestas a los límites de f y g antes de utilizar la regla de L'Hôpital.

L'Hôpital

La regla de L'Hôpital proviene de un noble francés, el marqués de L'Hôpital (1661-1704), pero fue descubierto por un matemático suizo, John Bernoulli (1667-1748). A veces se puede ver L'Hôpital escrito como l'Hôspital, pero él mismo escribe su nombre así, L'Hôpital, como era común en el siglo XVII. Véase en el ejercicio 83 el ejemplo que el marqués utiliza para ilustrar su regla. Consulte el proyecto en la página 314 para más detalles históricos.

NOTA 2 La regla de L'Hôpital también es válida para límites unilaterales y límites al infinito o al infinito negativo; es decir, "$x \to a$" se puede sustituir por cualesquiera de los símbolos $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

NOTA 3 Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de L'Hôpital es cierta. De hecho, utilizando la forma alternativa de la definición de una derivada, se tiene

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad [\text{ya que } f(a) = g(a) = 0]$$

Es más difícil demostrar la versión general de la regla de L'Hôpital. Véase el apéndice F.

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Dado que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

El límite es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

Observe que cuando se utiliza la regla de L'Hôpital se deriva el numerador y el denominador *por separado*. *No* se utiliza la regla del cociente.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$ ■

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 2. Se ha analizado previamente que las funciones exponenciales crecen más rápido que las funciones potencia, por lo que el resultado del ejemplo 2 no es inesperado. Véase el ejercicio 73.

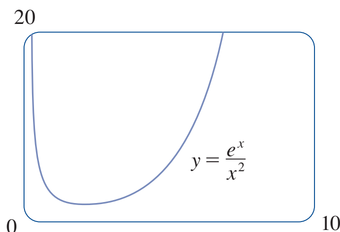


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Se tiene $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, por lo que el límite tiene una forma indeterminada del tipo ∞/∞, y la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Ya que $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ conforme $x \to \infty$ el límite del lado derecho también está indeterminado, pero aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$ ■

En la figura 3, se muestra la gráfica de la función del ejemplo 3. Ya se ha discutido previamente que las funciones logarítmicas crecen muy lentamente, por lo que no es sorprendente que la razón se aproxime a 0 cuando $x \to \infty$. Véase también el ejercicio 74.

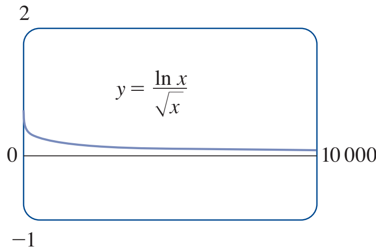


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN Dado que $\ln x \to \infty$ y $\sqrt{x} \to \infty$ conforme $x \to \infty$, se utiliza la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}$$

Observe que ahora el límite del lado derecho es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Pero en lugar de aplicar la regla de L'Hôpital una segunda vez, como se hizo en el ejemplo 2, primero se simplificó la expresión y se ve que la segunda aplicación no es necesaria:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$ ■

En los ejemplos 2 y 3 se evaluaron límites de tipo ∞/∞, pero se tienen dos resultados diferentes. En el ejemplo 2, el límite infinito dice que el numerador e^x aumenta significativamente más rápido que el denominador x^2, dando como resultado cocientes mayores. De hecho, $y = e^x$ crece más rápido que todas las funciones potencia $y = x^n$ (véase el ejercicio 73). En el ejemplo 3 se tiene la situación opuesta; el límite de 0 significa que el denominador supera con creces el numerador y el cociente finalmente tiende a 0.

EJEMPLO 4 Determine $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$. (Véase el ejercicio 2.2.50.)

SOLUCIÓN Se observa que tanto $\tan x - x \to 0$ como $x^3 \to 0$ cuando $x \to 0$, por lo que se aplica la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Ya que el límite del lado derecho es aún una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se vuelve a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

Puesto que $\lim_{x \to 0} \sec^2 x = 1$, se simplifica el cálculo escribiendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \sec^2 x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

La gráfica en la figura 4 da una confirmación visual del resultado del ejemplo 4. Sin embargo, si se tuviera que extender demasiado, se obtendría una gráfica muy inexacta porque $\tan x$ está cerca de x cuando esta es pequeña. Véase el ejercicio 2.2.50(d).

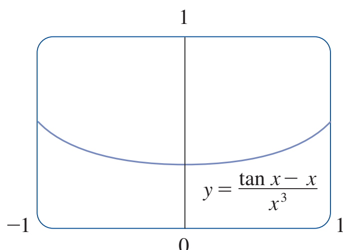


FIGURA 4

Se puede evaluar este último límite utilizando la regla de L'Hôpital por tercera vez o escribiendo la $\tan x$ como $(\text{sen } x)/(\cos x)$ y recurriendo al conocimiento de límites trigonométricos. Haciendo todos estos pasos, se obtiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$ ■

EJEMPLO 5 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si se intenta utilizar a ciegas la regla de L'Hôpital, se obtendría

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\infty$$

¡Esto es erróneo! Aunque el numerador sen $x \to 0$ conforme $x \to \pi^-$, observe que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, por lo que aquí no es posible aplicar la regla de L'Hôpital.

El límite requerido es, de hecho, fácil de encontrar porque la función es continua en π y el denominador es distinto de cero:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \frac{\text{sen } \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

El ejemplo 5 muestra lo que puede salir mal si se utiliza la regla de L'Hôpital sin pensar. Hay otros límites que se *pueden* encontrar mediante la regla de L'Hôpital, pero se encuentran más fácilmente por otros métodos (véanse los ejemplos de 2.3.3, 2.3.5 y 2.6.3 y la discusión al principio de esta sección), por lo que al evaluar cualquier límite debe considerar otros métodos antes de utilizar la regla de L'Hôpital.

Productos indeterminados

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no es claro cuál es el valor de $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ si existe. Hay una lucha entre f y g. Si gana f, la respuesta será 0; si gana g, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un comportamiento intermedio donde la respuesta es un número finito distinto de cero. Este tipo de límite se llama **forma indeterminada de tipo $0 \cdot \infty$**, y se puede abordar expresando el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{y} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞ por lo que se puede utilizar la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

La figura 5 muestra la gráfica de la función del ejemplo 6. Observe que la función está indefinida en $x = 0$; la gráfica se aproxima al origen, pero nunca lo alcanza.

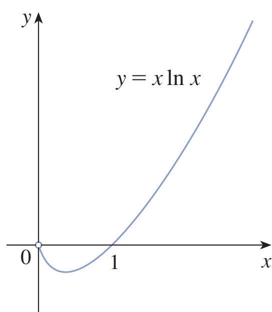


FIGURA 5

SOLUCIÓN El límite dado está indeterminado porque, conforme $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, mientras que el segundo factor $(\ln x)$ tiende a $-\infty$. Escribiendo $x = 1/(1/x)$, se tiene $1/x \to \infty$ a medida que $x \to 0^+$, por lo que la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

NOTA Observe que al resolver el ejemplo 6 otra opción posible habría sido escribir

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, pero si se aplica la regla de L'Hôpital, se obtiene una expresión más complicada que con la que se empezó. En general, cuando se reescribe un producto indeterminado, se intenta elegir la opción que conduce hasta el límite más simple.

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x\to a}\,[f(x) - g(x)]$$

se llama **forma indeterminada de tipo $\infty - \infty$**. Una vez más hay una contienda entre f y g. ¿La respuesta será ∞ (gana f) o será $-\infty$ (gana g) o habrá un término intermedio en un número finito? Para encontrarlo, se intenta convertir la diferencia en un cociente (por ejemplo, utilizando un común denominador, racionalizando o factorizando un factor común), de manera que se tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

SOLUCIÓN Primero observe que $1/(\ln x) \to \infty$ y $1/(x-1) \to \infty$ conforme $x \to 1^+$, por lo que el límite está indeterminado $\infty - \infty$. Aquí se usa un común denominador:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x}$$

Tanto el numerador como el denominador tienen un límite igual a 0, por lo que la regla de L'Hôpital es aplicable, lo que da

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1 - \dfrac{1}{x}}{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x - 1 + x\ln x}$$

De nuevo se tiene un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que se aplica de nuevo la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x - 1 + x\ln x} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1 + x\cdot\dfrac{1}{x} + \ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2 + \ln x} = \frac{1}{2}$$

■

EJEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(e^x - x)$.

SOLUCIÓN Esta es una diferencia indeterminada porque tanto e^x como x tienden a infinito. Se espera que el límite sea infinito porque $e^x \to \infty$ mucho más rápido que x. Pero se puede verificar esto al factorizar x:

$$e^x - x = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$$

El término $e^x/x \to \infty$ cuando $x \to \infty$ por la regla de L'Hôpital y así ahora se tiene un producto en el cual crecen mucho ambos factores:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x - x) = \lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)\right] = \infty$$

■

Potencias indeterminadas

Hay varias formas indeterminadas que surgen del límite

$$\lim_{x \to a} = [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Aunque las formas de los tipos 0^0, ∞^0 y 1^∞ están indeterminadas, la forma 0^∞ no está indeterminada. (Véase el ejercicio 86.)

Cada uno de estos tres casos se puede tratar ya sea tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o expresando la función como una exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Recuerde que ambos métodos fueron utilizados en la derivada de estas funciones.) Cualquiera de los métodos conduce al producto indeterminado $g(x)\ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 9 Calcule $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Primero observe que cuando $x \to 0^+$, se tiene $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, por lo que el límite dado está indeterminado (tipo 1^∞). Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $$\ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x) = \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x}$$

por lo que la regla de L'Hôpital da

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora se ha calculado el límite de $\ln y$, pero lo que se quiere es el límite de y. Para encontrar este límite, se utiliza el hecho de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$ ■

En la figura 6 se muestra la gráfica de la función $y = x^x$, $x > 0$. Observe que, aunque 0^0 no está definido, los valores de la función tienden a 1 cuando $x \to 0^+$. Esto confirma el resultado del ejemplo 10.

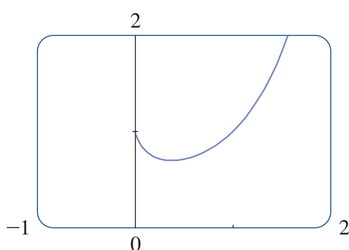


FIGURA 6

EJEMPLO 10 Determine $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Observe que este límite está indeterminado ya que $0^x - 0$ para cualquier $x > 0$ pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. (Recuerde que 0^0 está indefinido.) Se puede proceder como en el ejemplo 9 o escribir la función como una exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

En el ejemplo 6 se utiliza la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

4.4 EJERCICIOS

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

¿cuáles de los límites siguientes son formas indeterminadas? Para aquellos que no tienen forma indeterminada, evalúe el límite donde sea posible.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

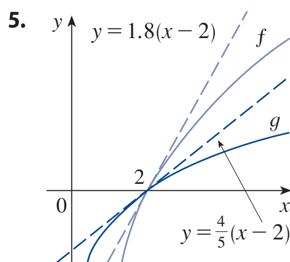
4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$

(c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$ (d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$

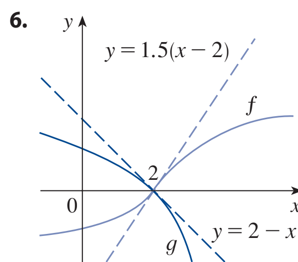
(e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–6 Utilice las gráficas de f y g y sus rectas tangentes en (2, 0) para encontrar $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

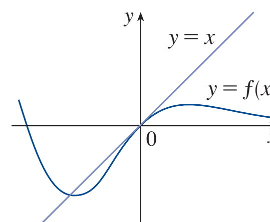
5.



6.



7. Se muestran la gráfica de una función f y su recta tangente en 0. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{e^x - 1}$?



8–68 Encuentre el límite. Utilice la regla de L'Hôpital donde sea apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de usarlo. Si no aplica la regla de L'Hôpital, explique por qué.

8. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

9. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$

10. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

11. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}$

12. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}$

13. $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

15. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{2t}-1}{\operatorname{sen} t}$

16. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta}$

17. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\cos 2\theta}$

18. $\lim_{\theta\to \pi} \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

19. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen}\pi x}$

21. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

22. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

23. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^8-1}{t^5-1}$

24. $\lim_{t\to 0} \dfrac{8^t-5^t}{t}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

26. $\lim_{u\to \infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tanh x}{\tan x}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

32. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x3^x}{3^x - 1}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

35. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

36. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x \operatorname{sen}(x-1)}{2x^2 - x - 1}$

37. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan(2x)}{\ln x}$

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

39. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}, \quad b \neq 0$

40. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

41. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2}$

42. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

43. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

45. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} 5x \csc 3x$

46 $\lim_{x\to -\infty} x \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

47. $\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

48. $\lim_{x\to \infty} x^{3/2} \operatorname{sen}(1/x)$

49. $\lim_{x\to 1^+} \ln x \tan(\pi x/2)$

50. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \cos x \sec 5x$

51. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

52. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

53. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

54. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan^{-1} x}\right)$

55. $\lim_{x\to \infty} (x - \ln x)$

56. $\lim_{x\to 1^+} [\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

57. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

58. $\lim_{x\to 0^+} (\tan 2x)^x$

59. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

60. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

61. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

62. $\lim_{x\to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

63. $\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

64. $\lim_{x\to \infty} x^{e^{-x}}$

65. $\lim_{x\to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

66. $\lim_{x\to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$

67. $\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 3x)^{1/x}$

68. $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5}\right)^{2x+1}$

69–70 Utilice una gráfica para estimar el valor del límite. Después utilice la regla de L'Hôpital para encontrar el valor exacto.

69. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

70. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

71–72 Ilustre la regla de L'Hôpital trazando la gráfica de $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$ para ver que estas razones tienen el mismo límite cuando $x \to 0$. También, calcule el valor exacto del límite.

71. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

72. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

73. Demuestre que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier entero positivo n. Esto demuestra que la función exponencial tiende al infinito más rápido que cualquier potencia de x.

74. Demuestre que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica tiende a infinito más lentamente que cualquier potencia de x.

75–76 ¿Qué sucede si intenta usted utilizar la regla del L'Hôpital para obtener el límite? Evalúe el límite utilizando cualquier otro método.

75. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

76. $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\tan x}$

77. Investigue la familia de curvas $f(x) = e^x - cx$. En particular, encuentre los límites cuando $x \to \pm\infty$ y determine los valores de c para los cuales f tiene un mínimo absoluto. ¿Qué pasa con los puntos mínimos conforme c crece?

78. Si un objeto con masa m se deja caer a partir del reposo, un modelo para su rapidez v después de t segundos, que considera la resistencia del aire es

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y c es una constante positiva. (En el capítulo 9 se podrá deducir esta ecuación a partir de la suposición de que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, c es la constante de proporcionalidad.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. ¿Cuál es el significado de este límite?

(b) Para t fijo, utilice la regla de L'Hôpital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. ¿Qué puede concluir acerca de la velocidad de un objeto que cae en el vacío?

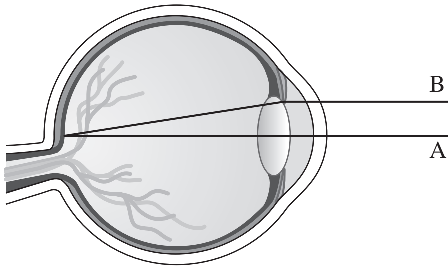
79. Si una cantidad inicial A_0 de dinero es invertida a una tasa de interés r compuesto n veces al año, el valor de la inversión después de t años es

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Si se define que $n \to \infty$, se refiere a la *composición continua* de interés. Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que si el interés es compuesto continuamente, entonces la cantidad después de t años es

$$A = A_0 e^{rt}$$

80. Entra luz en el ojo a través de la pupila y pega en la retina, donde células fotorreceptoras perciben la luz y el color. W. Stanley Stiles y B. H. Crawford estudiaron el fenómeno en el que la medida de la brillantez disminuye cuando entra luz más alejada del centro de la pupila. (Véase la figura).



Un haz de luz A que entra por el centro de pupila mide más brillantez que un rayo B que entra cerca del extremo de la pupila.

En un importante artículo publicado en 1933 se detallan los resultados de este fenómeno, conocido como el *efecto Stiles-Crawford de primera clase*. En particular, observaron que la cantidad de luminosidad detectada *no* es proporcional al área de la pupila como esperaban. El porcentaje P de luminosidad total que entra en una pupila de radio r mm que se detecta en la retina se puede describir mediante

$$P = \frac{1 - 10^{-\rho r^2}}{\rho r^2 \ln 10}$$

donde ρ es una constante determinada de forma experimental, normalmente de 0.05.

(a) ¿Cuál es el porcentaje de luminosidad captada por una pupila de radio 3 mm? Utilice $\rho = 0.05$.
(b) Calcule el porcentaje de luminosidad captada por una pupila de radio 2 mm. ¿Tiene sentido que sea mayor que la respuesta del inciso (a)?
(c) Calcule $\lim_{x\to 0^+} P$. ¿Es el resultado que esperaría? ¿Es físicamente posible este resultado?

Fuente: Adaptado de W. Stiles and B. Crawford, "The Luminous Efficiency of Rays Entering the Eye Pupil at Different Points." *Proceedings of the Royal Society of London, Series B: Biological Sciences* 112 (1933): 428–450.

81. Algunas poblaciones al inicio crecen exponencialmente pero al final se nivelan. Ecuaciones de la forma

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

donde M, A, y k son constantes positivas, se llaman *ecuaciones logísticas* y se utilizan con frecuencia para modelar dichas poblaciones. (En el capítulo 9 se investiga con detalle.) Aquí M se llama la *capacidad de carga* y representa el tamaño de la población máxima que se puede soportar, y $A = \dfrac{M - P_0}{P_0}$, donde P_0 es la población inicial.

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} P(t)$. Explique por qué su respuesta es la esperada.
(b) Calcule $\lim_{M\to\infty} P(t)$. (Observe que A se define en términos de M). ¿Qué tipo de función es su resultado?

82. Un cable metálico tiene radio r y está cubierto por un aislante, por lo que la distancia desde el centro del cable hasta el exterior del aislante es R. La velocidad v de un impulso eléctrico en el cable es

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

donde c es una constante positiva. Encuentre los límites siguientes e interprete sus respuestas.

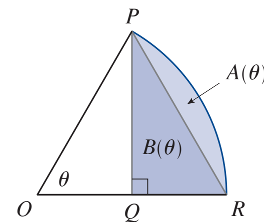
(a) $\lim_{R\to r^+} v$ (b) $\lim_{r\to 0^+} v$

83. La primera aparición impresa de la regla de L'Hôpital fue en el libro *Analyse des Infiniment Petits* publicado en 1696 por el Marqués de L'Hôpital. Este texto fue el primer libro de cálculo publicado, y el ejemplo que utiliza el Marqués en ese libro, para ilustrar esta regla, fue encontrar el límite de la función

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, donde $a > 0$. (En aquel tiempo era común escribir aa en vez de a^2.) Resuelva este problema.

84. La figura muestra un sector de un círculo con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre el $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$



85. Evalúe

$$\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right].$$

86. Suponga que f es una función positiva. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, demuestre que

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$$

Esto demuestra que 0^∞ no es una forma indeterminada.

87. Si f' es continua, $f(2) = 0$ y $f'(2) = 7$, evalúe

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

88. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2} \right) = 0$$

89. Si f' es continua, utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$$

Explique el significado de esta ecuación con la ayuda de un diagrama.

90. Si f'' es continua, demuestre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

91. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

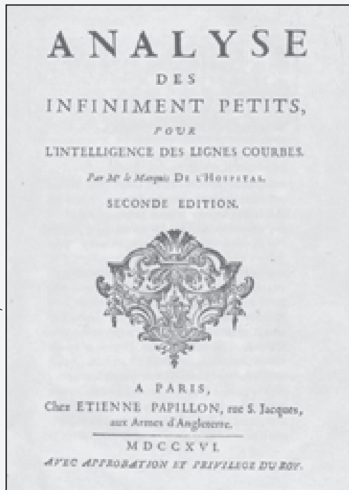
(a) Utilice la definición de derivada para obtener $f'(0)$.
(b) Demuestre que f tiene derivadas de todos los órdenes que están definidas sobre $\mathbb{R}$. [*Sugerencia:* primero demuestre por inducción que existe una función polinomial $p_n(x)$ y un entero no negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

92. Sea

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en $x = 0$.
(b) Investigue gráficamente si f es derivable en 0 haciendo varias veces acercamientos hacia el punto (0, 1) de la gráfica de f.
(c) Demuestre que f no es derivable en 0. ¿Cómo puede usted conciliar este hecho con la apariencia de la gráfica del inciso (b)?

PROYECTO DE REDACCIÓN LOS ORÍGENES DE LA REGLA DE L'HÔPITAL


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par M. le Marquis De L'Hospital.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
Chez ETIENNE PAPILLON, rue S. Jacques,
aux Armes d'Angleterre.
MDCCXVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Thomas Fisher Rare Book Library

La regla de L'Hôpital se publicó por primera vez en 1696, en el libro de texto del marqués de L'Hôpital, *Analyse des Infiniment Petits*, pero la regla fue descubierta en 1694 por el matemático suizo John (Johann) Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el Marqués de L'Hôpital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. Los detalles, incluso una traducción de la carta de L'Hôpital a Bernoulli en la que propone el arreglo, se pueden encontrar en el libro escrito por Eves [1].

Escriba un informe sobre los orígenes históricos y matemáticos de la regla de L'Hôpital. Empiece por dar breves detalles biográficos de los dos hombres (el diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente) y describa el trato negociado entre ellos. Luego mencione el enunciado de la regla de L'Hôpital, que se encuentra en el libro fuente de Struik [4] y, más sintéticamente, en el libro de Katz [3]. Observe que L'Hôpital y Bernoulli formularon la regla geométricamente y dieron la respuesta en términos de diferenciales. Compare el enunciado de ellos con la versión de la regla de L'Hôpital que se dio en la sección 4.4 y demuestre que los dos enunciados son esencialmente los mismos.

1. Howard Eves, *In Mathematical Circles* (*Volume 2: Quadrants III and IV)* (Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969), pp. 20-22.

2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York: Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Johann Bernoulli, por E. A. Fellmann y J. O. Fleckenstein, en el volumen II y el artículo sobre el Marqués de L'Hôpital, por Abraham Robinson, en el volumen VIII.

3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Nueva York: HarperCollins, 1993), pp. 484.

4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), pp. 315-316.

www.stewartcalculus.com
El Internet es otra fuente de información para este proyecto. Haga clic en *History of Mathematics* para obtener una lista confiable de sitios web.

4.5 Resumen para el trazo de curvas

Hasta este momento solo se ha centrado el interés en algunos aspectos particulares del trazo de curvas: dominio, rango y simetría en el capítulo 1; límites, continuidad y asíntotas en el capítulo 2; derivadas y rectas tangentes en los capítulos 2 y 3, y valores extremos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, puntos de inflexión y regla de L'Hôpital en este capítulo. Ahora es tiempo de reunir toda esta información relacionada con el trazo de gráficas, que revela las características importantes de las funciones.

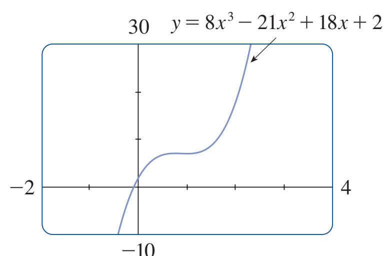


FIGURA 1

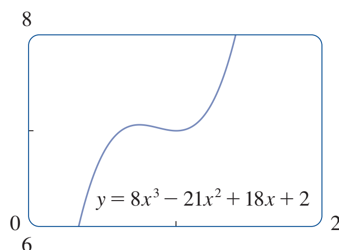


FIGURA 2

Usted podría preguntar: ¿por qué no usar solo una calculadora o computadora para trazar una curva? ¿Por qué es necesario aplicar el cálculo?

Es cierto que los instrumentos modernos son capaces de generar gráficas muy exactas. Pero aun el mejor instrumento para graficar se tiene que utilizar en forma inteligente. Es fácil llegar a una gráfica engañosa o perder detalles importantes de una curva, cuando se depende únicamente de la tecnología. (Véase "Graphing Calculators and Computers" en *www.stewartcalculus.com*, especialmente los ejemplos 1, 3, 4 y 5. Véase también sección 4.6.) La aplicación del cálculo permite descubrir los aspectos más interesantes de las gráficas y, en muchos casos, calcular *exactamente* los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión, y no solo en forma aproximada.

Por ejemplo, en la figura 1 se presenta la gráfica de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. A primera vista parece razonable esperar que la gráfica tenga la misma forma que las curvas cúbicas como $y = x^3$, y parece no tener máximo ni mínimo. Pero si calcula la derivada, se dará cuenta de que hay un máximo cuando $x = 0.75$ y un mínimo cuando $x = 1$. En efecto, si se hace un acercamiento a esta parte de la gráfica, se ve el comportamiento que se ilustra en la figura 2. Sin la herramienta del cálculo, podría fácilmente pasarlas por alto.

En la sección siguiente se elabora la gráfica de funciones recurriendo a la interacción del cálculo y los instrumentos para graficar. En esta sección dibujará gráficas considerando la información siguiente. Se supone que no tiene instrumentos para graficar, pero si usted cuenta con uno, solo utilícelo para verificar su trabajo.

Guía para el trazo de curvas

En la lista siguiente se intenta proponer directrices que sirvan de guía para dibujar una curva $y = f(x)$ a mano. No todos los elementos de la lista son relevantes para cada función. (Por ejemplo, una curva dada puede no tener una asíntota o poseer simetría.) Pero las directrices proporcionan toda la información que usted necesita para hacer un trazo que muestre los aspectos más importantes de la función.

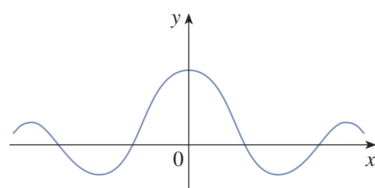
A. Dominio A menudo resulta útil comenzar por determinar el dominio D de f, es decir, el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ está definida.

B. Intersección La intersección en y es $f(0)$ y esto indica dónde la curva cruza con el eje y. Para encontrar las intersecciones con el eje x, se hace $y = 0$ y se resuelve para x. (Se puede omitir este paso si la ecuación es difícil de resolver.)

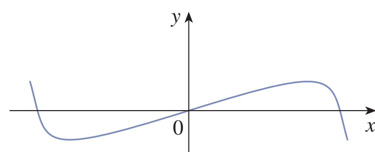
C. Simetría

(i) Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en D, es decir, la ecuación de la curva no se modifica cuando x se sustituye por $-x$, entonces f es una **función par** y la curva es simétrica respecto al eje y. Esto significa que este trabajo se reduce a la mitad. Si se conoce la parte de la curva donde $x \geqslant 0$, entonces solo se necesita reflejar respecto al eje y para obtener la curva completa [véase la figura 3(a)]. Algunos ejemplos son $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ y $y = \cos x$.

(ii) Si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D, entonces f es una **función impar** y la curva es simétrica respecto al origen. Una vez más, se puede obtener la curva completa si se conoce la parte de la curva donde $x \geqslant 0$. [Gire 180° alrededor del origen; véase la figura 3(b)]. Algunos ejemplos simples de funciones impares son $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ y $y = \operatorname{sen} x$.



(a) Función par: simetría por reflexión



(b) Función impar: simetría por rotación

FIGURA 3

(iii) Si $f(x+p) = f(x)$ para toda x en D, donde p es una constante positiva, entonces f se llama **función periódica** y el número p más pequeño se llama **período**. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tiene período 2π y $y = \tan x$ tiene período π. Si se sabe cómo es la gráfica en un intervalo de longitud p, entonces se puede utilizar una traslación para trazar toda la gráfica (véase la figura 4).

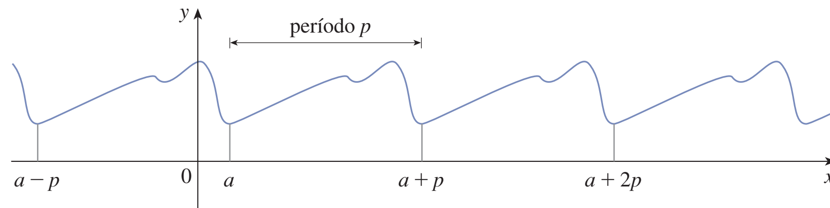


FIGURA 4
Función periódica: simetría traslacional

D. Asíntotas

(i) *Asíntotas horizontales*. Recuerde de la sección 2.6 que si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$. Si resulta que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no se tiene una asíntota a la derecha, pero sigue siendo información útil para trazar la curva.

(ii) *Asíntotas verticales*. Recuerde de la sección 2.2 que la recta $x = a$ es una asíntota vertical si al menos uno de los enunciados siguientes es verdadero:

1
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para funciones racionales puede usted localizar las asíntotas verticales igualando el denominador a 0 después de eliminar los factores comunes. Pero para otras funciones no se aplica este método.) Además, en el trazo de la curva es muy útil saber exactamente cuál de los enunciados en (1) es verdadero. Si $f(a)$ no está definida, pero a es un punto final del dominio de f, entonces debe calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)$, sea este límite infinito o no.

(iii) *Asíntotas inclinadas*. Estas se analizan al final de esta sección.

E. Intervalos de crecimiento o decrecimiento Utilice la prueba C/D. Calcule $f'(x)$ y encuentre los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva (f es creciente) y los intervalos en los que $f'(x)$ es negativa (f es decreciente).

F. Valores mínimo y máximo locales Encuentre los números críticos de f [los números c donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existen]. Después utilice la prueba de la primera derivada. Si f' cambia de positiva a negativa en un número crítico c, entonces $f(c)$ es un máximo local. Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local. Aunque es generalmente preferible utilizar la prueba de la primera derivada, puede utilizar la prueba de la segunda derivada si $f'(c) = 0$ y $f''(c) \neq 0$. Entonces $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ es un mínimo local, mientras que $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ es un máximo local.

G. Concavidad y puntos de inflexión Calcule $f''(x)$ y utilice la prueba de la concavidad. La curva es cóncava hacia arriba donde $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo donde $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión se localizan donde cambia de dirección la concavidad.

H. Trace la curva Utilizando la información de los apartados A-G, trace la gráfica. Trace las asíntotas como rectas discontinuas. Ubique las intersecciones, puntos máximos y mínimos y puntos de inflexión. Después, haga que la curva pase por estos puntos, creciendo y decreciendo de acuerdo con E, con concavidades de acuerdo con G y acercándose a las asíntotas. Si se desea precisión adicional cerca de cualquier

punto, puede calcular el valor de la derivada allí. La recta tangente indica la dirección en que avanza la curva.

EJEMPLO 1 Utilice la guía para trazar la gráfica de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. El dominio es

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. Las intersecciones en x y en y son, ambas, 0.

C. Ya que $f(-x) = f(x)$, la función f es par. La curva es simétrica respecto al eje y.

D.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Por tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Puesto que el denominador es 0 cuando $x = \pm 1$, se obtiene los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

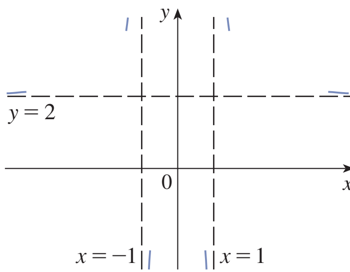


FIGURA 5
Trazo preliminar

Se muestra la curva que se aproxima a su asíntota horizontal desde arriba en la figura 5. Esto se confirma por los intervalos donde crece y decrece.

Por tanto, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. Esta información relacionada con los límites y asíntotas permite dibujar la curva preliminar de la figura 5, que muestra la curva cerca de las asíntotas.

E.
$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(4x) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Ya que $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$ $(x \neq -1)$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y decreciente sobre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Dado que f' cambia de positiva a negativa en 0, $f(0) = 0$ es un máximo local por la prueba de la primera derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2(-4) + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Puesto que $12x^2 + 4 > 0$ para toda x, se tiene

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

y $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Así, la curva es cóncava hacia arriba sobre los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$. No hay puntos de inflexión ya que 1 y -1 no están en el dominio de f.

H. Utilizando la información de E-G, se termina el trazo de la figura 6. ■

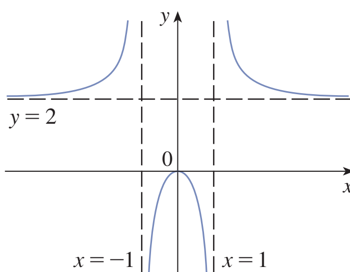


FIGURA 6
Trazo terminado de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. Dominio: $\{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Simetría: ninguna

D. Ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

no hay asíntotas horizontales. Ya que $\sqrt{x+1} \to 0$ cuando $x \to -1^+$ y $f(x)$ es siempre positiva, se tiene

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

y, por tanto, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1}\,(2x) - x^2 \cdot 1/\left(2\sqrt{x+1}\right)}{x+1} = \frac{3x^2 + 4x}{2(x+1)^{3/2}} = \frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}$$

Se ve que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ (observe que $-\frac{4}{3}$ no está en el dominio de f), por lo que el único número crítico es $x = 0$. Ya que $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$, f es decreciente sobre $(-1, 0)$ y decreciente sobre $(0, \infty)$.

F. Puesto que $f'(0) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en 0, $f(0) = 0$ es un mínimo local (y absoluto) por la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{2(x+1)^{3/2}(6x+4) - (3x^2 + 4x)3(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x+1)^{5/2}}$$

Observe que el denominador siempre es positivo. El numerador es la cuadrática $3x^2 + 8x + 8$, que siempre es positiva porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32$, que es negativo, y el coeficiente de x^2 es positivo. Por $f''(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, lo que significa que f es cóncava hacia arriba sobre $(-1, \infty)$ y no hay punto de inflexión.

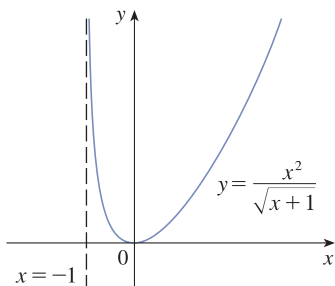


FIGURA 7

H. El trazo de la curva aparece en la figura 7. ■

EJEMPLO 3 Trace la gráfica de $f(x) = xe^x$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Simetría: ninguna.

D. Ya que tanto x como e^x son muy grandes cuando $x \to \infty$, se tiene que $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Sin embargo, a medida que $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, por lo que se tiene un producto indeterminado que requiere la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Así, el eje x es una asíntota horizontal.

E. $$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

Ya que e^x siempre es positiva, se ve que $f'(x) > 0$ cuando $x + 1 > 0$, y $f'(x) < 0$ cuando $x + 1 < 0$. Por lo que f es creciente sobre $(-1, \infty)$ y decreciente sobre $(-\infty, -1)$.

F. Ya que $f'(-1) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1} \approx -0.37$ es un mínimo local (y absoluto).

G. $$f''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$$

Ya que $f''(x) > 0$ si $x > -2$ y $f''(x) < 0$ si $x < -2$, f es cóncava hacia arriba

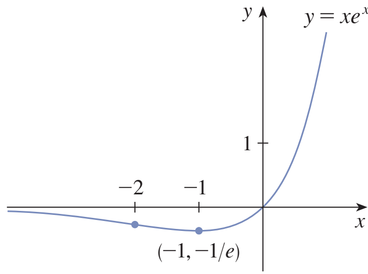


FIGURA 8

en $(-2, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, -2)$. El punto de inflexión es $(-2, -2e^{-2}) \approx (-2, -0.27)$.

H. Con toda esta información se traza la curva de la figura 8. ■

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. La intersección en y es $f(0) = \frac{1}{2}$. Las intersecciones en x se localizan donde $\cos x = 0$, esto es, $x = (\pi/2) + n\pi$, donde n es un entero.

C. f no es par ni impar, pero $f(x + 2\pi) = f(x)$ para toda x por lo que f es periódica con período 2π. Así, en lo siguiente, se necesita considerar solo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ y después extender la curva por traslación en la parte H.

D. Asíntotas: ninguna.

E.
$$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{2 \operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

El denominador es siempre positivo, así, $f'(x) > 0$ cuando $2 \operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2} \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. Por tanto, f es creciente en $(7\pi/6, 11\pi/6)$ y decreciente sobre $(0, 7\pi/6)$ y $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. Del apartado E y la prueba de la primera derivada, se ve que el valor mínimo local es $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ y el valor máximo local es $f(11\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

G. Si se utiliza la regla del cociente otra vez y se simplifica, se obtiene

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Debido a que $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ y $1 - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ para toda x, se sabe que $f''(x) > 0$ cuando $\cos x < 0$, esto es, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Por lo que f es cóncava hacia arriba en $(\pi/2, 3\,\pi/2)$ y cóncava hacia abajo sobre $(0, \pi/2)$ y $(3\,\pi/2, 2\pi)$. Los puntos de inflexión son $(\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$.

H. La gráfica de la función restringida a $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ se muestra en la figura 9. Después, se extenderá utilizando la periodicidad, para completar la gráfica de la figura 10.

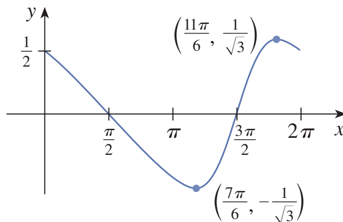


FIGURA 9

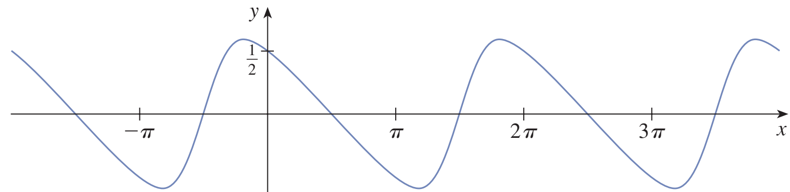


FIGURA 10 ■

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. El dominio es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. La intersección en y es $f(0) = \ln 4$. Para encontrar la intersección con x, se hace

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Se sabe que $\ln 1 = 0$, por lo que se tiene $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ y, por tanto, las intersecciones en x son $\pm\sqrt{3}$.

C. Ya que $f(-x) = f(x)$, f es par y la curva es simétrica respecto al eje y.

D. Se busca asíntotas verticales en los puntos finales del dominio. Como $4 - x^2 \to 0^+$ cuando $x \to 2^-$ y también a medida que $x \to -2^+$, se tiene

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Por lo que las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

E. $$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Dado que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 2$, f es creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en $(0, 2)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Ya que f' cambia de positiva a negativa en 0, $f(0) = \ln 4$ es un máximo local por la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Ya que $f''(x) < 0$ para toda x, la curva es cóncava hacia abajo sobre $(-2, 2)$ y no tiene punto de inflexión.

H. Con toda esta información, se traza la curva en la figura 11. ■

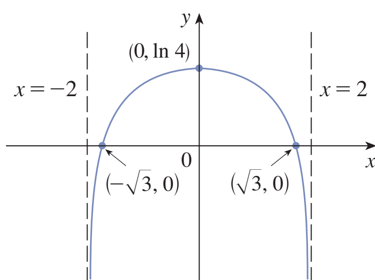


FIGURA 11
$y = \ln(4 - x^2)$

■ Asíntotas inclinadas

Algunas curvas tienen asíntotas que son *oblicuas*, esto es, no son horizontales ni verticales. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

donde $m \neq 0$, entonces la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota inclinada** (oblicua) porque la distancia vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a cero, como en la figura 12. (Existe una situación similar si se hace $x \to -\infty$.) Para funciones racionales, las asíntotas inclinadas se producen cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En tal caso la ecuación de la asíntota oblicua se puede encontrar por división larga como en el ejemplo siguiente.

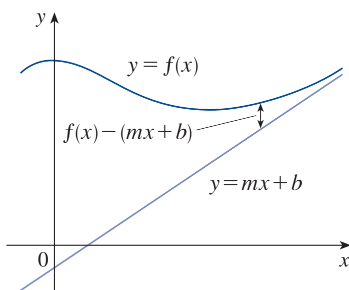


FIGURA 12

EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. El dominio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. Las intersecciones en x y en y son ambas 0.

C. Puesto que $f(-x) = -f(x)$, f es impar y su gráfica es simétrica respecto al origen.

D. Ya que $x^2 + 1$ nunca es 0, no hay asíntotas verticales. Ya que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ no hay asíntotas horizontales.

Pero la división larga da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Esta ecuación sugiere $y = x$ es una asíntota oblicua. En efecto

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty$$

Por lo que la recta $y = x$ es una asíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Ya que $f'(x) > 0$ para toda x (excepto 0), f es creciente en $(-\infty, \infty)$.

F. Aunque $f'(0) = 0$, f' no cambia de signo en $x = 0$, por lo que no hay máximo ni mínimo local.

G. $$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(4x^3+6x) - (x^4+3x^2) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Ya que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$, se puede hacer la tabla siguiente:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CA en $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB en $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CA en $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB en $(\sqrt{3}, \infty)$

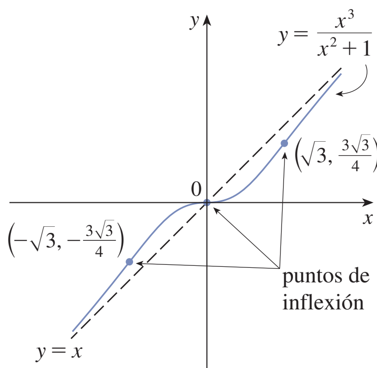


FIGURA 13

Los puntos de inflexión son $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$.

H. La gráfica de f se muestra en la figura 13. ■

4.5 EJERCICIOS

1–54 Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las curvas siguientes:

1. $y = x^3 + 3x^2$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x(x-4)^3$

6. $y = x^5 - 5x$

7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

10. $y = \dfrac{x^2+5x}{25-x^2}$

11. $y = \dfrac{x-x^2}{2-3x+x^2}$

12. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

13. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

14. $y = \dfrac{1}{x^2-4}$

15. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$

16. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

17. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

18. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

19. $y = \dfrac{x^3}{x^3 + 1}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x - 2}$

21. $y = 2\sqrt{x} - x$

22. $y = (x - 4)\sqrt[3]{x}$

23. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

26. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

27. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $y = x - 3x^{1/3}$

30. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

31. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

32. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

33. $y = \operatorname{sen}^3 x$

34. $y = x + \cos x$

35. $y = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

36. $y = 2x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

37. $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

38. $y = \csc x - 2\operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi$

39. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

40. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

41. $y = \arctan(e^x)$

42. $y = (1 - x)e^x$

43. $y = 1/(1 + e^{-x})$

44. $y = e^{-x}\operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

45. $y = \dfrac{1}{x} + \ln x$

46. $y = x - \ln x$

47. $y = (1 + e^x)^{-2}$

48. $y = e^x/x^2$

49. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

50. $y = \ln(1 + x^3)$

51. $y = xe^{-1/x}$

52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

53. $y = e^{\arctan x}$

54. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

---

55. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, m es la masa cuando la partícula se mueve con rapidez v con respecto al observador y c es la rapidez de la luz. Trace la gráfica de m como una función de v.

56. En la teoría de la relatividad, la energía de una partícula es

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, λ es la longitud de onda y h es la constante de Planck. Trace la gráfica de E como una función de λ. ¿Qué indica la gráfica en relación con la energía?

57. Un modelo para la divulgación de un rumor está dado por la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que sabe del rumor en el tiempo t, y a y k son constantes positivas.

(a) ¿Cuándo habrá oído el rumor la mitad de la población?
(b) ¿Cuándo es mayor la rapidez de divulgación del rumor?
(c) Trace la gráfica de p.

58. Un modelo para la concentración en tiempo t de un medicamento inyectado en el torrente sanguíneo es

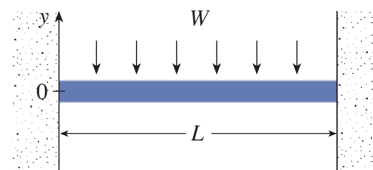
$$C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$$

donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$. Trace la gráfica de la función de concentración. ¿Qué indica la gráfica en relación con la variación de la concentración al transcurrir el tiempo?

59. La figura muestra una viga de longitud L incrustada en muros de hormigón. Si una carga constante W se distribuye uniformemente a lo largo de su longitud, la viga toma la forma de la curva de deflexión

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

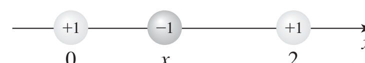
donde E e I son constantes positivas. (E es el módulo de Young de elasticidad e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga). Trace la gráfica de la curva de deflexión.



60. La ley de Coulomb establece que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1 ubicadas en las posiciones 0 y 2 sobre una recta de coordenadas y una partícula con carga -1 en una posición x entre ellas. De la ley de Coulomb se deduce que la fuerza neta que actúa sobre la partícula ubicada a la mitad es

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x - 2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

donde k es una constante positiva. Trace la gráfica de la función fuerza neta. ¿Qué indica la gráfica acerca de la fuerza?



61–64 Encuentre la ecuación de la asíntota inclinada en cada una de las funciones dadas. No trace la gráfica de la curva.

61. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

62. $y = \dfrac{4x^3 - 10x^2 - 11x + 1}{x^2 - 3x}$

63. $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{x^2 - x - 2}$

64. $y = \dfrac{-6x^4 + 2x^3 + 3}{2x^3 - x}$

65–70 Utilice la guía de esta sección para trazar cada una de las curvas siguientes. En el apartado D encuentre la ecuación de la asíntota inclinada.

65. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

66. $y = \dfrac{1 + 5x - 2x^2}{x - 2}$

67. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

68. $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$

69. $y = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$

70. $y = 1 - x + e^{1+x/3}$

71. Demuestre que la curva $y = x - \tan^{-1}x$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + \pi/2$ y $y = x - \pi/2$. Utilice este hecho para ayudar a trazar la curva.

72. Demuestre que la curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + 2$ y $y = -x - 2$. Utilice este hecho para trazar la curva.

73. Demuestre que las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ son asíntotas inclinadas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

74. Sea $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Demuestre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Esto demuestra que la gráfica de f se aproxima a la gráfica de $y = x^2$ y se dirá que la curva $y = f(x)$ es *asintótica* a la parábola $y = x^2$. Utilice este hecho para trazar la gráfica de f.

75. Analice el comportamiento asintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ de la misma manera que en el ejercicio 74. Después utilice su resultado para ayudarse en el trazo de la gráfica de f.

76. Utilice el comportamiento asintótico de $f(x) = \operatorname{sen} x + e^{-x}$ para trazar su gráfica sin usar el procedimiento para el trazado de curvas de esta sección.

4.6 Trazo de gráficas con cálculo *y* calculadoras

Se sugiere leer "Graphing Calculators and Computers" en *www.stewartcalculus.com*. En particular, se explica cómo evitar algunos de los inconvenientes de los dispositivos graficadores, eligiendo rectángulos de vista adecuados.

El método que se utilizó para trazar curvas en la sección anterior fue una culminación de gran parte de este estudio del cálculo diferencial. La gráfica fue el objeto final que se ha producido. En esta sección el punto de vista de los autores es completamente diferente. Aquí se *comenzó* con una gráfica producida por una calculadora graficadora o un equipo de cómputo y luego se refinó. Se utilizó el cálculo para asegurar que revelan todos los aspectos importantes de la curva. Y con el uso de dispositivos graficadores se puede abordar curvas que serían demasiado complicadas sin considerar la tecnología. El tema es la *interacción* entre el cálculo y las calculadoras.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función polinomial $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Utilice las gráficas de f' y f'' para estimar todos los puntos máximos y mínimos e intervalos de concavidad.

SOLUCIÓN Si se especifica un dominio, pero no un rango, muchos dispositivos graficadores utilizan un rango adecuado de los valores calculados. La figura 1 muestra el trazo que hace un dispositivo si se especifica que $-5 \leq x \leq 5$. Aunque este rectángulo de vista es útil para mostrar que el comportamiento asintótico (o comportamiento extremo) es el mismo que para $y = 2x^6$, obviamente está ocultando algún detalle más fino. Por lo que se cambia el rectángulo de vista a $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$ que se muestra en la figura 2.

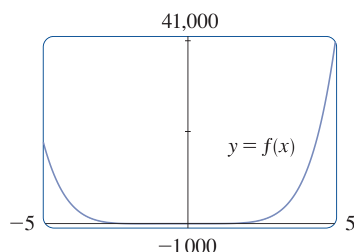


FIGURA 1

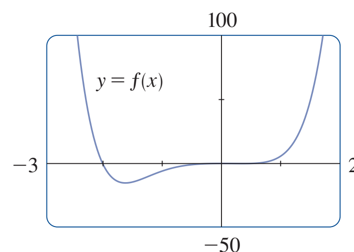


FIGURA 2

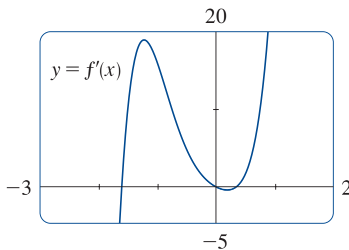


FIGURA 3

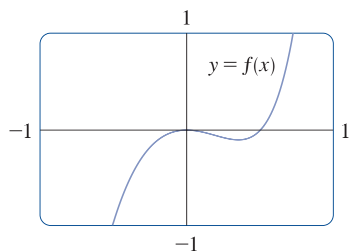


FIGURA 4

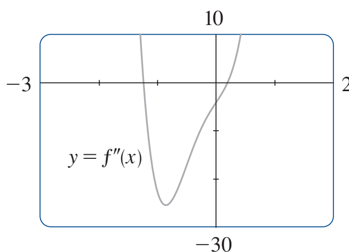


FIGURA 5

De esta gráfica se deduce que hay un valor mínimo absoluto de alrededor -15.33 cuando $x \approx -1.62$ (utilizando el cursor) y f es decreciente en $(-\infty, -1.62)$ y es creciente en $(-1.62, \infty)$. También parece haber una recta tangente horizontal en el origen y puntos de inflexión cuando $x = 0$ y cuando x se encuentra en algún lugar entre –2 y −1.

Ahora va a tratar de confirmar estas impresiones mediante el cálculo. Se deriva y se obtiene

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

Cuando se grafica f' en la figura 3 se ve que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando $x \approx -1.62$; esto confirma (por la prueba de la primera derivada) el valor mínimo que se ha encontrado antes. Pero, quizá para sorpresa, también se nota que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando $x = 0$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.35$. Esto significa que f tiene un máximo local en 0 y un mínimo local cuando $x \approx 0.35$, pero estos estaban escondidos en la figura 2. De hecho, si se hacen ahora acercamientos hacia el origen en la figura 4, se ve lo que faltó antes: un valor máximo local de 0 cuando $x = 0$ y un valor mínimo local de -0.1 cuando $x \approx 0.35$.

¿Qué pasa con la concavidad y los puntos de inflexión? En las figuras 2 y 4 parece haber puntos de inflexión cuando x está un poco a la izquierda de -1 y cuando x está un poco a la derecha del 0. Pero es difícil determinar los puntos de inflexión de la gráfica de f por lo que se grafica la segunda derivada f'' en la figura 5. Se ve que f'' cambia de positiva a negativa cuando $x \approx -1.23$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.19$. Así, redondeada con dos decimales, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1.23)$ y $(0.19, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1.23, 0.19)$. Los puntos de inflexión son $(-1.23, -10.18)$ y $(0.19, -0.05)$.

Se ha descubierto que una simple gráfica no revela todas las características importantes de esta función polinomial. Pero las figuras 2 y 4, tomadas en conjunto, proporcionan una imagen más precisa. ■

EJEMPLO 2 Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

en un rectángulo de vista que contenga todas las características importantes de la función. Estime los valores máximos y mínimos y los intervalos de concavidad. Después utilice el cálculo para encontrar exactamente estas cantidades.

SOLUCIÓN La figura 6, producida por un equipo de cómputo con escala automática, es un desastre. Algunas calculadoras graficadoras utilizan $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ como el rectángulo de vista predeterminada, por lo que se probará. Se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 7; es una mejora importante.

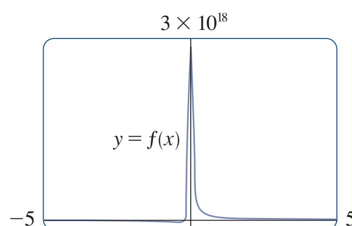


FIGURA 6

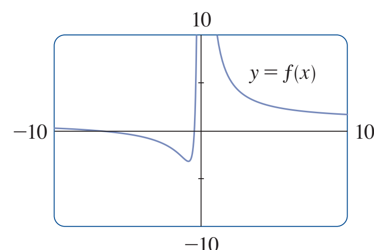


FIGURA 7

El eje y parece ser una asíntota vertical y, de hecho, lo es porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

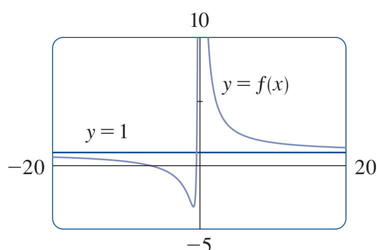


FIGURA 8

La figura 7 también permite estimar las intersecciones con el eje x: cerca de -0.5 y -6.5. Los valores exactos se obtienen mediante la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 + 7x + 3 = 0$; se obtiene $x = (-7 \pm \sqrt{37})/2$.

Para obtener un mejor vistazo de las asíntotas horizontales, se cambia el rectángulo de vista $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ en la figura 8. Parece que $y = 1$ es la asíntota horizontal y esto es fácilmente confirmado:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

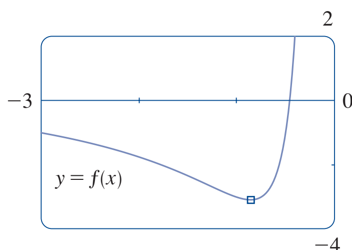


FIGURA 9

Para estimar el valor mínimo se acerca el rectángulo de vista $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ en la figura 9. El cursor indica que el valor mínimo absoluto es aproximadamente -3.1 cuando $x \approx -0.9$, y se ve que la función decrece sobre $(-\infty, -0.9)$ y $(0, \infty)$ y crece en $(-0.9, 0)$. Los valores exactos se obtienen derivando:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Esto demuestra que $f'(x) > 0$ cuando $-\frac{6}{7} < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $x < -\frac{6}{7}$ y cuando $x > 0$. El valor mínimo exacto es $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3.08$.

La figura 9 también muestra que un punto de inflexión se localiza en algún lugar entre $x = -1$ y $x = -2$. Se podría estimar con mucha más exactitud utilizando la gráfica de la segunda derivada, pero en este caso es fácil encontrar valores exactos. Ya que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x + 9)}{x^4}$$

se ve que $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. Así, f es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ y $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

El análisis mediante las dos primeras derivadas muestra en la figura 8 todos los aspectos importantes de la curva. ■

EJEMPLO 3 Trace la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4}$.

SOLUCIÓN De la experiencia con una función racional en el ejemplo 2, se comienza por graficar f en el rectángulo de vista $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. De la figura 10 se tiene la sensación de que se va a tener que acercar para ver algún detalle más fino y también para ver la imagen más grande. Pero, como una guía para hacer un acercamiento inteligente, primero se verá con más cuidado la expresión para $f(x)$. Debido a los factores $(x - 2)^2$ y $(x - 4)^4$ en el denominador, se espera que $x = 2$ y $x = 4$ sean las asíntotas verticales. De hecho, lo son, ya que

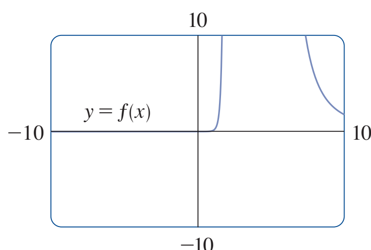


FIGURA 10

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 4} \frac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4} = \infty$$

Para encontrar las asíntotas horizontales, se divide el numerador y el denominador por x^6.

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\dfrac{x^2}{x^3}\cdot\dfrac{(x+1)^3}{x^3}}{\dfrac{(x-2)^2}{x^2}\cdot\dfrac{(x-4)^4}{x^4}} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^4}$$

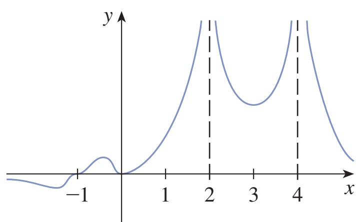


FIGURA 11

Esto demuestra que $f(x) \to 0$ conforme $x \to \pm\infty$, por lo que el eje x es una asíntota horizontal.

También es muy útil examinar el comportamiento de la gráfica cerca de la intersección con el eje x, usando un análisis como en el ejemplo 2.6.12. Ya que x^2 es positiva, $f(x)$ no cambia de signo en 0 y, por tanto, su gráfica no cruza el eje x en 0. Pero, debido al factor $(x+1)^3$, la gráfica cruza el eje x en -1 y tiene allí una recta tangente horizontal. Poniendo toda esta información junta, pero sin utilizar derivadas, se ve que la curva tiene que ser parecida a la de la figura 11.

Ahora que se sabe qué buscar, se hacen acercamientos (varias veces) para producir las gráficas de las figuras 12 y 13 y se aleja (varias veces) para obtener la figura 14.

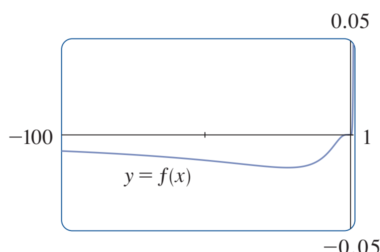


FIGURE 12

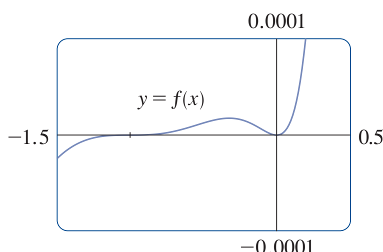


FIGURA 13

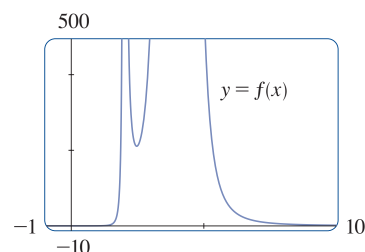


FIGURA 14

De estas gráficas, se puede leer que el mínimo absoluto es aproximadamente -0.02 y se produce cuando $x \approx -20$. También hay un máximo local ≈ 0.00002 cuando $x \approx -0.3$ y un mínimo local ≈ 211 cuando $x \approx 2.5$. Estas gráficas también muestran tres puntos de inflexión cerca de -35, -5 y -1 y dos entre -1 y 0. Para estimar los puntos de inflexión más cercanamente se necesitará la gráfica de f'', pero graficar f'' a mano es una tarea poco razonable. Si tiene un sistema algebraico computacional, es más fácil (véase el ejercicio 15).

Se ha visto que, para esta función en particular, son necesarias *tres* gráficas (figuras 12, 13 y 14) para transmitir toda la información útil. La única manera de mostrar todas estas características de la función en una gráfica única es dibujar a mano. A pesar de las exageraciones y distorsiones, la figura 11 logra resumir la naturaleza esencial de la función. ■

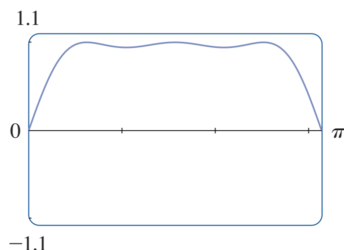


FIGURA 15

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x)$. Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, estime todos los valores máximos y mínimos, intervalos donde la función crece y decrece y los puntos de inflexión.

SOLUCIÓN Primero se observa que f es periódica con período 2π. También, f es impar y $|f(x)| \leqslant 1$ para toda x. Así, la elección de un rectángulo de vista no es un problema para esta función: se empieza con $[0, \pi]$ por $[-1.1, 1.1]$ (Véase la figura 15.) Parece que hay tres valores máximos locales y dos valores mínimos locales en esa

La familia de funciones

$$f(x) = \text{sen}\,(x + \text{sen}\,cx)$$

donde c es una constante, aparece en aplicaciones a la sintonía de frecuencia modulada (FM). Una onda sinusoidal es modulada por una onda con una frecuencia diferente (sen cx). El caso donde $c = 2$ se estudia en el ejemplo 4. El ejercicio 27 explora otro caso especial.

ventana. Para confirmar esto y localizarlos con mayor precisión, se obtiene

$$f'(x) = \cos(x + \text{sen}\,2x) \cdot (1 + 2\cos 2x)$$

y se grafica f y f' en la figura 16.

Utilizando el zoom y la prueba de la primera derivada, se encuentran los valores aproximados siguientes:

Intervalos en los que crece:	$(0, 0.6), (1.0, 1.6), (2.1, 2.5)$
Intervalos en los que decrece:	$(0.6, 1.0), (1.6, 2.1), (2.5, \pi)$
Valores máximos locales:	$f(0.6) \approx 1,\ f(1.6) \approx 1,\ f(2.5) \approx 1$
Valores mínimos locales:	$f(1.0) \approx 0.94,\ f(2.1) \approx 0.94$

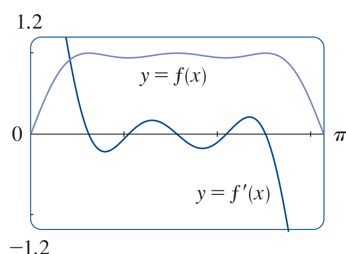


FIGURA 16

La segunda derivada es

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2\,\text{sen}(x + \text{sen}\,2x) - 4\,\text{sen}\,2x\cos(x + \text{sen}\,2x)$$

Graficando f y f'' en la figura 17, se obtienen los valores aproximados siguientes:

Cóncava hacia arriba sobre:	$(0.8, 1.3), (1.8, 2.3)$
Cóncava hacia abajo sobre:	$(0, 0.8), (1.3, 1.8), (2.3, \pi)$
Puntos de inflexión:	$(0, 0), (0.8, 0.97), (1.3, 0.97), (1.8, 0.97), (2.3, 0.97)$

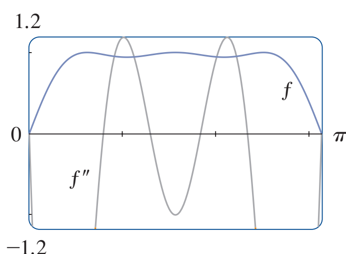


FIGURA 17

Se ha comprobado que la figura 15 representa f con precisión para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, por lo que se puede afirmar que la gráfica ampliada en la figura 18 representa f con precisión para $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$. ■

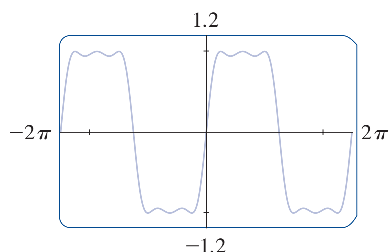


FIGURA 18

El último ejemplo se refiere a las *familias* de funciones. Esto significa que las funciones de la familia están relacionadas con otras mediante una fórmula que contiene una o más constantes arbitrarias. Cada valor de la constante da lugar a un miembro de la familia, y la idea es ver cómo varía la gráfica de la función con los constantes cambios.

EJEMPLO 5 ¿Cómo varía la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$ cuando c cambia?

SOLUCIÓN Las gráficas de las figuras 19 y 20 (casos especiales para $c = 2$ y $c = -2$) muestran dos maneras muy diferentes de ver las curvas.

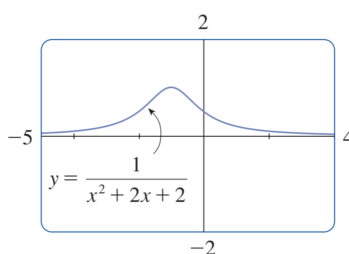


FIGURA 19
$c = 2$

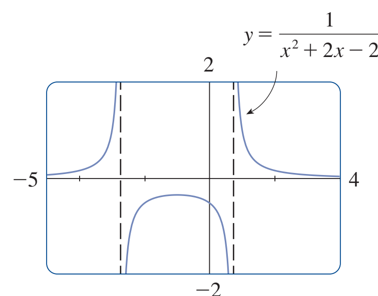


FIGURA 20
$c = -2$

Antes de trazar más gráficas, se verá qué tienen en común los miembros de esta familia. Ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para cualquier valor de c, todas tienen el eje x como asíntota horizontal. Una asíntota vertical ocurre cuando $x^2 + 2x + c = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, se obtiene $x = -1 \pm \sqrt{1-c}$. Cuando $c > 1$, no hay asíntotas verticales (como en la figura 19). Cuando $c = 1$, la gráfica tiene una sola asíntota vertical $x = -1$ porque

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = \infty$$

Cuando $c < 1$, hay dos asíntotas verticales $x = -1 \pm \sqrt{1-c}$ (como en la figura 20).

Ahora se obtiene la derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Esto demuestra que $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$ (si $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$, esto significa que f es creciente en $(-\infty, -1)$ y decreciente en $(-1, \infty)$. Para $c > 1$, hay un valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c-1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c-1)$ es un valor máximo local, y los intervalos donde es creciente y decreciente se interrumpen debido a las asíntotas verticales.

La figura 21 es una "serie de diapositivas" que muestran cinco miembros de la familia, todas representadas en el rectángulo de vista $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Como se previó, ocurre una transición de dos asíntotas verticales a una en $c = 1$ y luego a ninguna para $c > 1$. Cuando c aumenta desde 1, se ve que el punto máximo resulta menor; esto se explica por el hecho de que $1/(c-1) \to 0$ cuando $c \to \infty$. Como c disminuye de 1, las asíntotas verticales se separan más ampliamente porque la distancia entre ellas es $2\sqrt{1-c}$, lo cual resulta muy grande conforme $c \to -\infty$. Nuevamente, el punto máximo se aproxima al eje x porque $1/(c-1) \to 0$ cuando $c \to -\infty$.

TEC Véase una animación de la figura 21 en Visual 4.6

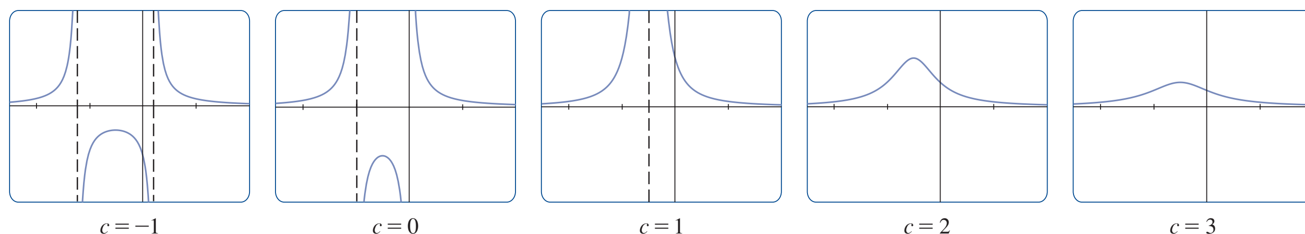


FIGURA 21
La familia de funciones $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Claramente, no hay ningún punto de inflexión cuando $c \leqslant 1$. Para $c > 1$ se calcula que

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

y se deduce que los puntos de inflexión ocurren cuando $x = -1 \pm \sqrt{3(c-1)}/3$. Así, los puntos de inflexión se extienden al aumentar c, y esto parece razonable, por lo que se ve en las dos últimas partes de la figura 21. ■

4.6 EJERCICIOS

1–8 Trace gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de cada una de las curvas siguientes. En particular, debe utilizar gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos donde f es creciente y decreciente, valores extremos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

1. $f(x) = x^5 - 5x^4 - x^3 + 28x^2 - 2x$

2. $f(x) = -2x^6 + 5x^5 + 140x^3 - 110x^2$

3. $f(x) = x^6 - 5x^5 + 25x^3 - 6x^2 - 48x$

4. $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 8}{x^2 - x - 6}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \tan x + 5 \cos x$

7. $f(x) = x^2 - 4x + 7 \cos x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

8. $f(x) = e^x - 0.186x^4$

9–10 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de cada una de las curvas siguientes. Determine los intervalos donde f es creciente y decreciente e intervalos de concavidad y utilice el cálculo para encontrar exactamente estos intervalos.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ **10.** $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

11–12

(a) Trace la gráfica de la función.
(b) Utilice la regla de L'Hôpital para explicar el comportamiento cuando $x \to 0$.
(c) Estime el valor mínimo y los intervalos de concavidad. Después, utilice el cálculo para encontrar los valores exactos.

11. $f(x) = x^2 \ln x$ **12.** $f(x) = xe^{1/x}$

13–14 Trace a mano la gráfica utilizando asíntotas e intersecciones, pero no derivadas. Después utilice su trazo como una guía para elaborar gráficas (con un dispositivo graficador) que muestran las principales características de la curva. Utilice estas gráficas para estimar los valores máximos y mínimos.

13. $f(x) = \dfrac{(x + 4)(x - 3)^2}{x^4(x - 1)}$

14. $f(x) = \dfrac{(2x + 3)^2(x - 2)^5}{x^3(x - 5)^2}$

SAC **15.** Si f es la función considerada en el ejemplo 3, utilice un sistema algebraico computacional para calcular f' y luego trace su gráfica para confirmar que todos los valores máximos y mínimos son como en el ejemplo. Calcule f'' y utilícela para estimar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

SAC **16.** Si f es la función del ejercicio 14, encuentre f' y f'' y utilice sus gráficas para estimar los intervalos donde f es creciente, decreciente y la concavidad de f.

SAC **17–22** Utilice un sistema algebraico computacional para trazar la gráfica de f y para encontrar f' y f''. Use las gráficas de estas derivadas para estimar los intervalos donde f es creciente y decreciente, los valores extremos, intervalos de concavidad y sus puntos de inflexión.

17. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 1}{x^4 + x^3 - x^2 + 2}$

18. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x + x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5 \operatorname{sen} x}, \quad x \leqslant 20$

20. $f(x) = x - \tan^{-1}(x^2)$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

22. $f(x) = \dfrac{3}{3 + 2 \operatorname{sen} x}$

SAC **23–24** Trace la gráfica de la función utilizando tantos rectángulos de vista como necesite para representar la verdadera naturaleza de la función.

23. $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x^4)}{x^8}$

24. $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$

SAC **25–26**

(a) Trace la gráfica de la función.
(b) Explique la forma de la gráfica calculando el límite cuando $x \to 0^+$ o cuando $x \to \infty$.
(c) Estime los valores máximos y mínimos y luego utilice cálculo para determinar los valores exactos.
(d) Utilice una gráfica de f'' para estimar las coordenadas x de los puntos de inflexión.

25. $f(x) = x^{1/x}$ **26.** $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

27. En el ejemplo 4 se ha considerado un miembro de la familia de funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$ que se presenta en la sintonía FM. Aquí se investiga la función con $c = 3$. Empiece por graficar f en el rectángulo de vista $[0, \pi]$ por $[-1.2, 1.2]$. ¿Cuántos puntos máximos locales ve usted? La gráfica tiene más de lo que se puede notar a simple vista. Para descubrir los puntos máximos y mínimos ocultos tendrá que examinar la gráfica de f' muy cuidadosamente. De hecho, ayuda ver la gráfica de f'' al mismo tiempo. Encuentre todos los valores máximos y mínimos y puntos de inflexión. Luego trace la gráfica de f en el rectángulo de vista $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ y comente lo relacionado con la simetría.

28–35 Describa cómo varía la gráfica de f conforme c varía. Trace la gráfica de varios miembros de la familia para ilustrar las tendencias que descubre usted. En particular, debe

investigar cómo se mueven los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión cuando c cambia. También debe identificar cualquier valor de transición de c, en el que cambia la forma básica de la curva.

28. $f(x) = x^3 + cx$

29. $f(x) = x^2 + 6x + c/x$ (Tridente de Newton)

30. $f(x) = x\sqrt{c^2 - x^2}$

31. $f(x) = e^x + ce^{-x}$

32. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

33. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

34. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{c + \cos x}$

35. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

---

36. La familia de funciones $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y C son números positivos y $b > a$, ha sido utilizada para modelar la concentración de un fármaco que se inyecta en el torrente sanguíneo al tiempo $t = 0$. Trace la gráfica de varios miembros de esta familia. ¿Qué tienen en común? Para valores fijos de C y a, descubra gráficamente lo que ocurre cuando b aumenta. Después utilice el cálculo para demostrar lo que ha descubierto.

37. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece por obtener los límites cuando $x \to \pm\infty$. Identifique los valores de transición de c donde cambia la forma básica. ¿Qué sucede con los puntos máximos o mínimos y los puntos de inflexión cuando c cambia? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

38. Investigue la familia de curvas dada por la ecuación $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Comience por determinar el valor de transición de c, en el que el número de puntos de inflexión cambia. Luego trace la gráfica de varios miembros de la familia para ver qué formas son posibles. Hay otro valor de transición de c en el que cambia el número de números críticos. Intente descubrirlo gráficamente. Después demuestre lo que usted ha descubierto.

39. (a) Investigue la familia de funciones polinomiales dada por $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos mínimos?
(b) Demuestre que los puntos máximos y mínimos de cada curva en la familia se encuentran en la parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre trazando la gráfica de esta parábola y varios miembros de la familia.

40. (a) Investigue la familia de funciones polinomiales dada por $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos máximos y mínimos?
(b) Demuestre que los puntos máximos y mínimos de cada curva en la familia se encuentran sobre la curva $y = x - x^3$. Ilustre trazando la gráfica de esta curva y varios miembros de la familia.

4.7 Problemas de optimización

Los métodos que se han aprendido en este capítulo para encontrar los valores extremos tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Un empresario quiere minimizar los costos y maximizar las ganancias. Un viajero quiere minimizar el tiempo de transporte. El principio de Fermat en óptica establece que la luz sigue el camino que toma el menor tiempo. En esta sección se resuelven problemas como la maximización de áreas, volúmenes y beneficios y la minimización de distancias, tiempos y costos.

En la resolución de tales problemas prácticos, el mayor desafío suele ser convertir el problema expresado en palabras en un problema de optimización matemática, estableciendo la función que va a maximizar o minimizar. Para esto, se recordarán los principios para resolver problemas que se discutieron en la página 71 y adaptarlos a esta situación:

SP

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar en este las cantidades dadas y las cantidades requeridas.
3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada (se le llamará Q por ahora). También seleccione símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo, A para el área, h para la altura, t para el tiempo.

4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.

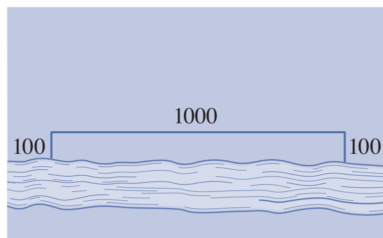
5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de *una* variable x, es decir, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.

6. Utilice los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para encontrar los valores máximo o mínimo *absolutos* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

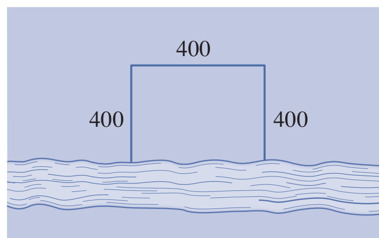
EJEMPLO 1 Un agricultor tiene 1200 m de material y quiere construir una malla para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita malla a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

SP Comprenda el problema
SP Analogía: intente casos especiales
SP Dibuje diagramas

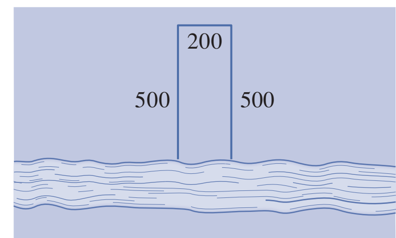
SOLUCIÓN Para hacerse una idea de lo que está sucediendo en este problema, se va a experimentar con algunos casos especiales. La figura 1 (no a escala) muestra tres formas de posibles arreglos de los 1200 m de material.



Área = 100 · 1000 = 100 000 m²



Área = 400 · 400 = 160 000 m²



Área = 500 · 200 = 100 000 m²

FIGURA 1

Se ve que cuando se intenta campos muy anchos y poco largos, o campos angostos y muy largos, se obtienen áreas relativamente pequeñas. Parece razonable que exista alguna configuración intermedia que produzca el área más grande.

SP Introduzca notación

La figura 2 ilustra el caso general. Se quiere maximizar el área A del rectángulo. Sea x y y el largo y el ancho, respectivamente, del rectángulo (en metros). Entonces, se quiere expresar A en términos de x y y:

$$A = xy$$

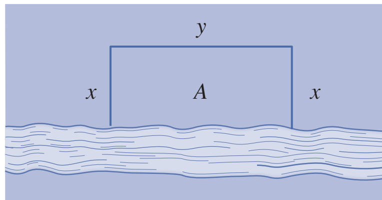


FIGURA 2

Se quiere expresar A en función de una sola variable, por lo que se elimina y expresa en términos de x. Para esto se utiliza la información dada de que la longitud total de la malla es 1200 m. Así

$$2x + y = 1200$$

De esta ecuación se tiene $y = 1200 - 2x$, lo que da

$$A = x(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 600$ (de lo contrario $A < 0$), por lo que la función que se desea maximizar es

$$A(x) = 1200x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 600$$

La derivada es $A'(x) = 1200 - 4x$, por lo que para encontrar los números críticos se resuelve

$$1200 - 4x = 0$$

que da $x = 300$. El valor máximo de A se debe producir en este número crítico o en un punto final del intervalo. Ya que $A(0) = 0$, $A(300) = 180\,000$ y $A(600) = 0$, el método del intervalo cerrado da el valor máximo cuando $A(300) = 180\,000$.

[Alternativamente, se podría haber observado que $A''(x) = -4 < 0$ para toda x, por lo que A es siempre cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 300$ debe ser un máximo absoluto.]

Por tanto, el campo rectangular debe tener 300 m de largo y 600 m de ancho. ■

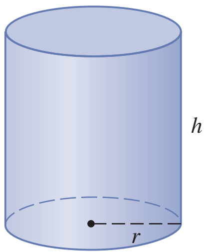


FIGURA 3

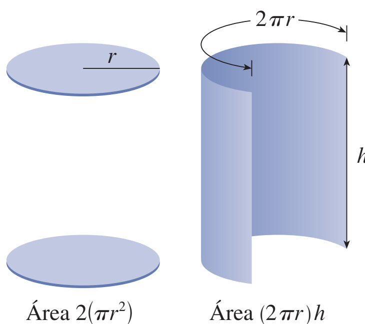


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Se va a fabricar una lata que ha de contener 1 L de aceite. Encuentre las dimensiones que debe tener la lata de manera que minimicen el costo del metal para fabricarla.

SOLUCIÓN Dibuje el diagrama como el de la figura 3, donde r es el radio y h la altura (ambos en centímetros). Para minimizar el costo del metal, se minimiza el área superficial total del cilindro (tapa, fondo y lados). A partir de la figura 4, se ve que los lados se fabrican de una lámina rectangular con dimensiones $2\pi r$ y h. De esta manera, el área superficial es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Se debe expresar A en términos de una variable r. Para eliminar h se recurre al hecho de que el volumen está dado como 1 L, que es equivalente a 1000 cm^3. Así

$$\pi r^2 h = 1000$$

lo que da $h = 1000/(\pi r^2)$. Sustituyendo esto en la expresión para A, da

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Se sabe que r debe ser positivo y no hay limitaciones de qué tan grande puede ser r. Por tanto, la función que se quiere minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0$$

Para encontrar los números críticos, se deriva:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

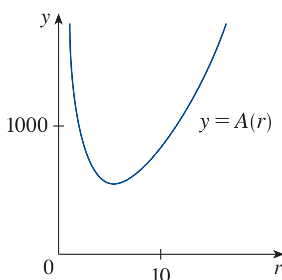


FIGURA 5

Entonces $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = 500$, por lo que el único número crítico es $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Puesto que el dominio de A es $(0, \infty)$, no se puede aplicar el argumento del ejemplo 1 concerniente a los puntos extremos. Pero se puede observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ y $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, por lo que A es decreciente para *toda* r a la izquierda del número crítico y creciente para *toda* r a la derecha. De este modo, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ debe dar lugar a un mínimo *absoluto*.

[Alternativamente, se podría argumentar que $A(r) \to \infty$ cuando $r \to 0^+$ y $A(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, por lo que debe haber un valor mínimo de $A(r)$, que tiene que ocurrir en el número crítico. Véase la figura 5.]

En el Proyecto de aplicación en la página 343 se investiga la forma más económica para la fabricación de una lata tomando en cuenta otros costos de producción.

El valor de h correspondiente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Por lo que, para minimizar el costo de la lata, el radio debe ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm y la altura debe ser igual al doble del radio, es decir, al diámetro. ■

NOTA 1 El argumento utilizado en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (que solo se aplica a valores máximos o mínimos *locales*) y se establece aquí para referencia futura.

Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > $ c, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

(b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x <$ c y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

TEC Module 4.7 lo lleva a través de seis problemas adicionales de optimización, incluyendo animaciones de las situaciones físicas.

NOTA 2 Un método alternativo para resolver problemas de optimización es utilizar derivación implícita. Vea el ejemplo 2 nuevamente para ilustrar el método. Se trabaja con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1000$$

pero en lugar de eliminar h, se deriva ambas ecuaciones implícitamente, respecto a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi rh' + 2\pi h \qquad \pi r^2 h' + 2\pi rh = 0$$

El mínimo se produce en un número crítico, por lo que se establece $A' = 0$; se simplifica para llegar a las ecuaciones

$$2r + rh' + h = 0 \qquad rh' + 2h = 0$$

y la sustracción da $2r - h = 0$, o $h = 2r$.

EJEMPLO 3 Encuentre el punto sobre la parábola $y^2 = 2x$ que está más cerca del punto (1, 4).

SOLUCIÓN La distancia entre el punto (1, 4) y el punto (x, y) es

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

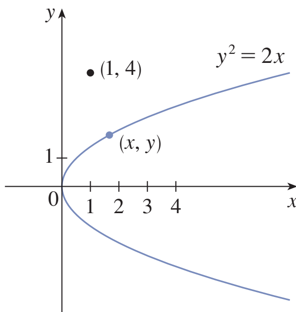


FIGURA 6

(Véase la figura 6). Pero si (x, y) se encuentra sobre la parábola, entonces $x = \frac{1}{2}y^2$, por lo que la expresión para d se convierte en

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

(Como alternativa, se podría haber sustituido $y = \sqrt{2x}$ para obtener d solamente en términos de x.) En lugar de minimizar d, se minimiza su cuadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

(Se debe convencer de que el mínimo de d ocurre en el mismo punto donde ocurre el mínimo de d^2, pero es más fácil trabajar con d^2.) Derivando, se obtiene

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

de manera que $f'(y) = 0$ cuando $y = 2$. Se observa que $f'(y) < 0$ cuando $y < 2$ y $f'(y) > 0$ cuando $y > 2$, por lo que, por la prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos, el mínimo absoluto se obtiene cuando $y = 2$. (O simplemente se podría decir que, debido a la naturaleza geométrica del problema, es evidente que hay un punto más cercano, pero no un punto más lejano). El correspondiente valor de x es $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Por tanto, el punto sobre $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$ es $(2, 2)$. [La distancia entre los puntos $d = \sqrt{f(2)} = \sqrt{5}$.] ■

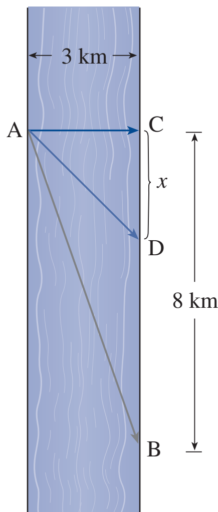


FIGURA 7

EJEMPLO 4 Un hombre lanza su lancha desde un punto A a la orilla de un río recto de 3 km de ancho y quiere alcanzar el punto B, 8 km abajo en la orilla opuesta, en el menor tiempo posible (véase la figura 7). Podría enfilar su lancha directamente a través del río al punto C y después correr a B, podría enfilarse directamente a B, o podría ir a algún punto D entre C y B para después avanzar corriendo hacia B. Si el hombre puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible? (Suponga que la rapidez del agua es insignificante en comparación con la rapidez a la que el hombre rema.)

SOLUCIÓN Sea x la distancia entre C y D, entonces la distancia que ha de correr es $|DB| = 8 - x$ y el teorema de Pitágoras da la distancia que ha de remar $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Se utiliza la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

Entonces el tiempo de remo es $\sqrt{x^2 + 9}/6$, y el tiempo de carrera es $(8 - x)/8$, por lo que el tiempo total T como una función de x es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

El dominio de esta función T es $[0, 8]$. Se observa que si $x = 0$, él rema hacia C y si $x = 8$, rema directamente a B. La derivada de T es

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

Así, utilizando el hecho de que $x \geqslant 0$, se tiene

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2 + 9}$$

$$\iff 16x^2 = 9(x^2 + 9) \iff 7x^2 = 81$$

$$\iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

El único número crítico es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si el mínimo ocurre en este número crítico o en un punto final del dominio $[0, 8]$, se evalúa T siguiendo el método del

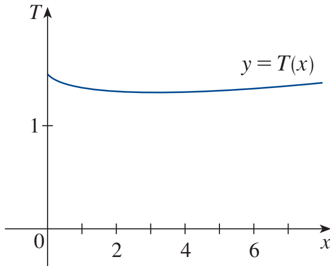


FIGURA 8

intervalo cerrado en los tres puntos:

$$T(0) = 1.5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Como el más pequeño de estos valores de T se produce cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo absoluto de T debe ocurrir allí. La figura 8 ilustra este cálculo mostrando la gráfica de T.

Así, el hombre debe desembarcar en un punto a $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$3.4 km) río abajo de su punto de partida. ■

EJEMPLO 5 Encuentre el rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un semicírculo de radio r.

FIGURA 9

SOLUCIÓN 1 Se toma la semicircunferencia como la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con centro en el origen. Entonces la palabra *inscrita* significa que el rectángulo tiene dos vértices sobre la semicircunferencia y dos vértices sobre el eje x, como se muestra en la figura 9.

Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. Entonces el rectángulo tiene lados de longitud $2x$ y y, por lo que su área es

$$A = 2xy$$

Para eliminar y se recurre al hecho de que (x, y) se encuentra sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, por lo que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Por tanto,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

El dominio de esta función es $0 \leqslant x \leqslant r$. Su derivada es

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que es 0 cuando $2x^2 = r^2$, es decir, $x = r/\sqrt{2}$ (ya que $x \geqslant 0$). Este valor de x da un valor máximo de A porque $A(0) = 0$ y $A(r) = 0$. Por tanto, el rectángulo inscrito de mayor área es

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\,\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

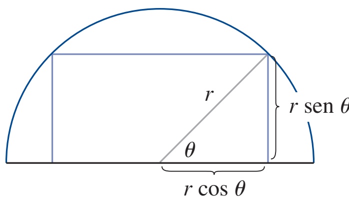


FIGURA 10

SOLUCIÓN 2 Es posible una solución más sencilla si se considera utilizar un ángulo como una variable. Sea θ el ángulo mostrado en la figura 10. Entonces el área del rectángulo es

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta) = r^2(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) = r^2\,\text{sen}\,2\theta$$

Se sabe que sen 2θ tiene un valor máximo de 1 y se produce cuando $2\theta = \pi/2$. Por lo que $A(\theta)$ tiene un valor máximo de r^2 y se produce cuando $\theta = \pi/4$.

Observe que esta solución trigonométrica no implica derivación. De hecho, no se tiene que utilizar cálculo en absoluto. ■

■ Aplicaciones en negocios y economía

En la sección 3.7 se ha introducido la idea de costo marginal. Recuerde que si $C(x)$, la **función de costo** es el costo de producir x unidades de un determinado producto, entonces el **costo marginal** es la tasa de cambio de C respecto a x. En otras palabras, la función de costo marginal es la derivada, $C'(x)$, de la función de costo.

Ahora se considera la comercialización. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la empresa puede cobrar si vende x unidades. Entonces p se llama **función de demanda** (o **función de precio**) y se esperaría que sea una función de x decreciente. (Más unidades vendidas corresponden a menor precio.) Si x unidades son vendidas y el precio por unidad es de $p(x)$, entonces el ingreso total es

$$R(x) = \text{cantidad} \times \text{precio} = xp(x)$$

y R se llama **función de ingreso**. La derivada R' de la función de ingreso se llama **función de ingreso marginal** y es la tasa de cambio de ingreso respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P se llama **función de utilidad**. La **función de utilidad marginal** es P', la derivada de la función de utilidad. En los ejercicios 59-63, se le pide que utilice las funciones de costo marginal, ingreso y utilidad para minimizar los costos y maximizar los ingresos y utilidades.

EJEMPLO 6 Una tienda ha estado vendiendo 200 televisiones de pantalla plana por semana a \$350 cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada \$10 de descuento ofrecido a los compradores, el número de unidades vendidas se incrementará en 20 a la semana. Encuentre la función de demanda y la función de ingreso. ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la tienda para maximizar sus ingresos?

SOLUCIÓN Si x es el número de TV vendidas por semana, entonces el aumento semanal de ventas es $x - 200$. Por cada aumento de 20 unidades vendidas, el precio se reduce por \$10. Por tanto, por cada unidad adicional vendida, la disminución del precio será $\frac{1}{20} \times 10$, y la función de demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función de ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Puesto que $R'(x) = 450 - x$, se ve que $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Este valor de x da un máximo absoluto por la prueba de la primera derivada (o simplemente al observar que la gráfica de R es una parábola que abre hacia abajo). El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es $350 - 225 = 125$. Por tanto, para maximizar el ingreso, la tienda debe ofrecer un descuento de \$125. ■

4.7 EJERCICIOS

1. Considere el problema siguiente: encuentre dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es un máximo.

(a) Haga una tabla de valores, como la siguiente, para la que la suma de los números en las dos primeras columnas siempre sea 23. Con base en las evidencias de la tabla, estime la respuesta al problema.

(b) Utilice el cálculo para resolver el problema y compare con su respuesta al inciso (a).

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

2. Encuentre dos números cuya diferencia es 100 y cuyo producto es un mínimo.

3. Encuentre dos números positivos cuyo producto es 100 y cuya suma es un mínimo.

4. La suma de dos números positivos es 16. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de sus cuadrados?

5. ¿Cuál es la distancia vertical máxima entre la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$ para $-1 \leqslant x \leqslant 2$?

6. ¿Cuál es la distancia vertical mínima entre las parábolas $y = x^2 + 1$ y $y = x - x^2$?

7. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 metros, cuya área sea tan grande como sea posible.

8. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con área de 1000 m^2 cuyo perímetro sea tan pequeño como sea posible.

9. Un modelo utilizado para el rendimiento Y de una producción agrícola como una función del nivel de nitrógeno N en el suelo (medido en unidades adecuadas) es

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeno ofrece el mejor rendimiento?

10. La rapidez (en mg carbono/m^3/h) en que la fotosíntesis tiene lugar para una especie de fitoplancton está modelada por la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

donde I es la intensidad de luz (medida en miles de pie-candela) ¿Para qué intensidad de luz P es máxima?

11. Considere el problema siguiente: un agricultor que tiene 300 m de material para cercar quiere dividir un área rectangular en cuatro terrenos poniendo cercas paralelas a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro terrenos cercados?
(a) Dibuje varios diagramas que ilustren la situación, algunos con terrenos cortos, anchos y largos, angostos. Encuentre las áreas totales de estas configuraciones. ¿Parece que hay un área máxima? Si es así, calcúlela.
(b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación general. Introduzca la notación y etiquete el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el área total.
(d) Utilice la información proporcionada para plantear una ecuación que relacione las variables.
(e) Utilice el inciso (d) para expresar el área total como una función de una variable.
(f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con su cálculo del inciso (a).

12. Considere el problema siguiente: se desea construir una caja con tapa abierta, utilizando una pieza cuadrada de cartón de 3 m de ancho, recortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas y doblando los costados. Encuentre el volumen más grande que esa caja puede tener.
(a) Dibuje varios diagramas para ilustrar la situación, algunas cajas de poca altura con bases grandes y algunas cajas de mucha altura con bases pequeñas. Encuentre los volúmenes de varias de esas cajas. ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo.
(b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación general. Introduzca la notación y etiquete el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el volumen.
(d) Utilice la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Utilice el inciso (d) para expresar el volumen como función de una variable.
(f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con su estimación en el inciso (a).

13. Un agricultor quiere cercar un área de 15 000 m^2 cuadrados en un terreno rectangular y luego dividirlo por la mitad, con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Cómo puede el agricultor hacer esto para minimizar el costo de la cerca?

14. Una caja con una base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material utilizado.

15. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa; encuentre el mayor volumen posible de la caja.

16. Un contenedor rectangular de almacenamiento sin tapa ha de tener un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces el ancho. El material para la base cuesta $10 por metro cuadrado y el material para los costados cuesta $6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales que hagan más barato el contenedor.

17. Resuelva el ejercicio 16 suponiendo que el contenedor tiene una tapa fabricada con el mismo material que los lados.

18. Un granjero quiere cercar un terreno rectangular junto a la pared norte de su granero. La cerca no es necesaria a lo largo del granero, y la cerca a lo largo del lado oeste de la parcela es compartida con un vecino con quien se dividirá el costo de la parte de la cerca. Si la cerca cuesta $30 por metro lineal para instalar y el agricultor no está dispuesto a gastar más de $1 800, encuentre las dimensiones del terreno que tenga la mayor área.

19. Si el granjero en el ejercicio 18 quiere incluir 150 metros cuadrados de terreno, ¿qué dimensiones minimizarán el costo de la cerca?

20. (a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área dada, el de perímetro más pequeño es un cuadrado.
(b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el de mayor área es un cuadrado.

21. Encuentre el punto sobre la recta $y = 2x + 3$ que está más cerca del origen.

22. Determine el punto sobre la curva $y = \sqrt{x}$ que está más cerca del punto (3, 0).

23. Determine los puntos sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que están más lejos del punto (1,0).

24. Encuentre, redondeadas a dos decimales, las coordenadas del punto sobre la curva $y = \operatorname{sen} x$ que está más cerca del punto (4, 2).

25. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio r.

26. Encuentre el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

27. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un triángulo equilátero de lado L si uno de los lados del rectángulo se encuentra sobre la base del triángulo.

28. Determine el área del trapecio más grande que se puede inscribir en un círculo de radio 1 y cuya base es un diámetro del círculo.

29. Encuentre las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio r.

30. Si los dos lados iguales de un triángulo isósceles tienen longitud a, determine la longitud del tercer lado que maximice el área del triángulo.

31. Determine el cilindro de mayor volumen posible que se puede inscribir en una esfera de radio r.

32. Busque el cilindro de mayor volumen posible que se puede inscribir en un cono de altura h y radio de la base r.

33. Encuentre el cilindro circular recto de mayor superficie que se puede inscribir en una esfera de radio r.

34. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. (Así, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Véase el ejercicio 1.1.62.) Si el perímetro de la ventana es de 10 m, encuentre las dimensiones de la ventana para que sea admitida la mayor cantidad posible de luz.

35. Los márgenes superior e inferior de un cartel son de 6 cm y los márgenes de los lados de 4 cm. Si el área de impresión sobre el cartel se fija en 384 cm^2, encuentre las dimensiones del cartel con la menor área.

36. Un cartel debe tener un área de 900 cm^2 con márgenes de 3 cm en la parte inferior y laterales, y un margen de 5 cm en la parte superior. ¿Qué dimensiones darán la mayor área de impresión?

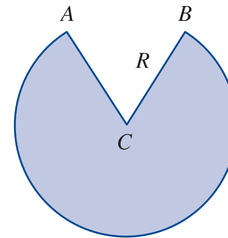
37. Un pedazo de alambre de 10 m de largo está cortado en dos piezas. Una pieza está doblada en forma de cuadrado y la otra de un triángulo equilátero. (a) ¿Cómo se debe cortar el alambre para que el área total encerrada sea un máximo?, (b) ¿un mínimo?

38. Conteste el ejercicio 37 si una pieza está doblada en forma de un cuadrado y la otra de un círculo.

39. Si le ofrecen una rebanada de pizza redonda (en otras palabras, un sector de un círculo) y el segmento debe tener un perímetro de 60 cm, ¿qué diámetro debe tener la pizza para recompensarle con la rebanada más grande?

40. Una cerca de 2 m de altura corre paralela a una distancia de 1 m de un edificio alto. ¿Cuál es la escalera de menor longitud que, colocada en el suelo, pasando sobre la cerca, alcanzará la pared del edificio?

41. Un recipiente cónico para beber se hace de una pieza circular de papel de radio R, recortando un sector y uniendo los bordes CA y CB. Encuentre la capacidad máxima de dicho recipiente.



42. Un recipiente para beber, en forma de cono, se diseña para contener 27 cm^3 de agua. Encuentre la altura y el radio del cono que utilizará la menor cantidad de papel.

43. Un cono de altura h está inscrito en un cono de mayor tamaño con altura H, de manera que su vértice está en el centro de la base del cono más grande. Demuestre que el cono interior tiene volumen máximo cuando $h = \frac{1}{3}H$.

44. Un objeto con masa m es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con un plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante denominada coeficiente de fricción. ¿Para qué valor de θ es F más pequeña?

45. Si se conecta una resistencia de R ohms a través de una batería de E volts con resistencia interna de r ohms, entonces la potencia (en watts) en la resistencia externa es

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$

Si E y r son fijos, pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

46. Para un pez nadando a una rapidez v relativa al agua, el gasto de energía por unidad de tiempo es proporcional a v^3. Se cree que durante la migración, los peces intentan minimizar la energía total requerida para nadar una distancia fija. Si los peces están nadando contra una corriente u ($u < v$), entonces el tiempo necesario para nadar una

distancia L es $L/(v - u)$, y la energía total E necesaria para nadar la distancia está dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

donde a es la constante de proporcionalidad.

(a) Determine el valor de v que minimiza E.

(b) Trace la gráfica de E.

Nota: este resultado ha sido verificado experimentalmente; en la migración, los peces nadan contra la corriente a una velocidad de 50% mayor que la rapidez de la corriente.

47. En un panal, cada celda es un prisma hexagonal regular, abierto en un extremo en un ángulo triedro en el otro extremo como en la figura. Se cree que las abejas forman sus celdas de modo que se minimice la superficie para una longitud y altura dadas, utilizando así la menor cantidad de cera en la construcción de la celda. El examen de estas celdas ha demostrado que la medida del ángulo θ del vértice es sorprendentemente consistente. Con base en la geometría de la celda, se puede demostrar que la superficie S está dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \cot\theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right)\csc\theta$$

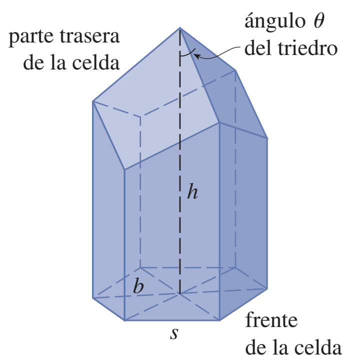
donde s, la longitud de los lados del hexágono y h, la altura, son constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) ¿Qué ángulo deberían preferir las abejas?

(c) Determine la superficie mínima de la celda (en términos de s y h).

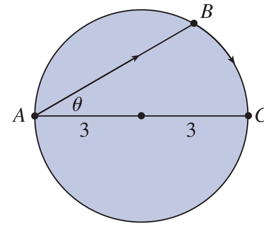
Nota: se han realizado las mediciones reales del ángulo θ en panales, y las medidas de estos ángulos difieren raramente del valor calculado por más de 2°.



48. Un barco sale de un muelle a las 14:00 horas y viaja hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Otro barco ha estado dirigiéndose hacia el este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 15:00 horas. ¿A qué hora estuvieron los dos barcos más cerca uno del otro?

49. Resuelva el problema en el ejemplo 4 si el río es de 5 km de ancho y el punto B está a solo 5 km río abajo de A.

50. Una mujer, en un punto A en la orilla de un lago circular con radio de 3 km, quiere llegar al punto C diametralmente opuesto a A al otro lado del lago en el menor tiempo posible (véase la figura). Ella puede caminar a una rapidez de 6 km/h y remar a 3 km/h. ¿Cómo debe proceder?



51. Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a tanques de almacenamiento situados en la orilla sur del río, 6 km al este de la refinería. El costo de colocación de tubería es \$400 000/km sobre la tierra a un punto P a la orilla norte y \$800 000/km bajo el río a los tanques. Para minimizar el costo de la tubería, ¿dónde se debe ubicar P?

52. Suponga que la refinería en el ejercicio 51 está situada a 1 km al norte del río. ¿Dónde debe estar ubicado P?

53. La iluminación de un objeto por una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad de la fuente, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Si dos fuentes luminosas, una tres veces más intensa que la otra, se colocan a 4 m de distancia, ¿dónde se debe colocar un objeto en la recta entre las fuentes para recibir la menor iluminación?

54. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 5) que corta el primer cuadrante con la menor área.

55. Sean a y b números positivos. Encuentre la longitud del menor segmento de recta que corta el primer cuadrante y pasa por el punto (a, b).

56. ¿En qué puntos de la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ tiene la recta tangente con pendiente más grande?

57. ¿Cuál es la longitud más corta posible del segmento de recta que corta el primer cuadrante y es tangente a la curva $y = 3/x$ en algún punto?

58. ¿Cuál es el triángulo de menor área posible que corta el primer cuadrante y cuya hipotenusa es tangente a la parábola $y = 4 - x^2$ en algún punto?

59. (a) Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un producto, entonces el **costo promedio** por unidad es de $c(x) = C(x)/x$. Demuestre que si el costo promedio es un mínimo, entonces el costo marginal es igual al costo promedio.

(b) Si $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, en dólares, encuentre (i) el costo, el costo promedio y el costo marginal a un nivel de producción de 1 000 unidades; (ii) el nivel de producción que minimizará el costo promedio, y (iii) el costo promedio mínimo.

60. (a) Demuestre que si la utilidad $P(x)$ es un máximo, entonces el ingreso marginal es igual al costo marginal.
(b) Si $C(x) = 16\,000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ es la función de costo y $p(x) = 1\,700 - 7x$ es la función de demanda, encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

61. Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55 000 espectadores. Con el precio de las entradas a \$10, la asistencia promedio había sido de 27 000. Cuando los precios se redujeron a \$8, la asistencia promedio subió a 33 000.
(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.
(b) ¿Cómo se deben establecer los precios de las entradas para maximizar los ingresos?

62. Durante los meses de verano, Terry hace y vende collares en la playa. El verano pasado vendió los collares a \$10 cada uno y sus ventas promedio fueron de 20 por día. Cuando aumentó el precio por \$1, encontró que el promedio disminuyó dos ventas por día.
(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.
(b) Si el material para cada collar le cuesta a Terry \$6, ¿qué precio de venta debe maximizar su utilidad?

63. Un comerciante ha estado vendiendo 1200 tablets a la semana a \$350 cada una. Un estudio de mercado indica que, por cada \$10 de descuento ofrecido al comprador, el número de tablets vendidas se incrementará en 80 por semana.
(a) Encuentre la función de demanda.
(b) ¿Cuál debe ser el precio para maximizar los ingresos?
(c) Si la función de costo semanal del comerciante es

$$C(x) = 35\,000 + 120x$$

¿qué precio se debería elegir para maximizar sus ganancias?

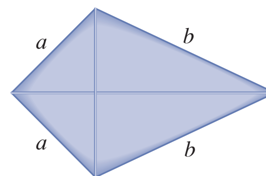
64. Una empresa opera 16 pozos de petróleo en un área designada. Cada bomba, en promedio, extrae 240 barriles de petróleo diariamente. La compañía puede agregar más pozos, pero cada pozo que agrega reduce la producción diaria promedio de cada uno de los pozos en 8 barriles. ¿Cuántos pozos debe agregar la empresa para empezar a maximizar la producción diaria?

65. Demuestre que, de todos los triángulos isósceles con un perímetro dado, el de mayor área es equilátero.

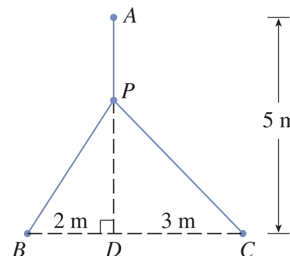
66. Considere la situación en el ejercicio 51 si el costo de colocación de la tubería bajo del río es considerablemente más alto que el costo de colocación de tuberías sobre la tierra (\$400 000/km). Usted puede inferir que, en algunos casos, se debe utilizar la mínima distancia posible debajo del río, y que P debe estar situado a 6 km de la refinería, justo enfrente de los tanques de almacenamiento. Demuestre que esto *nunca* es el caso, sin importar cuál sea el costo "bajo el río".

67. Considere la recta tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en un punto (p, q) en el primer cuadrante.
(a) Demuestre que la tangente tiene intersección en $x = a^2/p$ y la intersección en $y = b^2/q$.
(b) Demuestre que la parte de la tangente que interseca los ejes de coordenadas tiene una longitud mínima de $a + b$.
(c) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas tiene a ab como área mínima.

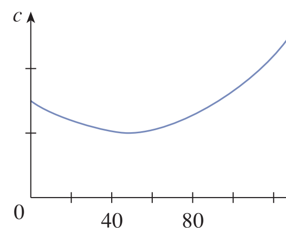
SAC **68.** El marco de una cometa está hecho de seis piezas de madera. Las cuatro piezas exteriores se han recortado con las longitudes indicadas en la figura. Para maximizar el área de la cometa, ¿qué longitud deben tener las piezas diagonales?



69. Un punto P debe estar ubicado en algún lugar sobre la recta AD, de manera que la longitud total L de cables ligados de P a los puntos A, B y C se minimice (véase la figura). Exprese L como una función de $x = |AP|$ y utilice las gráficas de L y dL/dx para estimar el valor mínimo de L.



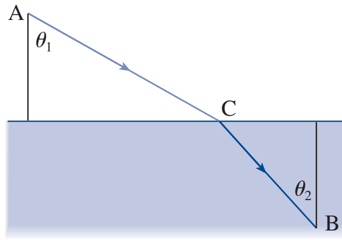
70. La gráfica muestra el consumo de combustible c de un automóvil (medido en litros por hora) en función de la velocidad v del automóvil. A muy bajas velocidades el motor funciona de manera ineficiente, así que inicialmente c disminuye conforme aumenta la velocidad. Pero a alta velocidad el consumo de combustible se incrementa. Se puede ver que $c(v)$ está minimizada para este automóvil cuando $v \approx 48$ km/h. Sin embargo, para la eficiencia de combustible, lo que se debe reducir al mínimo no es el consumo en galones por hora, sino más bien el consumo de combustible en litros *por kilómetro*. Se llamará G a este consumo. Utilizando la gráfica, estime la velocidad en la que G tiene su valor mínimo.



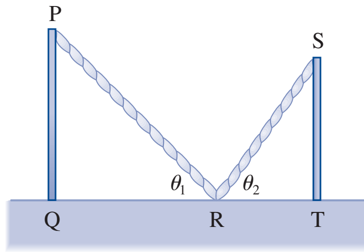
71. Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. De acuerdo con el principio de Fermat, un rayo de luz viajará desde un punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo de recorrido. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

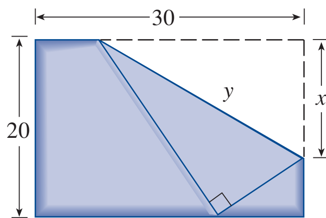
donde θ_1 (el ángulo de incidencia) y θ_2 (el ángulo de refracción) son como se muestra. Esta ecuación se conoce como la ley de Snell.



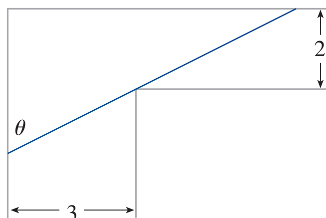
72. Dos postes verticales PQ y ST están asegurados por una cuerda PRS que van desde la parte superior del primer poste a la parte superior del segundo poste como en la figura. Demuestre que la longitud más corta de esa cuerda se produce cuando $\theta_1 = \theta_2$.



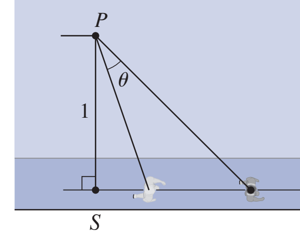
73. Se pliega la esquina superior derecha de un pedazo de papel de 30 cm por 20 cm, como en la figura, sobre la orilla inferior. ¿Cómo debería usted plegarla para minimizar la longitud del pliegue? En otras palabras, ¿cómo se elige x para minimizar y?



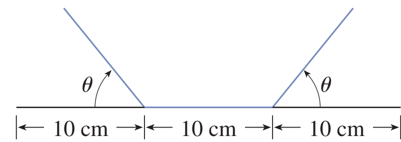
74. Se lleva cargando un tubo de acero por un pasillo de 3 metros de ancho. Al final de la sala hay un giro recto en un estrecho pasillo de 2 m de ancho. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que puede dar la vuelta horizontalmente alrededor de la esquina?



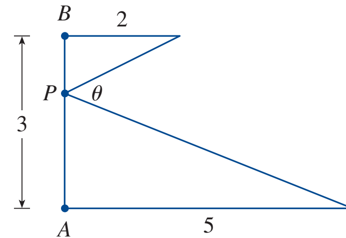
75. Un observador se encuentra en un punto P a una unidad de una pista. Dos corredores comienzan en el punto S en la figura y corren a lo largo de la pista. Un atleta corre tres veces más rápido que el otro. Encuentre el valor máximo del ángulo de vista del observador θ entre los corredores.



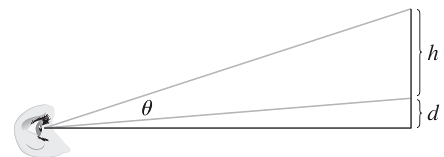
76. Se desea construir una caída de agua de lluvia utilizando una hoja de metal de 30 cm de ancho, plegando hasta un tercio a cada lado de la hoja con un ángulo θ. ¿Cómo se debe elegir θ de manera que el canal conduzca la cantidad máxima de agua?



77. ¿Dónde debe elegirse el punto P sobre el segmento de recta AB tal que maximice el ángulo θ?



78. Una pintura en una galería de arte tiene altura h y está colgada de manera que su borde inferior esté a una distancia d sobre el ojo de un observador (como se muestra en la figura). ¿Hasta qué punto de la pared debe estar el observador para tener la mejor vista? (En otras palabras, ¿dónde debe pararse el observador para maximizar el ángulo θ subtendido a su ojo por la pintura?)

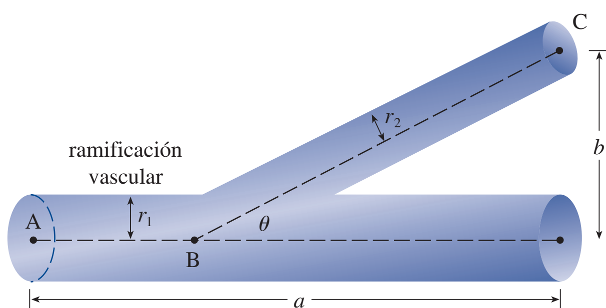


79. Encuentre el rectángulo de área máxima que puede ser circunscrito por un rectángulo dado con longitud L y ancho W. [*Sugerencia*: exprese el área en función de un ángulo θ.]

80. El sistema vascular de sangre consiste en vasos sanguíneos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que trasladan la sangre desde el corazón hasta los órganos y de estos al corazón. Este sistema debe trabajar de manera que minimice la energía gastada por el corazón al bombear la sangre. En particular, esta energía se reduce cuando disminuye la resistencia de la sangre. Una de las leyes de Poiseuille da la resistencia R de la sangre como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud de los vasos sanguíneos, r es el radio y C es una constante positiva, determinada por la viscosidad de la sangre. (Poiseuille estableció esta ley experimentalmente, pero también de la ecuación 8.4.2.) La figura muestra un vaso principal con radio r_1 bifurcado en un ángulo θ en un vaso más pequeño con radio r_2.



(a) Utilice la ley de Poiseuille para demostrar que la resistencia total de la sangre a lo largo de la ruta ABC es

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

donde a y b son las distancias que se muestran en la figura.

(b) Demuestre que esta resistencia se minimiza cuando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encuentre el ángulo de bifurcación óptimo (aproximado al grado más cercano) cuando el radio de los vasos sanguíneos más pequeños es dos tercios el radio del vaso más grande.

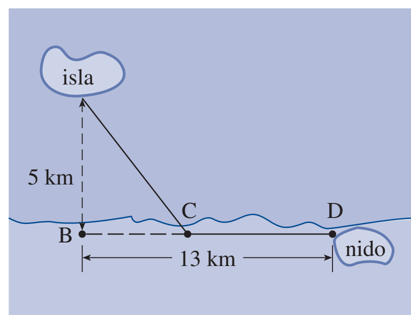
81. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre grandes masas de agua durante el día. Se cree que requieren más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra porque el aire generalmente se eleva sobre la tierra y cae sobre el agua durante el día. Un pájaro con estas tendencias es lanzado desde una isla que está a 5 km del punto B más cercano a una costa recta, vuela a un punto C sobre la costa y luego vuela a lo largo de la costa hasta su lugar de anidación D. Suponga que el ave elige instintivamente un camino que minimiza su gasto de energía. Los puntos B y D están a 13 km de distancia uno del otro.

(a) En general, si requiere 1.4 veces más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra, ¿a qué punto C debe el ave volar tal que minimice la energía total gastada en regresar a su zona de anidación?

(b) Sean W y L la energía (en joules) por kilómetro volado sobre agua y tierra, respectivamente. ¿Qué significaría un valor muy grande de la relación W/L en términos del vuelo de las aves? ¿Qué significaría un valor pequeño? Determine la relación W/L correspondiente al gasto mínimo de energía.

(c) ¿Cuál debería ser el valor de W/L para que el ave vuele directamente a su zona de anidación D? ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele a B y luego a lo largo de la orilla a D?

(d) Si los ornitólogos observan que las aves de cierta especie llegan a la orilla en un punto a 4 km de B, ¿cuántas veces más energía necesita un ave para volar sobre el agua que sobre la tierra?



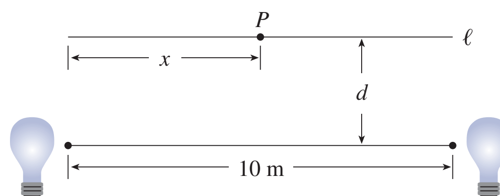
82. Dos fuentes luminosas de idéntica intensidad se colocan separadas 10 m. Un objeto se ha de colocar en un punto P sobre una recta ℓ paralela a la recta que une las fuentes de luz y a una distancia d metros de ella (véase la figura). Se quiere localizar P sobre ℓ de manera que se minimice la intensidad de iluminación. Se tiene que utilizar el hecho de que la intensidad de iluminación de una fuente única es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen.

(a) Encuentre una expresión para la intensidad $I(x)$ en el punto P.

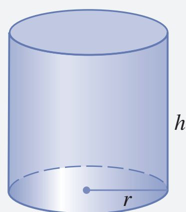
(b) Si $d = 5$ m, utilice las gráficas de $I(x)$ y de $I'(x)$ para demostrar que la intensidad es minimizada cuando $x = 5$ m, es decir, cuando P está en el punto medio de ℓ.

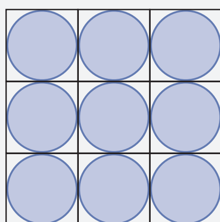
(c) Si $d = 10$ m, demuestre que la intensidad (quizá sorprendentemente) *no* se minimiza en el punto medio.

(d) En algún punto entre $d = 5$ m y $d = 10$ m hay un valor de transición de d en el que el punto de mínima iluminación cambia abruptamente. Calcule este valor de d por métodos gráficos. Luego, encuentre el valor exacto de d.

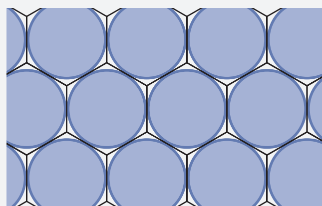


PROYECTO DE APLICACIÓN LA FORMA DE UNA LATA





Discos cortados en cuadrados



Discos cortados en hexágonos

En este proyecto se investiga la forma más económica para una lata. Primero se interpreta que esto significa que el volumen V de una lata cilíndrica está dado y que se tiene que encontrar la altura h y radio r que minimizan el costo del metal para fabricar la lata (véase la figura). Si se está haciendo caso omiso de cualquier residuo de metal en el proceso de fabricación, el problema es minimizar la superficie del cilindro. Se resolvió este problema en el ejemplo 4.7.2 y se encontró que $h = 2r$; es decir, la altura debe ser la misma que el diámetro. Pero si va a la alacena o a un supermercado con una regla, descubrirá que la altura es generalmente mayor que el diámetro, y la relación h/r varía desde 2 hasta aproximadamente 3.8. Se va a ver si se puede explicar este fenómeno.

1. El material para las latas se corta de hojas de metal. Las partes cilíndricas se forman doblando rectángulos; estos rectángulos son cortados de la hoja buscando poco o ningún desperdicio. Pero si se cortan los discos superior e inferior de cuadrados de lado $2r$ (como en la figura), esto deja un desperdicio considerable de metal, que puede ser reciclado, pero tiene poco o ningún valor para los fabricantes de la lata. Si este es el caso, demuestre que la cantidad de metal utilizada es minimizada cuando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

2. Un embalaje más eficiente de los discos se obtiene dividiendo la hoja de metal en hexágonos y cortando las tapas circulares y bases de los hexágonos (véase la figura). Demuestre que si se adopta esta estrategia, entonces

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$

3. Los valores de h/r que se encontraron en los problemas 1 y 2 son un poco más parecidos a los que realmente se ven en los estantes de los supermercados, pero todavía no se explica todo. Si se mira más de cerca algunas latas reales, se ve que la base y la tapa están formadas por discos con radio mayor que r y están dobladas sobre los extremos de la lata. Si se toma en cuenta esto se aumentaría h/r. También es importante considerar que, además de los costos del metal, se necesita incorporar la fabricación de la lata en el costo. Se va a suponer que la mayoría de los gastos se incurren al unir los lados de los bordes de las latas. Si se corta los discos de hexágonos como en el problema 2, entonces el costo total es proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

donde k es el recíproco de la longitud que puede unirse para el costo de una unidad de área de metal. Demuestre que esta expresión se minimiza cuando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Trace la gráfica de $\sqrt[3]{V}/k$ como una función de $x = h/r$ y utilice su gráfica para argumentar que cuando una lata es grande o la unión de las piezas es barata, se debería hacer h/r aproximadamente 2.21 (como en el problema 2). Pero cuando la lata es pequeña o la unión es costosa, h/r debería ser mucho mayor.

5. El análisis muestra que grandes latas deben ser casi cuadradas, pero pequeñas latas deben ser altas y delgadas. Observe las formas relativas de las latas en un supermercado. ¿Esta conclusión suele ser cierta en la práctica? ¿Existen excepciones? ¿Puede sugerir razones de por qué las pequeñas latas no son siempre altas y delgadas?

PROYECTO DE APLICACIÓN AVIONES Y PÁJAROS: MINIMIZACIÓN DE LA ENERGÍA



Las aves pequeñas tales como los pinzones alternan aletear sus alas y mantenerlas dobladas mientras vuelan (véase la figura 1). En este proyecto se analiza este fenómeno y se intenta determinar la frecuencia con la que un pájaro debe aletear. Algunos de los principios son los mismos que los de un avión de alas fijas por lo que se comienza considerando cómo la energía y la potencia requerida dependen de la velocidad de los aviones.[1]



FIGURA 1

1. La potencia necesaria para propulsar un avión hacia adelante con una velocidad v es

$$P = Av^3 + \frac{BL^2}{v}$$

donde A y B son constantes positivas específicas de la aeronave y L es la elevación, la fuerza hacia arriba que soporta el peso del avión. Determine la velocidad que reduce al mínimo la potencia necesaria.

2. La velocidad encontrada en el problema 1 minimiza la potencia pero para una velocidad más rápida podría usar menos combustible. La energía necesaria para propulsar el avión a una unidad de distancia es $E = P/v$. ¿A qué velocidad se minimiza la energía?

3. ¿Qué tanto más rápida es la velocidad para la energía mínima que la velocidad para la potencia mínima?

4. Al aplicar la ecuación del problema 1 al vuelo del pájaro se divide el término Av^3 en dos partes: $A_b v^3$ para el cuerpo del pájaro y $A_w v^3$ para sus alas. Sea x la parte del tiempo de vuelo de aleteo. Si m es la masa de las aves y la elevación se produce durante el aleteo, entonces la elevación es mg/x por lo que la potencia necesaria durante el aleteo es

$$P_{\text{aleteo}} = (A_b + A_w)v^3 + \frac{B(mg/x)^2}{v}$$

La potencia mientras dobla las alas es $P_{\text{dobladas}} = A_b v^3$. Demuestre que la potencia promedio sobre todo un ciclo de vuelo es

$$\overline{P} = xP_{\text{aleteo}} + (1 - x)P_{\text{dobladas}} = A_b v^3 + xA_w v^3 + \frac{Bm^2 g^2}{xv}$$

5. ¿Para qué valor de x la potencia promedio es mínima? ¿Qué puede concluir si el pájaro vuela lentamente? ¿Qué puede concluir si el pájaro vuela más y más rápido?

6. La energía promedio sobre un ciclo es $\overline{E} = \overline{P}/v$. ¿Qué valor de x minimiza a $\overline{E}$?

---

1. Adaptado de R. McNeill Alexander, *Optima for Animals* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996.)

4.8 El método de Newton

Suponga que un concesionario de automóviles ofrece venderle un auto al contado en \$18 000 en pagos de \$375 mensuales durante cinco años. A usted le gustaría saber qué tasa de interés mensual le cobrará el vendedor. Para encontrar la respuesta, tiene que resolver la ecuación

$$\boxed{1} \qquad 48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

(Los detalles se explican en el ejercicio 41). ¿Cómo resolvería tal ecuación?

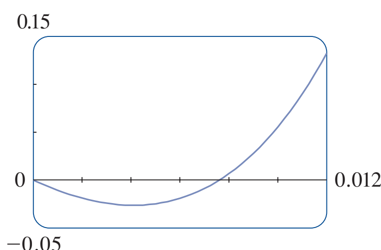


FIGURA 1

Intente resolver la ecuación 1 utilizando su calculadora o su computadora. Algunos equipos no son capaces de solucionarlo. Otros lo logran, pero requieren que especifique un punto de partida para la búsqueda.

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ hay una fórmula bien conocida para obtener las raíces. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grado también hay fórmulas para obtener las raíces, pero son muy complicadas. Si f es un polinomio de grado 5 o superior, no hay ninguna fórmula de este tipo (véase la nota en la página 211). Asimismo, no hay ninguna fórmula que nos permita encontrar las raíces exactas de una ecuación trascendente como $\cos x = x$.

Se puede encontrar una solución *aproximada* para la ecuación 1 graficando el lado izquierdo de la ecuación. Mediante un dispositivo graficador y después de experimentar con rectángulos de vista, se obtiene la gráfica de la figura 1.

Se ve que, además de la solución $x = 0$ que no interesa, hay una solución entre 0.007 y 0.008. Al hacer acercamientos se ve que la raíz es aproximadamente 0.0076. Si se requiere más precisión se pueden hacer acercamientos repetidas veces, pero esto es algo tedioso. Una alternativa más rápida es utilizar un rastreador numérico de raíces con una calculadora o en un sistema algebraico computacional. Con esto se encuentra la raíz, con una aproximación de nueve decimales: 0.007628603.

¿Cómo funcionan esos buscadores numéricos de raíces? Utilizan una variedad de métodos, pero la mayoría de ellos utiliza algún **método de Newton**, también llamado **método de Newton-Raphson.** Se explicará cómo funciona este método, en parte para mostrar lo que sucede dentro de una calculadora o computadora y en parte como una aplicación de la idea de aproximación lineal.

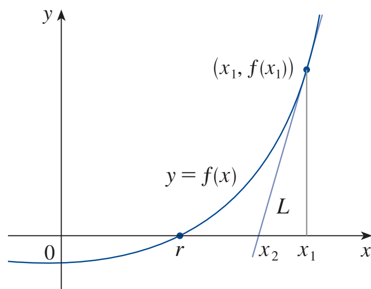


FIGURA 2

La geometría del método de Newton se muestra en la figura 2. Se desea resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, por lo que las raíces de la ecuación corresponden a las intersecciones x de la gráfica de f. La raíz que se está tratando de encontrar está etiquetada con r en la figura. Se comienza con una primera aproximación x_1, que se obtiene por suposición, o de un trazo de la gráfica de f, o de una gráfica de f generada por computadora. Considere la recta tangente L a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y mire la intersección de L con el eje x, etiquetado con x_2. La idea del método de Newton es que la recta tangente es cercana a la curva y su intersección en x, x_2, cercana a la intersección de la curva con x (es decir, la raíz r que se está buscando). Dado que la tangente es una recta, se puede encontrar fácilmente su intersección con el eje x.

Para encontrar una fórmula para x_2 en términos de x_1, se recurre al hecho de que la pendiente de L es $f'(x_1)$; por lo que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Ya que la intersección de L con el eje x es x_2, se sabe que el punto $(x_2, 0)$ está en la línea, y entonces

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, se puede resolver esta ecuación para x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Se utiliza x_2 como una segunda aproximación a r.

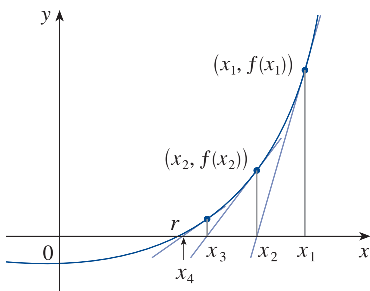


FIGURA 3

Luego se repite este procedimiento con x_1 reemplazándola por la segunda aproximación x_2, utilizando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Esto da una tercera aproximación:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Si se mantiene este proceso, se obtiene una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ como se muestra en la figura 3. En general, si la enésima aproximación es x_n y $f'(x_n) \neq 0$, entonces la aproximación siguiente está dada por

2
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Las sucesiones se presentaron brevemente en *Un adelanto del cálculo* en la página 5. Un análisis con detalle inicia en la sección 11.1.

Si los números x_n están más y más cercanos a r cuando n es muy grande, entonces se dice que la sucesión *converge* a r y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

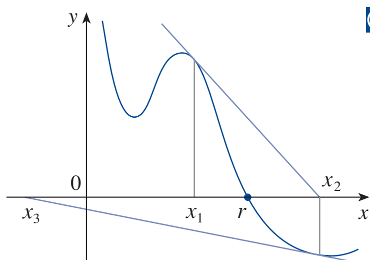


FIGURA 4

Aunque la sucesión de aproximaciones converge a la raíz deseada para funciones del tipo que se muestra en la figura 3, en ciertas circunstancias la sucesión puede no converger. Por ejemplo, considere la situación que se muestra en la figura 4. Puede ver que x_2 es una peor aproximación que x_1. Esto suele ser el caso cuando $f'(x_1)$ está cerca de 0. Incluso puede ocurrir que una aproximación (como x_3 en la figura 4) esté fuera del dominio de f. Entonces, el método de Newton falla y se debe elegir una mejor aproximación inicial x_1. Véanse los ejercicios 31-34 para ejemplos concretos en que el método de Newton funciona muy lentamente o no funciona en absoluto.

TEC En Module 4.8 puede investigar cómo funciona el método de Newton para varias funciones y qué pasa cuando se cambia x_1.

EJEMPLO 1 Empiece con $x_1 = 2$ para encontrar la tercera aproximación x_3 a la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN Se aplica el método de Newton con

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

Newton mismo utilizó esta ecuación para ilustrar su método y eligió $x_1 = 2$ después de algunas experimentaciones porque $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 16$. La ecuación 2 resulta

La figura 5 muestra la geometría detrás del primer paso en el método de Newton en el ejemplo 1. Ya que $f'(2) = 10$, la recta tangente $y = x^3 - 2x - 5$ en $(2, -1)$ tiene la ecuación $y = 10x - 21$ por lo que su intersección con el eje x es $x_2 = 2.1$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Con $n = 1$ se tiene

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

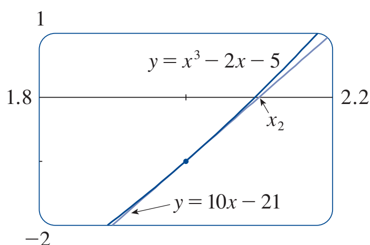


FIGURA 5

Entonces, con $n = 2$ se obtiene

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2} = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Resulta que esta tercera aproximación $x_3 \approx 2.0946$ es precisa a cuatro decimales. ■

Suponga que se quiere lograr una precisión dada, por ejemplo con ocho decimales, usando el método de Newton. ¿Cómo se sabe cuándo parar? La regla que generalmente se utiliza es que se puede detener cuando aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} concuerdan a ocho decimales. (Se dará un enunciado correcto acerca de la exactitud del método de Newton en el ejercicio 11.11.39.)

Observe que el procedimiento que va de n a $n + 1$ es el mismo para todos los valores de n (se llama proceso *iterativo*.) Esto significa que el método de Newton es especialmente conveniente para el uso con una computadora o calculadora programable.

EJEMPLO 2 Utilice el método de Newton para encontrar $\sqrt[6]{2}$ con una aproximación de ocho decimales.

SOLUCIÓN Primero se observa que encontrar $\sqrt[6]{2}$ es equivalente a encontrar la raíz positiva de la ecuación

$$x^6 - 2 = 0$$

por lo que se toma $f(x) = x^6 - 2$. Entonces $f'(x) = 6x^5$ y la fórmula 2 (método de Newton) se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Si se elige $x_1 = 1$ como una aproximación inicial, se obtiene

$$x_2 \approx 1.16666667$$
$$x_3 \approx 1.12644368$$
$$x_4 \approx 1.12249707$$
$$x_5 \approx 1.12246205$$
$$x_6 \approx 1.12246205$$

Ya que x_5 y x_6 coinciden en ocho decimales, se concluye que

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

con ocho lugares decimales. ■

EJEMPLO 3 Encuentre, con una aproximación a seis lugares decimales, la raíz de la ecuación $\cos x = x$.

SOLUCIÓN Primero se reescribe la ecuación en su forma estándar:

$$\cos x - x = 0$$

Por lo que se hace $f(x) = \cos x - x$. Entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$, por lo que la fórmula 2 resulta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\operatorname{sen} x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\operatorname{sen} x_n + 1}$$

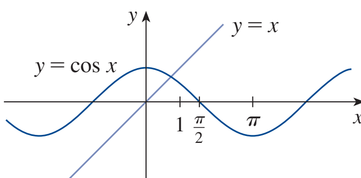


FIGURA 6

Para proponer un valor adecuado para x_1 se traza las gráficas de $y = \cos x$ y de $y = x$ en la figura 6. Parece que se intersecan en un punto cuya coordenada x es

algo menor que 1, por lo que se va a tomar $x_1 = 1$ como una conveniente primera aproximación. Entonces, recordando poner la calculadora en modo radianes, se obtiene

$$x_2 \approx 0.75036387$$
$$x_3 \approx 0.73911289$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$
$$x_5 \approx 0.73908513$$

Como x_4 y x_5 concuerdan con seis decimales (ocho, de hecho), se concluye que la raíz de la ecuación, aproximada a seis cifras decimales, es 0.739085. ■

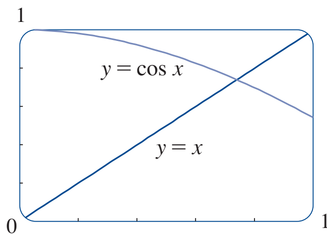


FIGURA 7

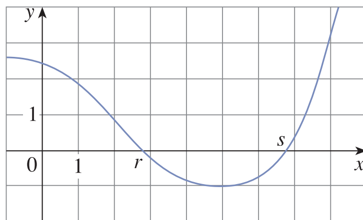
En lugar de utilizar el trazo de la figura 6 para obtener una aproximación inicial para el método de Newton en el ejemplo 3, se podría haber utilizado la gráfica más precisa que proporciona una calculadora o una computadora. La figura 7 sugiere que se utilice $x_1 = 0.75$ como la aproximación inicial. Entonces el método de Newton da

$$x_2 \approx 0.73911114$$
$$x_3 \approx 0.73908513$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$

y así se obtiene la misma respuesta que antes, pero con un paso menos.

4.8 EJERCICIOS

1. La figura muestra la gráfica de una función f. Suponga que se utiliza el método de Newton para aproximar la raíz s de la ecuación $f(x) = 0$ con aproximación inicial $x_1 = 6$.
(a) Dibuje las rectas tangentes que se utilizan para encontrar x_2 y x_3 y estime los valores numéricos de x_2 y x_3.
(b) ¿Sería $x_1 = 8$ una mejor primera aproximación? Explique.

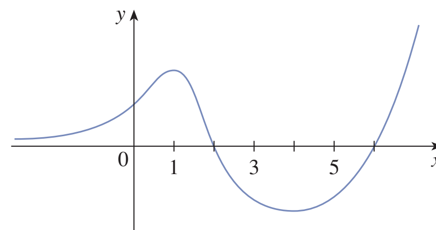


2. Siga las instrucciones para el ejercicio 1(a), pero utilice $x_1 = 1$ como la aproximación inicial para encontrar la raíz r.

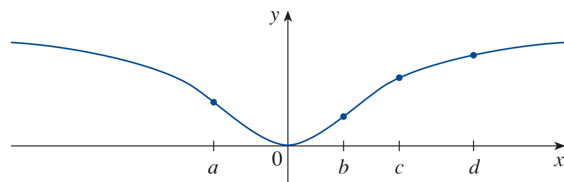
3. Suponga que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (2, 5) tiene la ecuación $y = 9 - 2x$. Si se utiliza el método de Newton para localizar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y la aproximación inicial es $x_1 = 2$, encuentre la segunda aproximación x_2.

4. Para cada aproximación inicial, determine gráficamente lo que ocurre si se utiliza el método de Newton para la función cuya gráfica se muestra.

(a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$
(d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$



5. ¿Para cuál de las aproximaciones iniciales $x_1 = a$, b, c y d cree usted que el método de Newton funcionará y conducirá a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$?



6–8 Utilice el método de Newton con la aproximación inicial especificada x_1 para encontrar x_3, la tercera aproximación a la raíz de la ecuación dada. (Dé su respuesta con cuatro decimales.)

6. $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0, \quad x_1 = -1$

7. $\frac{2}{x} - x^2 + 1 = 0, \quad x_1 = 2$ **8.** $x^7 + 4 = 0, \quad x_1 = -1$

9. Utilice el método de Newton con aproximación inicial de $x_1 = -1$ para encontrar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$. Explique cómo funciona el método graficando primero la función y su recta tangente en $(-1, 1)$.

10. Utilice el método de Newton con aproximación inicial $x_1 = 1$ para encontrar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^4 - x - 1 = 0$. Explique cómo funciona el método trazando primero la gráfica de la función y su recta tangente en $(1, -1)$.

11–12 Utilice el método de Newton para aproximar el número dado, aproximado a ocho decimales.

11. $\sqrt[4]{75}$ **12.** $\sqrt[8]{500}$

13–14 (a) Explique cómo se sabe que la ecuación dada debe tener una raíz en el intervalo dado. (b) Utilice el método de Newton para aproximar la raíz a seis decimales.

13. $3x^4 - 8x^3 + 2 = 0, \quad [2, 3]$

14. $-2x^5 + 9x^4 - 7x^3 - 11x = 0, \quad [3, 4]$

15–16 Utilice el método de Newton para aproximar la raíz indicada de la ecuación, con una aproximación a seis decimales.

15. La raíz negativa de sen $x = x^2$

16. La raíz positiva de 2 cos $x = x^4$

17–22 Utilice el método de Newton para encontrar todas las raíces de la ecuación con una aproximación a seis decimales.

17. $3 \cos x = x + 1$ **18.** $\sqrt{x + 1} = x^2 - x$

19. $2^x = 2 - x^2$ **20.** $\ln x = \frac{1}{x - 3}$

21. $\cos x = \sqrt{x}$ **22.** $\tan x = \sqrt{1 - x^2}$

23–28 Utilice el método de Newton para encontrar todas las raíces aproximadas de la ecuación, a ocho decimales. Comience por dibujar una gráfica para encontrar aproximaciones iniciales.

23. $-2x^7 - 5x^4 + 9x^3 + 5 = 0$

24. $x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 - x + 6 = 0$

25. $\frac{x}{x^2 + 1} = \sqrt{1 - x}$

26. $\cos(x^2 - x) = x^4$

27. $4e^{-x^2} \text{sen}\, x = x^2 - x + 1$

28. $\ln(x^2 + 2) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

29. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $x^2 - a = 0$ para obtener el algoritmo siguiente para la raíz cuadrada, utilizado por los antiguos babilonios para calcular $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Utilice el inciso (a) para calcular la aproximación de $\sqrt{1\,000}$ a seis decimales.

30. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $1/x - a = 0$ para obtener el algoritmo recíproco siguiente:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Este algoritmo permite que una computadora encuentre recíprocos sin dividir realmente.)

(b) Utilice el inciso (a) para calcular $1/1.6984$ aproximado a seis decimales.

31. Explique por qué no funciona el método de Newton para encontrar la raíz de la ecuación

$$x^3 - 3x + 6 = 0$$

si la aproximación inicial es elegida como $x_1 = 1$.

32. (a) Utilice el método de Newton con $x_1 = 1$ para encontrar la raíz de la ecuación $x^3 - x = 1$ aproximada a seis decimales.

(b) Resuelva la ecuación en el inciso (a) utilizando $x_1 = 0.6$ como la aproximación inicial.

(c) Resuelva la ecuación en el inciso (a) utilizando $x_1 = 0.57$. (Definitivamente, usted necesita una calculadora programable para esta parte.)



(d) Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - x - 1$ y sus rectas tangentes en $x_1 = 1$, 0.6 y 0.57 para explicar por qué el método de Newton es tan sensible al valor de la aproximación inicial.

33. Explique por qué el método de Newton falla cuando se aplica a la ecuación $\sqrt[3]{x} = 0$ con cualquier aproximación inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre su explicación con un dibujo.

34. Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = 0$. Explique por qué el método de Newton no puede encontrar la raíz sin importar qué aproximación inicial $x_1 \neq 0$ se utilice. Ilustre su explicación con un dibujo.

35. (a) Utilice el método de Newton para encontrar los números críticos de la función

$$f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x$$

aproximados a seis lugares decimales.

(b) Encuentre el valor mínimo absoluto de f aproximado a cuatro decimales.

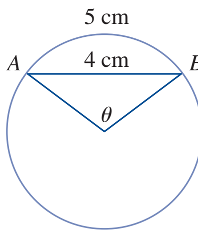
36. Utilice el método de Newton para encontrar el valor máximo absoluto de la función $f(x) = x \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, aproximado a seis decimales.

37. Utilice el método de Newton para encontrar las coordenadas del punto de inflexión de la curva $y = x^2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, aproximadas a seis decimales.

38. De las infinitas rectas que son tangentes a la curva $y = -\operatorname{sen} x$ y pasan por el origen, hay una que tiene la mayor pendiente. Utilice el método de Newton para encontrar la pendiente de la recta, aproximada a seis decimales.

39. Utilice el método de Newton para encontrar las coordenadas aproximadas a seis decimales, del punto sobre la parábola $y = (x - 1)^2$ que está más cerca del origen.

40. En la figura, la longitud de la cuerda AB es de 4 cm y la longitud del arco AB es 5 cm. Encuentre el ángulo central θ, en radianes, a cuatro decimales. Luego, dé la respuesta al grado más cercano.



41. Un concesionario de autos vende un automóvil nuevo en \$18 000. También ofrece vender el mismo auto por pagos de \$375 al mes durante cinco años. ¿Qué tasa de interés mensual está cobrando este distribuidor?

Para resolver este problema, tendrá usted que utilizar la fórmula para el valor presente A de una anualidad formada por pagos iguales de magnitud R con una tasa de interés i por período:

$$A = \frac{R}{i}\left[1 - (1 + i)^{-n}\right]$$

Sustituyendo i por x, demuestre que

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

Utilice el método de Newton para resolver esta ecuación.

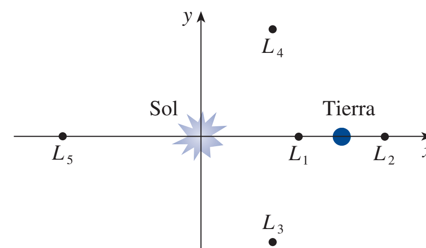
42. La figura muestra el Sol situado en el origen y la Tierra en el punto (1,0). (Aquí, la unidad es la distancia entre los centros de la Tierra y el Sol, llamada *unidad astronómica*: 1 UA $\approx 1.496 \times 10^8$ km.) Hay cinco posiciones L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 en este plano de rotación de la Tierra alrededor del Sol, donde un satélite permanece inmóvil respecto a la Tierra porque las fuerzas que actúan sobre el satélite (incluyendo las atracciones gravitacionales de la Tierra y el Sol) se equilibran entre sí. Estas posiciones se denominan *puntos de libración.* (Un satélite de investigación solar se ha colocado en uno de estos puntos de libración.) Si m_1 es la masa del Sol, m_2 es la masa de la Tierra y $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que la coordenada x de L_1 es la única raíz de la ecuación de quinto grado

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2$$
$$+ 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

y la coordenada x de L_2 es la raíz de la ecuación

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Utilizando el valor $r \approx 3.04042 \times 10^{-6}$, encuentre las posiciones de los puntos de libración (a) L_1 y (b) L_2.



4.9 Antiderivadas

Un físico que conoce la velocidad de una partícula podría desear conocer su posición en un instante dado. Un ingeniero que puede medir la tasa variable a la cual se fuga el agua de un tanque quiere conocer la cantidad que se ha fugado durante cierto período. Un biólogo que conoce la rapidez a la que crece una población de bacterias puede interesarse en deducir el tamaño de la población en algún momento futuro. En cada caso, el problema es encontrar una función F cuya derivada es la función conocida f. Si esta función F existe, se llama *antiderivada* de f.

Definición Una función F recibe el nombre de **antiderivada** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Por ejemplo, sea $f(x) = x^2$. No es difícil descubrir una antiderivada de f si utiliza la regla de la potencia. En efecto, si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, entonces $F'(x) = x^2 = f(x)$. Pero la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ también satisface $G'(x) = x^2$. Por tanto, F y G son antiderivadas de f. De hecho, cualquier función de la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, donde C es una constante, es una antiderivada de f. Surge la pregunta: ¿hay otras?

Para contestar la pregunta, se debe recordar que en la sección 4.2 se utilizó el teorema del valor medio para demostrar que si dos funciones tienen derivadas idénticas sobre un intervalo, entonces estas deben diferir en una constante (corolario 4.2.7). Por tanto, si F y G son dos antiderivadas cualesquiera de f, entonces

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

por lo que $G(x) - F(x) = C$, donde C es una constante. Esto se puede escribir como $G(x) = F(x) + C$, de modo que se tiene el resultado siguiente.

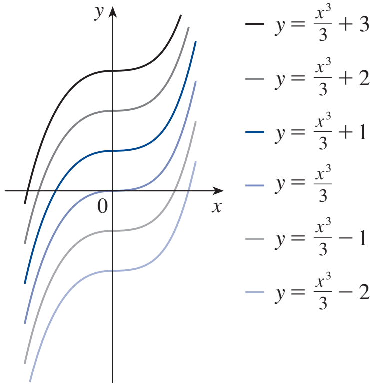


FIGURA 1
Miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = x^2$

1 Teorema Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f sobre I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

De nuevo, para la función $f(x) = x^2$ se ve que la antiderivada general de f es $\frac{1}{3}x^3 + C$. Al asignar valores específicos a la constante C, se obtiene una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales de una a otra (véase la figura 1). Esto tiene sentido porque cada curva debe tener la misma pendiente en cualquier valor dado de x.

EJEMPLO 1 Encuentre la antiderivada más general de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

SOLUCIÓN

(a) Si $F(x) = -\cos x$, entonces $F'(x) = \operatorname{sen} x$, de manera que una antiderivada de sen x es $-\cos x$. Por el teorema 1, la antiderivada más general es $G(x) = -\cos x + C$.

(b) Recuerde de la sección 3.6 que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Por lo que, en el intervalo $(0, \infty)$ la antiderivada general de $1/x$ es $\ln x + C$. También se aprendió que

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right) = \frac{1}{x}$$

para toda $x \neq 0$. Entonces, el teorema 1 dice que la antiderivada general de $f(x) = 1/x$ es $\ln|x| + C$ en cualquier intervalo que no contenga 0. En particular, esto es verdadero en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Por lo que, la antiderivada general de f es

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(c) Utilice la regla de la potencia para descubrir una antiderivada de x^n. De hecho, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Por tanto, la antiderivada general de $f(x) = x^n$ es

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Esto es válido para $n \geqslant 0$, ya que $f(x) = x^n$ está definida en ese intervalo. Si n es negativo (pero $n \neq -1$), solo es válida en cualquier intervalo que no contenga 0. ■

Como en el ejemplo 1, toda fórmula de derivación leída de derecha a izquierda da lugar a una fórmula de antiderivación. En la tabla 2 se presentan algunas antiderivadas. Cada fórmula de la tabla es verdadera, puesto que la derivada de la función de la columna derecha aparece en la columna izquierda. En particular, la primera fórmula dice que la antiderivada de una constante multiplicada por una función es una constante multiplicada por la antiderivada de la función. La segunda fórmula dice que la antiderivada de una suma es la suma de las antiderivadas. (Se usa la notación $F' = f$, $G' = g$.)

2 Tabla de fórmulas de antiderivación

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$x^n \; (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
b^x	$\dfrac{b^x}{\ln b}$	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$

Para obtener la antiderivada más general, a partir de las particulares de la tabla 2, se tiene que sumar una constante (o constantes), como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Encuentre todas las funciones g tales que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUCIÓN Primero, escriba de nuevo la función dada en la forma siguiente:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

De esta manera, se desea encontrar una antiderivada de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Utilizando las fórmulas de la tabla 2 con el teorema 1, se obtiene

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4 \cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$ ■

Con frecuencia se utiliza una letra F para representar una antiderivada de una función f. Si se comienza con la notación de derivada, f', por supuesto que una antiderivada es f.

En las aplicaciones del cálculo es muy común tener una situación como la del ejemplo 2, donde se requiere encontrar una función, dado el conocimiento acerca de sus derivadas. Una ecuación que implica las derivadas de una función se llama **ecuación diferencial**. Estas ecuaciones se estudian en cierto detalle en el capítulo 9, pero, por el momento, es posible resolver algunas ecuaciones diferenciales elementales. La solución general de una ecuación diferencial contiene una constante arbitraria (o varias constantes arbitrarias), como en el ejemplo 2. Sin embargo, puede haber algunas condiciones adicionales que determinen las constantes y, por tanto, especifican de manera única la solución.

EJEMPLO 3 Encuentre f si $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ y $f(0) = -2$.

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f' del ejemplo 3 y de su antiderivada f. Observe que $f'(x) > 0$, de manera que f siempre es creciente. Observe también que, cuando f' tiene un máximo o un mínimo, f parece que tiene un punto de inflexión. De modo que la gráfica sirve como una comprobación de nuestro cálculo.

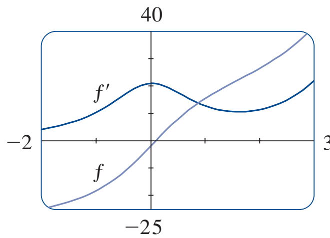


FIGURA 2

SOLUCIÓN La antiderivada general de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

es
$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1}x + C$$

Para determinar C, se utiliza el hecho de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \tan^{-1} 0 + C = -2$$

En estos términos, se tiene $C = -2 - 1 = -3$, de modo que la solución particular es

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1}x - 3$$ ■

EJEMPLO 4 Encuentre f si $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ es

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Si se usa una vez más las reglas de antiderivación, se encuentra que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C y D, se utiliza las condiciones dadas: $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$. Ya que $f(0) = 0 + D = 4$, entonces $D = 4$. Puesto que

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

se tiene que $C = -3$. Por tanto, la función requerida es

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$ ■

Si dan la gráfica de una función f, sería razonable dibujar la gráfica de una antiderivada F. Por ejemplo, suponga que se tiene $F(0) = 1$. Entonces hay un punto de donde partir, el punto $(0, 1)$, y la dirección en la cual tiene que desplazar el lápiz da, en cada etapa, la derivada $F'(x) = f(x)$. En el ejemplo siguiente se aplican los principios de este capítulo para mostrar cómo trazar la gráfica de F aun cuando no se tenga una fórmula para f. Este sería el caso, por ejemplo, cuando $f(x)$ está determinada por datos experimentales.

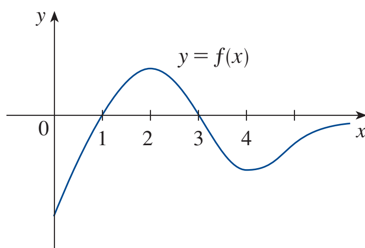


FIGURA 3

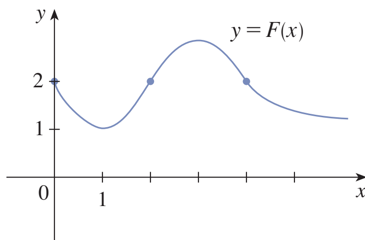


FIGURA 4

EJEMPLO 5 La gráfica de una función f se muestra en la figura 3. Realice un trazo de una antiderivada F, dado que $F(0) = 2$.

SOLUCIÓN Guía el hecho de que la pendiente de $y = F(x)$ es $f(x)$. Se parte del punto $(0, 2)$ y se dibuja F como una función inicialmente decreciente, ya que $f(x)$ es negativa cuando $0 < x < 1$. Observe que $f(1) = f(3) = 0$, de modo que F tiene rectas tangentes horizontales cuando $x = 1$ y $x = 3$. Para $1 < x < 3$, $f(x)$ es positiva, y entonces F es creciente. Observe que F tiene un mínimo local cuando $x = 1$ y un máximo local cuando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ es negativa y entonces F es decreciente en $(3, \infty)$. Ya que $f(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$, la gráfica de F se vuelve más plana a medida que $x \to \infty$. Observe también que $F''(x) = f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x = 2$, y de negativa a positiva en $x = 4$; por lo que F tiene puntos de inflexión cuando $x = 2$ y $x = 4$. Se utiliza esta información para trazar la gráfica de la antiderivada en la figura 4.

Movimiento rectilíneo

La antiderivación es en particular útil al analizar el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. Recuerde que si el objeto tiene la función posición $s = f(t)$, entonces la función velocidad es $v(t) = s'(t)$. Esto significa que la función posición es una antiderivada de la función velocidad. Del mismo modo, la función aceleración es $a(t) = v'(t)$, de manera que la función velocidad es una antiderivada de la aceleración. Si se conocen la aceleración y los valores iniciales $s(0)$ y $v(0)$, entonces se puede determinar la función posición aplicando dos veces la antiderivada.

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve en línea recta y con una aceleración dada por $a(t) = 6t + 4$. Su velocidad inicial es $v(0) = -6$ cm/s y su desplazamiento inicial es $s(0) = 9$ cm. Encuentre su función de posición $s(t)$.

SOLUCIÓN Puesto que $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, la antiderivada da

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Pero $v(0) = -6$, por lo que $C = -6$ y

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Puesto que $v(t) = s'(t)$, s es la antiderivada de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Esto da $s(0) = D$. Dado que $s(0) = 9$, se tiene que $D = 9$ y la función posición requerida es

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$ ■

Un objeto cerca de la superficie de la Tierra está sujeto a una fuerza gravitacional que produce una aceleración hacia abajo denotada por g. Para un movimiento cercano a la Tierra, suponga que g es constante y su valor es de unos 9.8 m/s^2 (o 32 pies/s^2).

EJEMPLO 7 Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una rapidez de 15 m/s desde el borde de un acantilado a 140 m por encima del nivel del suelo. Encuentre su altura sobre el nivel del suelo t segundos más tarde. ¿Cuándo alcanza su altura máxima? ¿Cuándo pega contra el suelo?

SOLUCIÓN El movimiento es vertical y se elige la dirección positiva como la correspondiente hacia arriba. Al tiempo t, la distancia arriba del nivel del suelo $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ es decreciente. Por lo que, la aceleración debe ser negativa y se tiene

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9.8$$

Tomando antiderivadas, se tiene

$$v(t) = -9.8t + C$$

Para determinar C, se usa la información dada $v(0) = 15$. Esto da $15 = 0 + C$, por lo que

$$v(t) = -9.8t + 15$$

La altura máxima se alcanza cuando $v(t) = 0$, es decir, después de $15/9.8 \approx 1.53$ s. Ya que $s'(t) = v(t)$, la nueva antiderivada da

$$s(t) = -4.9t^2 + 15t + D$$

Se utiliza el hecho de que $s(0) = 140$, se tiene $140 = 0 + D$, y así

$$s(t) = -4.9t^2 + 15t + 140$$

En la figura 5 se muestra la función posición de la pelota del ejemplo 7. La gráfica corrobora la conclusión obtenida: la pelota alcanza su altura máxima después de 1.5 s y pega contra el suelo después de 7.1 s.

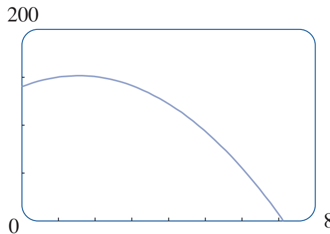


FIGURA 5

La expresión para $s(t)$ es válida hasta que la pelota pegue en el suelo. Esto sucede cuando $s(t) = 0$ y por tanto $-s(t) = 0$; es decir, cuando

$$4.9t^2 - 15t - 140 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación, se obtiene

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{2969}}{9.8}$$

Se rechaza la solución con el signo menos ya que da un valor negativo de t. Por tanto, la pelota pega en el suelo después de

$$\frac{15 + \sqrt{2969}}{9.8} \approx 7.1 \text{ } s$$

■

4.9 EJERCICIOS

1–22 Encuentre la antiderivada más general de la función. (Compruebe su respuesta mediante la derivación.)

1. $f(x) = 4x + 7$

2. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

3. $f(x) = 2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5x$

4. $f(x) = 6x^5 - 8x^4 - 9x^2$

5. $f(x) = x(12x + 8)$

6. $f(x) = (x - 5)^2$

7. $f(x) = 7x^{2/5} + 8x^{-4/5}$

8. $f(x) = x(2 - x)^2$

9. $f(x) = \sqrt{2}$

10. $f(x) = e^2$

11. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$

12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x}$

13. $f(x) = \frac{1}{5} - \frac{2}{x}$

14. $f(t) = \frac{3t^4 - t^3 + 6t^2}{t^4}$

15. $g(t) = \frac{1 + t + t^2}{\sqrt{t}}$

16. $r(\theta) = \sec\theta \tan\theta - 2e^\theta$

17. $h(\theta) = 2 \operatorname{sen}\theta - \sec^2\theta$

18. $g(v) = 2\cos v - \frac{3}{\sqrt{1 - v^2}}$

19. $f(x) = 2^x + 4 \operatorname{senh} x$

20. $f(x) = 1 + 2 \operatorname{sen} x + 3/\sqrt{x}$

21. $f(x) = \frac{2x^4 + 4x^3 - x}{x^3}, \quad x > 0$

22. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2 + 1}$

23–24 Encuentre la antiderivada F de f que satisfaga la condición dada. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de f y F.

23. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$

24. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

25–48 Encuentre f.

25. $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$

26. $f''(x) = x^6 - 4x^4 + x + 1$

27. $f''(x) = 2x + 3e^x$

28. $f''(x) = 1/x^2$

29. $f'''(t) = 12 + \text{sen}\, t$

30. $f'''(t) = \sqrt{t} - 2\cos t$

31. $f'(x) = 1 + 3\sqrt{x}, \quad f(4) = 25$

32. $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4, \quad f(-1) = 2$

33. $f'(t) = 4/(1 + t^2), \quad f(1) = 0$

34. $f'(t) = t + 1/t^3, \quad t > 0, \quad f(1) = 6$

35. $f'(x) = 5x^{2/3}, \quad f(8) = 21$

36. $f'(x) = (x + 1)/\sqrt{x}, \quad f(1) = 5$

37. $f'(t) = \sec t\,(\sec t + \tan t), \quad -\pi/2 < t < \pi/2,$ $f(\pi/4) = -1$

38. $f'(t) = 3^t - 3/t, \quad f(1) = 2, \quad f(-1) = 1$

39. $f''(x) = -2 + 12x - 12x^2, \quad f(0) = 4, \quad f'(0) = 12$

40. $f''(x) = 8x^3 + 5, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 8$

41. $f''(\theta) = \text{sen}\,\theta + \cos\theta, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$

42. $f''(t) = t^2 + 1/t^2, \quad t > 0, \quad f(2) = 3, \quad f'(1) = 2$

43. $f''(x) = 4 + 6x + 24x^2, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 10$

44. $f''(x) = x^3 + \text{senh}\, x, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 2.6$

45. $f''(x) = e^x - 2\,\text{sen}\, x, \quad f(0) = 3, \quad f(\pi/2) = 0$

46. $f''(t) = \sqrt[3]{t} - \cos t, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 2$

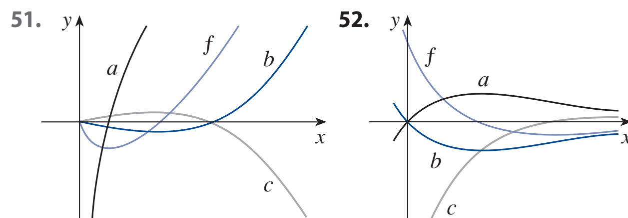
47. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

48. $f'''(x) = \cos x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 3$

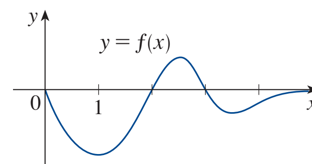
49. Dado que la gráfica de f pasa por el punto (2, 5) y que la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $3 - 4x$, encuentre $f(1)$.

50. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la gráfica de f.

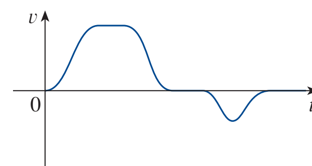
51–52 Se muestra la gráfica de una función f. ¿Qué gráfica es una antiderivada de f y por qué?



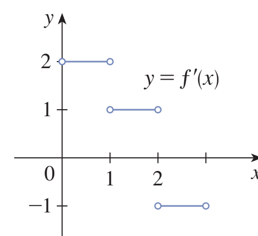
53. Se muestra la gráfica de una función en la figura. Haga un trazo de una antiderivada F, dado que $F(0) = 1$.



54. En la figura se muestra la gráfica de la función velocidad de una partícula. Trace la gráfica de la función de posición.



55. En la figura se muestra la gráfica de f'. Trace la gráfica de f si f es continua en [0, 3] y $f(0) = -1$.



56. (a) Utilice un dispositivo graficador para trazar la gráfica de $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
(b) A partir de la gráfica del inciso (a), trace una gráfica aproximada de la antiderivada F que satisfaga que $F(0) = 1$.
(c) Utilice las reglas de esta sección para encontrar una expresión para $F(x)$.
(d) Trace la gráfica de F usando la expresión del inciso (c). Compare con su trazo del inciso (b).

57–58 Trace una gráfica de f y utilícela para trazar la gráfica aproximada de la antiderivada que pasa por el origen.

57. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

58. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

59–64 Una partícula se mueve de acuerdo con la información dada. Determine la posición de la partícula.

59. $v(t) = \text{sen}\, t - \cos t, \quad s(0) = 0$

60. $v(t) = t^2 - 3\sqrt{t}, \quad s(4) = 8$

61. $a(t) = 2t + 1, \quad s(0) = 3, \quad v(0) = -2$

62. $a(t) = 3\cos t - 2\,\text{sen}\, t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 4$

63. $a(t) = 10\,\text{sen}\, t + 3\cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

64. $a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

---

65. Una piedra se deja caer desde la plataforma superior de observación (la plataforma espacial) de la Torre CN, de 450 m por encima del nivel del suelo.
(a) Encuentre la distancia de la piedra arriba del nivel del suelo en el instante t.
(b) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al nivel del suelo?
(c) ¿Con qué velocidad choca contra el nivel del suelo?
(d) Si la piedra se lanza hacia arriba a una rapidez de 5 m/s, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

66. Demuestre que para el movimiento en línea recta con aceleración constante a, velocidad inicial v_0 y desplazamiento inicial s_0, el desplazamiento después del tiempo t es

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

67. Se lanza un objeto hacia arriba con velocidad inicial v_0 metros por segundo, desde un punto a s_0 metros por encima del nivel del suelo. Demuestre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19.6[s(t) - s_0]$$

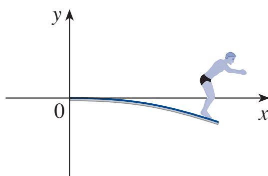
68. Se lanzan dos pelotas hacia arriba desde el borde del acantilado del ejemplo 7. La primera se lanza con una rapidez de 15 m/s y la otra se arroja 1 s más tarde con una rapidez de 8 m/s. ¿En algún momento rebasa una a la otra?

69. Se deja caer una piedra desde un desfiladero y choca contra el suelo con una rapidez de 40 m/s. ¿Cuál es la altura del desfiladero?

70. Si un clavadista con masa m está en el borde de una plataforma de clavados con longitud L y densidad lineal ρ, entonces la plataforma adopta la forma de una curva $y = f(x)$, donde

$$EIy'' = mg(L - x) + \tfrac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

E e I son constantes positivas que dependen del material con que está hecha la plataforma y g (< 0) es la aceleración debida a la gravedad.
(a) Encuentre una expresión para la forma de la curva.
(b) Use $f(L)$ para estimar la distancia debajo de la horizontal al borde de la plataforma.



71. Una compañía estima que el costo marginal (en dólares por artículo) de producir x artículos es de $1.92 - 0.002x$. Si el costo de producción de un artículo es de \$562, encuentre el costo de producir 100 artículos.

72. La densidad lineal de una varilla con una longitud de 1 m se expresa por medio de $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$ en gramos por centímetro, donde x se mide en centímetros desde uno de los extremos de la varilla. Encuentre la masa de esta última.

73. Dado que las gotas de lluvia crecen a medida que caen, su área superficial aumenta y, por tanto, se incrementa la resistencia a su caída. Una gota de lluvia tiene una velocidad inicial hacia abajo de 10 m/s, y su aceleración hacia abajo es

$$a = \begin{cases} 9 - 0.9t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Si al inicio la gota de lluvia está a 500 m arriba de la superficie de la tierra, ¿cuánto tarda en caer?

74. Un vehículo se desplaza a 80 km/h cuando aplica los frenos, lo que produce una desaceleración constante de 7 m/s². ¿Cuál es la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse?

75. ¿Qué aceleración constante se requiere para aumentar la rapidez de un vehículo de 50 km/h a 80 km/h en 5 segundos?

76. Un automóvil frenó con una desaceleración constante de 5 m/s², lo que genera antes de detenerse unas marcas de deslizamiento que miden 60 m. ¿Qué tan rápido se desplazaba el auto cuando se aplicaron los frenos?

77. Un automóvil se desplaza a 100 km/h cuando el conductor ve un accidente 80 m más adelante y aplica los frenos apresuradamente. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener el auto a tiempo de evitar chocar con los vehículos accidentados?

78. Un modelo de cohete se dispara verticalmente hacia arriba a partir del reposo. Su aceleración durante los primeros tres segundos es $a(t) = 18t$, en ese momento se agota el combustible y se convierte en un cuerpo en "caída libre". Después de 14 s, se abre el paracaídas del cohete y la velocidad (hacia abajo) disminuye linealmente hasta -5.5 m/s en 5 s. Entonces el cohete "flota" hasta el piso a esa velocidad.
(a) Determine la función posición s y la función velocidad v (para todos los tiempos t). Trace las gráficas de s y v.
(b) ¿En qué momento el cohete alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?
(c) ¿En qué momento aterriza?

79. Un tren "bala" de alta velocidad acelera y desacelera a una razón de 1.2 m/s². Su rapidez de crucero máxima es de 145 km/h.
(a) ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer el tren si se acelera desde el reposo hasta que alcanza su rapidez de crucero y luego corre a esa rapidez durante 15 minutos?
(b) Suponga que el tren parte del reposo y debe detenerse por completo en 15 minutos. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer en estas condiciones?
(c) Encuentre el tiempo mínimo que tarda el tren en viajar entre dos estaciones consecutivas que se encuentran a 72 km de distancia.
(d) El viaje de una estación a la siguiente dura 37.5 minutos. ¿Cuál es la distancia entre las estaciones?

4 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Explique la diferencia entre máximo absoluto y máximo local. Ilustre por medio de un dibujo.

2. (a) ¿Qué dice el teorema del valor extremo?
(b) Explique cómo funciona el método del intervalo cerrado.

3. (a) Enuncie el teorema de Fermat.
(b) Defina un número crítico de f.

4. (a) Enuncie el teorema de Rolle.
(b) Enuncie el teorema del valor medio y dé una interpretación geométrica.

5. (a) Enuncie la prueba de creciente/decreciente.
(b) ¿Qué significa decir que f es cóncava hacia arriba en un intervalo I?
(c) Enuncie la prueba de la concavidad.
(d) ¿Qué son los puntos de inflexión? ¿Cómo puede encontrarlos?

6. (a) Enuncie la prueba de la primera derivada.
(b) Enuncie la prueba de la segunda derivada.
(c) ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas relativas de estas pruebas?

7. (a) ¿Qué dice la regla de L'Hôpital?
(b) ¿Cómo puede usar la regla de L'Hôpital si tiene un producto $f(x)g(x)$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \infty$ conforme $x \to a$?
(c) ¿Cómo puede usar la regla de L'Hôpital si tiene una diferencia $f(x) - g(x)$ donde $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?
(d) ¿Cómo puede usar la regla de L'Hôpital si tiene una potencia $[f(x)]^{g(x)}$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to$ a?

8. Indique si los límites siguientes tienen forma indeterminada. Donde sea posible, diga el límite.

(a) $\frac{0}{0}$ (b) $\frac{\infty}{\infty}$ (c) $\frac{0}{\infty}$ (d) $\frac{\infty}{0}$

(e) $\infty + \infty$ (f) $\infty - \infty$ (g) $\infty \cdot \infty$ (h) $\infty \cdot 0$

(i) 0^0 (j) 0^∞ (k) ∞^0 (l) 1^∞

9. Si tiene una calculadora graficadora o una computadora, ¿por qué necesita el cálculo para trazar la gráfica de una función?

10. (a) Dada una aproximación inicial x_1 para una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, explique geométricamente, mediante un dibujo, ¿cómo se obtiene la segunda aproximación x_2 en el método de Newton?
(b) Escriba una expresión para x_2 en términos de x_1, $f(x_1)$ y $f'(x_1)$.
(c) Escriba una expresión para x_{n+1} en términos de x_n, $f(x_n)$ y $f'(x_n)$.
(d) ¿Bajo qué circunstancias es probable que el método de Newton falle o funcione muy lentamente?

11. (a) ¿Qué es una antiderivada de una función f?
(b) Suponga que F_1 y F_2 son antiderivadas de f en un intervalo I. ¿Cómo se relacionan F_1 y F_2?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo o un mínimo local en c.

2. Si f tiene un valor mínimo absoluto en c, entonces $f'(c) = 0$.

3. Si f es continua sobre (a, b), entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en (a, b).

4. Si f es derivable y $f(-1) = f(1)$, entonces existe un número c tal que $|c| < 1$ y $f'(c) = 0$.

5. Si $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, entonces f es decreciente en $(1, 6)$.

6. Si $f''(2) = 0$, entonces $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.

7. Si $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, entonces $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.

8. Existe una función f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para toda x.

9. Existe una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x.

10. Existe una función f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x.

11. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces $f + g$ es creciente en I.

12. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces $f - g$ es creciente en I.

13. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces fg es creciente en I.

14. Si f y g son funciones crecientes positivas en un intervalo I, entonces fg es creciente en I.

15. Si f es creciente y $f(x) > 0$ en I, entonces $g(x) = 1/f(x)$ es decreciente en I.

16. Si f es par, entonces f' es par.

17. Si f es periódica, entonces f' es periódica.

18. La antiderivada más general de $f(x) = x^{-2}$ es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

19. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para toda x, entonces $f(1) \neq f(0)$.

20. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)]^{g(x)} = 1$$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 1$

EJERCICIOS

1–6 Encuentre los valores extremos locales y absolutos de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 2, \quad [0, 5]$

2. $f(x) = x\sqrt{1 - x}, \quad [-1, 1]$

3. $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + 1}, \quad [-2, 2]$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad [-2, 1]$

5. $f(x) = x + 2\cos x, \quad [-\pi, \pi]$

6. $f(x) = x^2e^{-x}, \quad [-1, 3]$

7–14 Calcule el límite.

7. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\tan x}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 4x}{x + \text{sen } 2x}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\ln(x + 1)}$

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\ln(x + 1)}$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

13. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

14. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$

15–17 Trace la gráfica de una función que satisface las condiciones dadas.

15. $f(0) = 0, \quad f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0,$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 6} f(x) = -\infty,$

$f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$, $(1, 6)$ y $(9, \infty)$,

$f'(x) > 0$ en $(-2, 1)$ y $(6, 9)$,

$f''(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y $(12, \infty)$,

$f''(x) < 0$ en $(0, 6)$ y $(6, 12)$

16. $f(0) = 0, \quad f$ es continua y par

$f'(x) = 2x$ si $0 < x < 1, \quad f'(x) = -1$ si $1 < x < 3,$

$f'(x) = 1$ si $x > 3$

17. f es impar, $\quad f'(x) < 0$ para $0 < x < 2,$

$f'(x) > 0$ para $x > 2, \quad f''(x) > 0$ para $0 < x < 3,$

$f''(x) < 0$ para $x > 3, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -2$

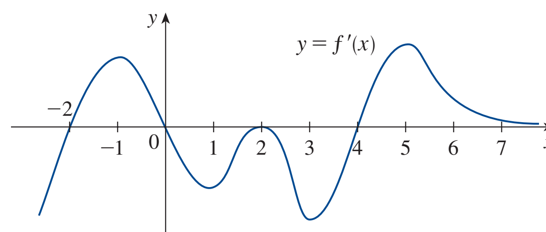
18. En la figura se ilustra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.

(a) ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?

(b) ¿Para qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?

(c) Trace la gráfica de f''.

(d) Trace la posible gráfica de f.



19–34 Trace la curva utilizando las guías de la sección 4.5.

19. $y = 2 - 2x - x^3$

20. $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 5$

21. $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$

22. $y = x^2/(x + 8)$

23. $y = \frac{1}{x(x - 3)^2}$

24. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x - 2)^2}$

25. $y = \frac{(x - 1)^3}{x^2}$

26. $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$

27. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

28. $y = x^{2/3}(x - 3)^2$

29. $y = e^x \operatorname{sen} x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

30. $y = 4x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$

32. $y = e^{2x-x^2}$

33. $y = (x - 2)e^{-x}$

34. $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35–38 Trace las gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. Use las gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión. En el ejercicio 35 aplique el cálculo para determinar estas cantidades exactamente.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

36. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^6 + 1}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6.5 \operatorname{sen} x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

39. Trace la gráfica $f(x) = e^{-1/x^2}$ en un rectángulo de vista en que muestre todos los aspectos principales de la función. Estime los puntos de inflexión. Luego aplique el cálculo para determinarlos con exactitud.

SAC **40.** (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
(b) Explique la forma de la gráfica calculando los límites de $f(x)$ cuando x tiende a ∞, $-\infty$, 0^+ y 0^-.
(c) Use la gráfica de f para estimar las coordenadas de los puntos de inflexión.
(d) Utilice su SAC para calcular y trazar la gráfica de f''.
(e) Con la gráfica del inciso (d) estime el punto de inflexión con más exactitud.

SAC **41–42** Utilice las gráficas de f, f' y f'' para estimar la coordenada x de los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión de f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

42. $f(x) = e^{-0.1x} \ln(x^2 - 1)$

43. Investigue la familia de funciones de $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$. ¿Cuáles características en común tienen los miembros de esta familia? ¿En qué difieren? ¿Para cuáles valores de C es f continua en $(-\infty, \infty)$? ¿Para cuáles valores de C, f no tiene gráfica? ¿Qué sucede conforme $C \to \infty$?

44. Investigue la familia de funciones $f(x) = cxe^{-cx^2}$. ¿Qué le ocurre a los puntos máximos y mínimos y a los puntos de inflexión al cambiar c? Ilustre sus conclusiones trazando varios miembros de la familia.

45. Demuestre que la ecuación $3x + 2 \cos x + 5 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

46. Suponga que f es continua sobre $[0, 4]$, $f(0) = 1$ y $2 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para toda x en $(0, 4)$. Demuestre que $9 \leqslant f(4) \leqslant 21$.

47. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x) = x^{1/5}$ en el intervalo $[32, 33]$, demuestre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2.0125$$

48. ¿Para qué valores de las constantes a y b se tiene que $(1, 3)$ es un punto de inflexión de la curva $y = ax^3 + bx^2$?

49. Sea $g(x) = f(x^2)$, donde f es dos veces derivable para toda x, $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 0$ y f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.
(a) ¿En cuáles números tiene g un valor extremo?
(b) Analice la concavidad de g.

50. Encuentre dos números enteros positivos tales que la suma del primer número y cuatro veces el segundo sea 1 000 y el producto de los números sea lo más grande posible.

51. Demuestre que la distancia más corta desde el punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encuentre el punto sobre la hipérbola $xy = 8$ que está más cerca del punto $(3, 0)$.

53. Encuentre el área más pequeña posible de un triángulo isósceles que está circunscrito en una circunferencia de radio r.

54. Encuentre el volumen del cono circular más grande que se puede inscribir en una esfera de radio r.

55. En ΔABC, D queda sobre AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm y $|CD| = 5$ cm. ¿Dónde se debe situar un punto P sobre CD de tal modo que la suma $|PA| + |PB| + |PC|$ sea mínima?

56. Resuelva el ejercicio 55 cuando $|CD| = 2$ cm.

57. La velocidad de una ola de longitud L en agua profunda es

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

donde K y C son constantes positivas conocidas. ¿Cuál es la longitud de la ola que da la velocidad mínima?

58. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen V en forma de un cilindro circular recto

rematado por un hemisferio. ¿Cuáles dimensiones requerirán la cantidad mínima de metal?

59. Un equipo de hockey juega en una arena con capacidad de 15 000 espectadores. Con el precio del boleto fijado en $12, la asistencia promedio en un juego es de 11 000 espectadores. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que disminuya el precio del boleto, la asistencia promedio aumentará en 1000. ¿Cómo deben fijar los propietarios del equipo el precio de la entrada para maximizar sus ingresos provenientes de la venta de boletos?

60. Un fabricante determina que el costo de fabricar x unidades de un artículo es

$$C(x) = 1800 + 25x - 0.2x^2 + 0.001x^3$$

y la función de demanda es $p(x) = 48.2 - 0.03x$.

(a) Trace la gráfica de las funciones de costo e ingreso y úselas para estimar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.
(b) Aplique el cálculo para encontrar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.
(c) Estime el nivel de producción que minimice el costo promedio.

61. Utilice el método de Newton para calcular la raíz de la ecuación

$$x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

en el intervalo [1, 2] con una aproximación de seis decimales.

62. Aplique el método de Newton para encontrar todas las raíces de la ecuación sen $x = x^2 - 3x + 1$ aproximado a seis decimales.

63. Aplique el método de Newton para encontrar el valor máximo absoluto de la función $f(t) = \cos t + t - t^2$, con una exactitud de ocho decimales.

64. Utilice la guía de la sección 4.5 para trazar la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Recurra al método de Newton si es necesario.

65–68 Determine la antiderivada más general de la función.

65. $f(x) = 4\sqrt{x} - 6x^2 + 3$

66. $g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2 + 1}$

67. $f(t) = 2 \operatorname{sen} t - 3e^t$

68. $f(x) = x^{-3} + \cosh x$

69–72 Determine f.

69. $f'(t) = 2t - 3 \operatorname{sen} t, \quad f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \quad f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 5x^3 + 6x^2 + 2, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = -2$

73–74 Una partícula se mueve de acuerdo con los datos dados. Encuentre la posición de la partícula.

73. $v(t) = 2t - 1/(1 + t^2), \quad s(0) = 1$

74. $a(t) = \operatorname{sen} t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 2$

75. (a) Si $f(x) = 0.1e^x + \operatorname{sen} x$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$, use la gráfica de f para trazar una gráfica aproximada de la antiderivada F de f que satisfaga $F(0) = 0$.
(b) Encuentre una expresión para $F(x)$.
(c) Dibuje F con la expresión del inciso (b). Compare con su esquema del inciso (a).

76. Investigue la familia de curvas dada por

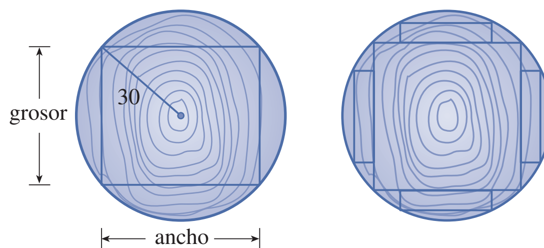
$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

En particular, determine el valor de transición de c en que cambia la cantidad de números críticos y el valor de transición en que varía el número de puntos de inflexión. Ilustre con gráficas las formas posibles.

77. Se deja caer un recipiente metálico desde un helicóptero a 500 m arriba de la superficie de la Tierra. Su paracaídas no se abre, pero el recipiente ha sido diseñado para soportar una velocidad de impacto de 100 m/s. ¿Se reventará o no?

78. En una carrera de automóviles a lo largo de una pista recta, el auto A deja atrás dos veces al vehículo B. Demuestre que en algún momento en la carrera las aceleraciones de los automóviles fueron iguales. Plantee las suposiciones que haga.

79. Se va a cortar una viga rectangular a partir de un tronco cilíndrico que tiene un radio de 30 centímetros.
(a) Demuestre que la viga de área máxima de sección transversal es cuadrada.
(b) Se van a cortar cuatro tablones rectangulares de las cuatro secciones del tronco que quedan después de cortar la viga cuadrada.



Determine las dimensiones de los tablones que tendrán el área máxima de sección transversal.

(c) Suponga que la resistencia de la viga rectangular es proporcional al producto de su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más fuerte que se puede cortar a partir del tronco cilíndrico.

80. Si se dispara un proyectil a una velocidad inicial v a un ángulo de inclinación θ a partir de la horizontal, por tanto, su trayectoria, despreciando la resistencia del aire, es la parábola

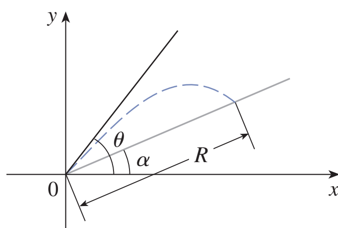
$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2 \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(a) Suponga que el proyectil se dispara desde la base de un plano inclinado a un ángulo α, $\alpha > 0$, respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. Demuestre que el alcance del proyectil, medido por encima de la pendiente, está dado por

$$R(\theta) = \frac{2v^2\cos\theta\ \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

(b) Determine θ de modo que R sea un máximo.

(c) Suponga que el plano forma un ángulo α *abajo* de la horizontal. Determine el alcance R en este caso y el ángulo en el cual se debe disparar el proyectil para maximizar R.



81. Si un campo electrostático E actúa sobre un líquido o un gas dieléctrico polar, el momento de dipolo neto P por unidad de volumen es

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Demuestre que el $\lim_{E\to 0^+} P(E) = 0$.

82. Si una bola de metal con masa m se proyecta en el agua y la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, la distancia que la bola viaja en el tiempo t es

$$s(t) = \frac{m}{c}\ln\cosh\sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

donde c es una constante positiva. Determine $\lim_{c\to 0^+} s(t)$.

83. Demuestre que, para $x > 0$

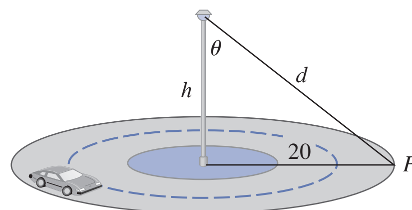
$$\frac{x}{1 + x^2} < \tan^{-1}x < x$$

84. Trace la gráfica de una función f tal que $f'(x) < 0$ para toda x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ y $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) + x] = 0$.

85. Una luz se coloca encima de un poste de altura h metros para iluminar un círculo que tiene radio de 20 m, ocupado por el tráfico. La intensidad de iluminación I en cualquier punto P en el círculo es directamente proporcional al coseno del ángulo θ (véase la figura) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d de la fuente de luz.

(a) ¿Qué tan alto debe estar la luz sobre el poste de manera que se maximice I?

(b) Suponga que la luz sobre el poste está a h metros de altura y que una mujer está caminando hacia afuera de la base del poste a una rapidez de 1 m/s. ¿Con qué rapidez disminuye la intensidad de la luz en el punto a su espalda a 1 m sobre el suelo, cuando ella alcanza el borde exterior del círculo de tráfico?



86. Está fluyendo agua a un ritmo constante dentro de un tanque esférico. Sea $V(t)$ el volumen de agua en el tanque y $H(t)$ la altura del agua en el tanque en el tiempo t.

(a) ¿Cuáles son los significados de $V'(t)$ y $H'(t)$? ¿Son estas derivadas positivas, negativas o cero?

(b) ¿Es $V''(t)$ positiva, negativa o cero? Explique.

(c) Sean t_1, t_2 y t_3 los tiempos cuando el tanque está lleno a un cuarto, la mitad y a tres cuartas partes del total, respectivamente. ¿Son los valores $H''(t_1)$, $H''(t_2)$ y $H''(t_3)$ positivos, negativos o cero? ¿Por qué?

Problemas adicionales

1. Si un rectángulo tiene su base sobre el eje x y dos vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$, demuestre que el rectángulo tiene el área más grande posible cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la curva.

2. Demuestre que $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para toda x.

3. ¿La función $f(x) = e^{10|x-2|-x^2}$ tiene un máximo absoluto? Si es así, encuéntrelo. ¿Qué hay del mínimo absoluto?

4. Demuestre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos los números x y y tales que $|x| \leqslant 2$ y $|y| \leqslant 2$.

5. Demuestre que los puntos de inflexión de la curva $y = (\operatorname{sen} x)/x$ están sobre la curva $y^2(x^4 + 4) = 4$.

6. Encuentre el punto sobre la parábola $y = 1 - x^2$ en el cual la recta tangente corta el primer cuadrante en un triángulo con área mínima.

7. Si a, b, c y d son constantes tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

encuentre el valor de la suma $a + b + c + d$.

8. Evalúe

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x + 2)^{1/x} - x^{1/x}}{(x + 3)^{1/x} - x^{1/x}}$$

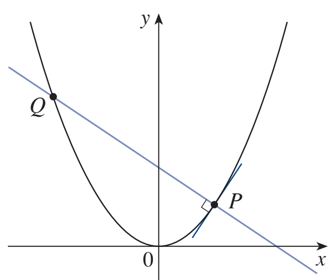


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

9. Encuentre los puntos más altos y más bajos sobre la curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

10. Trace el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $|x + y| \leqslant e^x$.

11. Si $P(a, a^2)$ es cualquier punto sobre la parábola $y = x^2$, excepto en el origen, sea Q el punto donde la recta normal en P cruza la parábola una vez más (véase la figura).
(a) Demuestre que la coordenada y de Q es la más pequeña cuando $a = 1/\sqrt{2}$.
(b) Demuestre que el segmento de recta PQ tiene la longitud más corta posible cuando $a = 1/\sqrt{2}$.

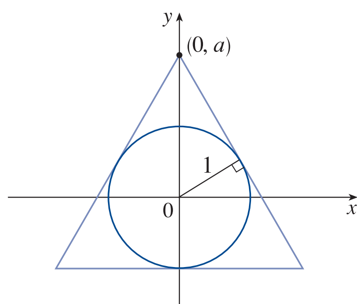


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

12. ¿Para qué valores de c la curva $y = cx^3 + e^x$ tiene puntos de inflexión?

13. Un triángulo isósceles es circunscrito sobre el círculo unitario tal que los lados iguales se reúnen en el punto $(0, a)$ en el eje y (véase la figura). Determine el valor de a que minimiza las longitudes de los lados iguales. (Usted se puede sorprender de que el resultado no da un triángulo equilátero.)

14. Trace la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

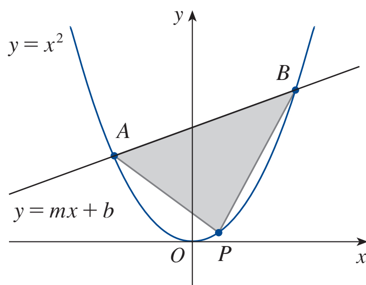


FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

15. La recta $y = mx + b$ corta la parábola $y = x^2$ en los puntos A y B (véase la figura). Determine el punto P sobre el arco AOB de la parábola que maximiza el área del triángulo PAB.

16. $ABCD$ es un trozo cuadrado de papel con lados de longitud de 1 m. Se dibuja un cuarto de circunferencia desde B hasta D, con centro en A. El trozo de papel se dobla a lo largo de EF con E sobre AB y F sobre AD, de manera que A cae sobre el cuarto de circunferencia. Determine las áreas máxima y mínima que podría tener el triángulo AEF.

17. ¿Para qué números positivos a la curva $y = a^x$ corta la recta $y = x$?

18. ¿Para qué valores de a es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x = e$$

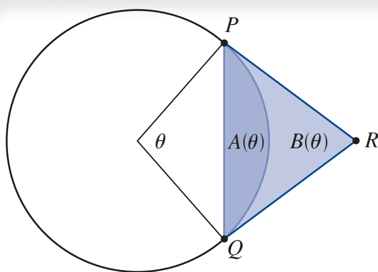


FIGURA PARA EL PROBLEMA 20

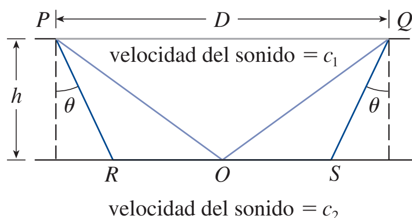


FIGURA PARA EL PROBLEMA 21

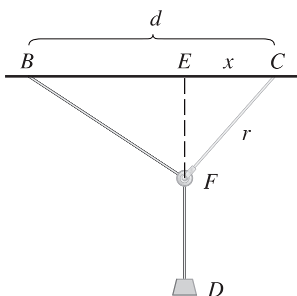


FIGURA PARA EL PROBLEMA 23

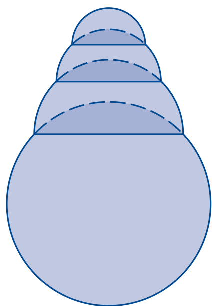


FIGURA PARA EL PROBLEMA 26

19. Sea $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son números reales y n es un entero positivo. Si se sabe que $|f(x)| \leqslant |\operatorname{sen} x|$ para toda x, demuestre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$$

20. Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ, como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ. Sea $B(\theta)$ el área entre las rectas tangentes PR, QR y el arco. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

21. La velocidad del sonido c_1 en una capa superior y c_2 en una capa inferior de roca y el espesor h de la capa superior pueden calcularse mediante la exploración sísmica, si la velocidad del sonido en la capa inferior es mayor que la velocidad en la capa superior. Se hace detonar una carga de dinamita en el punto P y las señales transmitidas se registran en el punto Q, el cual está a una distancia D de P. La primera señal que llega a Q viaja por la superficie y tarda T_1 segundos. La señal siguiente viaja desde el punto P al punto R, de R a S en la capa inferior y luego a Q, lo que le toma T_2 segundos. La tercera señal se refleja por la capa inferior en el punto medio O de RS y tarda T_3 segundos en llegar a Q. (Véase la figura.)

(a) Exprese T_1, T_2 y T_3 en función de D, h, c_1, c_2 y θ.
(b) Demuestre que T_2 es un mínimo cuando $\operatorname{sen} \theta = c_1/c_2$.
(c) Suponga que $D = 1$ km, $T_1 = 0.26$ s, $T_2 = 0.32$ s y $T_3 = 0.34$ s. Calcule c_1, c_2 y h.

Nota: los geofísicos usan esta técnica cuando estudian la estructura de la corteza terrestre, ya sea con fines de exploración petrolera o para la detección de enormes fallas en las rocas.

22. ¿Para qué valores de c existe una recta que cruce la curva

$$y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$$

en cuatro puntos diferentes?

23. Uno de los problemas que planteó el Marqués de L'Hôpital en su libro de texto *Analyse des Infiniment Petits* concierne a una polea conectada al techo de una habitación en un punto C mediante una cuerda de longitud r. En otro punto B sobre el techo, a una distancia d de C (donde $d > r$), una cuerda de longitud ℓ se conecta a la polea y pasa por esta en F y se ata a un peso W. El peso se libera y alcanza el reposo en su posición de equilibrio D. (Véase la figura.) Tal y como argumentó L'Hôpital, esto sucede cuando la distancia $|ED|$ se maximiza. Demuestre que cuando el sistema alcanza el punto de equilibrio, el valor de x es

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

Observe que esta expresión es independiente tanto de W como de ℓ.

24. Dada una esfera con radio r, encuentre la altura de una pirámide de volumen mínimo cuya base es un cuadrado y cuyas caras base y triangular son tangentes a la esfera. ¿Qué sucede si la base de la pirámide es un n-ágono regular? (Un n-ágono regular es un polígono con n lados y ángulos iguales.) (Use el hecho de que el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base.)

25. Suponga que una bola de nieve se derrite de tal modo que su volumen disminuye con una tasa proporcional directa a su área superficial. Si tarda tres horas en que la bola disminuya a la mitad de su volumen original, ¿cuánto tardará la bola en fundirse totalmente?

26. Una burbuja hemisférica se coloca sobre una burbuja esférica de radio 1. Después, una burbuja hemisférica más pequeña se coloca sobre la primera. Este proceso prosigue hasta que se forman n cámaras, incluso la esfera. (La figura muestra el caso $n = 4$.) Utilice la inducción matemática para demostrar que la altura máxima de cualquier torre de burbujas con n cámaras es $1 + \sqrt{n}$.

5 Integrales



© JRC, Inc. / Alamy

La foto muestra el lago Lanier, que es una represa en Georgia, EE. UU. En el ejercicio 70 en la sección 5.4 se calcula la cantidad de agua que fluyó en el lago Lanier durante cierto período.

EN EL CAPÍTULO 2 se utilizaron los problemas de la recta tangente y la velocidad para introducir el concepto de derivada, que es la idea central en el cálculo diferencial. De la misma manera, este capítulo comienza con los problemas de área y distancia, los cuales sirven para formular la idea de integral definida, que es el concepto básico del cálculo integral. En los capítulos 6 y 8 verá cómo utilizar la integral para resolver problemas relacionados con volúmenes, longitud de curvas, predicciones de una población, gasto cardíaco, fuerzas sobre una presa, trabajo, excedente del consumidor y el béisbol, entre muchas otras situaciones.

Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada. En este capítulo aprenderá que este teorema simplifica en gran medida la resolución de muchos problemas.

5.1 Áreas y distancias

Ahora es un buen momento para leer (o releer) *Un adelanto del cálculo* (véase la página 1), que analiza las ideas unificadoras del cálculo y lo ayuda a situarse en la perspectiva de dónde está y hacia dónde va.

En esta sección se descubre que, al intentar calcular el área bajo una curva o la distancia recorrida por un automóvil, se llega al mismo tipo especial de límite.

El problema del área

Intente resolver el *problema del área*: encuentre el área de la región S que está debajo de la curva $y = f(x)$, de a a b. Esto significa que S, la cual se muestra en la figura 1, está limitada por la gráfica de una función continua f [donde $f(x) \geqslant 0$], las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y el eje x.

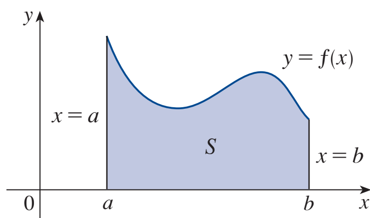


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Al intentar resolver el problema del área, debe preguntarse: ¿cuál es el significado de la palabra *área*? Esta cuestión es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, el área se define como el producto del largo y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base multiplicada por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos (como en la figura 2) y sumar las áreas de esos triángulos.

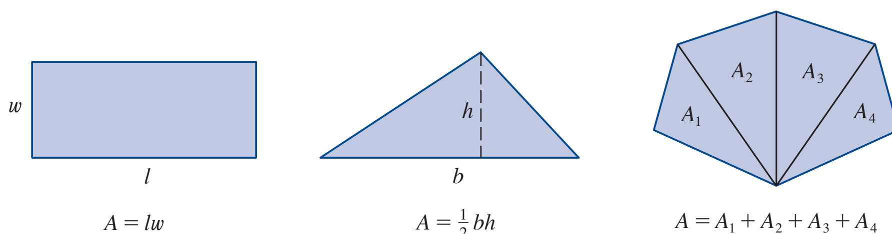


FIGURA 2

Sin embargo, no es fácil determinar el área de una región con lados curvos. Muchos tienen una idea intuitiva de lo que es el área de una región, pero parte del problema del área es hacer que esta idea intuitiva se precise dando una definición exacta.

Recuerde que al definir una recta tangente, primero obtuvo una aproximación de la pendiente de la recta tangente para las pendientes de rectas secantes y, luego, tomó el límite de estas aproximaciones. Siga una idea similar para las áreas. En primer lugar, obtenga una aproximación de la región S representándola por medio de rectángulos, y después tome el límite de las áreas de los rectángulos cuando se incrementa el número de estos. En el ejemplo siguiente se ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 1 Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$, de 0 a 1 (la región parabólica S se ilustra en la figura 3).

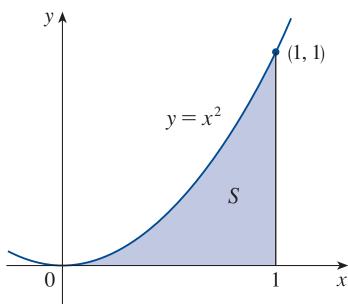


FIGURA 3

SOLUCIÓN En primer lugar, el área S se debe encontrar en alguna parte entre 0 y 1 porque S está contenida en un cuadrado de lado 1, pero en verdad, puede lograr algo mejor que eso. Suponga que divide S en cuatro franjas, S_1, S_2, S_3 y S_4, al trazar las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 4(a).

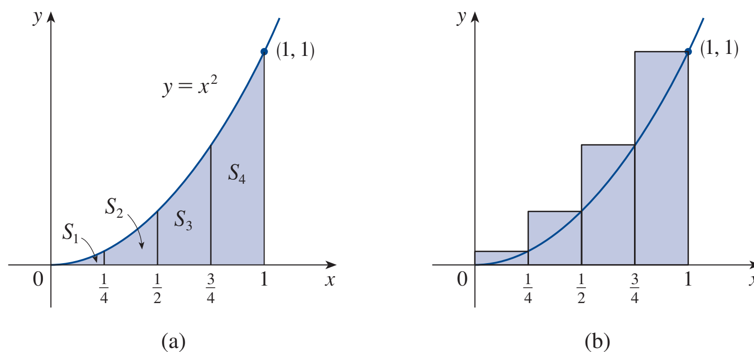


FIGURA 4

Puede obtener una aproximación de cada franja por medio de un rectángulo cuya base sea la misma que la de la franja y cuya altura sea la misma que la del lado derecho de la propia franja [véase la figura 4(b)]. En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos finales derechos de los subintervalos, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Cada rectángulo tiene un ancho de $\frac{1}{4}$, y las alturas son $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ y 1^2. Si denota con R_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtiene

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

De la figura 4(b) vea que el área A de S es menor que R_4, por lo que

$$A < 0.46875$$

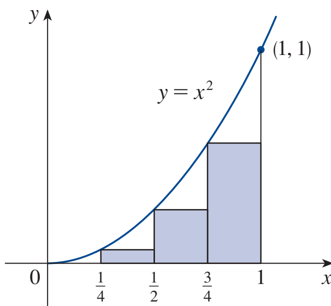


FIGURA 5

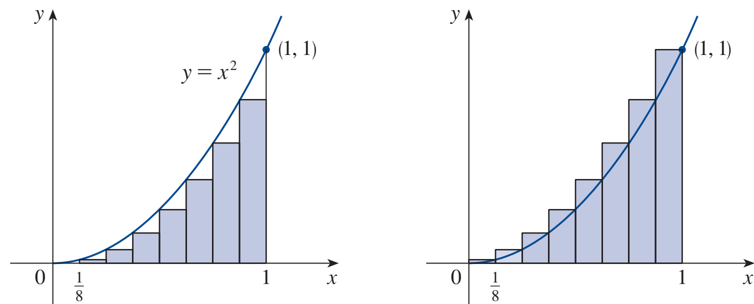
En lugar de usar los rectángulos de la figura 4(b), podría utilizar los rectángulos más pequeños de la figura 5, cuyas alturas son los valores de f en los puntos finales *izquierdos* de los subintervalos. (El rectángulo final de izquierda se ha aplastado debido a que su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Observe ahora que el área de S es mayor que L_4, de modo que se tienen estimaciones superior e inferior para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Es posible repetir este procedimiento con un número mayor de franjas. En la figura 6 se muestra lo que sucede cuando se divide la región S en ocho franjas de anchos iguales.



(a) Usando los puntos finales izquierdos

(b) Usando los puntos finales derechos

FIGURA 6
Aproximando S con ocho rectángulos

Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), se obtienen mejores estimaciones inferior y superior para A:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

Por lo que una posible respuesta para la pregunta es decir que el área verdadera de S se encuentra entre 0.2734375 y 0.3984375.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Se podrían obtener mejores estimaciones al incrementar el número de franjas. En la tabla que aparece a la izquierda se muestran los resultados de cálculos semejantes (con una computadora), usando n rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos finales izquierdos (L_n) o con los puntos finales derechos (R_n). En particular, vea que al usar 50 franjas, el área se encuentra entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas, las bandas se hacen más y más estrechas: A se encuentra entre 0.3328335 y 0.3338335. Una buena estimación se obtiene promediando estos números: $A \approx 0.3333335$. ■

Con base en los valores de la tabla en el ejemplo 1, parece que R_n tiende a $\frac{1}{3}$ conforme n crece. Esto se confirma en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Para la región S del ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores tiende a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

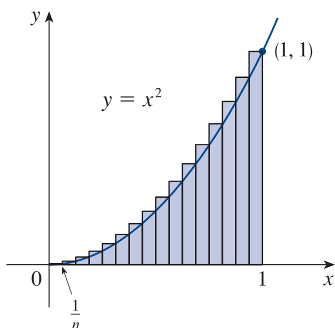


FIGURA 7

SOLUCIÓN R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos de la figura 7. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/n$, y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; es decir, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. De este modo,

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Aquí necesita la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos:

1 $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es posible que ya antes haya visto esta fórmula. Se demuestra en el ejemplo 5 del apéndice E.

Colocando la fórmula 1 en nuestra expresión para R_n, obtendrá

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Aquí se calcula el límite de la sucesión $\{R_n\}$. Las sucesiones y sus límites fueron discutidos en *Un adelanto del cálculo* y se estudiarán en detalle en la sección 11.1. La idea es muy similar a un límite en el infinito (sección 2.6), excepto que en la expresión $\lim_{n\to\infty}$, se restrigió n a un número entero positivo. En particular, se sabe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Cuando escribe $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$ quiere decir que puede hacer R_n tan cercano a $\frac{1}{3}$ como quiera, tomando n suficientemente grande.

Por lo que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$ ■

Puede demostrarse que las sumas de aproximación inferiores también tienden a $\frac{1}{3}$; es decir

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Con base en las figuras 8 y 9 parece que, conforme n crece, tanto L_n como R_n son cada vez mejores aproximaciones para el área de S. Por tanto, *se definirá* el área A como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación; esto es,

TEC En Visual 5.1 puede crear figuras como la 8 y 9 para otros valores de n.

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

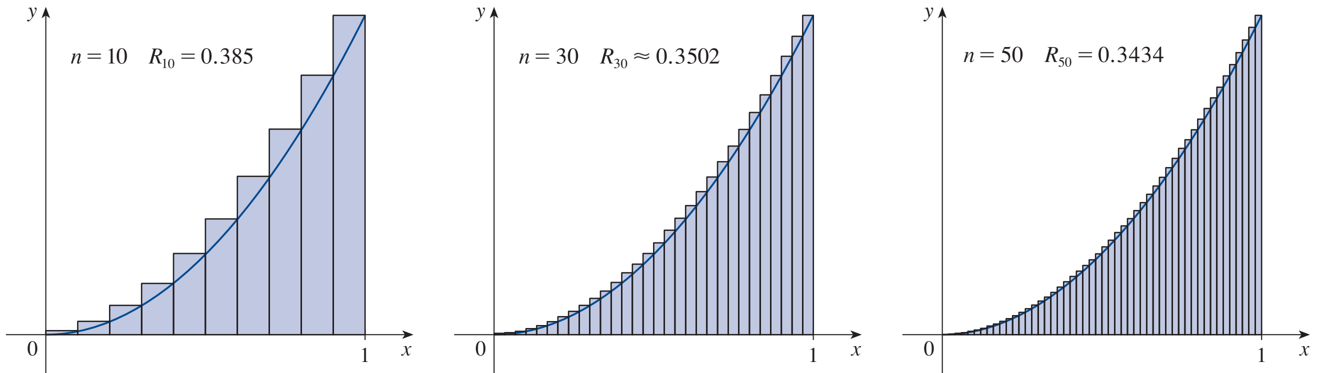


FIGURA 8 Los puntos finales derechos producen sumas mayores porque $f(x) = x^2$ es creciente.

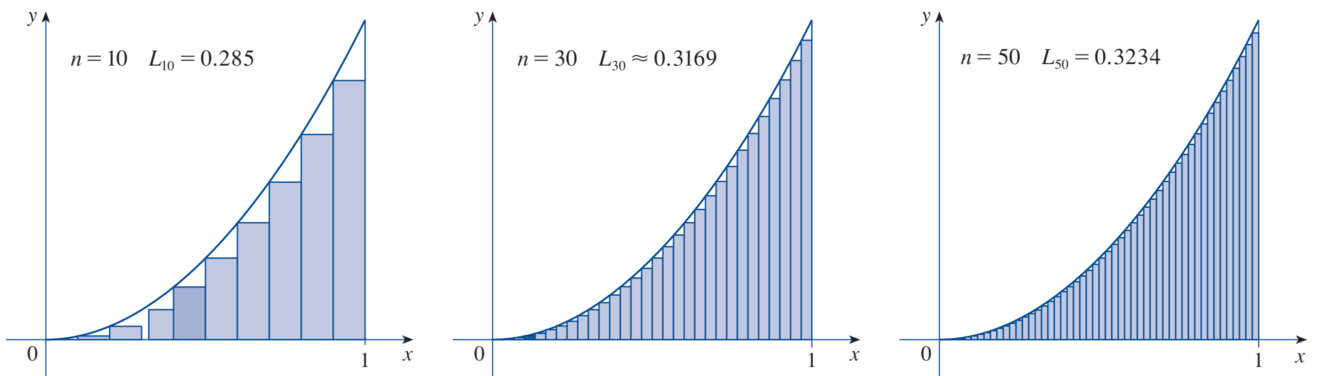


FIGURA 9 Los puntos finales izquierdos producen sumas menores porque $f(x) = x^2$ es creciente.

Aplique la idea de los ejemplos 1 y 2 a la región más general S de la figura 1. Empiece por subdividir S en n franjas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de anchos iguales, como en la figura 10.

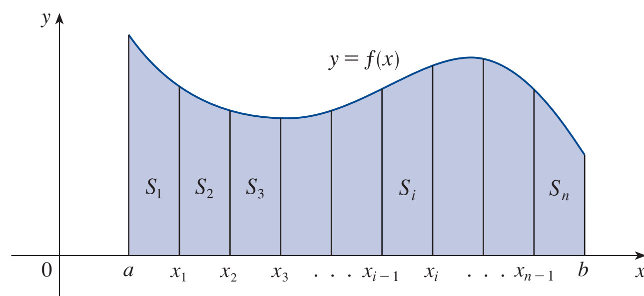


FIGURA 10

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, de modo que el ancho de cada una de las n franjas es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Estas franjas dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos finales derechos de los subintervalos son

$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$

Aproxime la i-ésima franja, S_i, con un rectángulo de ancho Δx y altura $f(x_i)$, que es el valor de f en el punto extremo derecho (véase la figura 11). Entonces, el área del i-ésimo rectángulo es $f(x_i)\Delta x$. Lo que de manera intuitiva se pensó como el área de S se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos:

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

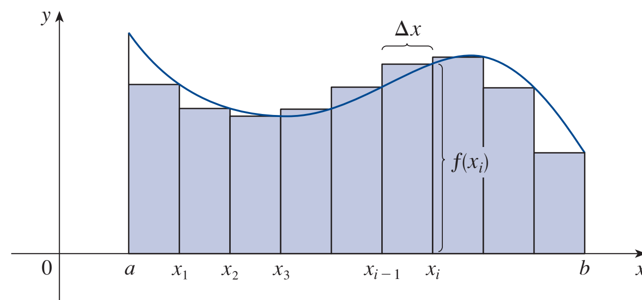


FIGURA 11

En la figura 12 se muestra esta aproximación para $n = 2, 4, 8$ y 12. Observe que esta aproximación parece mejorarse a medida que se incrementa la cantidad de franjas; es decir, cuando $n \to \infty$. Por tanto, se definirá el área A de la región S de la manera siguiente:

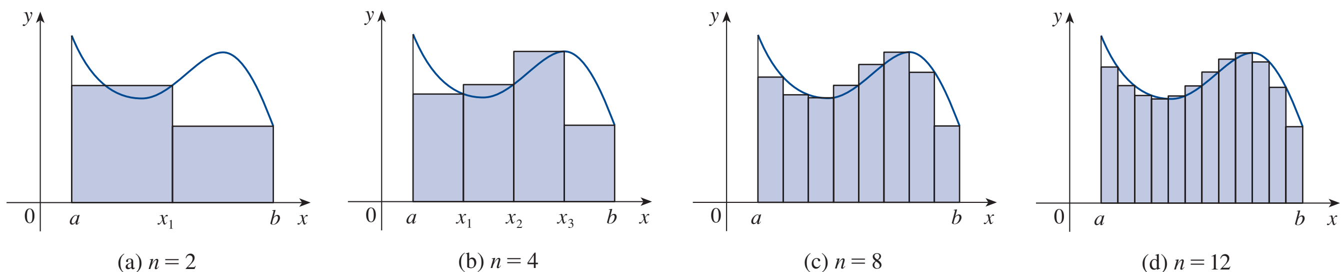


FIGURA 12

2 Definición El **área** A de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Se puede demostrar que el límite de la definición 2 siempre existe, porque se supone que f es continua. También es posible demostrar que se obtiene el mismo valor con los puntos finales izquierdos:

3 $$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De hecho, en lugar de usar los puntos finales izquierdos o los derechos, podría tomarse la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en *cualquier* número x_i^*, en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A estos números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ se les llama **puntos muestra**. En la figura 13 se presentan los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestra diferentes de los puntos finales. Así, una expresión más general para el área de S es

4 $$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

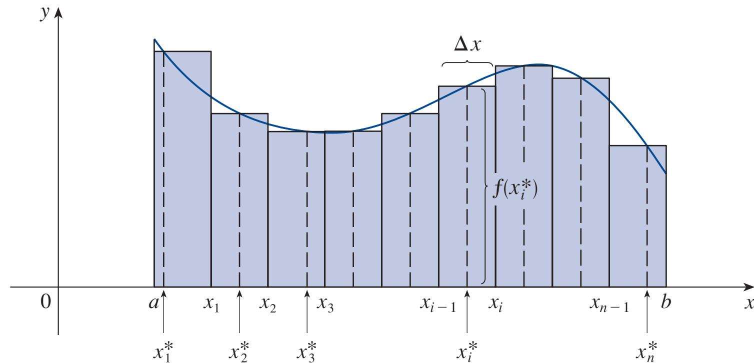


FIGURA 13

NOTA Se puede demostrar que una definición equivalente de área es la siguiente: *A es el único número más grande que todas las sumas inferiores y menor que todas las sumas superiores*. En los ejemplos 1 y 2, por ejemplo, se vio que el área ($A = \frac{1}{3}$) está atrapada entre todas las sumas de aproximación izquierda L_n y todas las sumas de aproximación derecha R_n. La función de esos ejemplos, $f(x) = x^2$, es creciente en [0, 1] y así las sumas inferiores surgen de los puntos finales izquierdos y las sumas superiores de los puntos finales derechos. (Véanse las figuras 8 y 9.) En general, se forman **sumas inferiores** (y **superiores**) mediante la selección de los puntos muestra x_i^* de manera que $f(x_i^*)$ es el valor mínimo (y máximo) de f sobre el i-ésimo subintervalo. (Véanse la figura 14 y los ejercicios 7-8.)

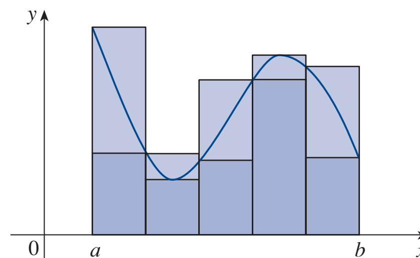


FIGURA 14
Sumas inferiores (rectángulos cortos) y sumas superiores (rectángulos superiores).

Esto indica que hay que terminar con $i = n$.

Esto indica que hay que sumar. $\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

Esto indica que hay que empezar con $i = m$.

Si necesita practicar la notación sigma, vea los ejemplos e intente resolver algunos del apéndice E.

A menudo se usa la **notación sigma** para escribir de manera más compacta las sumas de muchos términos. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Con esto, las expresiones para el área que se dan en las ecuaciones 2, 3 y 4, pueden escribirse como:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

También se podría reescribir la fórmula 1 de esta manera:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EJEMPLO 3 Sea A el área de la región que está bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = 2$.

(a) Con los puntos finales derechos, encuentre una expresión para A como un límite. No evalúe ese límite.

(b) Estime el área tomando los puntos muestra como los puntos medios y utilizando cuatro subintervalos y luego con 10 subintervalos.

SOLUCIÓN

(a) Ya que $a = 0$ y $b = 2$, el ancho de un subintervalo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Por lo que, $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$ y $x_n = 2n/n$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación es

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición 2, el área es

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Si se usa la notación sigma, se podría escribir

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

Es difícil evaluar directamente a mano este límite, pero se facilita con la ayuda de un sistema algebraico computacional (véase el ejercicio 30). En la sección 5.3 determinará A con más facilidad aplicando un método diferente.

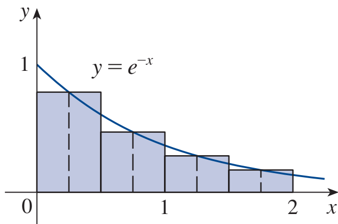


FIGURA 15

(b) Con $n = 4$, los subintervalos de igual ancho, $\Delta x = 0.5$, son [0, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5] y [1.5, 2]. Los puntos medios de estos subintervalos son $x_1^* = 0.25$, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$ y $x_4^* = 1.75$, y la suma de las áreas de los cuatro rectángulos de aproximación (véase la figura 15) es

$$M_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x$$

$$= f(0.25)\,\Delta x + f(0.75)\,\Delta x + f(1.25)\,\Delta x + f(1.75)\,\Delta x$$

$$= e^{-0.25}(0.5) + e^{-0.75}(0.5) + e^{-1.25}(0.5) + e^{-1.75}(0.5)$$

$$= \tfrac{1}{2}(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}) \approx 0.8557$$

Por lo que, una estimación para el área es

$$A \approx 0.8557$$

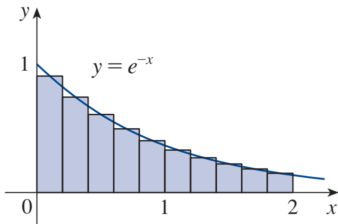


FIGURA 16

Con $n = 10$, los subintervalos son [0, 0.2], [0.2, 0.4], . . . , [1.8, 2], y los puntos medios son $x_1^* = 0.1$, $x_2^* = 0.3$, $x_3^* = 0.5$, ... , $x_{10}^* = 1.9$. Por lo que,

$$A \approx M_{10} = f(0.1)\,\Delta x + f(0.3)\,\Delta x + f(0.5)\,\Delta x + \cdots + f(1.9)\,\Delta x$$

$$= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \cdots + e^{-1.9}) \approx 0.8632$$

De la figura 16, parece que esta estimación es mejor que la que se pensó con $n = 4$. ■

El problema de la distancia

Considere ahora el *problema de la distancia*: determine la distancia recorrida por un objeto durante cierto período si se conoce la velocidad del objeto en todo momento. (En cierto sentido, este es el problema inverso del problema de la velocidad que se analizó en la sección 2.1.) Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia es fácil de resolver por medio de la fórmula:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

Pero si la velocidad varía, no es fácil encontrar la distancia recorrida. Investigue el problema en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Suponga que el odómetro de un automóvil está averiado y que desea estimar la distancia que ha recorrido en un intervalo de tiempo de 30 segundos. Se tomaron las lecturas del velocímetro cada cinco segundos y se registraron en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (km/h)	27	34	38	46	51	50	45

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades coherentes, se convirtieron las lecturas de velocidad a metros por segundo (1 km/h = 1000/3600 m/s):

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (m/s)	7.5	9.4	10.6	12.8	14.2	13.9	12.5

Durante los primeros cinco segundos, la velocidad no cambia mucho, de modo que es posible estimar la distancia recorrida durante ese tiempo al suponer que la velocidad es constante.

Si se toma la velocidad durante este intervalo de tiempo, con velocidad inicial (7.5 m/s), entonces se obtiene la distancia aproximada recorrida durante los primeros cinco segundos:

$$7.5 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 37.5 \text{ m}$$

De manera análoga, durante el segundo intervalo de tiempo la velocidad es aproximadamente constante. Tome la velocidad correspondiente a $t = 5$ s. De modo que su estimación para la distancia recorrida de $t = 5$ s a $t = 10$ s es

$$9.4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 47 \text{ m}$$

Si suma estimaciones similares para los otros intervalos de tiempo, obtiene una estimación para la distancia total recorrida:

$$(7.5 \times 5) + (9.4 \times 5) + (10.6 \times 5) + (12.8 \times 5) + (14.2 \times 5) + (13.9 \times 5) = 342 \text{ m}$$

Podría así haber utilizado la velocidad al final de cada período en lugar de la velocidad al principio como su supuesta velocidad constante. Entonces la estimación se convierte en

$$(9.4 \times 5) + (10.6 \times 5) + (12.8 \times 5) + (14.2 \times 5) + (13.9 \times 5) + (12.5 \times 5) = 367 \text{ m}$$

Si busca una estimación más exacta, habría tomado las lecturas de la velocidad cada dos segundos o cada segundo. ■

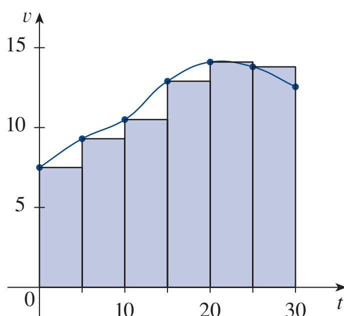


FIGURA 17

Tal vez los cálculos del ejemplo 4 le recuerden las sumas usadas al principio para estimar las áreas. La semejanza se explica cuando dibuja la gráfica de la función velocidad del automóvil de la figura 17 y dibuja rectángulos cuyas alturas son las velocidades iniciales en cada intervalo. El área del primer rectángulo es $7.5 \times 5 = 37.5$, lo que también es su estimación de la distancia recorrida en los primeros cinco segundos. De hecho, el área de cada rectángulo puede interpretarse como una distancia porque la altura representa la velocidad, y el ancho, al tiempo. La suma de las áreas de los rectángulos de la figura 17 es $L_6 = 342$, lo cual es su estimación inicial de la distancia total recorrida.

En general, suponga que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$, donde $a \leqslant t \leqslant b$ y $f(t) \geqslant 0$ (de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva). Tome las lecturas de la velocidad en los instantes t_0 $(= a)$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(= b)$ de tal manera que la velocidad es aproximadamente constante en cada subintervalo. Si estos instantes están igualmente espaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = (b - a)/n$. Durante el primer intervalo de tiempo, la velocidad es aproximadamente $f(t_0)$ y así la distancia recorrida es aproximadamente $f(t_0)\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo de tiempo es alrededor de $f(t_1)\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Si usa la velocidad en los puntos finales derechos, en lugar de los puntos finales izquierdos, su estimación para la distancia total resulta

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Cuanto mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas son las estimaciones, así que parece razonable que la distancia *exacta d* recorrida sea el *límite* de esas expresiones:

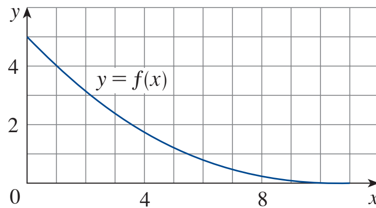
5 $$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

En la sección 5.4 verá que, en efecto, esto es verdadero.

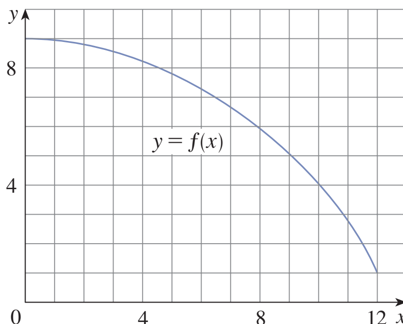
Puesto que la ecuación 5 tiene la misma forma que las expresiones para el área dadas en las ecuaciones 2 y 3, se concluye que la distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad. En el capítulo 6 verá que otras cantidades de interés en las ciencias naturales y sociales, como el trabajo realizado por una fuerza variable o el gasto cardíaco, también se pueden interpretar como el área bajo una curva. De modo que cuando calcule áreas en este capítulo, considere que se pueden interpretar de diversas maneras prácticas.

5.1 EJERCICIOS

1. (a) A partir de la lectura de los valores de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para encontrar una estimación inferior y una superior para el área bajo esa gráfica dada de f, de $x = 0$ a $x = 10$. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.
(b) Encuentre nuevas estimaciones usando diez rectángulos en cada caso.



2. (a) Use seis rectángulos para encontrar estimaciones de cada tipo para el área bajo la gráfica de f de $x = 0$ a $x = 12$.
(i) L_6 (los puntos muestra son los puntos finales izquierdos)
(ii) R_6 (los puntos muestra son los puntos finales derechos)
(iii) M_6 (los puntos muestra son los puntos medios)
(b) ¿L_6 sobrestima o subestima el área verdadera?
(c) ¿R_6 sobrestima o subestima el área verdadera?
(d) ¿Cuál de los números L_6, R_6 o M_6 da la mejor estimación? Explique.



3. (a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1/x$ de $x = 1$ a $x = 2$, usando cuatro rectángulos de aproximación y los puntos finales derechos. Trace la curva y los rectángulos de aproximación. ¿Su estimación es una subestimación o una sobrestimación?
(b) Repita el inciso (a), con los puntos finales izquierdos.

4. (a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi/2$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos finales derechos. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una sobrestimación o una subestimación?
(b) Repita el inciso (a), con los puntos finales izquierdos.

5. (a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ a $x = 2$ con tres rectángulos de aproximación y puntos finales derechos. Después mejore su estimación usando seis rectángulos. Trace la curva y los rectángulos de aproximación.
(b) Repita el inciso (a) usando los puntos finales izquierdos.
(c) Repita el inciso (a) usando los puntos medios.
(d) Con base en sus trazos de los incisos (a)-(c), ¿cuál parece ser la mejor estimación?


6. (a) Trace la gráfica de la función

$$f(x) = x - 2\ln x \qquad 1 \leqslant x \leqslant 5$$

(b) Estime el área bajo la gráfica de f con cuatro rectángulos de aproximación y considerando que los puntos muestra son (i) los puntos finales derechos y (ii) los puntos medios. En cada caso, trace la curva y los rectángulos.
(c) Mejore sus estimaciones del inciso (b) utilizando ocho rectángulos.

7. Evalúe las sumas superior e inferior para $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, con $n = 2$, 4 y 8. Ilustre con diagramas como los de la figura 14.

8. Evalúe las sumas superior e inferior para $f(x) = 1 + x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, con $n = 3$ y 4. Ilustre con diagramas como los de la figura 14.

9–10 Con una calculadora programable (o una computadora) es posible evaluar las expresiones para las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, incluso para grandes valores de n, con el uso de iteraciones. (En una calculadora TI, use la instrucción Is> o un ciclo For-EndFor; en una Casio, use Isz y en una HP o en BASIC, use un ciclo FOR-NEXT.) Calcule la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación; use subintervalos iguales y los puntos finales derechos, para $n = 10, 30, 50$ y 100. Luego, infiera el valor del área exacta.

9. La región bajo $y = x^4$ de 0 a 1.

10. La región bajo $y = \cos x$ de 0 a $\pi/2$.

SAC **11.** Algunos sistemas algebraicos computacionales tienen comandos que dibujan los rectángulos de aproximación y evalúan las sumas de sus áreas, por lo menos si x_i^* es un punto final izquierdo o derecho. (Por ejemplo, en Maple, use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum` y `rightsum`.)

(a) Si $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, encuentre las sumas izquierda y derecha para $n = 10, 30$ y 50.

(b) Ilustre las gráficas de los rectángulos del inciso (a).

(c) Demuestre que el área exacta bajo f se encuentra entre 0.780 y 0.791

SAC **12.** (a) Si $f(x) = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, use los comandos que se analizaron en el ejercicio 11 para encontrar las sumas izquierda y derecha, para $n = 10, 30$ y 50.

(b) Ilustre dibujando las gráficas de los rectángulos del inciso (a).

(c) Demuestre que el área exacta bajo f se encuentra entre 2.50 y 2.59.

13. La rapidez de una competidora aumentó de manera constante durante los tres primeros segundos de una carrera. En la tabla se da su rapidez a intervalos de medio segundo. Encuentre las estimaciones inferior y superior para la distancia que recorrió durante estos tres segundos.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (m/s)	0	1.9	3.3	4.5	5.5	5.9	6.2

14. En la tabla se proporcionan las lecturas del velocímetro de una motocicleta a intervalos de 12 segundos.

(a) Estime la distancia recorrida por la motocicleta durante este período usando las velocidades al principio de los intervalos.

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
0	9.1
12	8.5
24	7.6
36	6.7
48	7.3
60	8.2

(b) Dé otra estimación usando las velocidades al final de los períodos.

(c) ¿Sus estimaciones de los incisos (a) y (b) son estimaciones superiores e inferiores? Explique su respuesta.

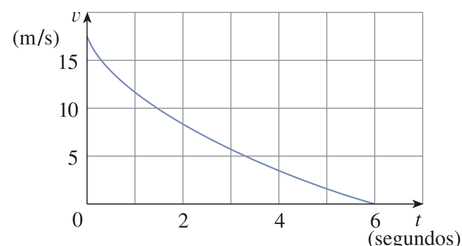
15. Se filtró aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ litros por hora. La rapidez disminuyó conforme transcurrió el tiempo y los valores de esta rapidez se muestran en la tabla en intervalos de dos horas. Encuentre las estimaciones inferiores y superiores para la cantidad total de aceite que se filtró.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

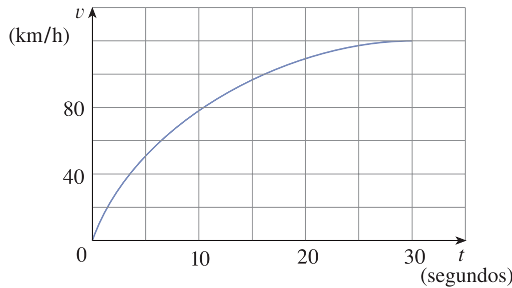
16. Cuando se calculan distancias a partir de datos de la velocidad, a veces es necesario usar instantes $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$, que no están igualmente espaciados. Aun así, se pueden estimar las distancias usando los períodos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por ejemplo, el 7 de mayo de 1992 el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad era instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla, proporcionada por la NASA, se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido. Utilice estos datos para estimar la altura por arriba de la superficie de la Tierra a la que se encontró el *Endeavour*, 62 segundos después del lanzamiento.

Evento	Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	56
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	97
Acelerador a 89%	20	136
Acelerador a 67%	32	226
Acelerador a 104%	59	404
Presión dinámica máxima	62	440
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	1265

17. Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil al frenar. Úsela para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.



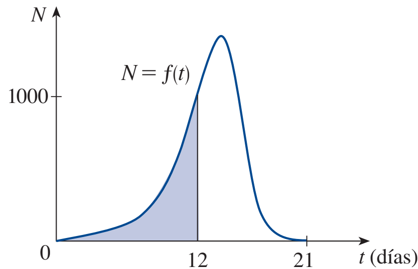
18. Se muestra la gráfica de aceleración de un automóvil que parte del estado de reposo hasta una velocidad de 120 km/h durante un período de 30 segundos. Estime la distancia recorrida durante este período.



19. En una persona infectada con sarampión, el virus N (medido en número de células infectadas por mL de plasma de sangre) alcanza una densidad máxima en $t = 12$ días (cuando aparece una erupción cutánea) y luego disminuye bastante rápidamente como resultado de la respuesta inmune. El área bajo la gráfica de $N(t)$ de $t = 0$ a $t = 12$ (como se muestra en la figura) es igual a la cantidad total de infección necesaria para desarrollar síntomas (medidos en densidad de células infectadas × tiempo). La función N ha sido modelada por la función

$$f(t) = -t(t - 21)(t + 1)$$

Use este modelo con seis subintervalos y sus puntos medios para estimar la cantidad total de infección necesaria para desarrollar síntomas de sarampión.



Fuente: J. M. Heffernan *et al*., "An In-Host Model of Acute Infection: Measles as a Case Study," *Theoretical Population Biology* 73 (2006): 134-147.

20. La tabla muestra el número de personas por día que murió de SARS (síndrome agudo respiratorio severo) en Singapur a intervalos de dos semanas a partir del 1 de marzo de 2003.

Fecha	Muertes por día	Fecha	Muertes por día
Marzo 1	0.0079	April 26	0.5620
Marzo 15	0.0638	May 10	0.4630
Marzo 29	0.1944	May 24	0.2897
Abril 12	0.4435		

(a) Usando un argumento similar al del ejemplo 4, estime el número de personas que han muerto de SARS en Singapur entre el 1 de marzo y el 24 de mayo de 2003, con puntos finales izquierdos y derechos.

(b) ¿Cómo se interpreta el número de muertes SARS como un área bajo una curva?

Fuente: A. Gumel *et al*., "Modelling Strategies for Controlling SARS Outbreaks," *Proceedings of the Royal Society of London: Series B* 271 (2004): 2223–2232.

21–23 Utilice la definición 2 para encontrar una expresión para el área bajo la gráfica de f como un límite. No evalúe el límite.

21. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

22. $f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 7$

23. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

24–25 Determine una región cuya área sea igual al límite dado. No evalúe el límite.

24. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\sqrt{1 + \frac{3i}{n}}$ **25.** $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n}$

26. (a) Utilice la definición 2 para encontrar una expresión para el área bajo la curva $y = x^3$ de 0 a 1 como un límite.

(b) La fórmula siguiente para la suma de los cubos de los primeros n enteros se demuestra en el apéndice E. Úsela para evaluar el límite del inciso (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2$$

27. Sea A el área bajo la gráfica de una función f continua creciente de a a b, y sea L_n y R_n las aproximaciones a A con n subintervalos utilizando los puntos finales izquierdo y derecho, respectivamente.

(a) ¿Cómo se relacionan A, L_n y R_n?

(b) Demuestre que

$$R_n - L_n = \frac{b - a}{n}[f(b) - f(a)]$$

Luego, dibuje un diagrama para ilustrar esta ecuación, mostrando que los n rectángulos que representan $R_n - L_n$ se pueden ensamblar para formar un único rectángulo cuya área es la parte derecha de la ecuación.

(c) Deduzca que

$$R_n - A < \frac{b - a}{n}[f(b) - f(a)]$$

28. Si A es el área bajo la curva $y = e^x$ de 1 a 3, utilice el ejercicio 27 para encontrar un valor n tal que $R_n - A < 0.0001$.

SAC **29.** (a) Exprese el área bajo la curva $y = x^5$ de 0 a 2 como un límite.
(b) Utilice un sistema algebraico computacional para encontrar la suma de su expresión del inciso (a).
(c) Evalúe el límite del inciso (a).

SAC **30.** Determine el área exacta de la región bajo la gráfica de $y = e^{-x}$ de 0 a 2 utilizando un sistema algebraico computacional, para evaluar la suma y después el límite del ejemplo 3(a). Compare su respuesta con la estimación obtenida en el ejemplo 3(b).

SAC **31.** Encuentre el área exacta bajo la curva $y = \cos x$, de $x = 0$ a $x = b$, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use un sistema algebraico computacional para evaluar la suma y calcular el límite.) En particular, ¿cuál es el área si $b = \pi/2$?

32. (a) Sea A_n el área de un polígono con n lados iguales, inscrito en un círculo con radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $2\pi/n$, demuestre que

$$A_n = \tfrac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugerencia*: use la ecuación 3.3.2 de la página 191.]

5.2 La integral definida

En la sección 5.1 vio que, cuando se calcula un área, surge un límite de la forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

También vio que aparece cuando intenta encontrar la distancia recorrida por un objeto. Resulta que este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. En los capítulos 6 y 8 verá que también surgen límites de la forma (1) al calcular longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y el trabajo, así como otras cantidades. Por esta razón, para este límite se tiene un nombre y una notación especiales.

2 Definición de la integral definida Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ los puntos finales de estos subintervalos y sean x_1^*1 , $x_2^*, \ldots, x_n^*$ los **puntos muestra** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de *f*, de *a* a *b***, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todas las posibles elecciones de los puntos muestra. Si existe, se dice que f es **integrable** en $[a, b]$.

El significado preciso del límite que define a la integral es como sigue:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier elección de x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

NOTA 1 Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$,

se llama **integrando**, y a y b se conocen como **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. Por ahora, el símbolo dx no tiene significado por sí mismo; la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$ en sí misma es un símbolo completo. La dx indica simplemente que la variable independiente es x. El procedimiento para calcular una integral se llama **integración**.

NOTA 2 La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número que no depende de x. De hecho, se podría utilizar cualquier letra en lugar de x sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f(r)\,dr$$

NOTA 3 La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que aparece en la definición 2 se llama **suma de Riemann**, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). De tal manera que la definición 2 indica que la integral definida de una función integrable se puede aproximar dentro de cualquier grado de exactitud mediante la suma de Riemann.

Riemann

Bernhard Riemann recibió su doctorado bajo la dirección del legendario Gauss, en la Universidad de Göttingen, y permaneció allí para enseñar. Gauss, que no tenía el hábito de elogiar a otros matemáticos, habló de "la mente creativa, activa, en verdad matemática y la originalidad gloriosamente fértil" de Riemann. La definición (2) de integral que utilizó se debe a Riemann. También hizo colaboraciones importantes a la teoría de funciones de una variable compleja, a la matemática de fenómenos físicos, a la teoría de números y a los fundamentos de la geometría. El concepto profundo de Riemann del espacio y de la geometría resultó ser, 50 años más tarde, el apoyo idóneo para la teoría general de la relatividad de Einstein. La salud de Riemann fue mala durante toda su vida, y murió de tuberculosis a los 39 años.

Se sabe que, si f es positiva, entonces la suma de Riemann se puede interpretar como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación (véase la figura 1). Al comparar la definición 2 con la definición de área de la sección 5.1, vea que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como el área bajo la curva $y = f(x)$, de a a b (véase la figura 2.)

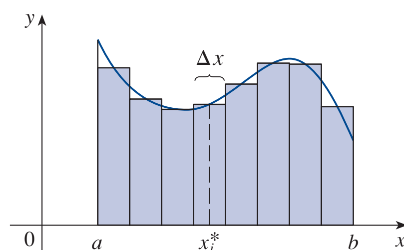


FIGURA 1
Si $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann $\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos.

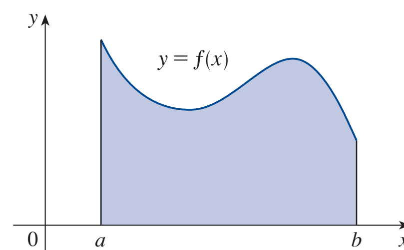


FIGURA 2
Si $f(x) \geqslant 0$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b.

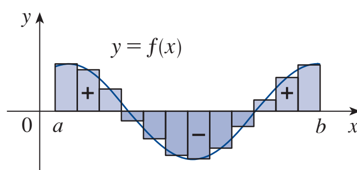


FIGURA 3
$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ es una aproximación del área neta.

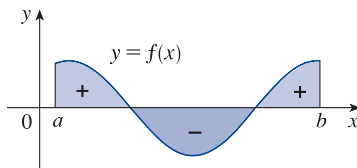


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área neta.

Si f toma valores tanto positivos como negativos, como en la figura 3, entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y los *negativos* de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x (las áreas de los rectángulos superiores *menos* las áreas de los rectángulos inferiores). Cuando se toma el límite de esas sumas de Riemann, se obtiene la situación que se ilustra en la figura 4. Una integral definida se puede interpretar como un **área neta**; es decir, una diferencia de áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f, y A_2 corresponde al área de la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

NOTA 4 Aunque se ha definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividiendo $[a, b]$ en subintervalos del mismo ancho, hay situaciones en las que resulta ventajoso trabajar con intervalos de diferente ancho. Por ejemplo, en el ejercicio 5.1.16, la NASA proporcionó datos de velocidad en tiempos que no estaban igualmente espaciados, pero aun así se pudo estimar la distancia recorrida. Y existen métodos para la integración numérica que aprovechan los subintervalos desiguales.

Si los anchos de los intervalos son Δx_1, Δx_2, . . . , Δx_n, debe asegurarse de que todos estos anchos tiendan a 0 en el proceso del límite. Esto sucede si el ancho más grande, máx Δx_i, tiende a 0. Por lo que en este caso la definición de la integral definida es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

NOTA 5 Se ha definido la integral definida para una función integrable, pero no todas las funciones son integrables (véanse los ejercicios 71-72). El teorema siguiente muestra que la mayor parte de las funciones que usualmente se presentan en realidad son integrables. Esto se demuestra en cursos más avanzados.

3 Teorema Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene solo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Si f es integrable en $[a, b]$, entonces el límite en la definición 2 existe y da el mismo valor, sin importar cómo seleccione los puntos muestra x_i^*. Para simplificar los cálculos de la integral, con frecuencia se toman los puntos muestra en los puntos finales derechos. Por tanto, $x_i^* = x_i$ y la definición de la integral se simplifica como sigue.

4 Teorema Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde $$\Delta x = \frac{b - a}{n} \qquad \text{y} \qquad x_i = a + i\,\Delta x$$

EJEMPLO 1 Exprese

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como una integral sobre el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN Al comparar el límite dado con el límite en el teorema 4, vea que es idéntico si elige $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. Le proporcionan $a = 0$ y $b = \pi$, entonces, por el teorema 4 se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$ ■

Más adelante, cuando aplique la integral definida a situaciones físicas, será importante reconocer los límites de sumas como integrales, como en el ejemplo 1. Cuando

Leibniz eligió la notación para la integral, escogió los ingredientes para recordar el proceso de tomar el límite. En general, cuando se escribe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

se reemplaza lím Σ por $\int$, x_i^* por x, y Δx por dx.

Evaluación de integrales

Cuando utiliza la definición para evaluar una integral definida, necesita saber cómo trabajar con sumas. Las tres ecuaciones siguientes dan fórmulas para las sumas de potencias de enteros positivos. Es posible que conozca la ecuación 5 a partir un curso de álgebra. Las ecuaciones 6 y 7 se analizaron en la sección 5.1 y se demuestran en el apéndice E.

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Las fórmulas restantes son simples reglas para trabajar con la notación sigma:

Las fórmulas 8 a 11 se demuestran escribiendo cada uno de los miembros en forma desarrollada. El lado izquierdo de la ecuación 9 es

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

El lado derecho es

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por la propiedad distributiva son iguales. Las otras fórmulas se analizan en el apéndice E.

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

11 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

EJEMPLO 2

(a) Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestra de los puntos finales derechos y $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$.

(b) Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 6$ el ancho del intervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

y los puntos finales derechos son $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$ y $x_6 = 3.0$.

Por lo que la suma de Riemann es

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x + f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x$$

$$= \tfrac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9)$$

$$= -3.9375$$

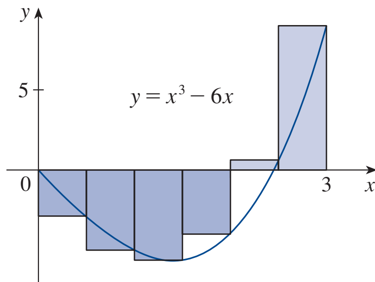


FIGURA 5

Observe que f no es una función positiva, por lo que la suma de Riemann no representa una suma de áreas de rectángulos. Pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos que están encima del eje x menos la suma de las áreas de los rectángulos que están abajo del eje x de la figura 5.

(b) Con n subintervalos, tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Así, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ y, en general, $x_i = 3i/n$. Ya que utiliza los puntos finales derechos, puede utilizar el teorema 4:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

En la suma, n es una constante (a diferencia de i), por eso puede sacar $3/n$ del signo Σ.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(ecuación 9 con } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(ecuaciones 11 y 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right\} \qquad \text{(ecuaciones 7 y 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$

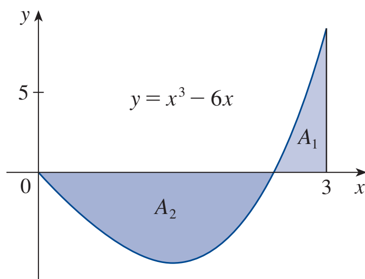


FIGURA 6

$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Esta integral no puede interpretarse como un área porque f toma tanto valores positivos como negativos; pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.

En la figura 7 se ilustran los cálculos al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha, para $n = 40$. Los valores que se presentan en la tabla hacen ver que las sumas de Riemann tienden al valor exacto de la integral, -6.75, cuando $n \to \infty$.

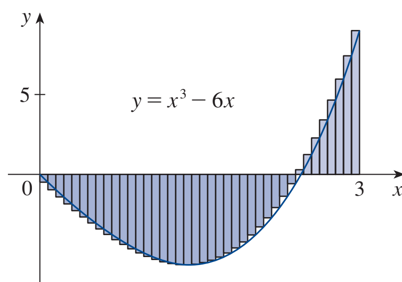


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	−6.3998
100	−6.6130
500	−6.7229
1000	−6.7365
5000	−6.7473

■

En la sección 5.4 verá un método mucho más sencillo para evaluar la integral del ejemplo 2.

EJEMPLO 3

(a) Plantee una expresión para $\int_1^3 e^x\,dx$ como un límite de sumas.
(b) Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar la expresión.

Puesto que $f(x) = e^x$ es positiva, la integral del ejemplo 3 representa el área que se muestra en la figura 8.

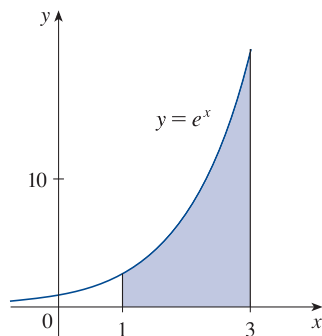


FIGURA 8

SOLUCIÓN

(a) Aquí tiene $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$ y

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2}{n}$$

Por lo que $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$ y

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

Del teorema 4, obtiene

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}\end{aligned}$$

(b) Si le pide a un sistema algebraico computacional que evalúe la suma y simplifique, obtendrá

Un sistema algebraico computacional puede determinar una expresión explícita para esta suma porque es una serie geométrica. El límite se podría encontrar usando la regla de L'Hôpital.

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Ahora pida al sistema algebraico computacional que evalúe el límite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

En la sección siguiente aprenderá un método más sencillo para la evaluación de integrales. ■

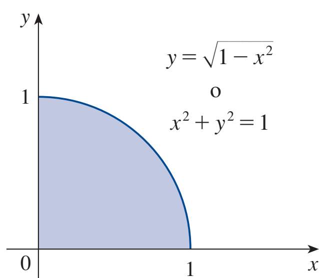


FIGURA 9

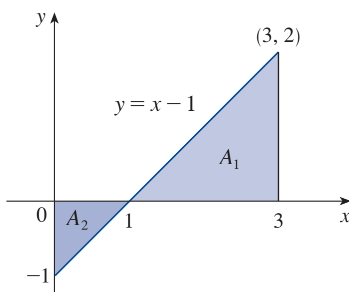


FIGURA 10

EJEMPLO 4 Evalúe las integrales siguientes interpretando cada una en términos de áreas:

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (b) $\int_0^3 (x-1)\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Ya que $f(x)=\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, puede interpretar esta integral como el área bajo la curva $y=\sqrt{1-x^2}$ de 0 a 1. Pero ya que $y^2 = 1 - x^2$, obtiene $x^2 + y^2 = 1$, que muestra que la gráfica de f es el cuarto de circunferencia con radio 1, que puede verse en la figura 9. Por tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(En la sección 7.3 usted podrá *demostrar* que el área de un círculo con radio r es πr^2.)

(b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se muestra en la figura 10. Calcule la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x-1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2\cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1\cdot 1) = 1.5$$ ■

Regla del punto medio

A menudo se elige el punto muestra x_i^* como el extremo de la derecha del i-ésimo intervalo porque resulta conveniente para calcular el límite. Pero si la finalidad es determinar una *aproximación* para una integral, es mejor elegir x_i^* como el punto medio del intervalo, que se denota con $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usa los puntos medios, obtendrá la aproximación siguiente:

TEC En Module 5.2/7.7 se muestra cómo la regla del punto medio mejora conforme n aumenta.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

y $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$$

EJEMPLO 5 Use la regla del punto medio con $n = 5$ para determinar una aproximación de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Los puntos finales de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0, de modo que los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. El ancho de los subintervalos es $\Delta x = (2-1)/5 = \frac{1}{5}$, por lo que la regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

Ya que $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, la integral representa un área y la aproximación

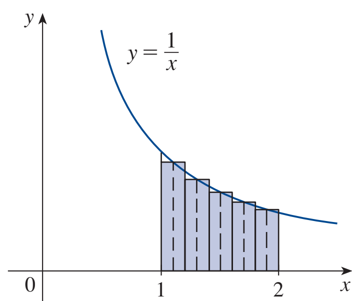


FIGURA 11

dada por la regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura 11. ■

Hasta el momento no sabe qué tan exacta es la aproximación del ejemplo 5; pero en la sección 7.7 aprenderá un método para estimar el error implicado, con el uso de la regla del punto medio. En ese momento se exponen otros métodos para encontrar aproximaciones de integrales definidas.

Si aplica la regla del punto medio a la integral del ejemplo 2, obtiene el dibujo que aparece en la figura 12. La aproximación $M_{40} \approx -6.7563$ está mucho más cerca del valor verdadero de -6.75 que la aproximación con el punto extremo de la derecha, $R_{40} \approx -6.3998$, que se muestra en la figura 7.

TEC En Visual 5.2 puede comparar las aproximaciones por la izquierda, derecha y del punto medio para la integral del ejemplo 2 para diferentes valores de n.

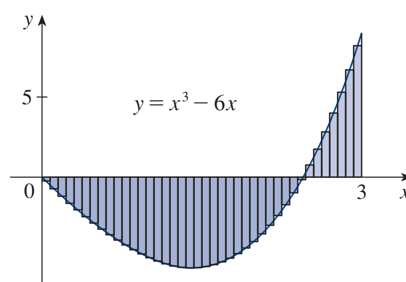


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6.7563$

Propiedades de la integral definida

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita se supuso que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Observe que si invierte a y b, entonces Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. Por tanto,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Si $a = b$, entonces $\Delta x = 0$ y así

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ahora aparecen algunas propiedades básicas de las integrales que lo ayudarán a la evaluación de estas con mayor facilidad. Suponga que f y g son funciones continuas.

Propiedades de la integral

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, donde c es cualquier constante

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

En la propiedad 1 se expresa que la integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, esto es de esperarse ya que $c(b - a)$ es el área del rectángulo de la figura 13.

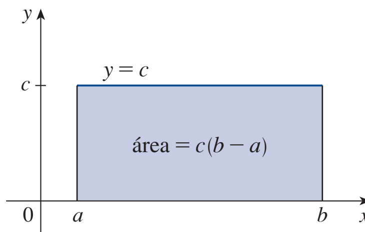


FIGURA 13
$\int_a^b c\, dx = c(b - a)$

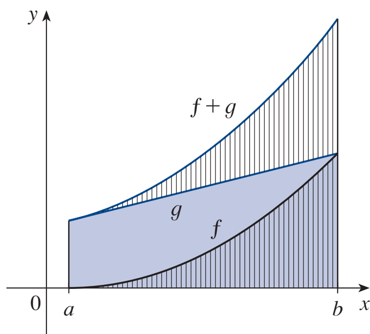


FIGURA 14
$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

La propiedad 2 expresa que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para funciones positivas, esto quiere decir que el área bajo $f + g$ es el área bajo f más el área bajo g. La figura 14 ayuda a comprender por qué esto es cierto: en vista de la manera en que funciona la adición de gráficas, los segmentos de recta verticales correspondientes tienen alturas iguales.

En general, la propiedad 2 se deduce del teorema 4 y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\, \Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, \Delta x \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, \Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\end{aligned}$$

La propiedad 3 parece intuitivamente razonable porque si se multiplica una función por un número positivo c, su gráfica se alarga o contrae en el sentido vertical un factor de c. De modo que alarga o contrae cada rectángulo de aproximación un factor de c y, por consecuencia, tiene el efecto de multiplicar el área por c.

La propiedad 3 se puede demostrar de manera semejante y en ella se expresa que la integral de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero *solo* una constante) puede sacarse de un signo de integral. La propiedad 4 se demuestra escribiendo $f - g = f + (-g)$ y aplicando las propiedades 2 y 3 con $c = -1$.

EJEMPLO 6 Utilice las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx$.

SOLUCIÓN Utilizando las propiedades 2 y 3 de las integrales, se tiene

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx = \int_0^1 4\, dx + \int_0^1 3x^2\, dx = \int_0^1 4\, dx + 3\int_0^1 x^2\, dx$$

Por la propiedad 1, se sabe que

$$\int_0^1 4\, dx = 4(1 - 0) = 4$$

y, en el ejemplo 5.1.2, se encontró que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. Por lo que

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx &= \int_0^1 4\, dx + 3\int_0^1 x^2\, dx \\ &= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5\end{aligned}$$
■

En la propiedad siguiente se indica cómo combinar las integrales de la misma función sobre intervalos adyacentes:

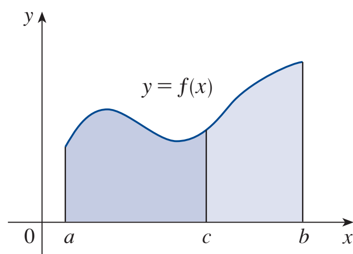


FIGURA 15

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Esto no es fácil de demostrar en general; pero, para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $a < c < b$, se puede ver la propiedad 5 a partir de la interpretación geométrica de la figura 15: el área bajo $y = f(x)$, de a a c, más el área de c a b es igual al área total de a a b.

EJEMPLO 7 Si se sabe que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ y $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)\,dx$.

SOLUCIÓN Por la propiedad 5, se tiene

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

por lo que $$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$ ■

Las propiedades 1 a 5 son verdaderas ya sea que $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Las propiedades que se enuncian a continuación, en las que se comparan tamaños de funciones y tamaños de integrales, son verdaderas solo si $a \leqslant b$.

Propiedades de comparación de la integral

6. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

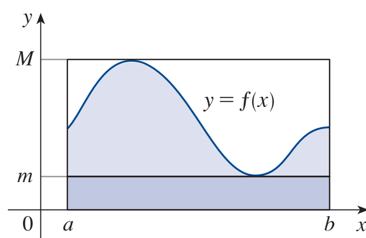


FIGURA 16

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la gráfica de f, de manera que la interpretación geométrica de la propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas (esto también se sigue directamente de la definición porque todas las cantidades implicadas son positivas). La propiedad 7 expresa que una función más grande tiene una integral más grande. Esto se infiere de las propiedades 6 y 4 porque $f - g \geqslant 0$.

La propiedad 8 se ilustra mediante la figura 16 para el caso en que $f(x) \geqslant 0$. Si f es continua se podría tomar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$. En este caso, la propiedad 8 expresa que el área bajo la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 8 Puesto que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, con la propiedad 7 se obtiene

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Al utilizar la propiedad 1 para evaluar las integrales en el primero y el segundo miembros, se obtiene

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$ ■

La propiedad 8 es útil si lo que quiere es solo una estimación general del tamaño de una integral sin las dificultades que representa el uso de la regla del punto medio.

EJEMPLO 8 Use la propiedad 8 para estimar $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Debido a que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente sobre [0, 1], su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$. De la propiedad 8

$$e^{-1}(1 - 0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1 - 0)$$

o

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Ya que $e^{-1} \approx 0.3679$, se puede escribir

$$0.367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

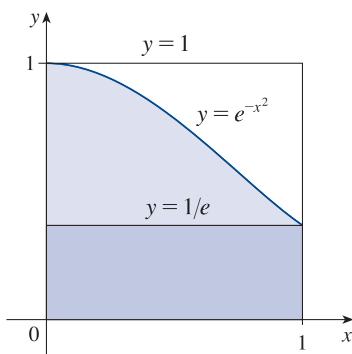


FIGURA 17

El resultado del ejemplo 8 se ilustra en la figura 17. La integral es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del cuadrado.

5.2 EJERCICIOS

1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x - 1$, $-6 \leqslant x \leqslant 4$, con cinco subintervalos, tomando los puntos finales izquierdos como los puntos muestra. Con ayuda de un diagrama, explique qué representa la suma de Riemann.

2. Si

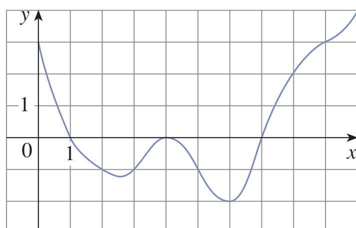
$$f(x) = \cos x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi/4$$

evalúe la suma de Riemann con $n = 6$ tomando los puntos finales izquierdos como los puntos muestra (Dé su respuesta redondeada a seis decimales). ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

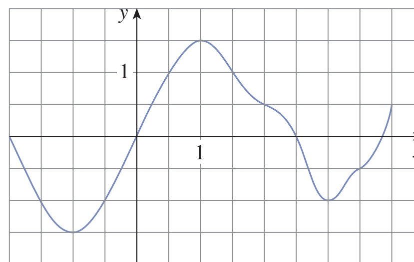
3. Si $f(x) = x^2 - 4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, determine la suma de Riemann con $n = 6$ tomando los puntos finales derechos como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

4. (a) Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, con cuatro términos, tomando los puntos muestra como los puntos finales derechos. (Dé su respuesta redondeada a seis decimales.) Explique, con ayuda de un diagrama, qué representa la suma de Riemann.
(b) Repita el inciso (a) con los puntos medios como los puntos muestra.

5. Se da la gráfica de una función. Estime $\int_0^{10} f(x)\,dx$ usando cinco subintervalos con (a) los puntos finales derechos, (b) los puntos finales izquierdos y (c) los puntos medios.



6. Se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando (a) los puntos finales derechos, (b) los puntos finales izquierdos y (c) los puntos medios.



7. Se presenta una tabla de valores de una función creciente f. Utilícela para hacer estimaciones inferiores y superiores de $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

8. En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_3^9 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con (a) los puntos finales derechos, (b) los puntos finales izquierdos y (c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-3.4	-2.1	-0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

9–12 Use la regla del punto medio, con el valor dado de n, para encontrar una aproximación de cada una de las integrales siguientes. Redondee cada respuesta a cuatro cifras decimales.

9. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1}\, dx, \quad n = 5$

11. $\int_1^5 x^2 e^{-x}\, dx, \quad n = 4$

12. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^2 x\, dx, \quad n = 4$

SAC **13.** Si tiene un SAC que evalúe las aproximaciones con los puntos medios y trace los rectángulos correspondientes (en Maple, use las instrucciones `RiemannSum` o `middlesum` y `middlebox`), compruebe la respuesta del ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. Después, repita con $n = 10$ y $n = 20$.

14. Con una calculadora programable o una computadora (véanse las instrucciones para el ejercicio 5.1.9), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x) = x/(x + 1)$ sobre el intervalo $[0, 2]$, con $n = 100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$0.8946 < \int_0^2 \frac{x}{x+1}\, dx < 0.9081$$

15. Use una calculadora o una computadora para hacer una tabla de valores de sumas de la derecha de Riemann R_n para la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿A qué valor parecen aproximarse estos números?

16. Use calculadora o computadora para hacer una tabla de valores de las sumas de Riemann de la izquierda y de la derecha L_n y R_n para la integral $\int_0^2 e^{-x^2}\, dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿Entre qué números tiene que encontrarse el valor de la integral? ¿Puede formular un enunciado similar para la integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\, dx$? Explique su respuesta.

17–20 Exprese cada uno de los límites siguientes como una integral definida sobre el intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1 + x_i} \Delta x, \quad [0, 1]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \sqrt{1 + x_i^3}\, \Delta x, \quad [2, 5]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\, \Delta x, \quad [2, 6]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i} \Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

21–25 Use la forma de la definición de integral que se dio en el teorema 4 para evaluar la integral.

21. $\int_{-1}^5 (1 + 3x)\, dx$

22. $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\, dx$

23. $\int_{-2}^0 (x^2 + x)\, dx$

24. $\int_0^2 (2x - x^3)\, dx$

25. $\int_0^1 (x^3 - 3x^2)\, dx$

26. (a) Determine una aproximación a la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$, usando una suma de Riemann con puntos finales derechos y $n = 8$.
(b) Dibuje un diagrama como el de la figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso (a).
(c) Aplique el teorema 4 para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.
(d) Interprete la integral del inciso (c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la figura 4.

27. Demuestre que $\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demuestre que $\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Exprese la integral como un límite de sumas de Riemann. No evalúe el límite.

29. $\int_1^3 \sqrt{4 + x^2}\, dx$

30. $\int_2^5 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$

SAC **31–32** Exprese cada una de las integrales siguientes como un límite de sumas. Después, evalúe utilizando un sistema algebraico computacional para encontrar tanto la suma como el límite.

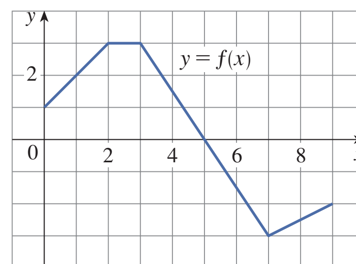
31. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 5x\, dx$

32. $\int_2^{10} x^6\, dx$

33. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada una de las integrales siguientes interpretándola en términos de áreas.

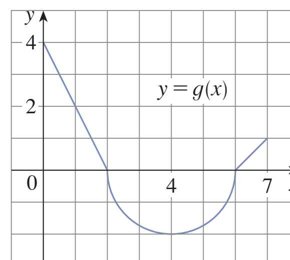
(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\, dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\, dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\, dx$



34. La gráfica g consiste en dos rectas y una semicircunferencia. Úsela para evaluar cada una de las integrales siguientes.

(a) $\int_0^2 g(x)\, dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\, dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\, dx$



35–40 Evalúe cada una de las integrales siguientes interpretándola en términos de áreas.

35. $\int_2^4 (1 - x)\,dx$

36. $\int_0^9 \left(\frac{1}{3}x - 2\right) dx$

37. $\int_{-3}^0 \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

38. $\int_{-5}^5 \left(x - \sqrt{25 - x^2}\right) dx$

39. $\int_{-4}^3 \left|\frac{1}{2}x\right| dx$

40. $\int_0^1 |2x - 1|\,dx$

41. Evalúe $\int_1^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$.

42. Ya que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 x\,dx = \frac{3}{8}\pi$, ¿a qué es igual $\int_{\pi}^0 \operatorname{sen}^4 \theta\,d\theta$?

43. En el ejemplo 5.1.2, se demostró que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Utilice este hecho y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (5 - 6x^2)\,dx$.

44. Utilice las propiedades de las integrales y el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 (2e^x - 1)\,dx$.

45. Utilice el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 e^{x+2}\,dx$.

46. A partir de los resultados del ejercicio 27 y del hecho de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$ (del ejercicio 5.1.31), junto con las propiedades de las integrales, evalúe $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\,dx$.

47. Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_{-2}^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

48. Si $\int_2^8 f(x)\,dx = 7.3$ y $\int_2^4 f(x)\,dx = 5.9$, encuentre $\int_4^8 f(x)\,dx$.

49. Si $\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\,dx = 16$, encuentre

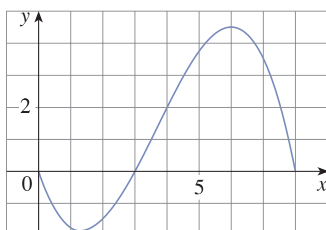
$$\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$$

50. Encuentre $\int_0^5 f(x)\,dx$ si

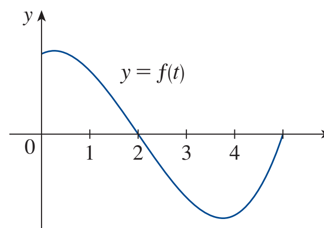
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

51. Para la función f cuya gráfica se muestra, presente las cantidades en orden creciente, de menor a mayor, y explique su razonamiento.

(A) $\int_0^8 f(x)\,dx$ (B) $\int_0^3 f(x)\,dx$ (C) $\int_3^8 f(x)\,dx$
(D) $\int_4^8 f(x)\,dx$ (E) $f'(1)$

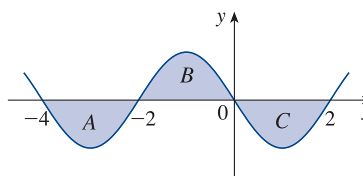


52. Si $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica está dada, ¿cuál de los valores siguientes es el más grande?
(A) $F(0)$ (B) $F(1)$ (C) $F(2)$
(D) $F(3)$ (E) $F(4)$



53. Cada una de las regiones A, B, y C, acotadas por la gráfica de f y el eje x, tiene área 3. Encuentre el valor de

$$\int_{-4}^2 [f(x) + 2x + 5]\,dx$$



54. Suponga que f tiene el valor mínimo absoluto m y el valor máximo absoluto M. ¿Entre qué valores se encuentra $\int_0^2 f(x)\,dx$? ¿Qué propiedad de las integrales le permite sostener su conclusión?

55–58 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

55. $\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\,dx \geq 0$

56. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$

57. $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$

58. $\dfrac{\pi}{12} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x\,dx \leq \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{12}$

59–64 Utilice la propiedad 8 para estimar el valor de cada una de las integrales siguientes.

59. $\int_0^1 x^3\,dx$

60. $\int_0^3 \dfrac{1}{x + 4}\,dx$

61. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$

62. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$

63. $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

64. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

65–66 Mediante las propiedades de las integrales, junto con los ejercicios 27 y 28, demuestre cada una de las desigualdades siguientes.

65. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\,dx \geq \dfrac{26}{3}$

66. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx \leq \dfrac{\pi^2}{8}$

67. ¿Cuál de las integrales $\int_1^2 \arctan x\,dx$, $\int_1^2 \arctan \sqrt{x}\,dx$ y $\int_1^2 \arctan(\operatorname{sen} x)\,dx$ tiene el valor más grande? ¿Por qué?

68. ¿Cuál de las integrales $\int_0^{0.5} \cos(x^2)\,dx$, $\int_0^{0.5} \cos \sqrt{x}\,dx$ tiene el valor más grande? ¿Por qué?

69. Demuestre la propiedad 3 de las integrales.

70. (a) Si f es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

[*Sugerencia:* $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.]

(b) Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\,dx \right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

71. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$.

72. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1/x$ si $0 < x \leqslant 1$. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$. [*Sugerencia*: demuestre que el primer término en la suma de Riemann, $f(x_i^*)\Delta x$, se puede hacer de manera arbitraria muy grande].

73–74 Exprese cada uno de los límites siguientes como una integral definida.

73. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia*: considere $f(x) = x^4$.]

74. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 + (i/n)^2}$

75. Determine $\int_1^2 x^{-2}\,dx$. *Sugerencia:* elija x_i^* como la media geométrica x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO FUNCIONES DE ÁREAS

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y utilice la geometría para hallar el área bajo esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.

(b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra bajo la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría para encontrar una expresión para $A(x)$.

(c) Derive la función del área $A(x)$. ¿Qué observa?

2. (a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\,dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Describa y trace la gráfica de la región.

(b) A partir de los resultados del ejercicio 5.2.28 encuentre una expresión para $A(x)$.

(c) Determine $A'(x)$. ¿Qué observa?

(d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño, entonces $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y trace la gráfica de la región.

(e) Dibuje un rectángulo que aproxime la región del inciso (d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones, demuestre que

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Mediante el inciso (e) proporcione una explicación intuitiva del resultado del inciso (c).

3. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ en el rectángulo de vista $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.

(b) Si define una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$$

entonces $g(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 a x [hasta que $f(x)$ sea negativa, en cuyo punto $g(x)$ es una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso (a) para

determinar el valor de x para el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]

(c) Utilice la instrucción de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6)$, ..., $g(1.8)$, $g(2)$. Después, con estos valores dibuje una gráfica de g.

(d) Use su gráfica de g del inciso (c) para trazar la gráfica de g' utilizando la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?

4. Suponga que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y defina una nueva función g por la ecuación

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Tomando como base sus resultados en los problemas 1 a 3, deduzca una expresión para $g'(x)$.

5.3 El teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El cálculo diferencial surgió del problema de la recta tangente, mientras que el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta de que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo precisa la relación inversa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el cálculo como un método matemático sistemático. En particular, observaron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas como en las secciones 5.1 y 5.2.

La primera parte del teorema fundamental trata con funciones definidas por una ecuación en la forma

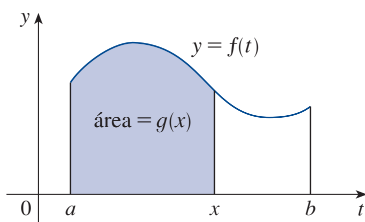


FIGURA 1

1
$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

donde f es una función continua sobre $[a, b]$ y x varía entre a y b. Observe que g depende solo de x, que aparece como el límite variable superior en la integral. Si x es un número fijo, entonces la integral $\int_a^x f(t)\, dt$ es un número definido. Si después hace variar x, el número $\int_a^x f(t)\, dt$ también varía y define una función de x que se denota mediante $g(x)$.

Si f es una función positiva, entonces $g(x)$ se puede interpretar como el área bajo la gráfica de f de a a x, donde x puede variar de a a b. (Piense en g como la función del "área hasta"; véase la figura 1.)

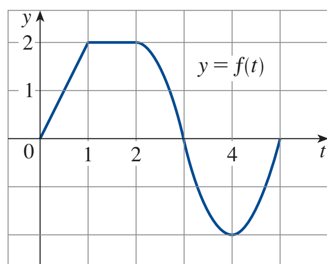


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

SOLUCIÓN En primer lugar, observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\, dt = 0$. De la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\, dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para determinar $g(2)$ agregue a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estime que el área bajo f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$

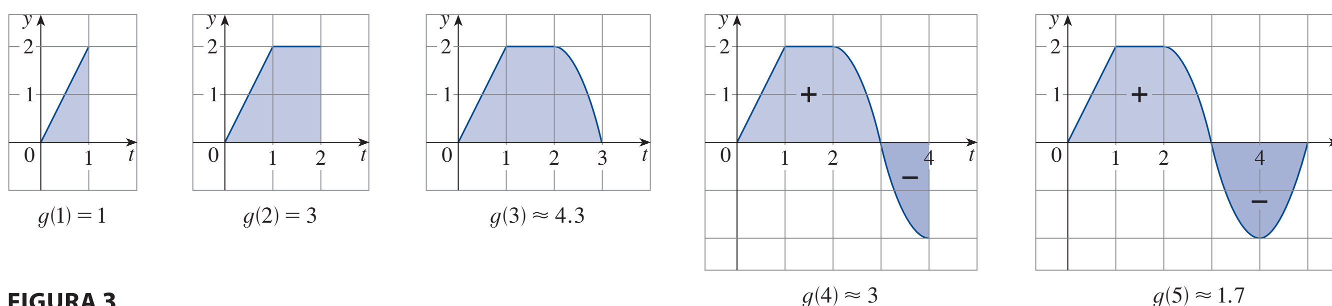


FIGURA 3

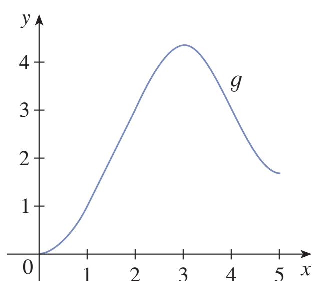


FIGURA 4

$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y, por tanto, empiece a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

Use estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Observe que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y, por tanto, g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa. ■

Si toma $f(t) = t$ y $a = 0$, entonces, aprovechando el ejercicio 5.2.27, tiene

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$; es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, entonces g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si se traza la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las rectas tangentes, se obtiene una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, se sospecha que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

Con objeto de ver por qué en general esto puede ser verdadero, considere cualquier función continua f con $f(x) \geqslant 0$. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ se puede interpretar como el área bajo la gráfica de f de a a x, como en la figura 1.

Para calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, en primer lugar observe que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene restando áreas; por tanto, es el área bajo la gráfica de f de x a $x + h$ (el área sombreada de la figura 5). Para h pequeñas, a partir de la figura puede ver que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

por lo que
$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

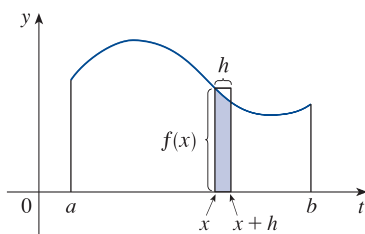


FIGURA 5

De manera intuitiva, se espera que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto sea verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

El nombre de este teorema se abrevia como TFC1: expresa que la derivada de una integral definida respecto a su límite superior es el integrando evaluando tal límite.

Teorema fundamental del cálculo, parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en [a, b] y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$\begin{aligned} g(x + h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt \right) - \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{(por la propiedad 5)} \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\, dt \end{aligned}$$

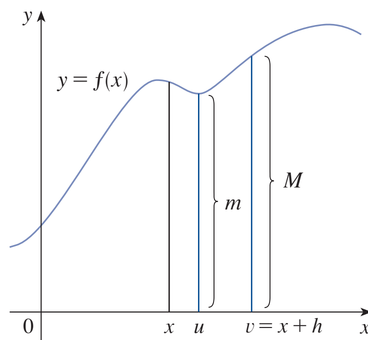


FIGURA 6

y así, para $h \neq 0$,

2 $$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Por ahora suponga que $h > 0$. Puesto que f es continua en $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de f en $[x, x + h]$. (Véase la figura 6.)

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, se tiene

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leqslant Mh$$

esto es, $$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leqslant f(v)h$$

Ya que $h > 0$, se puede dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leqslant f(v)$$

Ahora, utilice la ecuación 2 para reemplazar la parte de en medio de esta desigualdad:

3 $$f(u) \leqslant \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

TEC En Module 5.3 se proporciona evidencia visual para el TFC1.

La desigualdad 3 se puede demostrar de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. (Véase el ejercicio 77.)

Ahora sea $h \to 0$. Entonces $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v se encuentran entre x y $x + h$. Por tanto,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con 3 y el teorema de la compresión se concluye que

$$\boxed{4} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, entonces la ecuación 4 se puede interpretar como un límite unilateral. Entonces el teorema 2.8.4 (modificado para límites unilaterales) demuestra que g es continua en $[a, b]$. ■

De acuerdo con la notación de Leibniz para derivadas, se puede expresar al TFC1 como

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

cuando f es continua. En términos generales, la ecuación 5 establece que si primero se integra f y luego se deriva el resultado, se regresa a la función original f.

EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$ ■

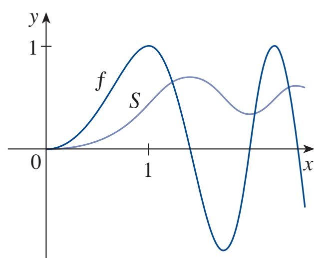


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

EJEMPLO 3 Si bien una fórmula en la forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ puede parecer una forma extraña de definir una función, los libros de física, química y estadística están llenos de funciones semejantes. Por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

recibe ese nombre en honor del físico francés Augustin Fresnel (1788-1827), que es famoso por sus trabajos en óptica. Esta función apareció por primera vez en la teoría de Fresnel de la difracción de la luz, pero a últimas fechas se ha aplicado al diseño de autopistas.

La parte 1 del teorema fundamental indica cómo derivar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$$

Esto significa que se pueden aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (véase el ejercicio 71).

En la figura 7 se muestran las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ y de la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Se puede utilizar una computadora para graficar S calculando el valor de esta integral para muchos valores de x. Evidentemente, parece que $S(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 hasta x [hasta que $x \approx 1.4$ cuando $S(x)$ sea una diferencia de áreas]. La figura 8 muestra una gran parte de la gráfica de S.

Si empieza ahora por la gráfica de S de la figura 7 y piensa qué aspecto debe tener su derivada, parece razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$]. De modo que esto da una confirmación visual de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo. ■

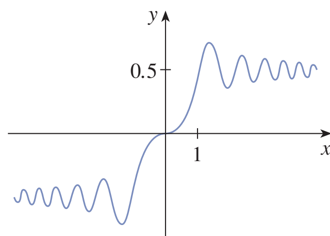


FIGURA 8
La función de Fresnel
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con el TFC1. Sea $u = x^4$. Por tanto,

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\, dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\, dt$$

$$= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\, dt\right]\frac{du}{dx} \qquad \text{(Por la regla de la cadena)}$$

$$= \sec u\,\frac{du}{dx} \qquad \text{(por TFC1)}$$

$$= \sec(x^4)\cdot 4x^3$$

■

En la sección 5.2 calculó integrales a partir de la definición como un límite de las sumas de Riemann, y vio que ese procedimiento es a veces largo y difícil. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, que se infiere con facilidad de la primera parte, representa un método mucho más simple para evaluar integrales.

Este teorema se abrevia como TFC2

Teorema fundamental del cálculo, parte 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f; es decir, una función tal que $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x)= f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f sobre $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$F(x) = g(x) + C \tag{6}$$

para $a < x <$ b. Pero tanto F como g son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, (cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$), vea que también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$. Por lo que $F(x)= g(x) + C$ para toda x en $[a, b]$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, tiene

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C]$$

$$= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

■

La parte 2 del teorema fundamental establece que si se conoce una antiderivada F de f, entonces se puede evaluar $\int_a^b f(x)\, dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los puntos finales del intervalo $[a, b]$. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)\, dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$ para $a \leq x \leq b$, se pueda determinar conociendo los valores de $F(x)$ en solo dos puntos, a y b.

Aunque el teorema sorprende a primera vista, esto es posible cuando se le interpreta en términos físicos. Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto y $s(t)$ es su posición en el tiempo t, entonces $v(t) = s'(t)$, por lo que s es una antiderivada de v. En la sección 5.1 se considera un objeto que siempre se mueve en la dirección positiva y se plantea una conjetura de que el área bajo la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida. Si se expresa mediante símbolos:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Eso es exactamente lo que el TFC2 establece en este contexto.

EJEMPLO 5 Evalúe la integral $\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = e^x$ es continua en todo su dominio, y se sabe que una antiderivada es $F(x) = e^x$, de modo que la parte 2 del teorema fundamental da

Compare el cálculo en el ejemplo 5 con el más difícil del ejemplo 5.2.3.

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Observe que el TFC2 establece que puede utilizar *cualquier* antiderivada F de f. De este modo podría usar la más sencilla, a saber $F(x) = e^x$, en lugar de $e^x + 7$ o de $e^x + C$. ■

A menudo se recurre a la notación

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Por lo que la ecuación del TFC2 se puede expresar como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{donde} \qquad F' = f$$

Otras notaciones comunes son $F(x)\big|_a^b$ y $[F(x)]_a^b$.

EJEMPLO 6 Determine el área bajo la parábola $y = x^2$ de 0 a 1.

SOLUCIÓN Una antiderivada de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. El área requerida A se calcula aplicando la parte 2 del teorema fundamental:

Al aplicar el teorema fundamental se usa una antiderivada particular F de f. No es necesario usar la antiderivada más general.

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$ ■

Si compara el cálculo del ejemplo 6 con el del ejemplo 5.1.2, verá que el teorema fundamental proporciona un método *mucho* más corto.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUCIÓN La integral dada es una forma abreviada de

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln|x|$ y, ya que $3 \leqslant x \leqslant 6$, puede escribir $F(x) = \ln x$. Por lo que

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3 = \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$ ■

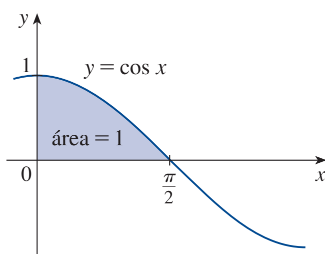


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno de 0 a b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$, se tiene

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, al hacer $b = \pi/2$, ha comprobado que el área bajo la curva coseno de 0 a $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. (Véase la figura 9.) ■

Cuando el matemático francés Gilles de Roberval calculó por vez primera el área bajo las curvas seno y coseno en 1635, era una empresa que requería aplicar todo el ingenio posible. Si no tuviera la ventaja del teorema fundamental tendría que calcular un límite difícil de sumas mediante identidades trigonométricas oscuras (o bien, un sistema algebraico computacional como el de ejercicio 5.1.31). Fue mucho más difícil para Roberval puesto que el artificio de los límites no se había inventado aún en 1635. Pero ya después de los años 1660-1670, cuando Barrow descubrió el teorema fundamental, y Newton y Leibniz lo explotaron, este problema se volvió muy fácil como puede verse en el ejemplo 8.

EJEMPLO 9 ¿Cuál es el error en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, ya que $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ y la propiedad 6 de las integrales establece que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica a funciones continuas. Este no se puede aplicar ya que $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. De hecho f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, por lo que

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{no existe.}$$ ■

La derivación y la integración como procesos inversos

Esta sección finaliza conjuntando las dos partes del teorema fundamental.

Teorema fundamental del cálculo Suponga que f es continua en $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f; es decir, $F' = f$.

Observe que el inciso 1 se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

en la cual se dice que si se integra a f y, luego se deriva el resultado, se regresa a la función original f. Puesto que $F'(x) = f(x)$, la parte 2 se puede reescribir como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

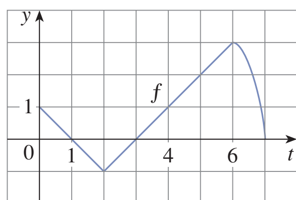
En esta versión se dice que si toma una función F, se deriva y luego se integra el resultado, se vuelve a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de determinar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que solo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en capítulos próximos verá que estos problemas retadores son accesibles para todos.

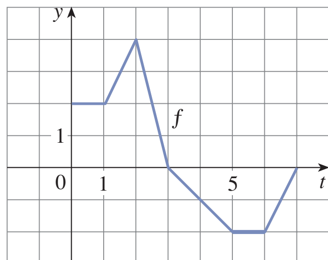
5.3 EJERCICIOS

1. Explique con exactitud qué se quiere decir con el enunciado: "la derivación y la integración son procesos inversos."

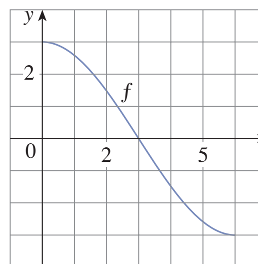
2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) ¿Dónde g tiene un valor máximo? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.



3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
(b) ¿En qué intervalo g es creciente?
(c) ¿Dónde tiene g un valor máximo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.



4. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$ y $g(6)$.
(b) Estime $g(x)$, para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5.
(c) ¿En qué intervalo es creciente g?
(d) ¿Dónde g tiene un valor máximo?
(e) Trace una gráfica aproximada de g.
(f) Utilice la gráfica del inciso (e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.



5–6 Trace el área representada por $g(x)$. Luego determine $g'(x)$ de dos maneras: (a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y (b) evaluando la integral utilizando la parte 2 y después derivando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (2 + \operatorname{sen} t)\,dt$

7–18 Use la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de cada una de las funciones siguientes.

7. $g(x) = \int_0^x \sqrt{t + t^3}\,dt$

8. $g(x) = \int_1^x \ln(1 + t^2)\,dt$

9. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$

10. $h(u) = \int_0^u \frac{\sqrt{t}}{t + 1}\,dt$

11. $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$$\left[\textit{Sugerencia:} \int_x^0 \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_0^x \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$$

12. $R(y) = \int_y^2 t^3 \operatorname{sen} t\,dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt$

14. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

15. $y = \int_1^{3x+2} \frac{t}{1+t^3}\,dt$

16. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

17. $y = \int_{\sqrt{x}}^{\pi/4} \theta \tan\theta\,d\theta$

18. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1+u^2}\,du$

19–44 Evalúe cada una de las integrales siguientes.

19. $\int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\,dx$

20. $\int_{-1}^1 x^{100}\,dx$

21. $\int_0^2 \left(\frac{4}{5}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{2}{5}t\right) dt$

22. $\int_0^1 \left(1 - 8v^3 + 16v^7\right) dv$

23. $\int_0^1 x^{4/5}\,dx$

24. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

26. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$

27. $\int_0^2 x(2 + x^5)\,dx$

28. $\int_0^1 \left(3 + x\sqrt{x}\right) dx$

29. $\int_1^4 \frac{2 + x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int_{-1}^2 (3u - 2)(u + 1)\,du$

31. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc t \cot t\,dt$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \csc^2\theta\,d\theta$

33. $\int_0^1 (1 + r)^3\,dr$

34. $\int_0^3 (2\operatorname{sen} x - e^x)\,dx$

35. $\int_1^2 \frac{v^3 + 3v^6}{v^4}\,dv$

36. $\int_1^{18} \sqrt{\frac{3}{z}}\,dz$

37. $\int_0^1 (x^e + e^x)\,dx$

38. $\int_0^1 \cosh t\,dt$

39. $\int_{-1}^1 e^{u+1}\,du$

40. $\int_1^3 \frac{y^3 - 2y^2 - y}{y^2}\,dy$

41. $\int_0^4 2^s\,ds$

42. $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

43. $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

44. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

45–48 Trace la gráfica de la región encerrada por las curvas dadas y calcule su área.

45. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$

46. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1$

47. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

48. $y = 2x - x^2, \quad y = 0$

49–52 Utilice una gráfica para dar una aproximación del área de la región que está bajo la curva dada. Después, encuentre el área exacta.

49. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

50. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

51. $y = \operatorname{sen} x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

52. $y = \sec^2 x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

53–54 Evalúe la integral e interprétela como una diferencia de áreas. Ilustre con un trazo.

53. $\int_{-1}^2 x^3\,dx$

54. $\int_{\pi/6}^{2\pi} \cos x\,dx$

55–58 ¿Qué está mal en la ecuación?

55. $\int_{-2}^1 x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

56. $\int_{-1}^2 \frac{4}{x^3}\,dx = \left.-\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

57. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec\theta \tan\theta\,d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

58. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi} = 0$

59–63 Determine la derivada de cada una de las funciones siguientes.

59. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du$

$\left[\textit{Sugerencia: } \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_0^{3x} f(u)\,du\right]$

60. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t\operatorname{sen} t\,dt$

61. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$

62. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\,dt$

63. $y = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \ln(1 + 2v)\,dv$

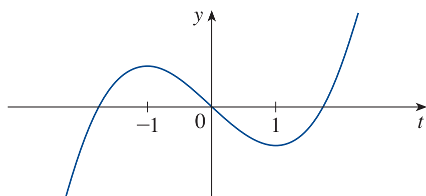
64. Si $f(x) = \int_0^x (1 - t^2)e^{t^2}\,dt$, ¿en qué intervalos es creciente f?

65. ¿En qué intervalo la curva

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2}\,dt$$

es cóncava hacia abajo?

66. Sea $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra. ¿Dónde es F cóncava hacia abajo?



67. Sea $F(x) = \int_2^x e^{t^2}\,dt$. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = F(x)$ en punto cuya coordenada x es 2.

68. Si $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\,dt$ y $g(y) = \int_3^y f(x)\,dx$, determine $g''(\pi/6)$.

69. Si $f(1) = 12$, f' es continua y $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, ¿cuál es el valor de $f(4)$?

70. La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.

(a) Demuestre que $\int_a^b e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

71. La función S de Fresnel se definió en el ejemplo 3, y en las figuras 7 y 8 se trazaron sus gráficas.

(a) ¿Para qué valores de x esta función tiene valores máximos locales?

(b) ¿Para qué intervalos esta función es cóncava hacia arriba?

SAC (c) Utilice una gráfica para resolver la ecuación redondeada a dos decimales.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0.2$$

SAC **72.** La **función integral sinusoidal**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

es importante en la ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero se sabe que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que se define $f(0) = 1$, y esto convierte a f en una función continua en todo su dominio].

(a) Trace la gráfica de Si.

(b) ¿Para qué valores de x tiene esta función valores máximos locales?

(c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

(d) ¿Esta función tiene asíntotas horizontales?

(e) Resuelva la ecuación siguiente redondeada a un decimal.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 1$$

73–74 Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

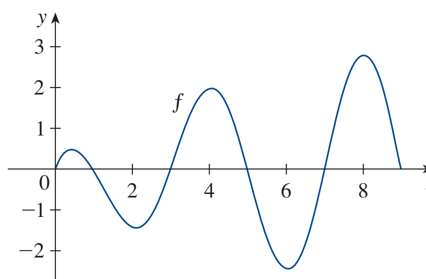
(a) ¿En qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?

(b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?

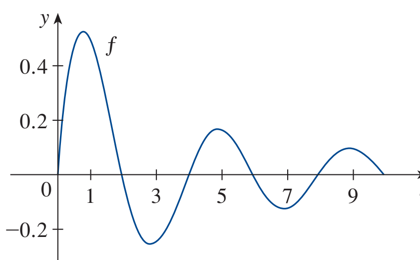
(c) ¿En qué intervalos g es cóncava hacia abajo?

(d) Trace la gráfica de g.

73.



74.



75–76 Evalúe el límite reconociéndolo primero como una suma de Riemann para una función definida en [0, 1].

75. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^4}{n^5} + \frac{i}{n^2}\right)$

76. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

77. Justifique (3) para el caso $h < 0$.

78. Si f es continua y g y h son funciones derivables, determine una fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

79. (a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leqslant 1.25$.

80. (a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduzca que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

81. Demuestre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0.1$$

comparando el integrando con una función más simple.

82. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

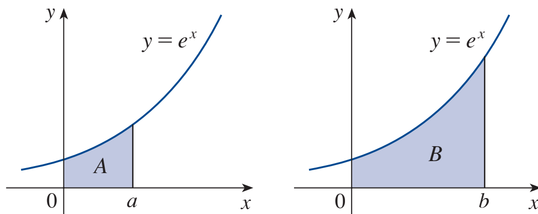
y
$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la correspondiente a $f(x)$.
(b) Trace las gráficas de f y g.
(c) ¿Dónde es derivable f? ¿Dónde es derivable g?

83. Determine una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para toda } x > 0$$

84. El área B es tres veces el área A. Exprese b en términos de a.



85. Una compañía manufacturera tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a una tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Ya que cada vez que la máquina se somete a una reparación se incurre en un costo fijo A, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones.

(a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\,ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación.
(b) Sea $C = C(t)$ dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

¿Qué representa C y por qué desearía la compañía minimizar C?
(c) Demuestre que C tiene un valor mínimo en los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

86. Una compañía de alta tecnología compra un nuevo sistema de computación cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará a una tasa $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento a razón de $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.

(a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.
(b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y
$$g(t) = \frac{Vt^2}{12{,}900} \qquad t > 0$$

Determine la duración del tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ equivalga al valor inicial V.
(c) Determine el valor mínimo absoluto de C sobre $[0, T]$.
(d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado del inciso (a) en este caso.

5.4 Integrales indefinidas y el teorema del cambio neto

Ya se vio en la sección 5.3 que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si se supone que puede encontrarse una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, se replantearon el TFC2, de una manera que facilita más la aplicación a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

Integrales indefinidas

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que, si f es continua, entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ puede determinarse evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Se necesita una notación conveniente para las antiderivadas que nos facilite el trabajo con ellas. Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas

y las integrales, por tradición se usa la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada de f y se llama **integral indefinida**. Así,

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)$$

Por ejemplo, puede escribir

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{ya que} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De este modo, considere la integral indefinida como la representante de toda una *familia* de funciones (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Distinga con cuidado entre las integrales definidas y las indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, mientras que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o una familia de funciones). La relación entre ellas la proporciona la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con una lista de antiderivadas de funciones. Por tanto, se presenta de nuevo la tabla de fórmulas de antiderivacion de la sección 4.9, más otras cuantas, en la notación de las integrales indefinidas. Cualesquiera de las fórmulas puede comprobarse al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx \tan x + C \qquad \text{ya que} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

1 Tabla de integrales indefinidas

$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$	$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int k\,dx = kx + C$	
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$

Recuerde del teorema 4.9.1, que la antiderivada más general *en un intervalo dado* se obtiene por la adición de una constante a una antiderivada particular. **Adopte la**

convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general, es válida solo en un intervalo. Así, escriba

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

con el entendido de que es válida en el intervalo $(0, \infty)$ o en el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se cumple a pesar del hecho de que la antiderivada general de la función $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, es

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

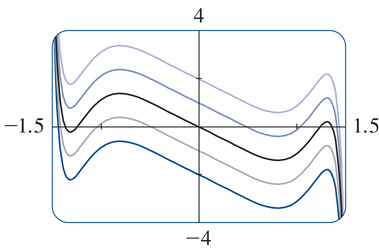


FIGURA 1

En la figura 1 tiene la gráfica de la integral indefinida del ejemplo 1 para varios valores de C. Aquí, el valor de C es la intersección con el eje y.

EJEMPLO 1 Encuentre la integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUCIÓN Si sigue la convención y la tabla 1, tiene

$$\begin{aligned}\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx &= 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx \\ &= 10\,\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C \\ &= 2x^5 - 2\tan x + C\end{aligned}$$

Le conviene comprobar esta respuesta derivándola. ■

EJEMPLO 2 Evalué $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUCIÓN Esta integral indefinida no es inmediata utilizando la tabla 1, por lo que debe aplicar las identidades trigonométricas para reescribir la función antes de integrar:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta &= \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta \\ &= \int \csc\theta\,\cot\theta\,d\theta = -\csc\theta + C\end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Al aplicar el TFC2 y la tabla 1, tiene

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx &= \frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\Big]_0^3 \\ &= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right) \\ &= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75\end{aligned}$$

Compare este cálculo con el del ejemplo 5.2.2(b). ■

La figura 2 es la gráfica del integrando del ejemplo 4. Sabe por la sección 5.2 que el valor de la integral se puede interpretar como un área neta: la suma de las áreas marcadas con un signo + menos el área marcada con un signo −.

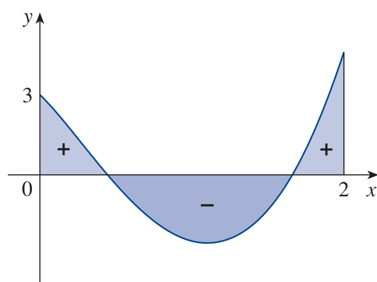


FIGURA 2

EJEMPLO 4 Determine $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$ e interprete el resultado en términos de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0$$

$$= -4 + 3\tan^{-1}2$$

Este es el valor exacto de la integral. Si desea una aproximación decimal, utilice una calculadora para obtener un valor aproximado de $\tan^{-1} 2$. Al hacerlo obtendrá

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx \approx -0.67855$$ ■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN En primer lugar, necesita escribir el integrando en una forma más sencilla, realizando la división:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\, dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\, dt$$

$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9$$

$$= \left(2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3} \cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$

$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$ ■

Aplicaciones

La parte 2 del teorema fundamental establece que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F' = f$, de forma que puede reescribirse la ecuación como

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Se sabe que $F'(x)$ representa la razón de cambio de $y = F(x)$ respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio en y cuando x cambia de a hacia b. [Observe que y podría, por ejemplo, incrementarse y luego decrecer para volver a incrementarse. Si bien y podría cambiar en

ambas *direcciones*, $F(b) - F(a)$ representa el cambio *neto* en y]. De manera que puede reformular verbalmente el TFC2 en los términos siguientes.

Teorema del cambio neto La integral de una razón de cambio es el cambio neto:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este principio puede aplicarse a todas las razones de cambio en las ciencias naturales y sociales que se discutieron en la sección 3.7. Enseguida se dan unos cuantos ejemplos de esta idea:

- Si $V(t)$ es el volumen de agua en una represa, en el instante t, entonces su derivada $V'(t)$ es la razón a la cual fluye el agua hacia esta, en el instante t. Por eso,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.

- Si $[C](t)$ es la concentración del producto de una reacción química en el instante t, entonces la rapidez de reacción es la derivada $d[C]/dt$. Así,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

es el cambio en la concentración de C, desde el instante t_1 al instante t_2.

- Si la masa de una varilla, medida desde el extremo izquierdo hasta un punto x, es $m(x)$, entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Por lo que,

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

es la masa del segmento de la varilla entre $x = a$ y $x = b$.

- Si la rapidez de crecimiento de una población es dn/dt, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

es el cambio neto en la población durante el período desde t_1 hasta t_2. (La población aumenta cuando ocurren nacimientos y disminuye cuando tienen lugar algunas muertes. El cambio neto toma en cuenta tanto nacimientos como muertes.)

- Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada $C'(x)$. Por lo que

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

es el incremento en el costo cuando la producción aumenta de x_1 unidades hasta x_2 unidades.

- Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con función de posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$, por lo que

2
$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

es el cambio neto de la posición, o *desplazamiento*, de la partícula durante el período desde t_1 hasta t_2. En la sección 5.1 se infirió que esto era verdadero para el

caso en que el objeto se mueve en la dirección positiva, pero ahora se ha demostrado que siempre es verdadero.

- Si quiere calcular la distancia recorrida durante el intervalo, tiene que considerar los intervalos cuando $v(t) \geqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la derecha) y también los intervalos cuando $v(t) \leqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la izquierda). En ambos casos la distancia se calcula al integrar $|v(t)|$, la rapidez. Por tanto,

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \text{distancia total recorrida}$$

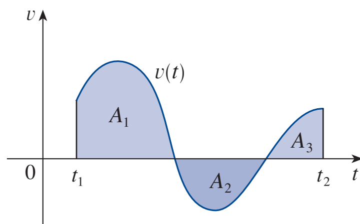


FIGURA 3

En la figura 3 se muestra cómo interpretar el desplazamiento y la distancia recorrida en términos de las áreas bajo una curva de velocidad.

$$\text{desplazamiento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{distancia} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = A_1 + A_2 + A_3$$

- La aceleración del objeto es $a(t) = v'(t)$, por lo que

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt = v(t_2) - v(t_1)$$

es el cambio en la velocidad, desde el instante t_1 hasta el instante t_2.

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).
(a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el período $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Determine la distancia recorrida durante este período.

SOLUCIÓN
(a) Por la ecuación 2, el desplazamiento es

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\, dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Esto significa que la partícula se desplaza 4.5 m hacia la izquierda.

(b) Observe que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$ y, por eso, $v(t) \leqslant 0$ sobre el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ en $[3, 4]$. Así que, a partir de la ecuación 3, la distancia recorrida es

Para integrar el valor absoluto de $v(t)$, use la propiedad 5 de las integrales de la sección 5.2 para dividir la integral en dos partes, una donde $v(t) \leqslant 0$ y otra donde $v(t) \geqslant 0$.

$$\int_1^4 |v(t)|\, dt = \int_1^3 [-v(t)]\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\, dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\, dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}$$ ■

EJEMPLO 7 En la figura 4 se muestra el consumo de energía eléctrica (potencia) en la ciudad de San Francisco un día del mes de septiembre (P se mide en megawatts y t en horas, a partir de la medianoche). Estime la energía que se utilizó ese día.

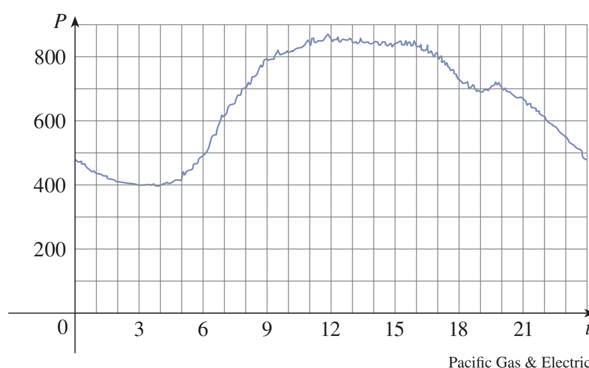


FIGURA 4

SOLUCIÓN La potencia es la razón de cambio de la energía: $P(t) = E'(t)$. De modo que, por el teorema del cambio neto,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía que se usó ese día. Haga una aproximación de la integral con la regla del punto medio con 12 subintervalos y $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t\\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850\\ &\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)\\ &= 15{,}840\end{aligned}$$

La energía usada fue aproximadamente de 15 840 megawatts-horas. ■

Una nota acerca de unidades

¿Cómo supo qué unidades usar para la energía en el ejemplo 7? La integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ se define como el límite de las sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\Delta t$. Ahora $P(t_i^*)$ se mide en megawatts y Δt en horas, de modo que su producto se mide en megawatts-horas. Lo mismo es verdadero para el límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.4 EJERCICIOS

1–4 Verifique mediante derivación que cada una de las fórmulas siguientes es correcta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2x + C$

3. $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$

4. $\displaystyle\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^2}(3bx - 2a)(a+bx)^{3/2} + C$

5–18 Obtenga las integrales indefinidas generales.

5. $\displaystyle\int (x^{1.3} + 7x^{2.5})\,dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^5}\,dx$

7. $\int \left(5 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^3\right) dx$

8. $\int \left(u^6 - 2u^5 - u^3 + \frac{2}{7}\right) du$

9. $\int v(v^2 + 2)^2\, dv$ **10.** $\int \sqrt{t}(t^2 + 3t + 2)\, dt$

11. $\int \frac{1 + \sqrt{x} + x}{x}\, dx$

12. $\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$

13. $\int (\csc^2 t - 2e^t)\, dt$ **14.** $\int \left(\frac{1 + r}{r}\right)^2 dr$

15. $\int (2 + \tan^2\theta)\, d\theta$ **16.** $\int \sec t\,(\sec t + \tan t)\, dt$

17. $\int 2^t(1 + 5^t)\, dt$ **18.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

19–20 Determine la integral indefinida general. Ilustre mediante una gráfica de varios miembros de la familia en la misma pantalla.

19. $\int \left(\cos x + \frac{1}{2}x\right) dx$ **20.** $\int (e^x - 2x^2)\, dx$

21–46 Evalúe cada una de las integrales siguientes.

21. $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\, dx$ **22.** $\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\, dx$

23. $\int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}t^3 - t\right) dt$

24. $\int_0^3 (1 + 6w^2 - 10w^4)\, dw$

25. $\int_0^2 (2x - 3)(4x^2 + 1)\, dx$ **26.** $\int_{-1}^1 t(1 - t)^2\, dt$

27. $\int_0^\pi (5e^x + 3 \operatorname{sen} x)\, dx$ **28.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$

29. $\int_1^4 \left(\frac{4 + 6u}{\sqrt{u}}\right) du$ **30.** $\int_0^1 \frac{4}{1 + p^2}\, dp$

31. $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$ **32.** $\int_1^4 \frac{\sqrt{y} - y}{y^2}\, dy$

33. $\int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx$ **34.** $\int_0^1 (5x - 5^x)\, dx$

35. $\int_0^1 (x^{10} + 10^x)\, dx$ **36.** $\int_0^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

37. $\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

38. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \tan^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

39. $\int_1^8 \frac{2 + t}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt$ **40.** $\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\operatorname{senh} x + \cosh x}\, dx$

41. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}$ **42.** $\int_1^2 \frac{(x - 1)^3}{x^2}\, dx$

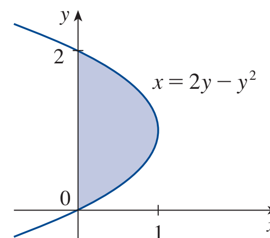
43. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\, dt$ **44.** $\int_0^2 |2x - 1|\, dx$

45. $\int_{-1}^2 \left(x - 2|x|\right) dx$ **46.** $\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx$

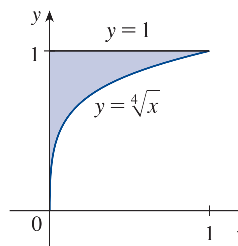
47. Use una gráfica para estimar las intersecciones con el eje x de la curva $y = 1 - 2x - 5x^4$. Luego utilice esta información para estimar el área de la región que se encuentra bajo la curva y arriba del eje x.

48. Repita el ejercicio 47 para la curva $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$.

49. El área de la región que se encuentra a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (el área sombreada de la figura) se expresa con la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$. (Gire su cabeza en sentido de las manecillas del reloj y considere a la región que se encuentra bajo la curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ a $y = 2$.) Encuentre el área de la región.



50. Las fronteras de la región sombreada son el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encuentre el área de esta región escribiendo x como función de y e integrando respecto a esta última (como en el ejercicio 49).



51. Si $w'(t)$ es la rapidez de crecimiento de un niño en kilos por año, ¿que representa $\int_5^{10} w'(t)\, dt$?

52. La corriente en un alambre se define como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Véase el ejemplo 3.7.3.) ¿Qué representa $\int_a^b I(t)\, dt$?

53. Si se fuga aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ galones por minuto en el instante t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\,dt$?

54. Una población de abejas se inicia con 100 ejemplares y se incrementa a razón de $n'(t)$ abejas por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

55. En la sección 4.7 se definió la función ingreso marginal $R'(x)$ como la derivada de la función ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Si $f(x)$ es la pendiente de un sendero a una distancia de x kilómetros del principio de este, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\,dx$?

57. Si x se mide en metros y $f(x)$ en newtons, ¿cuáles son las unidades para $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Si las unidades para x son pies y las unidades para $a(x)$ son libras por pie, ¿cuáles son las unidades para da/dx? ¿Qué unidades tiene $\int_2^8 a(x)\,dx$?

59–60 Se da la función velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre (a) el desplazamiento, y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado.

59. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

60. $v(t) = t^2 - 2t - 3, \quad 2 \leqslant t \leqslant 4$

61–62 Se da la función aceleración (en m/s^2) y la velocidad inicial para una partícula que se desplaza a lo largo de una recta. Encuentre (a) la velocidad en el instante t y (b) la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

---

63. Se da la densidad lineal de una varilla de longitud 4 m mediante $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa total de la varilla.

64. Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua con una rapidez de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.

65. La velocidad de un automóvil se leyó en su velocímetro a intervalos de 10 segundos y se registró en una tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia recorrida por el auto.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

66. Suponga que un volcán hace erupción y en la tabla se dan las lecturas de la cantidad de materiales sólidos expelidos hacia la atmósfera. El tiempo t se mide en segundos y las unidades para $r(t)$ son toneladas métricas por segundo.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

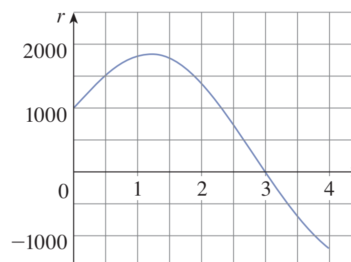
(a) Dé estimaciones superiores e inferiores para la cantidad $Q(6)$ de materiales expelidos una vez que transcurren seis segundos.
(b) Use la regla del punto medio para estimar $Q(6)$.

67. El costo marginal de fabricar x metros de cierta tela es

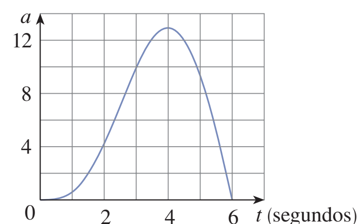
$$C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$$

(en dólares por metro). Encuentre el incremento en el costo si el nivel de producción aumenta de 2000 a 4000 metros.

68. Fluye agua hacia adentro y afuera de un tanque de almacenamiento. Se muestra una gráfica de la razón de cambio $r(t)$ del volumen de agua que hay en el tanque, en litros por día. Si la cantidad de agua que contiene el tanque en el instante $t = 0$ es 25 000 L, use la regla del punto medio para estimar la cantidad de agua cuatro días después.



69. Se muestra la gráfica de la aceleración $a(t)$ de un automóvil en m/s^2. Use la regla del punto medio para estimar el incremento en la velocidad del auto durante el intervalo de tiempo de seis segundos.



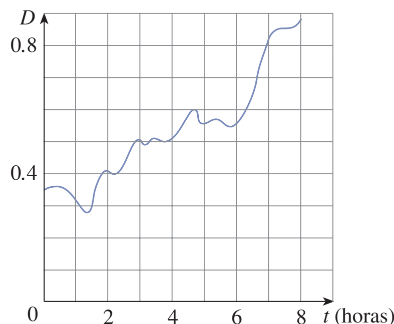
70. El lago Lanier de Georgia, EE. UU., es un embalse creado por la Buford Dam en el río de Chattahoochee. La tabla muestra la tasa de entrada de agua, en pies cúbicos por segundo, medida cada mañana a las 7:30 por el Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los EE. UU. Utilice la regla del punto medio para calcular la cantidad de agua que fluyó en el

lago Lanier, del 18 de julio de 2013, a las 7:30 al 26 de julio a las 7:30 AM.

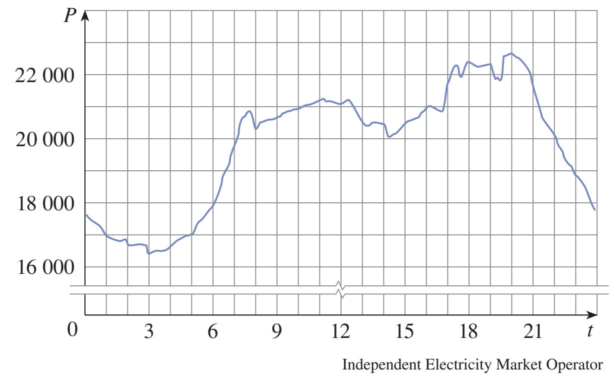
Día	Tasa de entrada (pies^3/s)
Julio 18	5275
Julio 19	6401
Julio 20	2554
Julio 21	4249
Julio 22	3016
Julio 23	3821
Julio 24	2462
Julio 25	2628
Julio 26	3003

71. Una población de bacterias es de 4000 al tiempo $t = 0$ y su rapidez de crecimiento es $1000 \cdot 2^t$ bacterias por hora después de t horas. ¿Cuál es la población después de una hora?

72. La figura siguiente muestra la gráfica del tráfico sobre un proveedor de servicios de internet en línea de datos T1 desde la medianoche hasta las 8:00 AM. D corresponde a los datos transmitidos, medidos en megabits por segundo. Utilice la regla del punto medio para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese período.



73. En la gráfica se muestra el consumo de energía en la provincia de Ontario, Canadá, para el 9 de diciembre de 2004 (P se mide en megawatts; t se mide en horas, comenzando a medianoche). Usando el hecho de que la potencia es la rapidez de cambio de la energía, estime la energía utilizada en ese día.



Independent Electricity Market Operator

74. El 7 de mayo de 1992 el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de tercer grado.

(b) Use el modelo del inciso (a) para estimar la altura alcanzada por el *Endeavour*, 125 segundos después del despegue.

Evento	Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	56.4
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	97.2
Acelerador a 89%	20	136.2
Acelerador a 67%	32	226.2
Acelerador a 104%	59	403.9
Presión dinámica máxima	62	440.4
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	1265.2

PROYECTO DE REDACCIÓN NEWTON, LEIBNIZ Y LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO

Algunas veces se lee que los inventores del cálculo fueron Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero las ideas básicas detrás de la integración fueron investigadas hace 2500 años por los antiguos griegos, como Eudoxo y Arquímedes, y Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow, (1630-1677) y otros fueron los pioneros en hallar rectas tangentes. Barrow, el profesor de Newton en Cambridge, fue el primero en comprender la relación inversa entre la derivación y la integración. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación, en la forma del teorema fundamental del cálculo, para convertir este último en una disciplina matemática sistemática. En este sentido es que se da a Newton y Leibniz el crédito por la invención del cálculo.

Lea acerca de las colaboraciones de estos hombres en una o más de las referencias que se proporcionan en las referencias y escriba un informe sobre uno de los tres temas siguientes.

Puede incluir detalles biográficos, pero el reporte debe concentrarse en una descripción, con cierto detalle, de los métodos y notaciones. En particular, consulte uno de los libros de consulta, en los cuales se dan extractos de las publicaciones originales de Newton y Leibniz, traducidas del latín al inglés.

- El papel de Newton en el desarrollo del cálculo.
- El papel de Leibniz en el desarrollo del cálculo.
- La controversia entre los seguidores de Newton y los de Leibniz sobre la prioridad en la invención del cálculo.

Referencias

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics*, Nueva York: John Wiley, 1987, capítulo 19.
2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nueva York: Dover, 1959, capítulo V.
3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, capítulos 8 y 9.
4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed., Nueva York: Saunders, 1990, capítulo 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York: Scribner's, 1974. Véase el artículo sobre Leibniz escrito por Joseph Hofmann, en el volumen VIII, y el artículo sobre Newton escrito por I. B. Cohen, en el volumen X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: Harper-Coffins, 1993, capítulo 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 17.

Libros de consulta

1. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987 capítulos 12 y 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, New York: Dover, 1959, capítulo V.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, 1200-1800, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969; capítulo V.

5.5 Regla de sustitución

Debido a la existencia del teorema fundamental, es importante disponer de técnicas para hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivacion no indican cómo evaluar integrales como

1 $$\int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

En la sección 3.10 se definieron las diferenciales. Si $u = f(x)$, entonces

$$du = f'(x)dx$$

SP Para determinar esta integral, use la estrategia para la resolución de problemas de *introducir algo extra*. En este caso, el "algo extra" es una nueva variable; cambie de una variable x a una variable u. Suponga que deja que u sea el radicando de la integral en (1), $u = 1 + x^2$. Entonces la diferencial de u es $du = 2x\, dx$. Observe que si la dx en la notación

para una integral se interpretará como una diferencial, entonces en (1) debe tenerse la diferencial $2x\,dx$, por lo que, desde un punto de vista formal y sin justificar este cálculo, podría escribir

2
$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

Pero ahora puede verificar que tiene la respuesta correcta aplicando la regla de la cadena para derivar la función final de la ecuación 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(1+x^2)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{1+x^2}$$

En general, este método funciona siempre que se tiene una integral que pueda escribirse en la forma $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$. Observe que si $F' = f$, entonces

3
$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\,g'(x)$$

Si hace el "cambio de variable" o la "sustitución" $u = g(x)$, entonces, a partir de la ecuación 3, tiene

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o, si se escribe $F' = f$ se obtiene

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Por tanto, se ha probado la regla siguiente:

4 Regla de sustitución Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Observe que la regla de sustitución para la integración se demostró aplicando la regla de la cadena para la derivación. También observe que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$, por lo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de (4) como diferenciales.

Por lo que la regla de sustitución establece: **es permitido operar con *dx* y *du* después de los signos de integral como si fueran diferenciales**.

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$.

SOLUCIÓN Haga la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. Por lo que, con $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$

y la regla de sustitución, se tiene

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx = \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du$$
$$= \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,u + C$$
$$= \tfrac{1}{4}\,\text{sen}(x^4 + 2) + C$$

Compruebe derivando la respuesta.

Observe que en la etapa final tuvo que regresar a la variable original x. ■

La idea detrás de la regla de sustitución es reemplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que sea función de x. Así, en el ejemplo 1 se reemplazó la integral $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$ con la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

El reto principal en la aplicación de la regla de sustitución es pensar en una sustitución apropiada. Procure elegir u como alguna función en el integrando cuya diferencial también este presente (excepto por un factor constante). Este fue el caso en el ejemplo 1. Si no es posible, escoja u como alguna parte complicada del integrando (tal vez la función interna de una función compuesta). Encuentre que la sustitución tiene algo de arte. No es raro que la conjetura sea errónea; si su primera sustitución no funciona, intente con otra.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \sqrt{2x + 1}\,dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Entonces $du = 2\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{2}du$. De esta forma, la regla de sustitución da

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

SOLUCIÓN 2 Otra posible sustitución es $u = \sqrt{2x + 1}$. Entonces

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{por lo que} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du$$

(U, observe que $u^2 = 2x + 1$, por lo que $2u\,du = 2\,dx$. Por tanto,

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int u\cdot u\,du = \int u^2\,du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$ ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Entonces $du = -8x\,dx$, de manera que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$$
$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$ ■

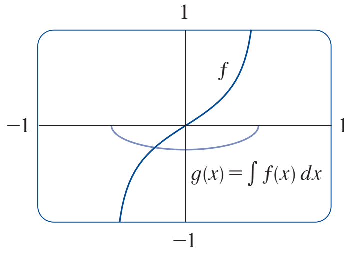


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2}$

La respuesta para el ejemplo 3 puede comprobarse por derivación; pero, en lugar de ello, hágalo de manera visual con una gráfica. En la figura 1 se usó una computadora para trazar las gráficas del integrando $f(x) = x/\sqrt{1 - 4x^2}$ y de su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2}$ (tomando el caso $C = 0$). Observe que $g(x)$ decrece cuando $f(x)$ es negativa, crece cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De modo que parece razonable, a partir de la evidencia gráfica, que g sea una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUCIÓN Si hace $u = 5x$, entonces $du = 5\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{5}\,du$. Por tanto,

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int e^u\,du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C \qquad \blacksquare$$

NOTA Con cierta experiencia, podría evaluar integrales como los ejemplos 1-4 sin pasar por la molestia de hacer una sustitución explícita. Reconociendo el patrón en la ecuación 3, donde el integrando en el lado izquierdo es el producto de la derivada de una función externa y la derivada de la función interna, podría trabajar el ejemplo 1 como sigue:

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx = \int \cos(x^4 + 2) \cdot x^3\,dx = \frac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2) \cdot (4x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos(x^4 + 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^4 + 2)\,dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(x^4 + 2) + C$$

Del mismo modo, la solución para el ejemplo 4 se podría expresar como:

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{d}{dx}(e^{5x})\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

El ejemplo siguiente, sin embargo, es más complicado y es aconsejable una sustitución explícita.

EJEMPLO 5 Determine $\int \sqrt{1 + x^2}\,x^5\,dx$.

SOLUCIÓN Una sustitución apropiada es más evidente si factoriza x^5 como $x^4 \cdot x$. Sea $u = 1 + x^2$. Entonces $du = 2x\,dx$, por lo que $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. También $x^2 = u - 1$, por lo que $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,x^5\,dx = \int \sqrt{1 + x^2}\,x^4 \cdot x\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u - 1)^2 \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Calcule $\int \tan x\,dx$.

SOLUCIÓN En primer lugar, escriba la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\,dx$$

Esto sugiere que debe sustituir $u = \cos x$, ya que $du = -\text{sen}\, x\, dx$ y, así, $\text{sen}\, x\, dx = -du$:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du$$
$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$ ■

Puesto que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln \sec x$, el resultado del ejemplo 6 también se puede escribir como

5
$$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$$

Integrales definidas

Cuando se evalúa una integral *definida* por sustitución, pueden aplicarse dos métodos. Un método es evaluar primero la integral indefinida y, luego utilizar el teorema fundamental. Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, se tiene

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx = \int \sqrt{2x+1}\, dx \bigg]_0^4$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2}$$
$$= \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

Esta regla dice que, cuando se usa una sustitución en una integral definida, se debe poner todo en términos de la nueva variable u, no solo x y dx, sino también los límites de integración. Los nuevos límites de integración son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

6 Regla de sustitución para integrales definidas Si g' es continua sobre $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. Entonces, por (3), $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, de modo que, de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental, se tiene

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica el TFC2 una segunda vez, también se tiene

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$ ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx$ usando (6).

SOLUCIÓN Si usa la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = \frac{1}{2}\, du$. Para encontrar los nuevos límites de integración, observe que

cuando $x = 0$, $u = 2(0) + 1 = 1$ y cuando $x = 4$, $u = 2(4) + 1 = 9$

Por tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que al usar (6) *no* se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evalúe la expresión en u en los valores apropiados de u. ■

La integral dada en el ejemplo 8 es una abreviación para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. Entonces $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -\frac{1}{5}\,du$. Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Por lo que

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}$$
$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Big]_{-2}^{-7}$$
$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$ ■

Puesto que la función $f(x) = (\ln x)/x$ en el ejemplo 9 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada en la figura 2.

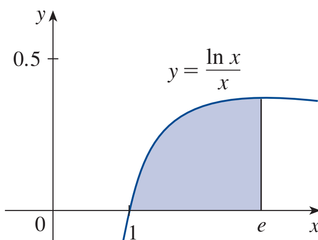


FIGURA 2

EJEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \ln x$ porque su diferencial $du = dx/x$ se presenta en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Por lo que

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$ ■

■ Simetría

En el teorema siguiente se usa la regla de sustitución para las integrales definidas (6) para simplificar el cálculo de integrales de funciones que tienen propiedades de simetría.

7 Integrales de funciones simétricas Suponga que f es continua en $[-a, a]$.

(a) Si es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Si es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN Separe la integral en dos:

8 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral del extremo derecho haga la sustitución $u = -x$. Entonces $du = -dx$, y cuando $x = -a$, $u = a$. Por tanto,

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)\,(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

con lo que la ecuación 8 resulta

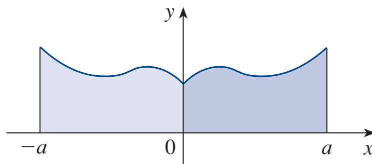
9 $$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$

(a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$, por lo que la ecuación 9 da

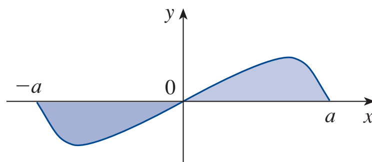
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$, por lo que la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$ ■



(a) f par, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



(b) f impar, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

FIGURA 3

La figura 3 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, el inciso (a) dice que el área bajo $y = f(x)$ desde $-a$ a a es el doble del área de 0 a a, debido a la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede expresar como el área arriba del eje x y bajo $y = f(x)$ menos el área bajo el eje x y arriba de la curva. Por esto, en el inciso (b) se evidencia que el área es 0 porque las áreas se eliminan.

EJEMPLO 10 Ya que $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y, por lo que,

$$\int_{-2}^2 (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$ ■

EJEMPLO 11 Ya que $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y, entonces,

$$\int_{-1}^1 \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$ ■

5.5 EJERCICIOS

1–6 Evalúe cada una de las integrales siguientes efectuando la sustitución dada.

1. $\int \cos 2x\,dx, \quad u = 2x$

2. $\int xe^{-x^2}\,dx, \quad u = -x^2$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta, \quad u = \operatorname{sen}\theta$

5. $\int \frac{x^3}{x^4 - 5}\,dx, \quad u = x^4 - 5$

6. $\int \sqrt{2t + 1}\,dt, \quad u = 2t + 1$

7–48 Evalúe cada una de las integrales indefinidas siguientes.

7. $\int x\sqrt{1 - x^2}\,dx$

8. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int \operatorname{sen} t\sqrt{1 + \cos t}\,dt$

11. $\int \cos(\pi t/2)\,dt$

12. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$

13. $\int \operatorname{sen} \pi t \, dt$

14. $\int y^2(4 - y^3)^{2/3} \, dy$

15. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta$

16. $\int e^{-5r} \, dr$

17. $\int \dfrac{e^u}{(1 - e^u)^2} \, du$

18. $\int \dfrac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

19. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} \, dx$

20. $\int \dfrac{z^2}{z^3 + 1} \, dz$

21. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

22. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x) \, dx$

23. $\int \cos^4\theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta$

24. $\int x\sqrt{x + 2} \, dx$

25. $\int e^x\sqrt{1 + e^x} \, dx$

26. $\int \dfrac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$

27. $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4 \, dx$

28. $\int e^{\cos t} \operatorname{sen} t \, dt$

29. $\int 5^t \operatorname{sen}(5^t) \, dt$

30. $\int \dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 x} \, dx$

31. $\int \dfrac{(\arctan x)^2}{x^2 + 1} \, dx$

32. $\int \dfrac{x}{x^2 + 4} \, dx$

33. $\int \cos(1 + 5t) \, dt$

34. $\int \dfrac{\cos(\pi/x)}{x^2} \, dx$

35. $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x \, dx$

36. $\int \dfrac{2^t}{2^t + 3} \, dt$

37. $\int \operatorname{senh}^2 x \cosh x \, dx$

38. $\int \dfrac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1 + \tan t}}$

39. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

40. $\int \operatorname{sen} t \sec^2(\cos t) \, dt$

41. $\int \cot x \, dx$

42. $\int \dfrac{\cos(\ln t)}{t} \, dt$

43. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \operatorname{sen}^{-1} x}$

44. $\int \dfrac{x}{1 + x^4} \, dx$

45. $\int \dfrac{1 + x}{1 + x^2} \, dx$

46. $\int x^2\sqrt{2 + x} \, dx$

47. $\int x(2x + 5)^8 \, dx$

48. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1} \, dx$

49–52 Evalúe cada una de las integrales indefinidas siguientes. Ilustre y compruebe que su respuesta sea razonable, dibujando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

49. $\int x(x^2 - 1)^3 \, dx$

50. $\int \tan^2\theta \sec^2\theta \, d\theta$

51. $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx$

52. $\int \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx$

53–73 Evalúe cada una de las integrales definidas siguientes.

53. $\int_0^1 \cos(\pi t/2) \, dt$

54. $\int_0^1 (3t - 1)^{50} \, dt$

55. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x} \, dx$

56. $\int_0^3 \dfrac{dx}{5x + 1}$

57. $\int_0^{\pi/6} \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} \, dt$

58. $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \csc^2\left(\tfrac{1}{2}t\right) dt$

59. $\int_1^2 \dfrac{e^{1/x}}{x^2} \, dx$

60. $\int_0^1 xe^{-x^2} \, dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x) \, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \, dx$

63. $\int_0^{13} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2} \, dx \quad (a > 0)$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \operatorname{sen} x \, dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x - 1} \, dx$

68. $\int_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

69. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^2 (x - 1)e^{(x-1)^2} \, dx$

71. $\int_0^1 \dfrac{e^z + 1}{e^z + z} \, dz$

72. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha) \, dt$

73. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

74. Verifique que $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}$ es una función impar y utilice este hecho para demostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x} \, dx \leqslant 1$$

75–76 Utilice una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra bajo la curva dada. Luego encuentre el área exacta.

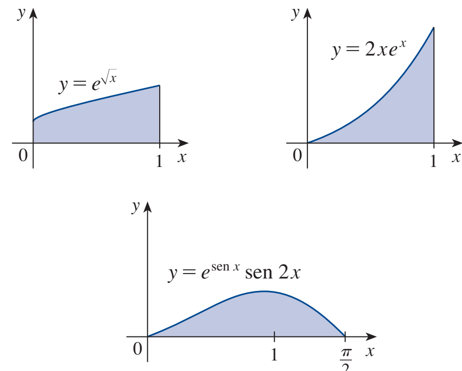
75. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

76. $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

77. Evalúe $\int_{-2}^{2} (x + 3)\sqrt{4 - x^2} \, dx$ expresándola como una suma de dos integrales e interprete una de ellas en términos de un área.

78. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4} \, dx$ haciendo una sustitución e interprete la integral resultante en términos de un área.

79. ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?



80. Un modelo de rapidez del metabolismo basal, en kcal/h de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18 \cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas a partir de las 5:00 AM. ¿Cuál es el metabolismo basal total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)\, dt$, en un período de 24 horas?

81. Un tanque de almacenamiento de petróleo se rompe en $t = 0$, y el petróleo se fuga del tanque con una rapidez de $r(t) = 100e^{-0.01t}$ litros por minuto. ¿Cuánto petróleo se escapa durante la primera hora?

82. Una población de bacterias inicia con 400 y crece con una rapidez de $r(t) = (450.268)e^{1.12567t}$ bacterias por hora. ¿Cuántas habrá después de tres horas?

83. La respiración es cíclica y un ciclo respiratorio completo, desde el principio de la inhalación hasta el final de la exhalación, requiere alrededor de 5 s. El gasto máximo de aire que entra en los pulmones es de más o menos 0.5 L/s. Esto explica en parte por qué a menudo se ha usado la función $f(t)= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi t/5)$ para modelar el gasto de aire hacia los pulmones. Úsela para determinar el volumen de aire inhalado en los pulmones en el tiempo t.

84. La tasa de crecimiento de una población de peces fue modelada por la ecuación

$$G(t) = \frac{60\,000e^{-0.6t}}{(1 + 5e^{-0.6t})^2}$$

donde t se mide en años y G en kilogramos por año. Si la biomasa era de 25 000 kg en el año 2000, ¿cuál es la biomasa prevista para el año 2020?

85. El tratamiento de diálisis elimina urea y otros productos de desecho de la sangre de un paciente desviando el flujo de sangre desde el exterior a través de una máquina llamada dializador. La tasa a la que se elimina urea de la sangre (en mg/min) está con frecuencia bien descrita por la ecuación

$$u(t) = \frac{r}{V} C_0 e^{-rt/V}$$

donde r es la tasa de flujo de sangre a través del dializador (en mL/min), V es el volumen de sangre (en mL) del paciente y C_0 es la cantidad de urea en la sangre (en mg) al tiempo $t = 0$. Evalúe la integral $\int_0^{30} u(t)\, dt$ e interprétela.

86. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. El índice de producción de estas calculadoras después de t semanas es

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Observe que la producción se aproxima a 5000 por semana a medida que avanza el tiempo, pero que la producción inicial es más baja debido a que los trabajadores no están familiarizados con las nuevas técnicas.) Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

87. Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$, encuentre $\int_0^2 f(2x)\, dx$.

88. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)\, dx$.

89. Si f es continua en $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $0 < a < b$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

90. Si f es continua en $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x + c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

91. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1 - x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1 - x)^a\, dx$$

92. Si f es continua sobre $[0, \pi]$, utilice la sustitución $u = \pi - x$ para demostrar que

$$\int_0^\pi xf(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx$$

93. Mediante el ejercicio 92, calcule la integral

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

94. (a) Si f es continua, demuestre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\, dx$$

(b) Utilice el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

5 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que use.
(b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.
(c) Si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

2. (a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua, de a a b.
(b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x) \geqslant 0$?
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos? Ilustre su respuesta con un diagrama.

3. Enuncie la regla del punto medio.

4. Enuncie las dos partes del teorema fundamental del cálculo.

5. (a) Enuncie el teorema del cambio neto.
(b) Si $r(t)$ es la rapidez con la que el agua fluye hacia un depósito, ¿qué representa $\int_{t_2}^{t_2} v(t)\,dt$?

6. Suponga que una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una recta con una velocidad $v(t)$, medida en metros por segundo, y una aceleración $a(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
(b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,|\,dt$?
(c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

7. (a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
(b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

8. Explique con exactitud qué significa el enunciado "la derivación y la integración son procesos inversos."

9. Enuncie la regla de sustitución. En la práctica, ¿cómo puede usarla?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f y g son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si f y g son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$, entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Si f' es continua en $[1, 3]$, entonces $\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$.

7. Si f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

8. Si f y g son derivables y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right)dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx$

11. Toda función continua tiene derivada.

12. Toda función continua tiene antiderivada.

13. $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_{3\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

14. Si $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

15. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x)$$

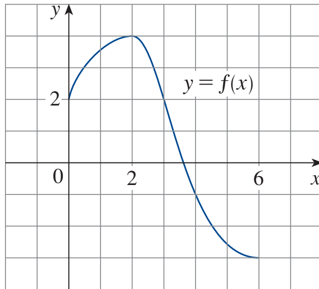
16. $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^3$ de 0 a 2.

17. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

18. Si f tiene una discontinuidad en 0, entonces $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ no existe.

EJERCICIOS

1. Utilice la gráfica dada de f para hallar la suma de Riemann con seis subintervalos. Tome los puntos muestra como (a) los puntos finales derechos y (b) los puntos medios. En cada caso dibuje un diagrama y explique que representa la suma de Riemann.



2. (a) Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

con cuatro subintervalos; tomando los puntos finales derechos como puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

(b) Utilice la definición de integral definida (con los puntos finales derechos) para calcular el valor de la integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx$$

(c) Utilice el teorema fundamental para comprobar su respuesta al inciso (b).

(d) Dibuje un diagrama para explicar el significado geométrico de la integral del inciso (b).

3. Evalúe

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretándola en términos de áreas.

4. Exprese

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \, \Delta x$$

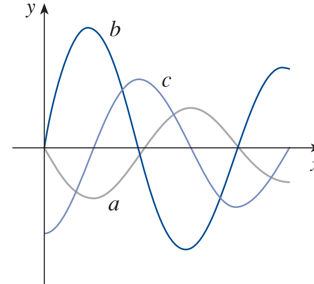
como una integral definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ y evalúe la integral.

5. Si $\int_2^9 f(x)\,dx = 12$ y $\int_6^9 f(x)\,dx = 5$, encuentre $\int_2^6 f(x)\,dx$.

SAC **6.** (a) Escriba $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como un límite de sumas de Riemann, tomando los puntos finales derechos como los puntos muestra. Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar la suma y calcular el límite.

(b) Use el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (a).

7. En la figura siguiente se muestran las gráficas de f, f', y $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfica y explique el porqué de su elección.

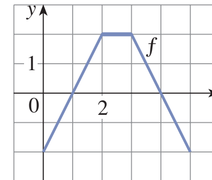


8. Evalúe:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\,dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9. La gráfica de f consiste de los tres segmentos de recta que se muestran. Si $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ determine $g(4)$ y $g'(4)$.



10. Si f es la función del ejercicio 9, determine $g''(4)$.

11–40 Evalúe la integral, si existe.

11. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

15. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

16. $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt[4]{u} + 1\right)^2 du$

17. $\displaystyle\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$

18. $\displaystyle\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

19. $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{dr}{(r - 1)^4}$

20. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

21. $\displaystyle\int_0^1 v^2 \cos(v^3)\,dv$

22. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \tan t}{2 + \cos t}\,dt$

24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

25. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

26. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{1+\cot x}\,dx$

29. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\,dt$

30. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \tan x \ln(\cos x)\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

36. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1+4x)\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta\,\tan\theta}{1+\sec\theta}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1+\tan t)^3 \sec^2 t\,dt$

39. $\displaystyle\int_0^3 |x^2-4|\,dx$

40. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\,dx$

41–42 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable trazando las gráficas de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$).

41. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

43. Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra bajo la curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Luego, encuentre el área exacta.

44. Grafique la función $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen} x$ y use esa gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Después, evalúe la integral para confirmar su conjetura.

45–50 Encuentre la derivada de la función.

45. $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$

46. $\displaystyle F(x) = \int_x^1 \sqrt{t+\operatorname{sen} t}\,dt$

47. $\displaystyle g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\,dt$

48. $\displaystyle g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt$

49. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$

50. $\displaystyle y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

51–52 Mediante la propiedad 8 de las integrales, estime el valor de cada una de las integrales siguientes.

51. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^2+3}\,dx$

52. $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x+1}\,dx$

53–56 Utilice las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad.

53. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$

54. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

55. $\displaystyle\int_0^1 e^x \cos x\,dx \leqslant e - 1$

56. $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx \leqslant \pi/4$

57. Use la regla del punto medio con $n = 6$ para obtener un valor aproximado de $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$.

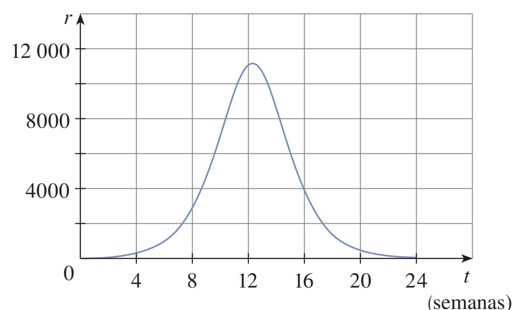
58. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con la función velocidad $v(t) = t^2 - t$, donde v se mide en metros por segundo. Encuentre (a) el desplazamiento y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

59. Sea $r(t)$ la tasa a la cual se consume el petróleo del mundo, donde t se mide en años y empieza en $t = 0$ el 1 de enero de 2000, y $r(t)$ se mide en barriles por año. ¿Qué representa $\int_0^8 r(t)\,dt$?

60. Se utilizó una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor en los tiempos dados en la tabla siguiente. Utilice la regla del punto medio para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos cinco segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

61. Una población de abejas mieleras aumentó en una tasa de $r(t)$ abejas por semana, donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla del punto medio junto con seis subintervalos para estimar el aumento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



62. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Evalúe $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ al interpretar la integral como una diferencia de áreas.

63. Si f es continua y $\int_0^2 f(x)\,dx$, evalúe $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen}\theta)\cos\theta\,d\theta$.

64. En la sección 5.3 se introdujo la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$. En su teoría de la difracción de las ondas luminosas, Fresnel también usó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

en su teoría de difracción de las ondas de luz.

(a) ¿En cuáles intervalos C es creciente?

(b) ¿En cuáles intervalos C es cóncava hacia arriba?

SAC (c) Use una gráfica para resolver la ecuación siguiente, con una aproximación de dos decimales:

$$\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt = 0.7$$

SAC (d) Trace la gráfica de C y S en la misma pantalla. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

65. Estime el valor del número c tal que el área bajo la curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es igual a 1.

66. Suponga que en un inicio la temperatura en una varilla larga y delgada que se encuentra a lo largo del eje x es $C/(2a)$ si $|x| \leq a$ y 0 si $|x| > a$. Se puede demostrar que si la difusión de calor de la varilla es k, entonces la temperatura de la varilla en el punto x en el instante t, es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du$$

Para determinar la distribución de temperaturas que se produce a partir de un punto caliente inicial concentrado en el origen, necesita calcular $\lim_{a \to 0} T(x, t)$. Use la regla de L'Hôpital para encontrar este límite.

67. Si f es una función continua tal que

$$\int_1^x f(t)\, dt = (x - 1)e^{2x} + \int_1^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para toda x, encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

68. Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ y h'' es continua en todo su dominio. Evalúe $\int_1^2 h''(u)\, du$.

69. Si f' es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$2\int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

70. Determine

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$$

71. Si f es continua en $[0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

72. Evalúe

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$$

73. Suponga que f es continua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ y $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Determine el valor de la integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$.

Problemas adicionales

Antes de ver la solución del ejemplo siguiente, cúbrala e intente resolver el problema por usted mismo.

EJEMPLO Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\,dt\right)$.

SOLUCIÓN Empiece por tener un panorama preliminar de los ingredientes de la función. ¿Qué sucede con el primer factor, $x/(x-3)$, cuando x tiende a 3? El numerador tiende a 3 y el denominador tiende a 0, por lo que tiene

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^+ \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{x-3} \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^-$$

El segundo factor tiende a $\int_3^3 (\text{sen}\, t)/t\, dt$, que es 0. No resulta claro qué sucede a la función como un todo. (Uno de los factores aumenta, y el otro disminuye.) Por lo que, ¿cómo procederá?

SP Los principios para la resolución de problemas se analizan en la página 71.

Uno de los principios para la resolución de problemas es intentar *reconocer algo conocido*. ¿Existe una parte de la función que recuerde algo que ya ha visto? Bien, la integral

$$\int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\,dt$$

tiene a x como su límite superior de integración, y ese tipo de integral se presenta en la parte 1 del teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Esto sugiere que podría relacionarse con la derivación.

Una vez que empiece a pensar en la derivación, el denominador $(x-3)$ le recuerda algo más que debe serle conocido: una de las formas de la definición de la derivada en el capítulo 2 es

$$F'(a) = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

y con $a = 3$ esto se convierte en

$$F'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$

De modo que, ¿cuál es la función F en esta situación? Observe que si define

$$F(x) = \int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\,dt$$

entonces $F(3) = 0$. ¿Qué se puede decir acerca del factor x en el numerador? Esto es una situación irregular, de modo que sáquelo como factor y una el cálculo:

Otro método es usar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\,dt\right) = \lim_{x\to 3} x \cdot \lim_{x\to 3}\frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\,dt}{x-3} = 3\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$

$$= 3F'(3) = 3\,\frac{\text{sen}\, 3}{3} = \text{sen}\, 3 \qquad \text{(TFC1)}$$

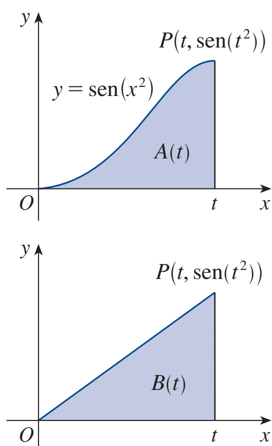
■

Problemas

1. Si $x\, \text{sen}\, \pi x = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$, donde f es una función continua, encuentre $f(4)$.
2. Encuentre el valor mínimo del área bajo la curva $y = x + 1/x$ de $x = a$ a $x = a + 1.5$, para toda $a > 0$.

3. Si $\int_0^4 e^{(x-2)^4}\,dx = k$, encuentre el valor de $\int_0^4 xe^{(x-2)^4}\,dx$.

4. (a) Trace la gráfica de varios miembros de la familia de funciones $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ y vea las regiones limitadas por estas curvas y el eje x. Haga una conjetura en cuanto a cómo se relacionan las áreas de estas regiones.
(b) Pruebe su conjetura del inciso (a).
(c) Vea de nuevo las gráficas del inciso (a) y úselas para trazar la curva descrita por los vértices (los puntos más altos) de la familia de funciones. ¿Puede conjeturar qué tipo de curva es esta?
(d) Determine una ecuación para la curva que trazó en el inciso (c).



FIGURAS PARA EL PROBLEMA 8

5. Si $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$, donde $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\,dt$, determine $f'(\pi/2)$.

6. Si $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, determine $f'(x)$.

7. Evalúe el $\lim_{x\to 0} (1/x) \int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\,dt$. [Suponga que el integrando se define como continuo en $t = 0$; véase el ejercicio 5.3.72.]

8. En la figura pueden verse dos regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ de 0 a t, y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O, P y $(t, 0)$. Calcule $\lim_{t\to 0^+} [A(t)/B(t)]$.

9. Encuentre el intervalo $[a, b]$ para el cual el valor de la integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\,dx$ es un máximo.

10. Utilice una integral para estimar la suma $\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i}$.

11. (a) Evalúe $\int_0^n [\![x]\!]\,dx$, donde n es un entero positivo.
(b) Evalúe $\int_a^b [\![x]\!]\,dx$, donde a y b son números reales con $0 \leqslant a < b$.

12. Encuentre $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}\,du \right) dt$.

13. Suponga que los coeficientes de la polinomial cúbica $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfacen la ecuación

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$

Demuestre que la ecuación $P(x) = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1. ¿Puede generalizar este resultado para un polinomio de grado n-ésimo?

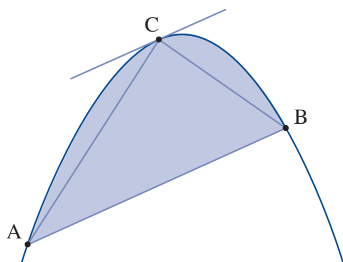


FIGURA PARA EL PROBLEMA 16

14. En un evaporador se usa un disco circular y se hace girar en un plano vertical. Si debe estar parcialmente sumergido en el líquido de modo que se maximice el área humedecida expuesta del disco, demuestre que el centro debe hallarse a una altura $r/\sqrt{1+\pi^2}$ arriba de la superficie del líquido.

15. Demuestre que si f es continua, entonces $\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt \right) du$.

16. La figura muestra un segmento parabólico, es decir, una parte de una parábola cortada por una cuerda AB. También se muestra un punto C en la parábola con la propiedad de que la recta tangente a C es paralela a la cuerda AB. Arquímedes demostró que el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ veces del área del triángulo inscrito ABC. Verifique los resultados de Arquímedes de la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = x + 2$.

17. Dado el punto (a, b) en el primer cuadrante, encuentre la parábola que abre hacia abajo que pasa por el punto (a, b) y por el origen tal que el área bajo la parábola es mínima.

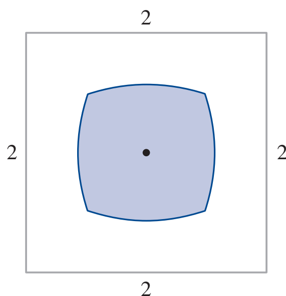


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18

18. En la figura se muestra una región que consta de todos los puntos dentro de un cuadrado que están más cerca del centro que de los lados del cuadrado. Encuentre el área de la región.

19. Evalúe $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$.

20. Para cualquier número c, sea $f_c(x)$ el más pequeño de los dos números $(x - c)^2$ y $(x - c - 2)^2$. Entonces, defina $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\,dx$. Encuentre los valores máximo y mínimo de $g(c)$ si $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

6 Aplicaciones de la integral



© Richard Paul Kane / Shutterstock.com

Cuando un bate golpea una pelota de béisbol, la colisión dura aproximadamente una milésima de segundo. En el proyecto en la página 464, usted utilizará el cálculo para encontrar la fuerza promedio sobre el bate cuando esto sucede. También se exploran algunas otras aplicaciones del cálculo para el juego de béisbol.

EN ESTE CAPÍTULO SE EXPLORAN algunas de las aplicaciones de la integral definida utilizándola para calcular áreas entre las curvas, los volúmenes de sólidos y el trabajo realizado por una fuerza variable. El tema común es el método general, que es similar al que se utiliza para encontrar áreas bajo las curvas: se descompone una cantidad Q en un gran número de pequeñas partes. Después se aproxima cada una de estas partes por una cantidad de la forma $f(x_i^*)\Delta x$ y así se aproxima Q mediante una suma de Riemann. Luego, se toma el límite y se expresa Q como una integral. Por último, se evalúa la integral mediante el teorema fundamental del cálculo o la regla del punto medio.

6.1 Áreas entre curvas

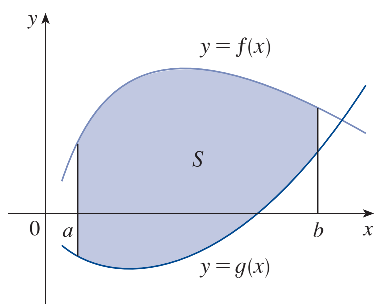


FIGURA 1

$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,$
$g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

En el capítulo 5 se definen y calculan áreas de regiones que están bajo las gráficas de funciones. Aquí se usan integrales para calcular las áreas de regiones que quedan entre las gráficas de dos funciones.

Considere la región S que se ubica entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$. (Véase la figura 1.)

De la misma manera, como se hizo para áreas bajo las curvas en la sección 5.1, se divide S en n franjas con igual ancho, y luego se calcula el valor aproximado de la i-ésima franja mediante un rectángulo de base Δx y altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Véase la figura 2. Si lo desea, se podrían tomar todos los puntos muestra como puntos finales derechos, en cuyo caso $x_i^* = x_i$). Por tanto, la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

es una aproximación a lo que se intuye que es el área de S.

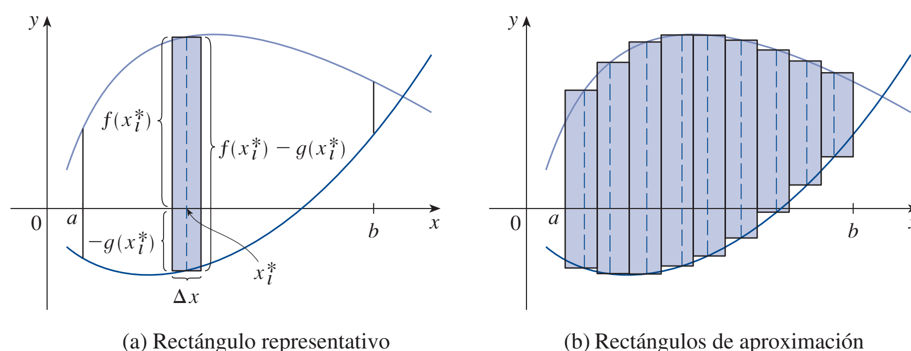


FIGURA 2 (a) Rectángulo representativo (b) Rectángulos de aproximación

Esta aproximación resulta ser cada vez mejor cuando $n \to \infty$. Por tanto, se define el **área** A de S como el valor límite de la suma de áreas de estos rectángulos de aproximación.

1
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

Se identifica el límite en (1) como la integral definida de $f - g$; por tanto, se tiene la fórmula siguiente para el área.

2 El área A de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$, es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Observe que en el caso especial donde $g(x) = 0$, S es la región bajo la gráfica de f, y la definición general del área (1) se reduce a la definición anterior (definición 5.1.2).

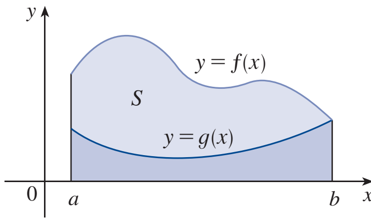


FIGURA 3

$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

En el caso donde f y g son positivas, se puede ver en la figura 3 por qué (2) es cierta:

$$A = [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)]$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área de la región acotada por arriba por $y = e^x$, por abajo por $y = x$ y acotada por los lados por $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 4. La curva frontera superior es $y = e^x$, y la curva frontera inferior es $y = x$. De este modo se usa la fórmula del área (2) con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ y $b = 1$.

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$ ■

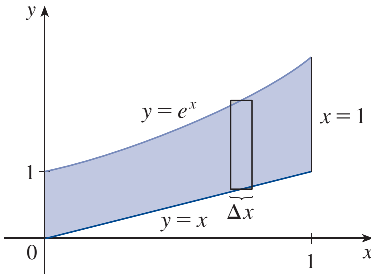


FIGURA 4

En la figura 4 se toma un rectángulo representativo de aproximación cuyo ancho es Δx como recordatorio del procedimiento por medio del cual se define el área (1). En general, cuando se plantea una integral para determinar un área, es útil trazar la región para identificar la curva superior y_T, la curva inferior y_B y un rectángulo representativo de aproximación como en la figura 5. Por consiguiente, el área de un rectángulo es $(y_T - y_B)\,\Delta x$ y la ecuación

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\,dx$$

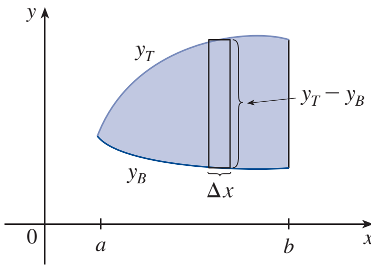


FIGURA 5

resume el procedimiento de sumar (en el sentido de límite) las áreas de todos los rectángulos representativos.

Observe que, en la figura 5, el límite o frontera izquierda se reduce a un punto, mientras que, en la figura 3, la frontera derecha se reduce a un punto. En el ejemplo siguiente, ambos límites se reducen a un punto, de modo que el primer paso es determinar a y b.

EJEMPLO 2 Calcule el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Primero se determinan los puntos de intersección de las parábolas resolviendo en forma simultánea sus ecuaciones. El resultado es $x^2 = 2x - x^2$, o $2x^2 - 2x = 0$. Por lo que, $2x(x - 1) = 0$, de modo que $x = 0$ o 1. Los puntos de intersección son (0, 0) y (1, 1).

En la figura 6, se ve que los límites superior e inferior son

$$y_T = 2x - x^2 \qquad \text{y} \qquad y_B = x^2$$

El área de un rectángulo representativo es

$$(y_T - y_B)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

y la región se encuentra entre $x = 0$ y $x = 1$. Por lo que el área total es

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$ ■

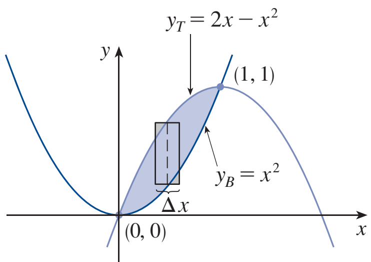


FIGURA 6

Algunas veces es difícil, o hasta imposible, determinar los puntos de intersección exactos de las dos curvas. Como se muestra en el ejemplo siguiente, con la ayuda de una calculadora graficadora o de una computadora, para encontrar los valores aproximados de los puntos de intersección, y luego proceder como antes.

EJEMPLO 3 Calcule el área aproximada de la región acotada por las curvas $y = x/\sqrt{x^2+1}$ y $y = x^4 - x$.

SOLUCIÓN Si se tratara de determinar exactamente los puntos de intersección, se tendría que resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x$$

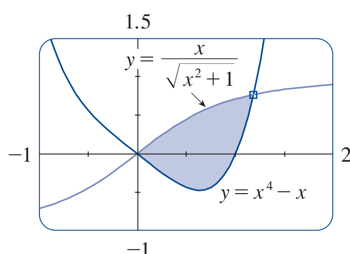


FIGURA 7

Esta ecuación parece muy difícil de resolver de manera exacta (de hecho, es imposible), por lo que se recurre a un dispositivo graficador para trazar las gráficas de las dos curvas de la figura 7. Un punto de intersección está en el origen. Haciendo un acercamiento con el zoom en el otro punto de intersección se encuentra que $x \approx 1.18$. (Si se requiere mayor precisión, se podría aplicar el método de Newton o resolver numéricamente en el dispositivo graficador.) Por lo que una aproximación al área entre las curvas es

$$A \approx \int_0^{1.18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar el primer término se utiliza la sustitución $u = x^2 + 1$. Entonces, $du = 2x\,dx$, y cuando $x = 1.18$, se tiene $u \approx 2.39$; cuando $x = 0$, $u = 1$. Por lo que

$$\begin{aligned} A &\approx \tfrac{1}{2}\int_1^{2.39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18} (x^4 - x)\,dx \\ &= \sqrt{u}\Big]_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1.18} \\ &= \sqrt{2.39} - 1 - \frac{(1.18)^5}{5} + \frac{(1.18)^2}{2} \\ &\approx 0.785 \end{aligned}$$

■

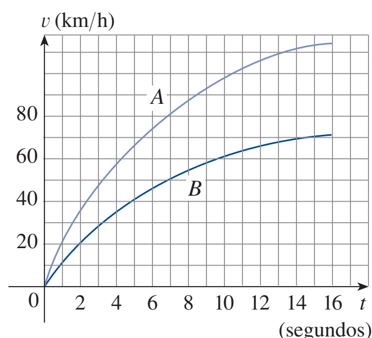


FIGURA 8

EJEMPLO 4 En la figura 8 se muestran las curvas de velocidad para dos automóviles, A y B, que parten juntos y se desplazan a lo largo de la misma carretera. ¿Qué representa el área entre las curvas? Aplique la regla del punto medio para estimarla.

SOLUCIÓN Se sabe de la sección 5.4, que el área bajo la curva A de la velocidad representa la distancia que recorre el vehículo A durante los primeros 16 segundos. Del mismo modo, el área bajo la curva B es la distancia que recorre el automóvil B durante ese tiempo. Por lo que, el área entre estas curvas, que es la diferencia de las áreas bajo las curvas, es la distancia entre los vehículos después de 16 segundos. Se leen las velocidades de la gráfica y se convierten a metros por segundo ($1\text{ km/h} = \frac{1000}{3600}\text{ m/s}$).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	10.4	16.5	20.4	23.2	25.6	27.1	28.0	29.0
v_B	0	6.4	10.4	13.4	15.5	17.1	18.3	19.2	19.8
$v_A - v_B$	0	4.0	6.1	7.0	7.7	8.5	8.8	8.8	9.2

Se utiliza la regla del punto medio con $n = 4$ intervalos, tal que $\Delta t = 4$. Los puntos medios de los intervalos son $\bar{t}_1 = 2$, $\bar{t}_2 = 6$, $\bar{t}_3 = 10$ y $\bar{t}_4 = 14$. Se estima la distancia entre los automóviles después de 16 segundos como se indica a continuación:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\, dt \approx \Delta t\,[4.0 + 7.0 + 8.5 + 8.8]$$

$$= 4(28.3) = 113.2 \text{ m}$$

EJEMPLO 5 La figura 9 es un ejemplo de una *curva de la patogénesis* de una infección de sarampión. Esta muestra cómo se desarrolla la enfermedad en un individuo sin inmunidad después de que el virus del sarampión se propaga al torrente sanguíneo desde el tracto respiratorio.

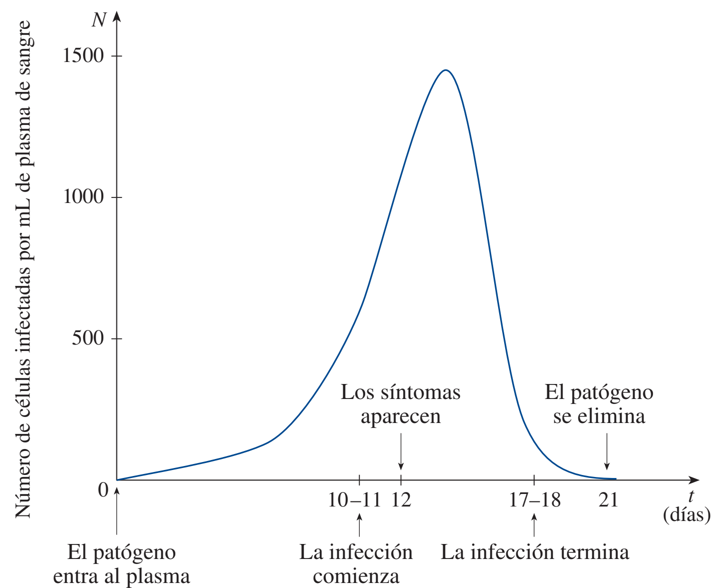


FIGURA 9

Curva de la patogénesis del sarampión

Fuente: J. M. Heffernan *et al*., "An In-Host Model of Acute Infection: Measles as a Case Study," *Theoretical Population Biology* 73 (2008): 134–147.

El paciente se vuelve contagioso cuando la concentración de las células infectadas es suficientemente grande y, él o ella, permanece infectado hasta que el sistema inmune logra controlar la infección para prevenir más transmisión. Sin embargo, los síntomas no aparecen hasta que la "cantidad de infección" alcanza un umbral determinado. La cantidad de infección necesaria para desarrollar síntomas depende tanto de la concentración de las células infectadas como del tiempo y es igual al área bajo la curva de la patogénesis hasta que aparecen los síntomas. (Véase el ejercicio 5.1.19.)

(a) La curva de patogénesis en la figura 9 se ha modelado con $f(t) = -t(t - 21)(t + 1)$. Si la infección comienza el día $t_1 = 10$ y termina el día $t_2 = 18$, ¿cuáles son los niveles de concentración correspondientes de las células infectadas?

(b) El *nivel de infección* para una persona infectada es el área entre $N = f(t)$ y la recta que pasa por los puntos $P_1(t_1, f(t_1))$ y $P_2(t_2, f(t_2))$, medida en (células/mL) · días. (Véase la figura 10.) Calcule el nivel de infección para este paciente en particular.

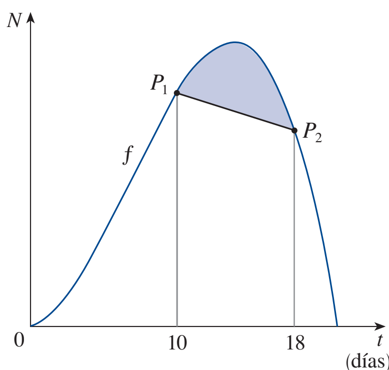


FIGURA 10

SOLUCIÓN

(a) La infección comienza cuando la concentración alcanza $f(10) = 1210$ células/mL y termina cuando la concentración se reduce a $f(18) = 1026$ células/mL.

(b) La recta que pasa por P_1 y P_2 tiene una pendiente $\frac{1026 - 1210}{18 - 10} = -\frac{184}{8} = -23$ y la ecuación $N - 1210 = -23(t - 10) \Longleftrightarrow N = -23t + 1440$. El área entre f y esta recta es

$$\int_{10}^{18} [f(t) - (-23t + 1440)]\,dt = \int_{10}^{18} (-t^3 + 20t^2 + 21t + 23t - 1440)\,dt$$

$$= \int_{10}^{18} (-t^3 + 20t^2 + 44t - 1440)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^4}{4} + 20\,\frac{t^3}{3} + 44\,\frac{t^2}{2} - 1440t\right]_{10}^{18}$$

$$= -6156 - (-8033\tfrac{1}{3}) \approx 1877$$

Por tanto el grado de infección para este paciente es de 1877 (células/mL) · días. ■

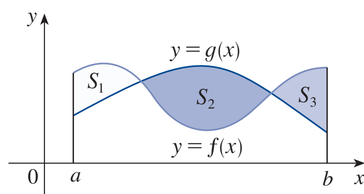


FIGURA 11

Si se pide determinar el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ donde $f(x) \geqslant g(x)$ para algunos valores de x, pero $g(x) \geqslant f(x)$ para otros valores de x, entonces se divide la región dada S en varias regiones $S_1, S_2, \ldots$ con áreas $A_1, A_2, \ldots$ como se muestra en la figura 11. Después se define el área de la región S como la suma de las áreas de las regiones más pequeñas $S_1, S_2, \ldots$, es decir, $A = A_1 + A_2 + \ldots$. Ya que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{cuando} \quad f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{cuando} \quad g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$

se tiene la expresión siguiente para A.

3 El área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Al evaluar la integral en (3), sin embargo, aún se debe dividir en integrales que corresponderían a $A_1, A_2, \ldots$.

EJEMPLO 6 Calcule el área de la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Los puntos de intersección se presentan cuando $\operatorname{sen} x = \cos x$, es decir, cuando $x = \pi/4$ (ya que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$). En la figura 12 se presenta la gráfica de la región.

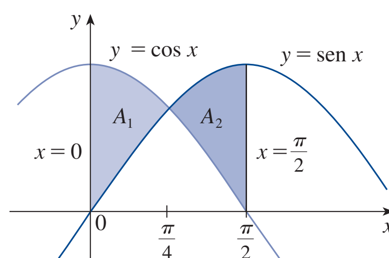


FIGURA 12

Observe que $\cos x \geqslant \operatorname{sen} x$ cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, pero $\operatorname{sen} x \geqslant \cos x$ cuando $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Por tanto, el área requerida es

$$A = \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\, dx = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$$

$$= \Big[\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{2} - 2$$

En este ejemplo en particular se podría haber ahorrado algo de trabajo observando que la región es simétrica respecto a $x = \pi/4$, por lo que

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx$$ ■

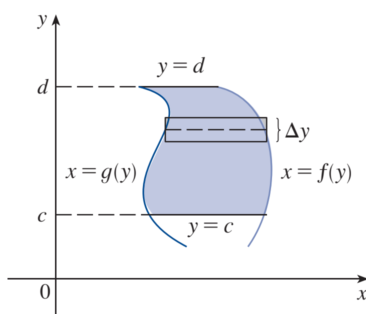


FIGURA 13

Algunas regiones se manejan mejor si se considera a x como una función de y. Si una región está acotada con curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (véase la figura 13), entonces su área es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

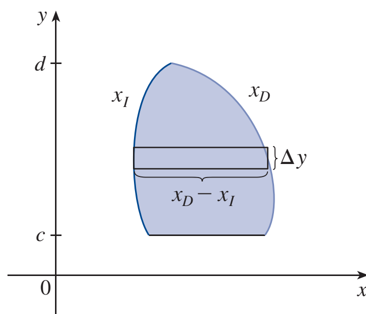


FIGURA 14

Si se escribe x_D para el límite derecho y x_I para el límite izquierdo, entonces, de acuerdo con la figura 14, se tiene

$$A = \int_c^d (x_D - x_I)\, dy$$

He aquí un rectángulo representativo de aproximación con dimensiones $x_D - x_L$ y Δy.

EJEMPLO 7 Calcule el área definida mediante la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN Al resolver las dos ecuaciones, los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. Al resolver la ecuación de la parábola y determinar x se observa de la figura 15, las curvas que frontera a la izquierda y a la derecha son

$$x_I = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad x_D = y + 1$$

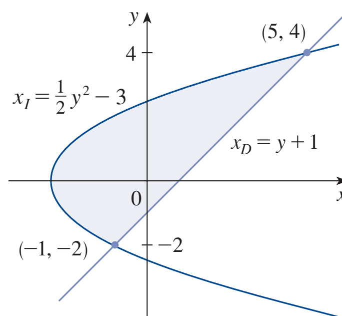


FIGURA 15

Es necesario integrar entre los valores de y adecuados, $y = -2$ y $y = 4$; por tanto

$$A = \int_{-2}^{4} (x_D - x_I)\,dy = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Bigg]_{-2}^{4}$$

$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18$$

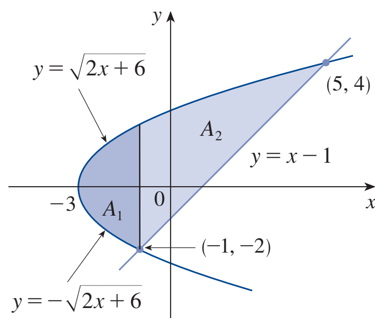


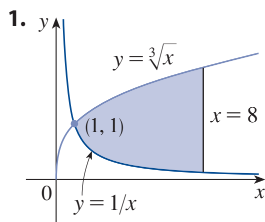
FIGURA 16

NOTA Se pudo haber calculado el área del ejemplo 7 integrando respecto a x; en lugar de y, pero el cálculo es más complicado, ya que la curva frontera inferior consiste de dos curvas diferentes, esto significaría dividir la región en dos y determinar las áreas A_1 y A_2 de la figura 16. El método aplicado en el ejemplo 6 es *mucho* más fácil.

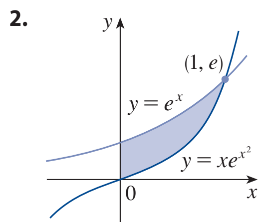
6.1 EJERCICIOS

1–4 Determine el área de cada una de las regiones sombreadas.

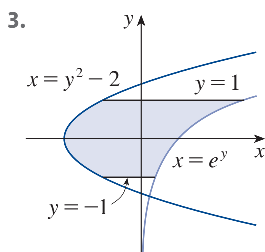
1.



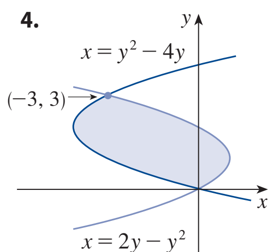
2.



3.



4.



5–12 Dibuje las regiones encerradas por cada una de las curvas dadas. Decida si integra respecto a x o y. Trace un rectángulo representativo de aproximación e indique su altura y su ancho. Luego determine el área de la región.

5. $y = x, \quad y = x^2$

6. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

7. $y = (x-2)^2, \quad y = x$

8. $y = x^2 - 4x, \quad y = 2x$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 2x/\pi, \quad x \geqslant 0$

11. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

12. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

13–28 Trace cada una de las regiones encerradas y su área.

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

15. $y = \sec^2 x, \quad y = 8\cos x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

16. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

18. $y = \sqrt{x-1}, \quad x - y = 1$

19. $y = \cos \pi x, \quad y = 4x^2 - 1$

20. $x = y^4, \quad y = \sqrt{2-x}, \quad y = 0$

21. $y = \tan x, \quad y = 2\operatorname{sen} x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

22. $y = x^3, \quad y = x$

23. $y = \sqrt[3]{2x}, \quad y = \frac{1}{8}x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 6$

24. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

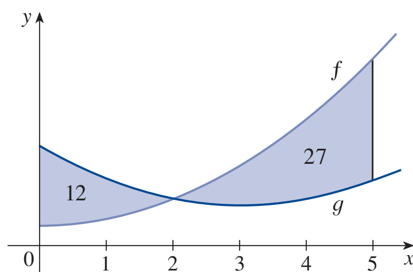
25. $y = x^4, \quad y = 2 - |x|$

26. $y = \operatorname{senh} x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 0, \quad x = 2$

27. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x = 9$

28. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 2x^2, \quad x + y = 3, \quad x \geqslant 0$

29. Se muestran las gráficas de dos funciones con las áreas de las regiones entre las dos curvas indicadas.
(a) ¿Cuál es el área total entre las curvas $0 \leqslant x \leqslant 5$?
(b) ¿Cuál es el valor de $\int_0^5 [f(x) - g(x)]\,dx$?



30–32 Trace la región encerrada entre las curvas dadas y encuentre su área.

30. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad y = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad x \geqslant 0$

31. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{x^2}{1 + x^3}$

32. $y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

33–34 Utilice el cálculo para encontrar el área del triángulo con los vértices dados.

33. $(0, 5), \quad (2, -2), \quad (5, 1)$

34. $(2, 0), \quad (0, 2), \quad (-1, 1)$

35–36 Evalúe la integral e interprétela como el área de una región. Trace la región.

35. $\int_0^4 |\sqrt{x + 2} - x|\,dx$ **36.** $\int_{-1}^1 |3^x - 2^x|\,dx$

37–40 Por medio de una gráfica, encuentre un valor aproximado de las coordenadas x de los puntos de intersección entre las curvas dadas. Luego determine (en forma aproximada) el área de la región acotada entre las curvas.

37. $y = x\,\text{sen}(x^2), \quad y = x^4, \quad x \geqslant 0$

38. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

39. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

40. $y = 1.3^x, \quad y = 2\sqrt{x}$

41–44 Trace la gráfica de cada una de las regiones entre las curvas dadas y utilice su calculadora para medir el área redondeada a cinco decimales.

41. $y = \dfrac{2}{1 + x^4}, \quad y = x^2$ **42.** $y = e^{1-x^2}, \quad y = x^4$

43. $y = \tan^2 x, \quad y = \sqrt{x}$ **44.** $y = \cos x, \quad y = x + 2\,\text{sen}^4 x$

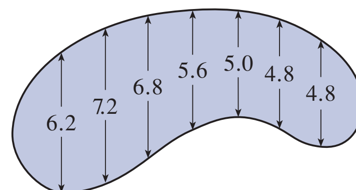
SAC **45.** Utilice un sistema algebraico computacional para encontrar el área exacta encerrada por las curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ y $y = x$.

46. Trace la región en el plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ y determine su área.

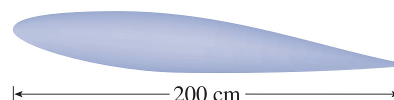
47. Los automóviles de carreras de Chris y Kelly están lado a lado al inicio de la carrera. En la tabla se proporcionan las velocidades de cada vehículo (en kilómetros por hora) durante los primeros 10 segundos de la competencia. Aplique la regla del punto medio para estimar cuánto se adelanta Kelly durante los primeros 10 segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	110	128
1	32	35	7	120	138
2	51	59	8	130	150
3	74	83	9	138	157
4	86	98	10	144	163
5	99	114			

48. Los anchos (en metros) de una piscina en forma de riñón se midieron a intervalos de 2 metros, como se indica en la figura. Usando la regla del punto medio, estime el área de la piscina.



49. Se muestra la sección transversal de un ala de avión. Las mediciones del grosor del ala, en centímetros, en intervalos de 20 centímetros son 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1, 8.7 y 2.8. Aplique la regla del punto medio para estimar el área de la sección transversal del ala.



50. La tasa de nacimientos de una población es $b(t) = 2200e^{0.024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1460e^{0.018t}$ personas por cada año. Determine el área entre estas curvas para $0 \leqslant t \leqslant 10$. ¿Qué representa el área?

51. En el ejemplo 5, se modeló una curva de patogénesis del sarampión con una función f. Un paciente infectado con el virus del sarampión que tiene cierta inmunidad al virus tiene una curva de patogénesis que se puede modelar, por ejemplo, con $g(t) = 0.9f(t)$.
(a) Si se requiere la misma concentración de umbral del virus para iniciar la infección que en el ejemplo 5, ¿en qué día se presenta esta?

(b) Sea P_3 el punto en la gráfica de g donde comienza la infección. Se ha demostrado que la infección termina en un punto P_4 en la gráfica de g donde la recta pasa a través de P_3, P_4 tiene la misma pendiente que la recta que pasa a través de P_1, P_2 en el ejemplo 5(b). ¿Qué día termina la infección?

(c) Calcule el grado de infección de este paciente.

52. La tasa con la que cayó la lluvia, en centímetros por hora, en dos lugares diferentes t horas después de que comenzó una tormenta están dadas por $f(t) = 0.73t^3 - 2t^2 + t + 0.6$ y $g(t) = 0.17t^2 - 0.5t + 1.1$. Calcule el área entre las gráficas de $0 \leqslant t \leqslant 2$ e interprete el resultado en este contexto.

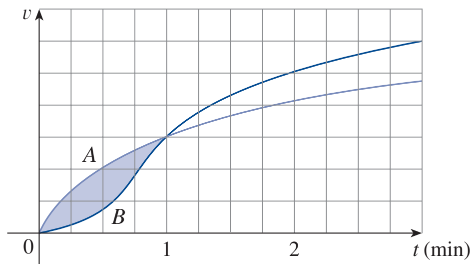
53. Dos automóviles, A y B, se encuentran lado a lado al inicio de la carrera, y aceleran a partir del reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones velocidad.

(a) ¿Cuál vehículo tiene ventaja después de un minuto? Explique.

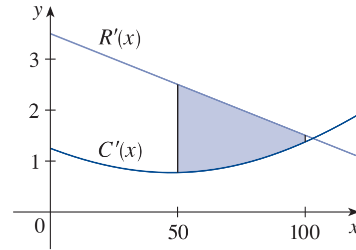
(b) ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?

(c) ¿Cuál es el automóvil que tiene ventaja después de dos minutos? Explique.

(d) Estime el tiempo en el cual los vehículos van de nuevo parejos.



54. En la figura se muestran las gráficas de la función de ingreso marginal R' y la función de costo marginal C' para un fabricante. [Recuerde de la sección 4.7 que $R(x)$ y $C(x)$ representan los ingresos y el costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que R y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Estime el valor de esta cantidad mediante la regla del punto medio.



55. La curva cuya ecuación es $y^2 = x^2(x + 3)$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Si se traza la gráfica de esta curva, se puede ver que una parte de ella forma un lazo. Encuentre el área definida por este lazo.

56. Encuentre el área de la región definida por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en (1, 1) y el eje x.

57. Determine el número b tal que la recta $y = b$ divide a la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.

58. (a) Calcule el número a tal que la recta $x = a$ biseca el área bajo la curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

(b) Determine el numero b tal que la recta $y = b$ biseca el área del inciso (a).

59. Calcule los valores de c tales que el área de la región acotada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

60. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valor de c el área de la región que encierran las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$, y $x = 0$ es igual al área de la región encerrada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

61. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ encierran una región? Calcule el área de la región.

PROYECTO DE APLICACIÓN EL ÍNDICE DE GINI

¿Cómo es posible medir la distribución del ingreso entre los habitantes de un determinado país? Una de esas medidas es el *índice de Gini*, nombrado así en honor del economista italiano Corrado Gini, quien lo ideó en 1912.

Primero se clasifican todos los hogares de un país de acuerdo con el ingreso y después se calcula el porcentaje de hogares cuyo ingreso sea a lo más un porcentaje dado del ingreso total del país. Se define una **curva de Lorenz** $y = L(x)$ en el intervalo [0, 1] ubicando el punto $(a/100, b/100)$ en la curva si la parte inferior a% de los hogares recibe a lo más b% del ingreso total. Por ejemplo, en la figura 1 (página 437), el punto (0.4, 0.12) está sobre la curva de Lorenz para los Estados Unidos en 2010 porque 40% del sector más pobre de la población recibió solo 12% del ingreso total. Asimismo, la parte inferior 80% de la población recibió 50% del ingreso total, por lo que el punto (0.8, 0.5) está sobre la curva de Lorenz. (La curva de Lorenz es así nombrada en honor del economista estadounidense Max Lorenz.)

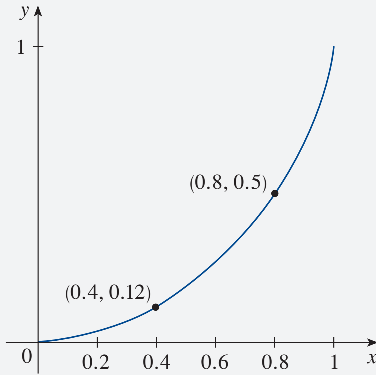


FIGURA 1
Curva de Lorenz para Estados Unidos en 2010

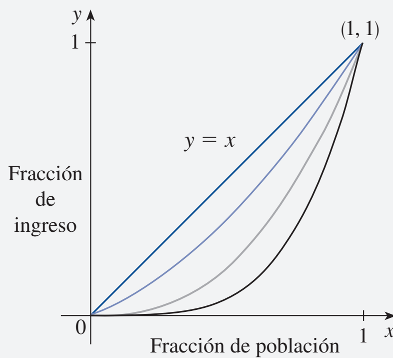


FIGURA 2

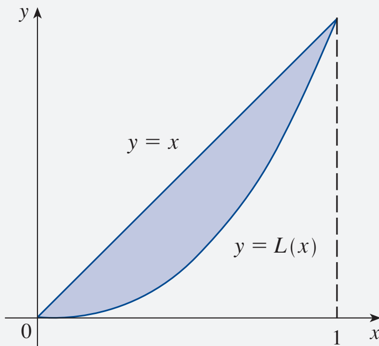


FIGURA 3

La figura 2 muestra algunas curvas típicas de Lorenz. Todas pasan por los puntos (0, 0) y (1, 1) y son cóncavas hacia arriba. En el caso extremo $L(x) = x$, la sociedad es perfectamente igualitaria: los más pobres $a\%$ de la población recibe $a\%$ del ingreso total y así todo el mundo recibe el mismo ingreso. El área entre una curva de Lorenz $y = L(x)$ y la recta $y = x$ mide cuánto difiere la distribución del ingreso de una igualdad absoluta. El **índice de Gini** (a veces llamado **coeficiente de Gini** o **coeficiente de desigualdad**) es el área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ (sombreada en la figura 3) dividida entre el área bajo $y = x$.

1. (a) Demuestre que el índice de Gini G es dos veces el área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$, es decir

$$G = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) ¿Cuál es el valor de G para una sociedad perfectamente igualitaria (todo el mundo tiene el mismo ingreso)? ¿Cuál es el valor de G para una sociedad perfectamente totalitaria (una sola persona recibe todos los ingresos)?

2. La tabla siguiente (obtenida de los datos facilitados por la Oficina de Censo de Estados Unidos) muestra los valores de la función de Lorenz de distribución del ingreso en ese país para el año 2010.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$L(x)$	0.000	0.034	0.120	0.266	0.498	1.000

(a) ¿Qué porcentaje del ingreso total de Estados Unidos fue recibido por el 20% más rico de la población en 2010?

(b) Utilice una calculadora o computadora para ajustar los datos de la tabla a una función cuadrática. Grafique los puntos dato y la función cuadrática. ¿Es el modelo cuadrático un ajuste razonable?

(c) Utilice el modelo cuadrático para la función de Lorenz para estimar el índice de Gini para Estados Unidos en el año 2010.

3. La tabla siguiente proporciona valores para la función de Lorenz en las décadas de 1970, 1980, 1990 y 2000. Utilice el método del problema 2 para estimar el índice de Gini para Estados Unidos durante esos años y compare con su respuesta al problema 2(c). ¿Nota usted una tendencia?

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1970	0.000	0.041	0.149	0.323	0.568	1.000
1980	0.000	0.042	0.144	0.312	0.559	1.000
1990	0.000	0.038	0.134	0.293	0.530	1.000
2000	0.000	0.036	0.125	0.273	0.503	1.000

SAC **4.** A menudo, un modelo potencia proporciona un ajuste más preciso que un modelo cuadrático para una función de Lorenz. Si tiene usted un equipo de cómputo con Maple o Mathematica, ajuste una función potencia ($y = ax^k$) a los datos en el problema 2 y utilícelo para estimar el índice de Gini para Estados Unidos en 2010. Compare su respuesta con los incisos (b) y (c) del problema 2.

6.2 Volúmenes

Cuando se trata de calcular el volumen de un sólido, se enfrenta el mismo tipo de problema que al determinar áreas. Intuitivamente se sabe lo que significa un volumen, pero es necesario precisar la idea usando el cálculo, a fin de dar una definición exacta de volumen.

Se empieza con un tipo simple de sólido llamado **cilindro** (o mejor dicho un *cilindro recto*). Como se muestra en la figura 1(a), un cilindro está limitado por una región plana B_1, que se llama **base**, y una región congruente B_2 en un plano paralelo. El cilindro consiste en todos los puntos sobre los segmentos de recta que son perpendiculares a la base y unen a B_1 con B_2. Si el área de la base es A y la altura del cilindro (la distancia desde B_1 hasta B_2) es h, entonces el volumen V del cilindro se define como

$$V = Ah$$

En particular, si la base es un círculo de radio r, entonces el cilindro es un cilindro circular cuyo volumen es $V = \pi r^2 h$ [véase la figura 1(b)], y si la base es un rectángulo de largo l y ancho w, entonces el cilindro es una caja rectangular (también se le llama *paralelepípedo rectangular*) con volumen $V = lwh$ [véase la figura 1(c)].

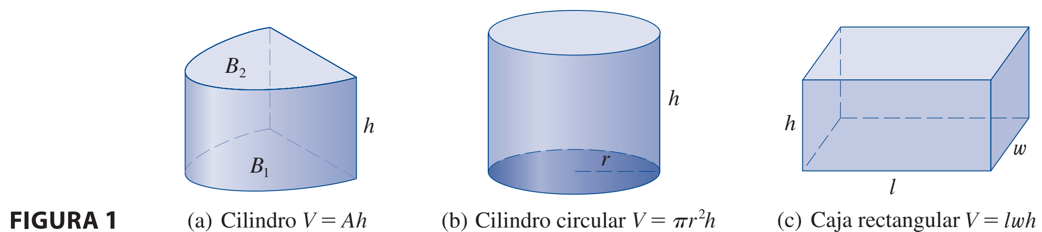


FIGURA 1 (a) Cilindro $V = Ah$ (b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$ (c) Caja rectangular $V = lwh$

En el caso de un sólido S que no es un cilindro, primero "se corta" a S en piezas y se aproxima cada una mediante un cilindro, para después estimar el volumen de S sumando los volúmenes de los cilindros. El valor del volumen exacto de S se obtiene a través un proceso de límite en el que el número de piezas se hace cada vez más grande.

Se inicia cortando a S con un plano y obteniendo una región plana que se denomina **sección transversal** de S. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x, y que pasa por el punto x, donde $a \leqslant x \leqslant b$. (Véase la figura 2. Imagine que corta a S con un cuchillo a través de x y calcule el área de esta rebanada.) El área de la sección transversal $A(x)$ variará cuando x se incrementa de a a b.

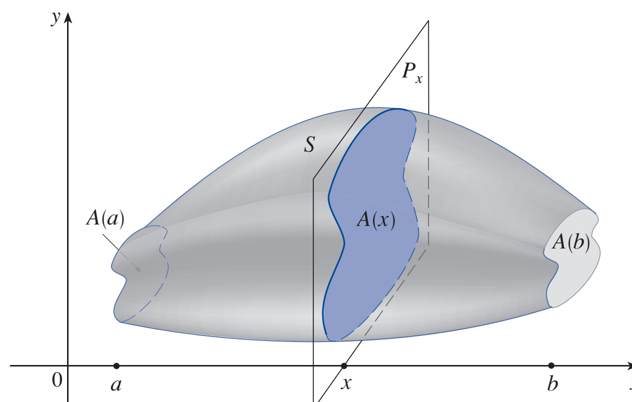


FIGURA 2

Se divide S en n "rebanadas" del mismo ancho Δx mediante los planos, $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$. (Para rebanar el sólido imagine que está rebanando una hogaza de pan.) Si se eligen puntos muestra x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$, se puede tener un valor aproximado de la i-ésima rebanada S_i, (la parte de S que queda entre los planos $P_{x_{i-1}}$ y P_{x_i}) por un cilindro cuya base tiene un área $A(x_i^*)$ y "altura" Δx. (Véase la figura 3.)

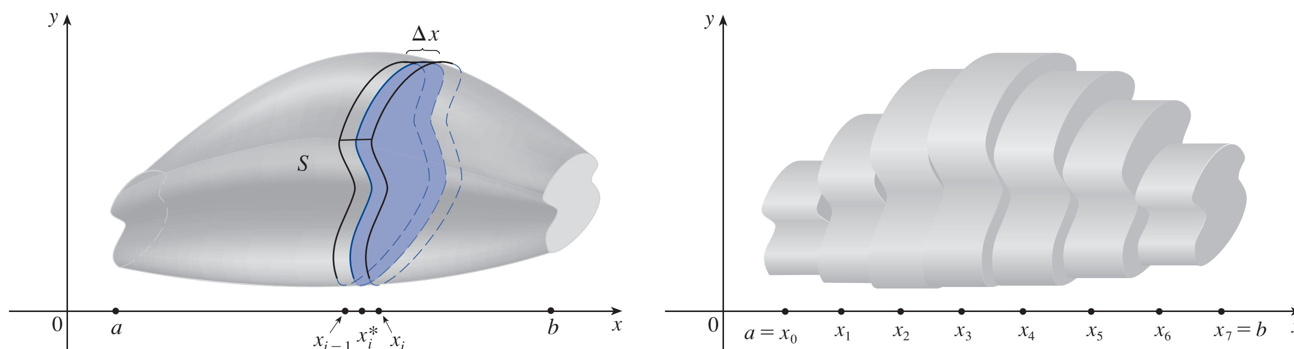


FIGURA 3

El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\Delta x$, de modo que una aproximación a la concepción intuitiva del volumen de la i-ésima rebanada S_i es:

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Al sumar los volúmenes de estas rebanadas, se obtiene un valor aproximado del volumen total (es decir, a lo que se piensa intuitivamente que es un volumen):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximación parece ser cada vez mejor cuando $n \to \infty$. (Suponga que las rebanadas son cada vez más delgadas). Por tanto, *se define* al volumen como el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$. Pero aquí se reconoce el límite de las sumas de Riemann como una integral definida y, por tanto, se tiene la definición siguiente.

Puede demostrarse que esta definición es independiente de dónde se ubique S respecto al eje x. En otras palabras, no importa cómo corte las rebanadas mediante planos paralelos; siempre obtendrá la misma respuesta para V.

Definición de volumen Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, que pasa a través de x y es perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el **volumen** de S es

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Cuando se aplica la fórmula del volumen $V = \int_a^b A(x)\,dx$ es importante recordar que $A(x)$ es el área de una sección transversal que se obtiene al cortar a través de x con un plano perpendicular al eje x.

Observe que, en el caso de un cilindro, el área de la sección transversal es constante: $A(x) = A$ para toda x. De este modo, la definición de volumen da $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; esto concuerda con la fórmula $V = Ah$.

EJEMPLO 1 Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

SOLUCIÓN Si se coloca la esfera de modo que su centro esté en el origen, entonces el plano P_x corta la esfera en un círculo cuyo radio (por el teorema de Pitágoras) es

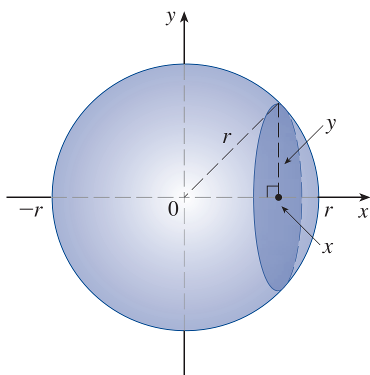


FIGURA 4

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$. (Véase la figura 4.) Por lo que el área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Si se aplica la definición del volumen con $a = -r$ y $b = r$, se tiene

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(El integrando es una función par.)}$$

$$= 2\pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right)$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

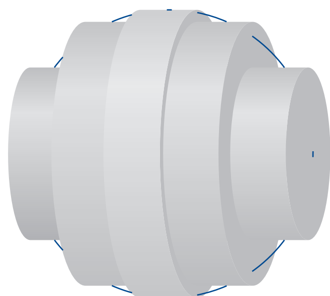
■

En la figura 5 se muestra la definición de volumen cuando el sólido es una esfera de radio $r = 1$. De acuerdo con el resultado del ejemplo 1, se sabe que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi$, que es aproximadamente 4.18879. En este caso, las rebanadas son cilindros circulares, o *discos*, y las tres partes de la figura 5 muestran las interpretaciones geométricas de las sumas de Riemann

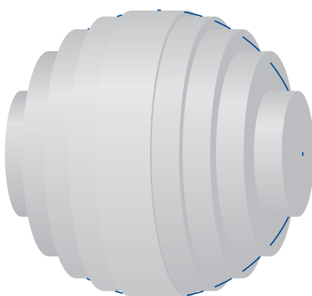
TEC En Visual 6.2A se muestra una animación de la figura 5.

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

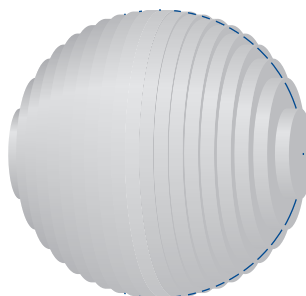
cuando $n = 5$, 10 y 20 si se eligen los puntos muestra x_i^* como los puntos medios $\bar{x}_i$. Observe que, cuando se incrementa la cantidad de cilindros de aproximación, las sumas correspondientes de Riemann se vuelven más cercanas al volumen real.



(a) Mediante 5 discos, $V \approx 4.2726$



(b) Mediante 10 discos, $V \approx 4.2097$



(c) Mediante 20 discos, $V \approx 4.1940$

FIGURA 5
Aproximación al volumen de una esfera con radio 1

EJEMPLO 2 Determine el volumen de un sólido que se obtiene al girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ respecto al eje x de 0 a 1. Ilustre la definición de volumen trazando un cilindro de aproximación representativo.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 6(a). Si se gira alrededor del eje x, se obtiene el sólido que se muestra en la figura 6(b). Cuando se corta a través del punto x se obtiene un disco de radio $\sqrt{x}$. El área de esta sección transversal es

$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x$$

y el volumen del cilindro de aproximación (un disco con espesor Δx) es

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

El sólido está entre $x = 0$ y $x = 1$, de modo que el volumen es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

¿Se obtuvo una respuesta razonable en el ejemplo 2? Como verificación del trabajo, se reemplaza la región dada por un cuadrado de base [0, 1] y altura 1. Si se gira el cuadrado, se obtiene un cilindro de radio 1, altura 1 y volumen $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Ya se calculó que el sólido dado tiene la mitad de este volumen, así que esto parece casi correcto.

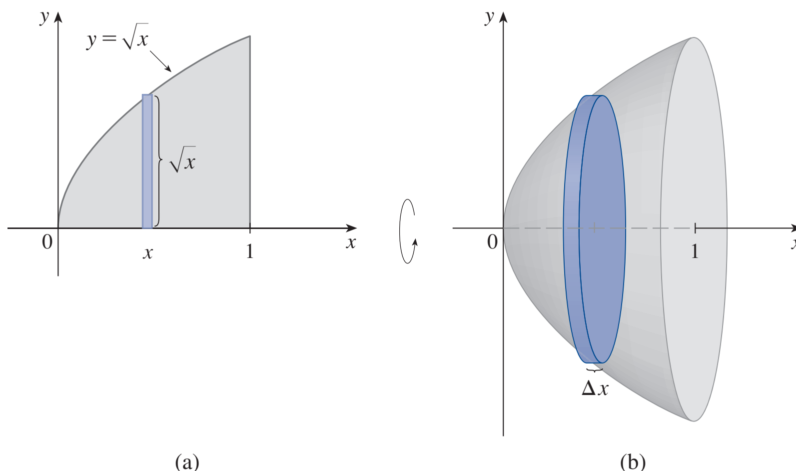


FIGURA 6

EJEMPLO 3 Determine el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$ respecto al eje y.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 7(a) y el sólido resultante se muestra en la figura 7(b). Puesto que la región gira alrededor del eje y, tiene sentido "rebanar" el sólido en forma perpendicular al eje y, y, por tanto, integrar respecto a y. Si se corta a una altura y, se obtiene un disco de radio x, donde $x = \sqrt[3]{y}$, de manera que el área de una sección transversal a través de y es

$$A(y) = \pi x^2 = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}$$

y el volumen del cilindro de aproximación ilustrado en la figura 7(b) es

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Puesto que el sólido está entre $y = 0$ y $y = 8$, su volumen es

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\Big[\tfrac{3}{5} y^{5/3}\Big]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

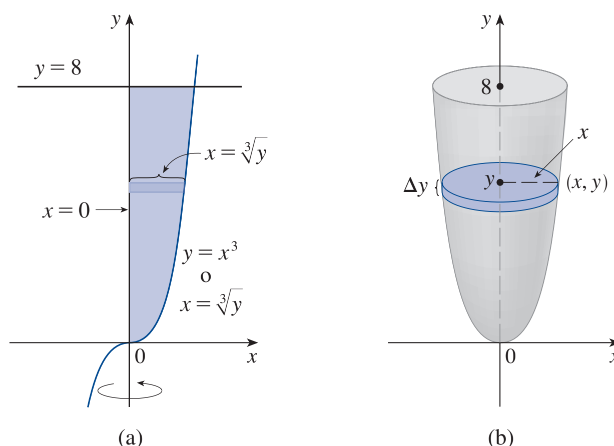


FIGURA 7

EJEMPLO 4 La región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Las curvas $y = x$ y $y = x^2$ se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 1). La región entre ellas, el sólido de revolución y una sección transversal perpendicular al eje x se muestran en la figura 8. Una sección transversal en el plano P_x tiene la forma de una *arandela* (un aro anular) de radio interior x^2 y radio exterior x, por lo que se determina el área de la sección transversal restando el área del círculo interno del área del círculo externo:

TEC Visual 6.2B muestra cómo se forman los sólidos de revolución.

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Por tanto, se tiene

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

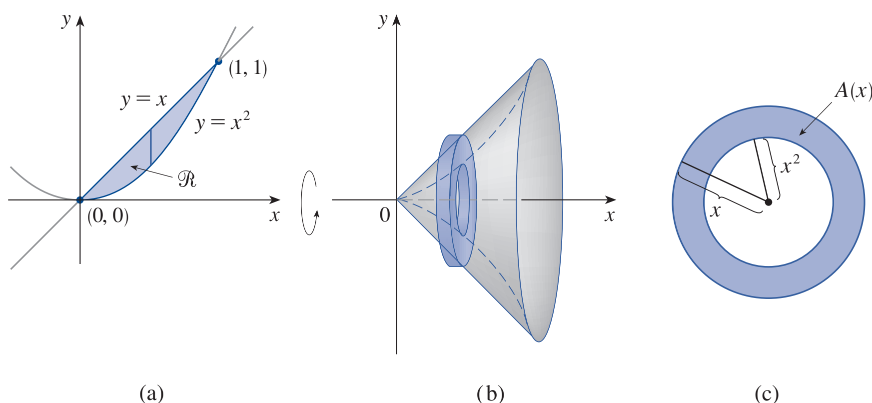


FIGURA 8 (a) (b) (c) ■

EJEMPLO 5 Calcule el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN El sólido y la sección transversal se muestran en la figura 9. Otra vez, la sección transversal es una arandela, pero ahora el radio interior es $2 - x$, y el radio externo es $2 - x^2$.

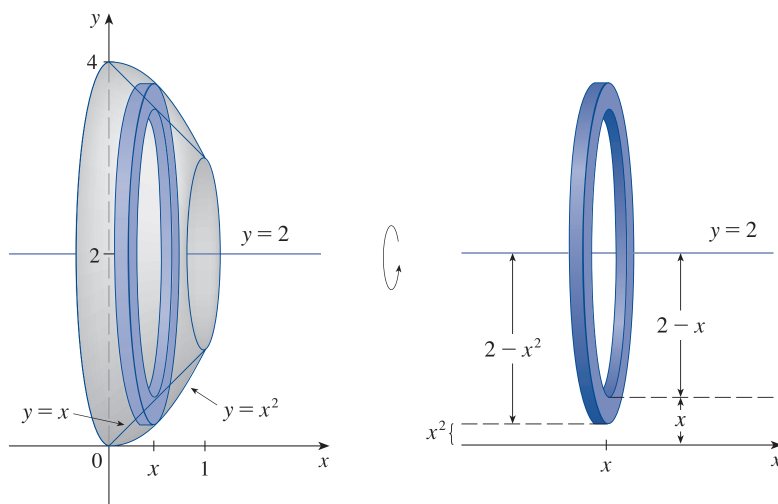


FIGURA 9

El área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

y el volumen de S es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

■

Los sólidos de los ejemplos 1 a 5 reciben el nombre de **sólidos de revolución** porque se generan haciendo girar una región alrededor de una recta. En general, se determina el volumen de un sólido de revolución usando la fórmula básica definiendo

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

y se determina el área de la sección transversal $A(x)$ o $A(y)$ mediante uno de los métodos siguientes:

- Si la sección transversal es un disco (como en los ejemplos 1 a 3), se determina el radio del disco (en términos de x o y) y se usa

$$A = \pi(\text{radio})^2$$

- Si la sección transversal es una arandela (como en los ejemplos 4 y 5), se determina el radio interior r_{in} y el radio exterior r_{ext} a partir de un trazo (como en las figuras 8, 9 y 10) y se calcula el área de la arandela efectuando la diferencia entre el área del disco interno y el área del disco externo:

$$A = \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$

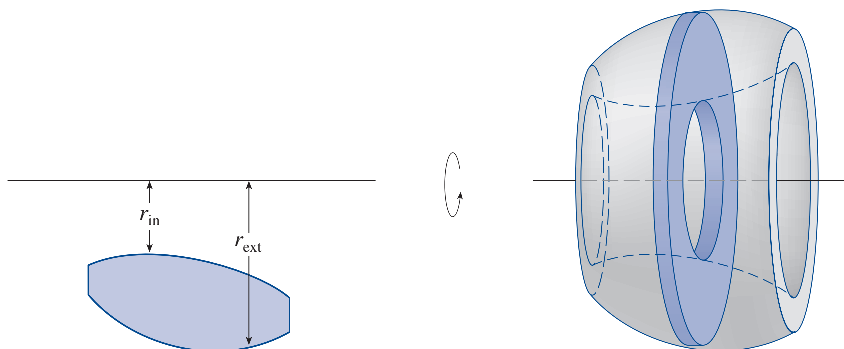


FIGURA 10

El ejemplo siguiente presenta una ilustración adicional del procedimiento.

EJEMPLO 6 Calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $x = -1$.

SOLUCIÓN En la figura 11 se muestra una sección transversal horizontal. Es una arandela con radio interior $1 + y$ y radio exterior $1 + \sqrt{y}$, por lo que el área de la sección transversal es

$$A(y) = \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$
$$= \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - \pi(1 + y)^2$$

El volumen es

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - (1 + y)^2\right] dy$$
$$= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi \left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

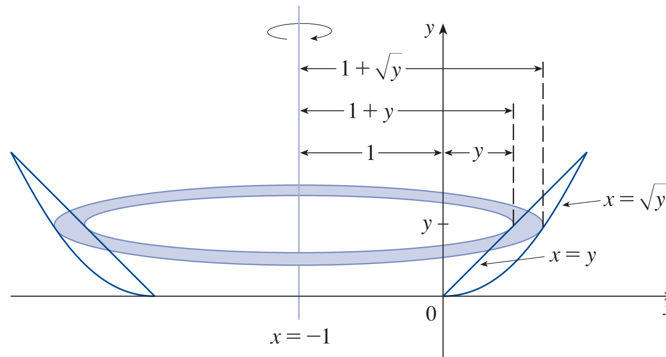


FIGURA 11

■

Ahora se determinarán los volúmenes de tres sólidos que *no* son sólidos de revolución.

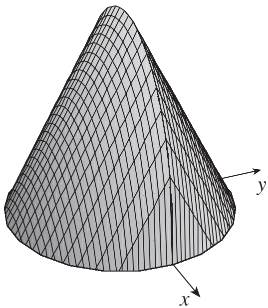


FIGURA 12
Gráfica generada por computadora del sólido del ejemplo 7

TEC En Visual 6.2C se muestra cómo se genera el sólido de la figura 12.

EJEMPLO 7 En la figura 12 se muestra un sólido con una base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas, pero perpendiculares a la base, son triángulos equiláteros. Determine el volumen del sólido.

SOLUCIÓN Se considera la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. El sólido, su base y una sección transversal representativa a una distancia x del origen se muestran en la figura 13.

Puesto que B está sobre la circunferencia, se tiene $y = \sqrt{1 - x^2}$, y, de esa manera, la base del triángulo ABC es $|AB| = 2y = 2\sqrt{1 - x^2}$. Dado que el triángulo es equilátero,

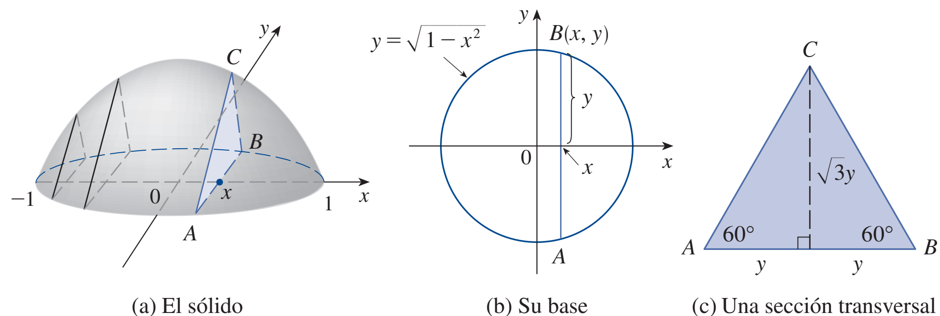


FIGURA 13 (a) El sólido (b) Su base (c) Una sección transversal

se ve de la figura 13(c) que su altura es $\sqrt{3}\, y = \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2)$$

y el volumen del sólido es

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\, dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$ ■

EJEMPLO 8 Calcule el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado L y cuya altura es h.

SOLUCIÓN Se coloca el origen O en el vértice de la pirámide y el eje x a lo largo de su eje central, como se muestra en la figura 14. Cualquier plano P_x que pase por x y sea perpendicular al eje x corta a la pirámide en un cuadrado de lado s. Se puede expresar s en función de x observando por triángulos semejantes de la figura 15 que

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

y, de este modo, $s = Lx/h$. [Otro método es observar que la recta OP tiene pendiente $L/(2h)$ y, así, su ecuación es $y = Lx/(2h)$]. Por eso, el área de la sección transversal es

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

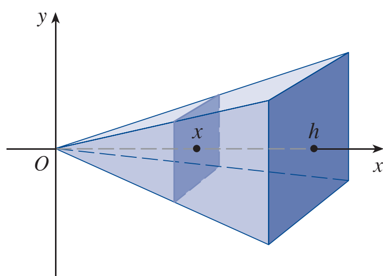


FIGURA 14

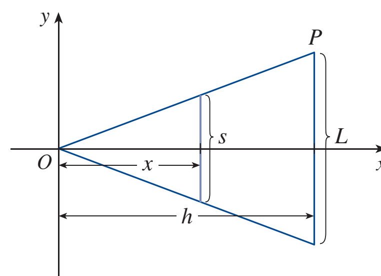


FIGURA 15

La pirámide se ubica entre $x = 0$ y $x = h$, por lo que su volumen es

$$V = \int_0^h A(x)\, dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\, dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{L^2 h}{3}$$ ■

NOTA No era necesario colocar el vértice de la pirámide en el origen en el ejemplo 8. Se hizo así para que las ecuaciones resultaran más sencillas. Si en lugar de eso se hubiera colocado el centro de la base en el origen y el vértice en el eje y positivo, como en la figura 16, usted puede verificar que se habría obtenido la integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\, dy = \frac{L^2 h}{3}$$

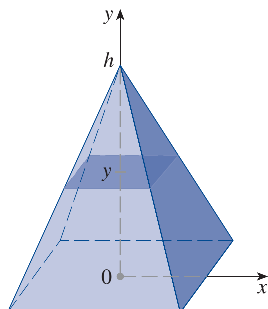
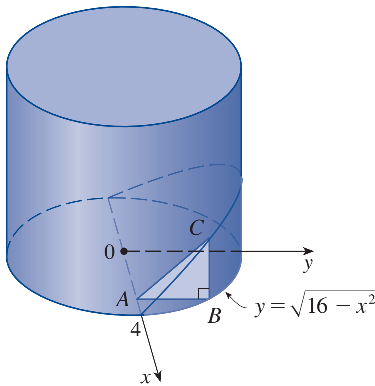


FIGURA 16



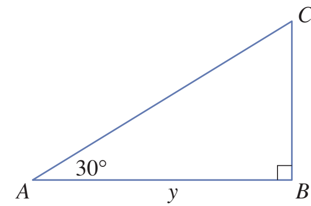


FIGURA 17

EJEMPLO 9 De un cilindro circular de radio 4, definido mediante dos planos, se corta una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro corta al primero en un ángulo de 30° a lo largo del diámetro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.

SOLUCIÓN Si se hace coincidir el eje x con el diámetro en el lugar donde se encuentran los planos, entonces la base del sólido es un semicírculo delimitado por la ecuación $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Una sección transversal perpendicular al eje x a una distancia x del origen es un triángulo ABC, como se muestra en la figura 17, cuya base es $y = \sqrt{16 - x^2}$ y cuya altura es $|BC| = y \tan 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

y el volumen es

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

Para conocer otro método véase el ejercicio 64. ■

6.2 EJERCICIOS

1–18 Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región acotada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Trace la gráfica de la región, el sólido y un disco o arandela representativos.

1. $y = x + 1,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$; alrededor del eje x

2. $y = 1/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$; alrededor del eje x

3. $y = \sqrt{x - 1},\ y = 0,\ x = 5$; alrededor del eje x

4. $y = e^x,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$; alrededor del eje x

5. $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; alrededor del eje x

6. $2x = y^2,\ x = 0,\ y = 4$; alrededor del eje y

7. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0$; alrededor del eje y

8. $y = 6 - x^2,\ y = 2$; alrededor del eje x

9. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 5 - x^2$; alrededor del eje x

10. $x = 2 - y^2,\ x = y^4$; alrededor del eje y

11. $y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 2,\ y = 0$; alrededor del eje y

12. $y = x^3,\ y = 1,\ x = 2$; alrededor de $y = -3$

13. $y = 1 + \sec x,\ y = 3$; alrededor de $y = 1$

14. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; alrededor de $y = -1$

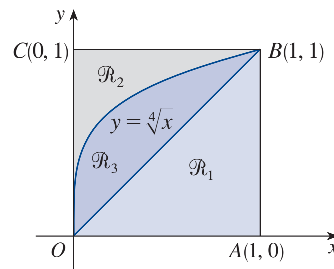
15. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1$; alrededor de $x = 2$

16. $y = x,\ y = \sqrt{x}$; alrededor de $x = 2$

17. $x = y^2,\ x = 1$; alrededor de $x = 1$

18. $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; alrededor de $x = 1$

19–30 Refiérase a la figura y calcule el volumen generado al hacer girar cada una de las regiones dadas alrededor de la recta especificada.



19. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OA

20. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OC

21. $\mathcal{R}_1$ alrededor de AB

22. $\mathcal{R}_1$ alrededor de BC

23. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OA

24. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OC

25. $\mathcal{R}_2$ alrededor de AB

26. $\mathcal{R}_2$ alrededor de BC

27. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OA

28. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OC

29. $\mathcal{R}_3$ alrededor de AB

30. $\mathcal{R}_3$ alrededor de BC

31–34 Plantee una integral para el volumen del sólido obtenido al hacer girar cada una de las regiones acotadas por las curvas dadas, alrededor de la recta especificada. Después utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación a cinco decimales.

31. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$
(a) alrededor del eje x (b) alrededor de $y = -1$

32. $y = 0$, $y = \cos^2 x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$
(a) alrededor del eje x (b) alrededor de $y = 1$

33. $x^2 + 4y^2 = 4$
(a) alrededor de $y = 2$ (b) alrededor de $x = 2$

34. $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$
(a) alrededor del eje x (b) alrededor del eje y

35–36 Utilice una gráfica para encontrar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego utilice su calculadora para determinar (en forma aproximada) el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región acotada por estas curvas.

35. $y = \ln(x^6 + 2)$, $y = \sqrt{3 - x^3}$

36. $y = 1 + xe^{-x^3}$, $y = \arctan x^2$

SAC **37–38** Mediante un sistema algebraico computacional, calcule el volumen exacto del sólido obtenido al rotar la región acotada por estas curvas alrededor de la recta especificada.

37. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $y = -1$

38. $y = x$, $y = xe^{1-x/2}$; alrededor de $y = 3$

39–42 Cada una de las integrales siguientes representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

39. $\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$

40. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2] \, dx$

41. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8) \, dy$

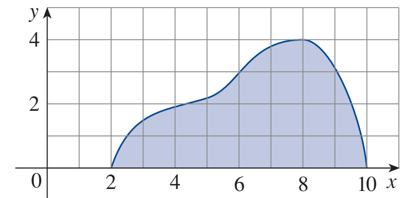
42. $\pi \int_1^4 \left[3^2 - \left(3 - \sqrt{x}\,\right)^2\right] dx$

43. Una TAC (tomografía computarizada) produce vistas transversales equidistantes de un órgano humano que dan información sobre el órgano que de otra manera se obtiene solamente con cirugía. Suponga que una TAC de un hígado humano muestra secciones transversales separadas 1.5 cm de distancia. El hígado es de 15 cm de largo y las áreas de las secciones transversales, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Utilice la regla del punto medio para determinar el volumen del hígado.

44. Se corta un tronco de árbol de 10 m de largo a intervalos de 1 m, y las áreas de las secciones transversales A (a una distancia x del extremo del tronco) se proporcionan en la tabla. Mediante la regla del punto medio $n = 5$, estime el volumen del tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

45. (a) Si la región que se muestra en la figura se gira respecto al eje x para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para determinar el volumen del sólido.



(b) Estime el volumen si se gira la región respecto al eje y. Una vez más aplique la regla del punto medio con $n = 4$.

SAC **46.** (a) Se obtiene un modelo para la forma de un huevo de un ave mediante el giro, respecto al eje x, de la región bajo la gráfica de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

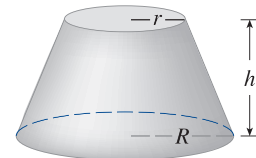
Utilice un SAC para encontrar el volumen de tal huevo.

(b) Para un pato de cuello rojo, $a = -0.06$, $b = 0.04$, $c = 0.1$ y $d = 0.54$. Trace la gráfica de f y encuentre el volumen de un huevo de esta especie.

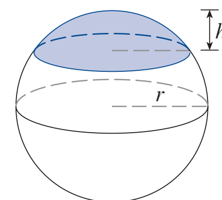
47–61 Calcule el volumen de cada uno de los sólidos S descritos.

47. Un cono circular recto cuya altura es h y el radio de la base es r.

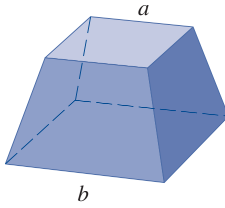
48. Un cono truncado circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r.



49. Un casquete de una esfera con radio r y altura h.



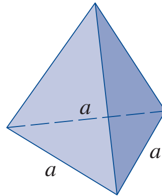
50. Una pirámide truncada con base cuadrada de lado b, cuadrado superior de lado a y altura h.



¿Qué sucede si $a = b$? ¿Qué sucede si $a = 0$?

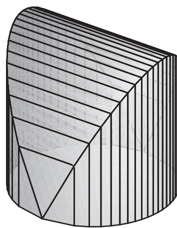
51. Una pirámide de altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.

52. Una pirámide de altura h y base en forma de triángulo equilátero con lado a (un tetraedro).



53. Un tetraedro con tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas recíprocamente perpendiculares con distancias 3, 4 y 5 cm.

54. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son cuadradas.



55. La base de S es una región elíptica acotada por la curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales son perpendiculares al eje x y son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base.

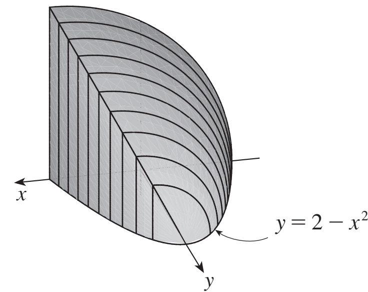
56. La base de S es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1). Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

57. La base de S es la misma que en el ejercicio 56, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados.

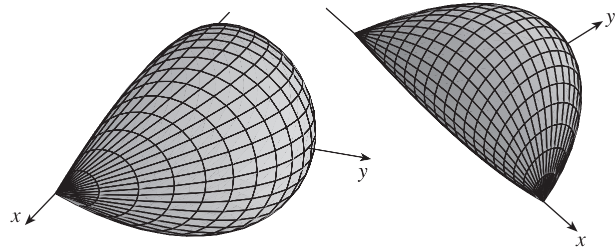
58. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados.

59. La base de S es la misma que la del ejercicio 58, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos isósceles con altura igual a la base.

60. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuartos de círculo.



61. El sólido S está acotado por círculos que son perpendiculares al eje x, interseca el eje x, y tiene centros sobre la parábola $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$, $-1 \leq x \leq 1$.



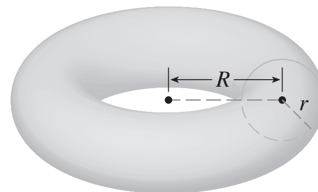
62. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son triángulos isósceles de altura h y el lado desigual en la base.

(a) Plantee una integral para el volumen de S.

(b) De acuerdo con la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen de S.

63. (a) Plantee una integral para el volumen de un *toro* sólido (el sólido en forma de dona que se muestra en la figura) de radio r y R.

(b) Mediante la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen del toro.

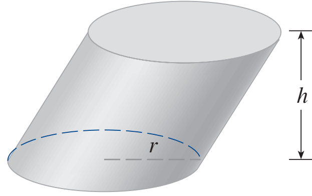


64. Resuelva el ejemplo 9 tomando secciones transversales paralelas a la recta de intersección de los dos planos.

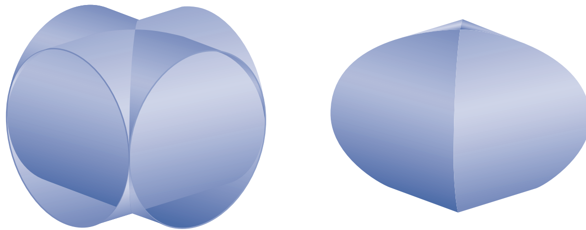
65. (a) El principio de Cavalieri establece que si una familia de planos paralelos da áreas iguales de secciones

transversales para dos sólidos S_1 y S_2, entonces los volúmenes de S_1 y S_2 son iguales. Demuestre este principio.

(b) Mediante el principio de Cavalieri determine el volumen del cilindro oblicuo que se muestra en la figura.



66. Determine el volumen común a dos cilindros circulares, ambos de radio r, si los ejes de los cilindros se cortan en ángulos rectos.



67. Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r, si el centro de cada esfera está sobre la superficie de la otra esfera.

68. Un tazón tiene la forma de un hemisferio con diámetro igual a 30 cm. Una pelota pesada de 10 cm de diámetro se coloca dentro del tazón, y se vierte agua en este hasta que alcanza una altura de h centímetros. Determine el volumen de agua que hay en el recipiente.

69. Se abre un agujero de radio r en un cilindro de radio $R > r$ en ángulos rectos al eje del cilindro. Plantee una integral, pero no la evalúe, para determinar el volumen cortado.

70. Un agujero de radio r se taladra en el centro de una esfera de radio $R > r$. Calcule el volumen de la parte restante de la esfera.

71. Algunos de los iniciadores del cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Stereometria doliorum* en 1615, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de los barriles.) A menudo se aproximan la forma de sus lados mediante parábolas.

(a) Se genera un barril de altura h y radio máximo R al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leqslant x \leqslant h/2$, donde c es una constante positiva. Demuestre que el radio de cada extremo del barril es $r = R - d$, donde $d = ch^2/4$.

(b) Demuestre que el volumen encerrado por el barril es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

72. Suponga que una región $\mathcal{R}$ tiene un área A que se localiza arriba del eje x. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de volumen V_1. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $y = -k$, (donde k es un número positivo), genera un sólido de volumen V_2. Exprese V_2 en función de V_1, k y A.

6.3 Volúmenes mediante cascarones cilíndricos

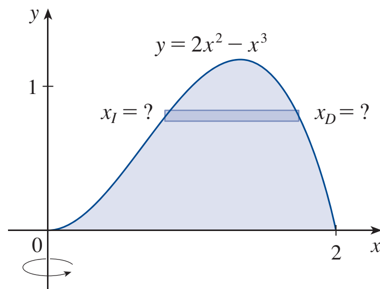


FIGURA 1

Algunos problemas relacionados con volúmenes son muy difíciles de manejar con los métodos de las secciones anteriores. Por ejemplo, se considera el problema de determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$. (Véase la figura 1.) Si se corta en forma perpendicular al eje y, se obtiene una arandela. Pero para calcular los radios interior y exterior de la arandela, se tiene que resolver la ecuación cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para encontrar x en función de y, y esto no es fácil.

Por fortuna, hay un sistema llamado **método de los cascarones cilíndricos**, que es más fácil de usar en tal caso. En la figura 2 se muestra un cascarón cilíndrico de radio

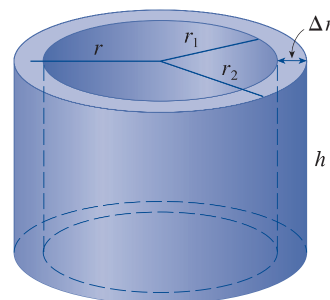


FIGURA 2

interior r_1, radio exterior r_2 y altura h. Su volumen V se calcula restando el volumen V_1 del cilindro interior del volumen V_2 que corresponde al cilindro exterior:

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Si se hace $\Delta r = r_2 - r_1$ (el espesor del cascarón) y $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (el radio promedio del cascarón), entonces esta fórmula del volumen de un cascarón cilíndrico se transforma en

1 $$V = 2\pi rh\,\Delta r$$

que puede recordarse como

$$V = [\text{circunferencia}][\text{altura}][\text{espesor}]$$

Ahora, sea S el sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje ya la región acotada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geqslant 0$], $y = 0$, $x = a$, y $x = b$, donde $b > a \geqslant 0$. (Véase la figura 3.)

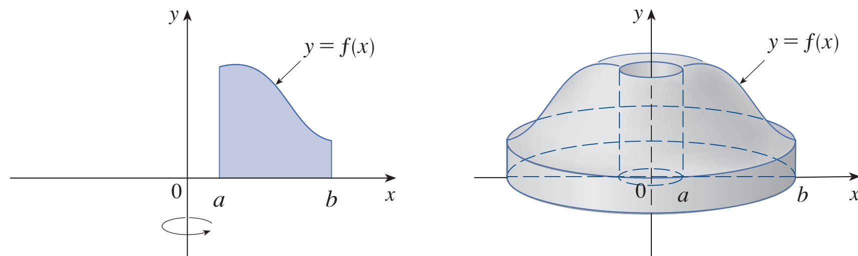


FIGURA 3

Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual anchura Δx y sea $\bar{x}_i$, el punto medio del i-ésimo subintervalo. Si el rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\bar{x}_i)$ se hace girar alrededor del eje y, entonces el resultado es un cascarón cilíndrico cuyo radio promedio es $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$ y espesor Δx (véase la figura 4). De modo que, por la fórmula 1, su volumen es

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

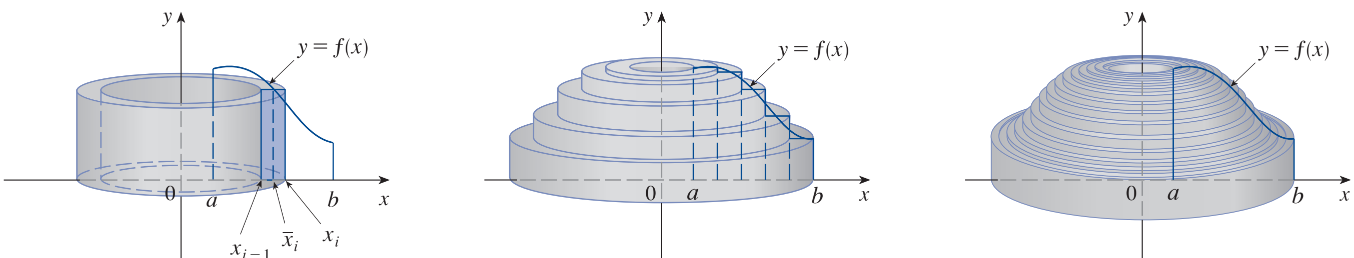


FIGURA 4

Por tanto, un volumen aproximado V de S se obtiene mediante la suma de los volúmenes de estos cascarones:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Esta aproximación mejora cuando $n \to \infty$. Pero de acuerdo con la definición de integral, se sabe que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Por lo que lo siguiente parece razonable:

2 El volumen del sólido de la figura 3, que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ de a a b, es

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \qquad \text{donde } 0 \leqslant a < b$$

El argumento de usar cascarones cilíndricos hace que la fórmula 2 parezca razonable, pero posteriormente se podrá comprobar (véase el ejercicio 7.1.73).

La mejor manera de recordar la fórmula 2 es pensar en el cascarón representativo, cortado y aplanado como en la figura 5, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y espesor Δx o dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferencia}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

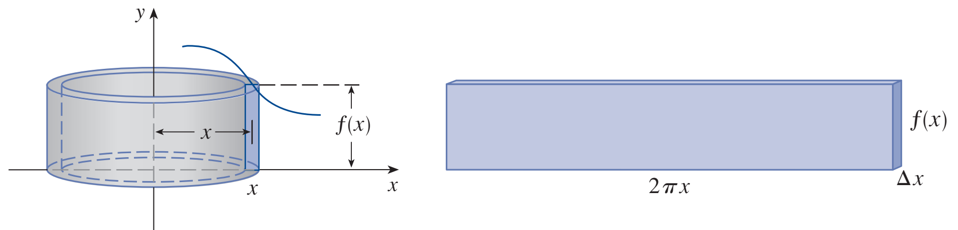


FIGURA 5

Este tipo de razonamiento es útil en otras situaciones, como cuando se hace girar alrededor de rectas distintas del eje y.

EJEMPLO 1 Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región acotada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$.

SOLUCIÓN En el trazo de la figura 6 se puede ver que un cascarón representativo tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. También, por el método del cascarón, el volumen es

$$V = \int_0^2 \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferencia}} \underbrace{(2x^2 - x^3)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx = 2\pi\Big[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\Big]_0^2$$

$$= 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

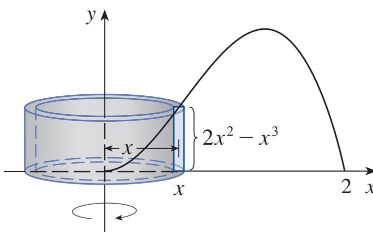


FIGURA 6

Puede verificarse que el método del cascarón cilíndrico da la misma respuesta que calcular usando "rebanadas". ■

TEC Visual 6.3 muestra cómo se forman el sólido y los cascarones en el ejemplo 1.

En la figura 7 se observa una imagen generada mediante computadora del sólido cuyo volumen se calcula en el ejemplo 1.

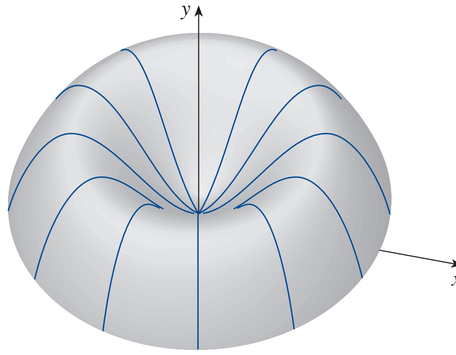


FIGURA 7

NOTA Al comparar la solución del ejemplo 1 con las observaciones del comienzo de esta sección, es claro que el método de los cascarones cilíndricos es mucho más sencillo que el método en el que se utilizan arandelas para este problema. No es necesario encontrar las coordenadas del máximo local y no tiene que resolverse la ecuación de la curva, ni dar x en función de y. Sin embargo, en otros ejemplos, pueden ser más sencillos los métodos de la sección anterior.

EJEMPLO 2 Calcule el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje y la región entre $y = x$ y $y = x^2$.

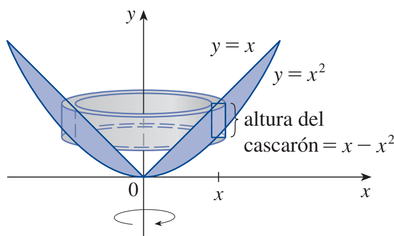


FIGURA 8

SOLUCIÓN La región y un cascarón representativo se ilustran en la figura 8. Se ve que el cascarón tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $x - x^2$. Así que el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$ ■

Como se muestra en el ejemplo siguiente, el método del cascarón cilíndrico funciona muy bien si hace girar alrededor del eje x. Simplemente se dibuja un diagrama para identificar el radio y la altura del cascarón.

EJEMPLO 3 Mediante un cascarón cilíndrico calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1.

SOLUCIÓN Este problema se resolvió usando discos en el ejemplo 6.2.2. Para usar cascarones, llámese a la curva $y = \sqrt{x}$ (en la figura en este ejemplo) como $x = y^2$ en la figura 9. Por lo que toca a la rotación alrededor del eje x, un cascarón representativo tiene radio y, circunferencia $2\pi y$ y altura $1 - y^2$. Así, el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

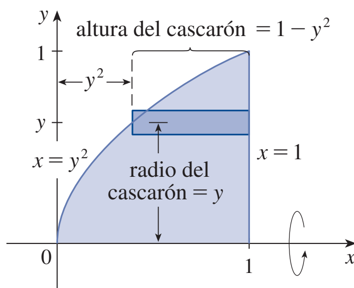


FIGURA 9

En este problema, el método del disco fue más simple. ■

EJEMPLO 4 Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 2$ la región acotada por $y = x - x^2$ y $y = 0$.

SOLUCIÓN En la figura 10 se muestra la región y un cascarón cilíndrico formado por la rotación alrededor de la recta $x = 2$. El radio es $2 - x$, circunferencia $2\pi(2 - x)$ y altura $x - x^2$.

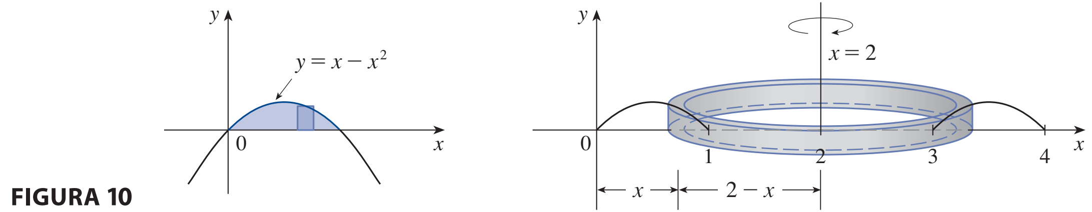


FIGURA 10

El volumen del sólido dado es

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

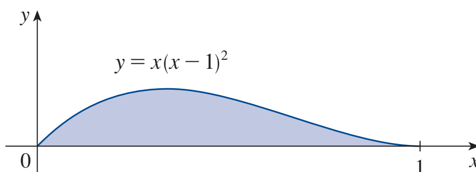
Discos y arandelas frente a cascarones cilíndricos

Cuando se determina el volumen de un sólido de revolución, ¿cómo se sabe si se va a usar discos (o arandelas) o cascarones cilíndricos? Hay varias consideraciones que tomar en cuenta: ¿la región es descrita más fácilmente por las curvas frontera superior e inferior de la forma $y = f(x)$, o por las fronteras izquierda y derecha $x = g(y)$? ¿Con cuál opción es más fácil trabajar? ¿Los límites de integración son más fáciles de encontrar para una variable que para la otra? ¿La región requiere dos integrales separadas cuando se utiliza x como la variable pero una sola integral en y? ¿Se puede evaluar la integral que se ha creado con nuestra elección de variable?

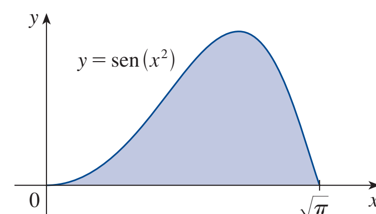
Si se decide que una variable es más fácil de trabajar que la otra, esto determina qué método se debe utilizar. Dibuje un rectángulo de muestra en la región, correspondiente a una sección transversal del sólido. El espesor del rectángulo, Δx o Δy, corresponde a la variable de integración. Si imagina el rectángulo girando, se convierte en un disco (arandela) o en un cascarón.

6.3 EJERCICIOS

1. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se muestra en la figura. Explique por qué es inconveniente usar las rebanadas para determinar el volumen V de S. Trace la gráfica de un cascarón representativo de aproximación. ¿Cuáles son la circunferencia y la altura? Utilice cascarones para encontrar V.



2. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se muestra en la figura. Trace la gráfica de un cascarón cilíndrico representativo y determine su circunferencia y altura. Utilice cascarones para calcular el volumen de S. ¿Cree usted que este método es mejor que el de las rebanadas? Explique.



3–7 Utilice el método de los cascarones cilíndricos para determinar el volumen que se genera al hacer girar alrededor del eje y, la región acotada por las curvas dadas.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 4x - x^2, \quad y = x$

7. $y = x^2, \quad y = 6x - 2x^2$

8. Sea V el volumen del sólido que se obtiene cuando la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje y. Calcule V por rebanadas y formando cascarones cilíndricos. En ambos casos, trace un diagrama para explicar su método.

9–14 Utilice el método de los cascarones cilíndricos para determinar el volumen de cada uno de los sólidos siguientes que se obtienen al hacer girar alrededor del eje x la región acotada por las curvas dadas.

9. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

10. $x = 4y^2 - y^3, \quad x = 0$

11. $y = x^{3/2}, \quad y = 8, \quad x = 0$

12. $x = -3y^2 + 12y - 9, \quad x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2, \quad x = 2$

14. $x + y = 4, \quad x = y^2 - 4y + 4$

15–20 Mediante el método de los cascarones cilíndricos determine el volumen generado cuando gira cada una de las regiones acotadas entre las curvas dadas, alrededor del eje especificado.

15. $y = x^3, \ y = 8, \ x = 0;$ alrededor de $x = 3$

16. $y = 4 - 2x, \ y = 0, \ x = 0;$ alrededor de $x = -1$

17. $y = x^2, \ y = 2 - x^2;$ alrededor de $x = 1$

18. $y = \sqrt{x}, \ x = 2y;$ alrededor de $x = 5$

19. $x = 2y^2, \ y \geqslant 0, \ x = 2;$ alrededor de $y = 2$

20. $x = 2y^2, \ x = y^2 + 1;$ alrededor de $y = -2$

21–26
(a) Plantee una integral para el volumen del sólido que se genera al hacer rotar la región que definen las curvas dadas alrededor del eje dado.
(b) Utilice su calculadora para evaluar la integral con una aproximación de cinco decimales.

21. $y = xe^{-x}, \ y = 0, \ x = 2;$ alrededor del eje y.

22. $y = \tan x, \ y = 0, \ x = \pi/4;$ alrededor de $x = \pi/2$

23. $y = \cos^4 x, \ y = -\cos^4 x, \ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2;$ alrededor de $x = \pi$

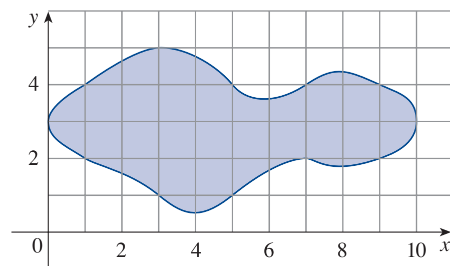
24. $y = x, \ y = 2x/(1 + x^3);$ alrededor de $x = -1$

25. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi, \ x = 0;$ alrededor de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7, \ x = 4;$ alrededor de $y = 5$

27. Aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen obtenido cuando la región bajo la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$, gira alrededor del eje y. Considere $0 \leqslant x \leqslant 1$.

28. Si la región que se muestra en la figura gira alrededor del eje y para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para calcular el volumen del sólido.



29–32 Cada una de las integrales siguientes representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

29. $\int_0^3 2\pi x^5 \, dx$

30. $\int_1^3 2\pi y \ln y \, dy$

31. $2\pi \int_1^4 \frac{y + 2}{y^2} \, dy$

32. $\int_0^1 2\pi (2 - x)(3^x - 2^x) \, dx$

33–34 Utilice una gráfica para calcular las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego con esa información calcule el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región acotada por estas curvas.

33. $y = x^2 - 2x, \quad y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

34. $y = e^{\operatorname{sen} x}y, \quad y = x^2 - 4x + 5$

SAC **35–36** Use un sistema algebraico computacional para calcular el volumen exacto del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

35. $y = \operatorname{sen}^2 x, \ y = \operatorname{sen}^4 x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $x = \pi/2$

36. $y = x^3 \operatorname{sen} x, \ y = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $x = -1$

37–43 La región acotada por las curvas dadas gira alrededor del eje especificado. Determine el volumen del sólido resultante, por medio de cualquier método.

37. $y = -x^2 + 6x - 8$, $y = 0$; alrededor del eje y

38. $y = -x^2 + 6x - 8$, $y = 0$; alrededor del eje x

39. $y^2 - x^2 = 1$, $y = 2$; alrededor del eje x

40. $y^2 - x^2 = 1$, $y = 2$; alrededor del eje y

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; alrededor del eje y

42. $x = (y - 3)^2$, $x = 4$; alrededor de $y = 1$

43. $x = (y - 1)^2$, $x - y = 1$; alrededor de $x = -1$

44. Sea T la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2), y sea V el volumen del sólido generado cuando T gira alrededor de la recta $x = a$, donde $a > 1$. Exprese a en términos de V.

45–47 Utilice cascarones cilíndricos para encontrar el volumen del sólido.

45. Una esfera de radio r.

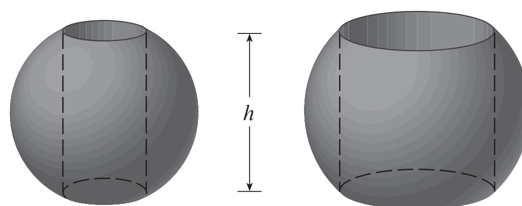
46. El toro sólido del ejercicio 6.2.63.

47. Un cono circular recto de altura h y base de radio r.

48. Suponga que usted fabrica anillos para servilletas perforando agujeros de diferentes diámetros en dos bolas de madera (las cuales también tienen diámetros distintos). Usted descubre que ambos anillos para las servilletas tienen la misma altura h, como se muestra en la figura.

(a) Conjeture cuál anillo contiene más madera.

(b) Verifique su conjetura: utilice cascarones cilíndricos para calcular el volumen de un anillo para servilleta creado al perforar un agujero con radio r a través del centro de una esfera de radio R y exprese la respuesta en función de h.



6.4 Trabajo

El término *trabajo* se utiliza en el lenguaje cotidiano para expresar el esfuerzo que se requiere para ejecutar una tarea. En física, el trabajo tiene un significado técnico que depende de la idea de *fuerza*. Intuitivamente se puede pensar en una fuerza como algo que provoca un impulso o un jalón sobre un objeto; por ejemplo, el empuje horizontal de un libro hacia el otro lado de la mesa, o bien, el jalón hacia abajo que ejerce la gravedad de la Tierra sobre una pelota. En general, si un objeto se desplaza en línea recta con función posición $s(t)$, entonces la **fuerza** F sobre el objeto (en la misma dirección) está dada por la segunda ley de Newton del movimiento como el producto de su masa m por su aceleración a, es decir:

1
$$F = ma = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

En el sistema métrico SI, la masa se mide en kilogramos (kg), el desplazamiento en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en newtons ($N = kg \cdot m/s^2$). Así, una fuerza de 1 N que actúa sobre una masa de 1 kg produce una aceleración de 1 m/s^2. En el sistema usual de Estados Unidos, libra es la unidad fundamental usada como unidad de fuerza.

En el caso de aceleración constante, la fuerza F también es constante, y el trabajo realizado está definido como el producto de la fuerza F por la distancia d que el objeto recorre:

2
$$W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Si F se mide en newtons y d en metros, entonces la unidad de W es un newton-metro, llamada joule (J). Si F se mide en libras y d en pies, entonces la unidad de W es pie-libra (pie-lb), que es de casi 1.36 J.

EJEMPLO 1

(a) ¿Qué tanto trabajo se realiza al levantar un libro de 1.2 kg desde el suelo y colocarlo en un escritorio que tiene 0.7 m de altura? Utilice el hecho de que la aceleración debida a la gravedad es $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.
(b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al levantar desde el suelo un peso de 20 lb a una altura de 6 pies?

SOLUCIÓN

(a) La fuerza ejercida es igual y opuesta a la que ejerce la gravedad, de modo que con la ecuación 1 se obtiene

$$F = mg = (1.2)(9.8) = 11.76 \text{ N}$$

por lo que la ecuación 2 proporciona el trabajo realizado como

$$W = Fd = (11.76 \text{ N})(0.7 \text{ m}) \approx 8.2 \text{ J}$$

(b) En este caso, la fuerza es $F = 20$ lb, de modo que el trabajo realizado es

$$W = Fd = (20 \text{ lb})(6 \text{ pies}) = 120 \text{ pies-lb}$$

Observe que en el inciso (b), a diferencia del inciso (a), no se tuvo que multiplicar por g porque ya se conocía el *peso* (el cual es una fuerza) y no la masa del objeto. ■

La ecuación 2 define el trabajo siempre y cuando la fuerza sea constante, pero, ¿qué ocurre si la fuerza es variable? Suponga que el objeto se desplaza a lo largo del eje x en la dirección positiva, de $x = a$ a $x = b$, y que en cada punto x entre a y b actúa una fuerza $f(x)$ sobre el objeto, donde f es una función continua. Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y ancho igual Δx. Elija un punto muestra x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la fuerza en el punto es $f(x_i^*)$. Si n es grande, entonces Δx es pequeña, y puesto que f es continua, los valores de f no cambian mucho sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En otras palabras, f es casi constante sobre el intervalo, por lo que el trabajo W_i que se realiza al desplazar la partícula desde x_{i-1} hasta x_i se obtiene aproximadamente con la ecuación 2:

$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Por lo que se puede dar un valor aproximado del trabajo total

3
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Parece que esta aproximación es mejor a medida que se incrementa a n. Por tanto, se define el **trabajo realizado al mover el objeto de *a* a *b*** como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$. Puesto que el lado derecho de (3) es una suma de Riemann, su límite es una integral definida, por lo que

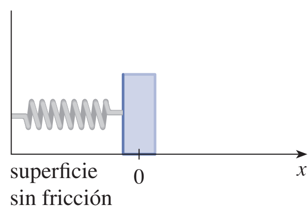
4
$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 2 Cuando una partícula se ubica a una distancia x metros del origen, una fuerza de $x^2 + 2x$ newtons actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla de $x = 1$ a $x = 3$?

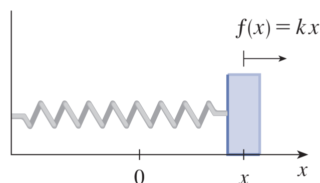
SOLUCIÓN

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2\Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

El trabajo realizado es $16\frac{2}{3}$ J. ■



(a) Posición natural del resorte



(b) Posición estirada del resorte

FIGURA 1
Ley de Hooke

En el ejemplo siguiente se aplica una ley de la física: la **ley de Hooke** establece que la fuerza requerida para mantener un resorte estirado x unidades más de su longitud natural es proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

donde k es una constante positiva, que se llama **constante del resorte** (véase la figura 1). La ley de Hooke se cumple siempre que x no sea demasiado grande.

EJEMPLO 3 Se requiere una fuerza de 40 N para mantener un resorte que está estirado desde su posición natural de 10 cm a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se hace al estirar el resorte de 15 a 18 cm?

SOLUCIÓN De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza que se requiere para mantener el resorte estirado x metros más allá de su longitud natural es $f(x) = kx$. Cuando el resorte se estira de 10 a 15 cm, la cantidad estirada es 5 cm $=$ 0.05 m. Esto significa que $f(0.05) = 40$, por lo que

$$0.05k = 40 \qquad k = \frac{40}{0.05} = 800$$

Así, $f(x) = 800x$ y el trabajo hecho al estirar el resorte de 15 a 18 cm es

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\,dx = 800 \left.\frac{x^2}{2}\right]_{0.05}^{0.08}$$

$$= 400[(0.08)^2 - (0.05)^2] = 1.56 \text{ J}$$

■

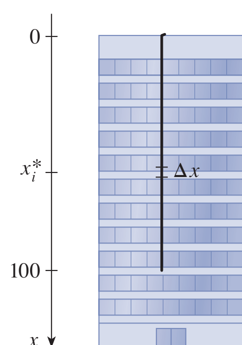


FIGURA 2

EJEMPLO 4 Un cable de 200 lb mide 100 pies de largo y cuelga verticalmente desde lo alto de un edificio. ¿Cuánto trabajo se requiere para subir el cable hasta la parte superior del edificio?

SOLUCIÓN En este caso no hay una fórmula para la función fuerza, pero se puede aplicar un razonamiento similar al que se condujo a la definición 4.

Se coloca el origen en lo alto del edificio y el eje x apuntando hacia abajo como se muestra en la figura 2. Se divide el cable en pequeños segmentos de longitud Δx. Si x_i^* es un punto en el i-ésimo intervalo, entonces todos los puntos del intervalo se levantan casi la misma cantidad, dígase, x_i^*. El cable pesa 2 libras por cada pie, de modo que el peso del i-ésimo segmento es (2 lb/pie)(Δx pie) $=$ 2 Δx lb. Por lo que el trabajo realizado en el i-ésimo segmento, en pies-libras, es

$$\underbrace{(2\Delta x)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{x_i^*}_{\text{distancia}} = 2x_i^*\,\Delta x$$

Se obtiene el trabajo total que se realizó sumando todas las aproximaciones y haciendo que la cantidad de segmentos sea grande (de modo que $\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i^*\,\Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx$$

$$= x^2\Big]_0^{100} = 10{,}000 \text{ pie-lb}$$

■

Si se hubiera colocado el origen en la parte inferior del cable y el eje x hacia arriba, se habría obtenido

$$W = \int_0^{100} 2(100 - x)\,dx$$

lo cual da la misma respuesta.

EJEMPLO 5 Un depósito tiene la forma de un cono circular invertido de altura igual a 10 m y radio de la base de 4 m. Se llena con agua hasta alcanzar una altura de 8 m. Determine el trabajo que se requiere para vaciar el agua mediante bombeo por la parte superior del depósito. (La densidad del agua es 1000 kg/m³.)

SOLUCIÓN Se miden profundidades desde la parte superior del recipiente introduciendo una recta vertical de coordenadas como en la figura 3. El agua se extiende desde una profundidad de 2 m hasta una profundidad de 10 m y de esta manera se divide el intervalo [2, 10] en n subintervalos con extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y se elige x_i^* en el i-ésimo subintervalo. De este modo el agua se divide en n capas. La i-ésima capa es aproximadamente un cilindro circular de radio r_i y altura Δx. Se puede calcular r_i a partir de triángulos semejantes, usando la figura 4 como se indica a continuación:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

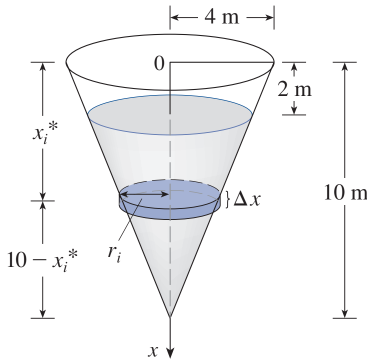


FIGURA 3

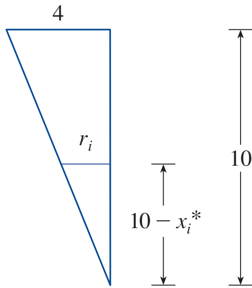


FIGURA 4

Por lo que un volumen aproximado de la i-ésima capa de agua es

$$V_i \approx \pi r_i^2 \,\Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

y así su masa es

$$\begin{aligned} m_i &= \text{densidad} \times \text{volumen} \\ &\approx 1000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x \end{aligned}$$

La fuerza necesaria para subir esta capa debe superar a la fuerza de gravedad, y así

$$\begin{aligned} F_i = m_i g &\approx (9.8)160\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x \\ &= 1568\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x \end{aligned}$$

Cada partícula en la capa debe viajar una distancia de aproximadamente x_i^*. El trabajo W_i realizado para subir esta capa hasta lo alto del depósito es aproximadamente el producto de la fuerza F_i por la distancia x_i^*:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

Para encontrar el trabajo total en el vaciado del tanque, se suman las contribuciones de cada una de las n capas y después se toma el límite cuando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x = \int_2^{10} 1568\pi x(10 - x)^2 \,dx \\ &= 1568\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\,dx = 1568\pi \left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_2^{10} \\ &= 1568\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3.4 \times 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

■

6.4 EJERCICIOS

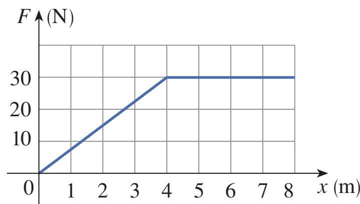
1. Un gorila de 360 lb trepa a un árbol a una altura de 20 pies. Encuentre el trabajo realizado si el gorila alcanza esa altura en
   (a) 10 segundos (b) 5 segundos

2. ¿Cuánto trabajo se realiza cuando un elevador levanta una roca de 200 kg a una altura de 3 m?

3. Una fuerza variable de $10/(1 + x)^2$ libras mueve una partícula desde el origen a un punto que está a x pies. Calcule el trabajo realizado para mover la partícula desde el origen a una distancia de 9 pies.

4. Cuando una partícula se localiza a una distancia de x metros desde el origen, una fuerza de $\cos(\pi x/3)$ newtons actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover la partícula desde $x = 1$ hasta $x = 2$? Interprete su respuesta considerando el trabajo realizado desde $x = 1$ hasta $x = 1.5$ y desde $x = 1.5$ hasta $x = 2$.

5. Se muestra la gráfica de una función fuerza (en newtons) que se incrementa a su máximo valor y luego permanece constante. ¿Cuánto trabajo hace la fuerza al mover un objeto a una distancia de 8 m?



6. La tabla muestra los valores de una función fuerza $f(x)$, donde x se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Aplique la regla del punto medio para estimar el trabajo que realiza la fuerza al mover un objeto desde $x = 4$ hasta $x = 20$.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	5	5.8	7.0	8.8	9.6	8.2	6.7	5.2	4.1

7. Se requiere una fuerza de 10 lb para mantener estirado un resorte 4 pulg más de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta 6 pulg más de su longitud natural?

8. Un resorte tiene una longitud natural de 40 cm. Si se requiere una fuerza de 60 N para mantenerlo comprimido una longitud de 10 cm, ¿cuánto trabajo se requiere para comprimirlo a una longitud de 25 cm?

9. Suponga que se necesitan 2 J de trabajo para estirar un resorte desde su longitud natural de 30 cm hasta una longitud de 42 cm.
(a) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 35 hasta 40 cm?
(b) ¿Cuánto más allá de su longitud natural, mantendrá una fuerza de 30 N al resorte estirado?

10. Si el trabajo que se requiere para estirar un resorte 1 pie más de su longitud natural es 12 pies-lb, ¿cuánto trabajo se requiere para estirar el resorte 9 pulg más de su longitud natural?

11. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Compare el trabajo W_1 hecho al estirar un resorte desde 20 hasta 30 cm con el trabajo W_2 hecho en estirarlo desde 30 hasta 40 cm. ¿Cómo se relacionan W_2 y W_1?

12. Si se necesitan 6 J de trabajo para estirar un resorte de 10 a 12 cm y otros 10 J para estirarlo de 12 a 14 cm, ¿cuál es la longitud natural del resorte?

13–22 Muestre cómo obtener un valor aproximado del trabajo requerido mediante una suma de Riemann. Luego exprese el trabajo como una integral y evalúela.

13. Una pesada soga de 50 pies de largo pesa 0.5 lb/pie y está colgando por un lado de un edificio de 120 pies de altura.
(a) ¿Cuánto trabajo se hace al jalar la soga por la parte superior del edificio?
(b) ¿Cuánto trabajo se realiza al jalar la mitad de la soga a la parte superior del edificio?

14. Un cable grueso de 60 pies de largo que pesa 180 lb, cuelga de un malacate en una grúa. Calcule de dos formas diferentes el trabajo hecho si el malacate recoge 25 pies de cable.
(a) Siga el método del ejemplo 4.
(b) Escriba una función para el peso del cable restante después de que el malacate ha levantado x pies. Calcule la cantidad de trabajo hecho cuando el malacate levanta Δx pies de cable.

15. Un cable que pesa 2 lb/pies se utiliza para levantar 800 libras de carbón arriba del pozo de una mina de 500 pies de profundidad. Determine el trabajo realizado.

16. Una cadena que está en el suelo mide 10 m de largo y su masa es de 80 kg. ¿Cuánto trabajo se efectúa para subir un extremo de la cadena a una altura de 6 m?

17. Un cubo de 10 kg, con un agujero, se sube desde el suelo hasta una altura de 12 m con rapidez constante por medio de una soga que pesa 0.8 kg/m. Al principio, el cubo contiene 36 kg de agua, pero el agua se sale con rapidez constante y termina de salirse justo cuando el cubo llega a los 12 m de altura. ¿Cuánto trabajo se realizó?

18. Un cubo que pesa 4 lb y una soga de peso despreciable se usan para extraer agua de un pozo de 80 pies de profundidad. El cubo se llena con 40 lb de agua y se jala hacia arriba con una rapidez de 2 pies/s, pero el agua se sale por un agujero que tiene el cubo, con una rapidez de 0.2 lb/s. Calcule el trabajo hecho al jalar el cubo hasta la boca del pozo.

19. Una cadena de 10 pies de largo pesa 25 lb y cuelga de un techo. Calcule el trabajo hecho al subir el extremo inferior de la cadena al techo de modo que esté al mismo nivel que el extremo superior.

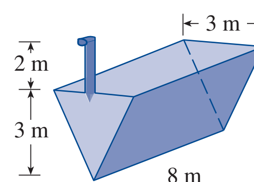
20. Una piscina circular tiene un diámetro de 10 m, los lados miden 1.5 m de altura y la profundidad del agua es de 1.2 m. ¿Cuánto trabajo se requiere para sacar por bombeo toda el agua por uno de los lados?

21. Un acuario que mide 2 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de profundidad está lleno con agua. Determine el trabajo que se requiere para sacar por bombeo la mitad del agua de dicho acuario. (Utilice el hecho de que la densidad del agua es de 1000 kg/m^3.)

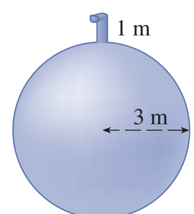
22. Un tanque esférico de agua, de 24 pies de diámetro, se coloca encima de una torre de 60 pies. El tanque se llena con una manguera en la parte inferior de la esfera. Si se utiliza una bomba de 1.5 caballos de fuerza para llevar el agua hasta el tanque, ¿cuánto se tarda en llenar el depósito? (Un caballo de fuerza = 550 pies-lb de trabajo por segundo.)

23–26 Un tanque está lleno de agua. Determine el trabajo necesario para que, mediante bombeo, el agua salga por el tubo de descarga. En los ejercicios 25 y 26 utilice el hecho de que el peso del agua es de 62.5 lb/pies^3.

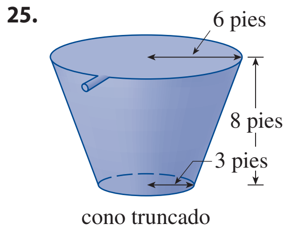
23.



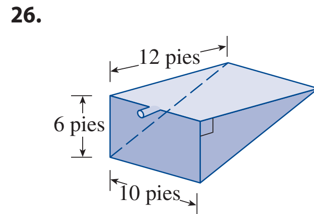
24.



25.



26.

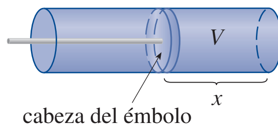


27. Suponga que en el caso del depósito del ejercicio 23, la bomba se descompone después de que se ha realizado un trabajo de 4.7×10^5 J. ¿Cuál es la profundidad del agua que queda en el depósito?

28. Resuelva el ejercicio 24 suponiendo que el tanque está lleno a la mitad de aceite con densidad de 900 kg/m³.

29. Cuando el gas se expande en un cilindro de radio r, la presión en cualquier momento dado es una función del volumen: $P = P(V)$. La fuerza que ejerce el gas sobre el émbolo (véase la figura) es el producto de la presión por el área: $F = \pi r^2 P$. Demuestre que el trabajo que realiza el gas cuando el volumen se expande desde el volumen V_1 al volumen V_2 es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$



30. En un motor de vapor, la presión P y el volumen V del vapor cumplen con la ecuación $PV^{1.4} = k$, donde k es una constante. (Esto es válido en el caso de la expansión adiabática, es decir, la expansión en la cual no hay transferencia de calor entre el cilindro y sus alrededores.) Utilice el ejercicio 29 para calcular el trabajo realizado por el motor durante un ciclo cuando el vapor inicia a una presión de 160 lb/pulg² y un volumen de 100 pulg³ y se expande a un volumen de 800 pulg³.

31. La energía cinética EC de un objeto de masa en movimiento con velocidad v se define como EC $= \frac{1}{2}mv^2$. Si una fuerza $f(x)$ actúa sobre el objeto, moviéndolo a lo largo del eje x de x_1 a x_2, el *teorema del trabajo y la energía* establece que el trabajo neto es igual al cambio en energía cinética: $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$, donde v_1 es la velocidad en x_1 y v_2 es la velocidad en x_2.

(a) Sean $x = s(t)$ la función de posición del objeto al tiempo t, $v(t)$ y $a(t)$ las funciones velocidad y aceleración, respectivamente. Demuestre el teorema del trabajo y la energía al utilizar primero la regla de sustitución para integrales definidas (5.5.6) para demostrar que

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(s(t))\; v(t)\, dt$$

Luego utilice la segunda ley de movimiento de Newton (fuerza = masa × aceleración) y la sustitución $u = v(t)$ para evaluar la integral.

(b) ¿Cuánto trabajo (en pies-lb) se necesita para lanzar una bola de boliche de 12 lb a 20 millas/h? (*Nota*: divida el peso en libras entre 32 pies/s² de la aceleración de la gravedad, para encontrar la masa, medida en slugs.)

32. Suponga que cuando arranca un carro de 800 kg de una montaña rusa, un sistema de propulsión electromagnética ejerce una fuerza de $5.7x^2 + 1.5x$ newtons sobre el carro en una distancia de x metros de distancia a lo largo de la pista. Utilice el ejercicio 31(a) para encontrar la velocidad del carro cuando ha viajado 60 metros.

33. (a) La ley de gravitación de Newton establece que dos cuerpos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos y G es la constante gravitacional. Si uno de los cuerpos está fijo, determine el trabajo necesario para llevar al otro desde $r = a$ hasta $r = b$.

(b) Calcule el trabajo requerido para lanzar un satélite de 1000 kg en dirección vertical hasta una órbita a 1000 km de altura. Puede suponer que la masa de la Tierra es de 5.98×10^{24} kg y está concentrada en su centro. Tome el radio de la Tierra como 6.37×10^6 m y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg².

34. La gran pirámide del rey Keops fue construida de piedra caliza en Egipto durante un período de 20 años, desde 2580 a. C. a 2560 a. C. Su base es un cuadrado con una longitud del lado de 756 pies, y su altura cuando se construyó fue de 481 pies. (Fue la estructura hecha por el hombre más alta del mundo por más de 3800 años.) La densidad de la piedra caliza es aproximadamente 150 lb/pies³.

(a) Estime el trabajo total realizado en la construcción de la pirámide.

(b) Si cada obrero trabajó 10 horas al día durante 20 años, 340 días al año, e hizo 200 pies-lb/h de trabajo al levantar los bloques de piedra caliza de su lugar, aproximadamente, ¿cuántos obreros se necesitaron para construir la pirámide?



6.5 Valor promedio de una función

Es fácil calcular el valor promedio de una cantidad finita de números $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{\text{prom}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

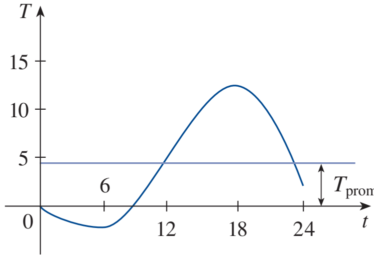


FIGURA 1

Pero ¿de qué manera se calcula la temperatura promedio durante un día, si una gran cantidad de lecturas de temperatura es posible? En la figura 1 se muestran la gráfica de una función temperatura $T(t)$, donde t se mide en horas y T en °C, y una suposición de la temperatura promedio, T_{prom}.

En general, se trata de calcular el valor promedio de una función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Se empieza por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Luego se eligen los puntos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en subintervalos sucesivos y se calcula el promedio de los números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por ejemplo, si f representa una función temperatura y $n = 24$, esto significa que se toman lecturas de la temperatura cada hora y luego se promedian.) Puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, se puede escribir $n = (b - a)/\Delta x$, y el valor promedio es

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}[f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)]\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{b-a}[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Si se incrementa n, se puede calcular el valor promedio de un gran número de valores muy poco separados. (Por ejemplo, se puede promediar lecturas de temperatura tomadas cada minuto o hasta cada segundo.) El valor límite es

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

por la definición de integral definida.

Por tanto, se define el **valor promedio de *f*** sobre el intervalo $[a, b]$ como

Para una función positiva, se puede pensar esta definición como

$$\frac{\text{área}}{\text{ancho}} = \text{altura promedio}$$

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN Con $a = -1$ y $b = 2$ se tiene

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2 \quad ■$$

Si $T(t)$ es la temperatura en el tiempo t, puede preguntarse si existe un momento específico en el que la temperatura es la misma que la temperatura promedio. Para la función temperatura trazada en la figura 1, existen dos momentos: justo antes del mediodía y

antes de la medianoche. En general, ¿hay un número c en el cual el valor de f es exactamente igual al valor promedio de la función, es decir, $f(c) = f_{\text{prom}}$? El teorema siguiente dice que esto es válido para funciones continuas.

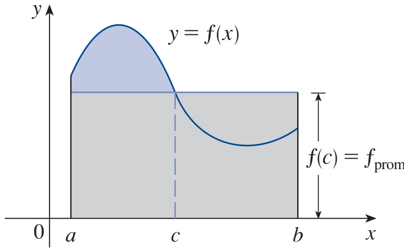


FIGURA 2

Siempre puede cortarse una parte de lo alto de una montaña (bidimensional) hasta una cierta altura, y usarla para rellenar con eso los valles, de tal modo que la montaña se vuelva completamente plana.

Teorema del valor medio para integrales Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

es decir,
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

El teorema del valor medio para integrales es una consecuencia del teorema del valor medio para las derivadas y del teorema fundamental del cálculo. La demostración se delinea en el ejercicio 25.

La interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales es que, para funciones *positivas* f, existe un número c tal que el rectángulo con base $[a, b]$ y altura $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f de a a b. (Véase la figura 2 y la interpretación más clara en la nota al margen.)

EJEMPLO 2 Puesto que $f(x) = 1 + x^2$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$, el teorema del valor medio para integrales establece que hay un número c en $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = f(c)[2 - (-1)]$$

En este caso particular se puede encontrar c en forma explícita. Del ejemplo 1, se sabe que $f_{\text{prom}} = 2$, de modo que el valor de c satisface

$$f(c) = f_{\text{prom}} = 2$$

Por tanto, $\qquad 1 + c^2 = 2 \qquad$ entonces $\qquad c^2 = 1$

Por consiguiente, sucede en este caso que hay dos números $c = \pm 1$ en el intervalo $[-1, 2]$ que funcionan en el teorema del valor medio para integrales. ■

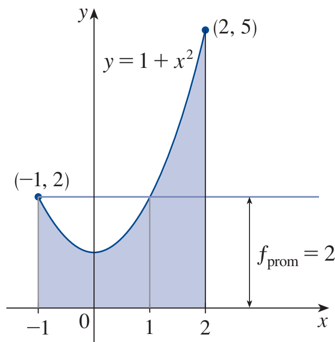


FIGURA 3

Los ejemplos 1 y 2 se ilustran mediante la figura 3.

EJEMPLO 3 Demuestre que la velocidad promedio de un automóvil en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es la misma que el promedio de sus velocidades durante el viaje.

SOLUCIÓN Si $s(t)$ es el desplazamiento del automóvil en el tiempo t, entonces, por definición, la velocidad promedio del automóvil en el intervalo es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por otro lado, el valor promedio de la función velocidad sobre el intervalo es

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1}[s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{(por el teorema del cambio neto)} \\ &= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{velocidad promedio} \end{aligned}$$ ■

6.5 EJERCICIOS

1–8 Determine el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = 3x^2 + 8x, \quad [-1, 2]$

2. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

3. $g(x) = 3 \cos x, \quad [-\pi/2, \pi/2]$

4. $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}, \quad [0, 2]$

5. $f(t) = te^{-t^2}, \quad [0, 5]$

6. $f(x) = x^2/(x^3 + 3)^2, \quad [-1, 1]$

7. $h(x) = \cos^4 x \text{ sen } x, \quad [0, \pi]$

8. $h(u) = (\ln u)/u, \quad [1, 5]$

9–12
(a) Calcule el valor promedio de f sobre el intervalo dado.
(b) Encuentre c tal que $f_{\text{prom}} = f(c)$.
(c) Trace la gráfica de f y el rectángulo cuya área es la misma que el área bajo la gráfica de f.

9. $f(x) = (x - 3)^2, \quad [2, 5]$

10. $f(x) = 1/x, \quad [1, 3]$

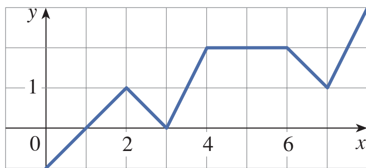
11. $f(x) = 2 \text{ sen } x - \text{sen } 2x, \quad [0, \pi]$

12. $f(x) = 2xe^{-x^2}, \quad [0, 2]$

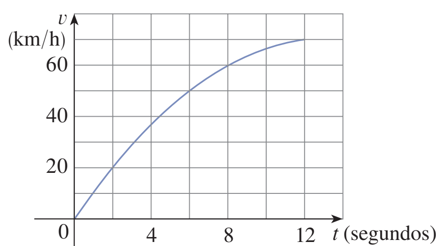
13. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, demuestre que f toma el valor de 4 por lo menos una vez en el intervalo [1, 3].

14. Determine los números b tales que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ es igual a 3.

15. Encuentre el valor promedio de f sobre [0, 8].



16. Se muestra la gráfica de velocidad de un automóvil que acelera.



(a) Utilice la regla del punto medio para estimar la velocidad promedio del automóvil durante los primeros 12 segundos.
(b) ¿En qué momento la velocidad instantánea fue igual a la velocidad promedio?

17. En una cierta ciudad la temperatura (en °C) t horas después de las 9:00 se modeló mediante la función

$$T(t) = 20 + 6 \text{ sen } \frac{\pi t}{12}$$

Determine la temperatura promedio durante el período de 9:00 hasta 21:00.

18. La velocidad v de la sangre que fluye en un vaso sanguíneo con radio R y longitud l a una distancia r del eje central es

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre (véase el ejemplo 3.7.7). Encuentre la velocidad promedio (respecto a r) sobre el intervalo $0 \leqslant r \leqslant R$. Compare la velocidad promedio con la velocidad máxima.

19. La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $12/\sqrt{x + 1}$ kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Determine la densidad promedio de la varilla.

20. (a) Una taza de café tiene una temperatura de 95 °C y le toma 30 minutos enfriarse a 61 °C en una habitación con una temperatura de 20 °C. Utilice la ley del enfriamiento de Newton (sección 3.8) para demostrar que la temperatura del café después de t minutos es

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

donde $k \approx 0.02$.
(b) ¿Cuál es la temperatura promedio del café durante la primera media hora?

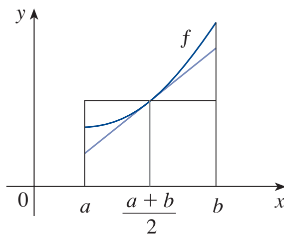
21. En el ejemplo 3.8.1 se modeló la población mundial en la segunda mitad del siglo xx por la ecuación $P(t) = 2560e^{0.017185t}$. Utilice esta ecuación para estimar la población mundial promedio durante este período.

22. Si un cuerpo en caída libre parte del reposo, entonces su desplazamiento está dado por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Sea la velocidad después de un tiempo T sea v_T. Demuestre que si se calcula el promedio de las velocidades respecto a t, se obtiene $v_{\text{prom}} = \frac{1}{2}v_T$; pero si se calcula el promedio de las velocidades respecto a s, se obtiene $v_{\text{prom}} = \frac{2}{3}v_T$.

23. Utilice el resultado del ejercicio 5.5.83 para calcular el volumen promedio de aire inhalado en los pulmones en un ciclo respiratorio.

24. Utilice el diagrama para mostrar que si f es cóncava hacia arriba sobre $[a, b]$, entonces

$$f_{\text{prom}} > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



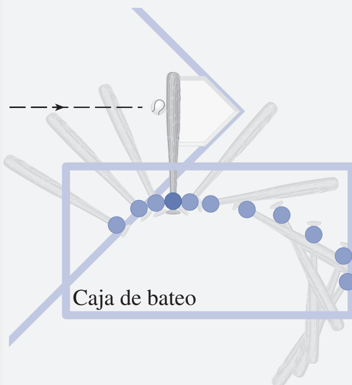
25. Demuestre el teorema del valor medio para integrales aplicando el teorema del valor medio para derivadas (véase la sección 4.2) a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

26. Si $f_{\text{prom}}[a, b]$ denota el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, demuestre que

$$f_{\text{prom}}[a, b] = \left(\frac{c-a}{b-a}\right) f_{\text{prom}}[a, c] + \left(\frac{b-c}{b-a}\right) f_{\text{prom}}[c, b]$$

PROYECTO DE APLICACIÓN EL CÁLCULO Y EL BÉISBOL

En este proyecto se exploran tres de las muchas aplicaciones del cálculo al béisbol. Las interacciones físicas del juego, especialmente la colisión de la pelota y el bate, son bastante complejas, y sus modelos se examinan en detalle en un libro de Robert Adair, *The Physics of Baseball*, 3a. ed. (Nueva York, 2002).



Vista aérea de la posición de un bate de béisbol, que se muestra cada quincuagésimo de segundo durante un bateo típico. (Adaptado de *The Physics of Baseball*)

1. Puede sorprenderle saber que el contacto durante la colisión de una pelota de béisbol y el bate dura solo aproximadamente una milésima de segundo. Aquí se estima la fuerza promedio sobre el bate durante esta colisión, calculando primero el cambio de la cantidad de movimiento de la bola.

La *cantidad de movimiento* p de un objeto es el producto de su masa m y su velocidad v, es decir, $p = mv$. Suponga que sobre un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta, actúa una fuerza $F = F(t)$ que es una función continua del tiempo.

(a) Demuestre que el cambio de la cantidad de movimiento durante un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es igual a la integral de F de t_0 a t_1; es decir, demuestre que

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$$

Esta integral se llama *impulso* de la fuerza en el intervalo de tiempo.

(b) Un lanzador lanza una bola rápida a 90 millas/h a un bateador que conecta un *hit* en línea directamente de regreso hacia el lanzador. La pelota está en contacto con el bate 0.001 s y abandona el bate con una velocidad 110 millas/h. Una pelota de béisbol pesa 5 oz y, en el sistema de unidades de Estados Unidos, su masa se mide en slugs: $m = w/g$, donde $g = 32$ pies/s^2.

(i) Encuentre el cambio en la cantidad de movimiento de la bola.

(ii) Determine la fuerza promedio sobre el bate.

2. En este problema se calcula el trabajo necesario para que un lanzador arroje una bola rápida a 90 millas/h, considerando primero la energía cinética.

La *energía cinética* EC de un objeto de masa m y velocidad v está dada por $EC = \frac{1}{2}mv^2$. Suponga que un objeto de masa m se está moviendo en línea recta, y actúa sobre él una fuerza $F = F(s)$ que depende de su posición s. De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$F(s) = ma = m\,\frac{dv}{dt}$$

donde a y v denotan la aceleración y la velocidad del objeto.

(a) Demuestre que el trabajo de mover el objeto desde una posición s_0 a una posición s_1 es igual al cambio de energía cinética del objeto; es decir, demuestre que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

donde $v_0 = v(s_0)$ y $v_1 = v(s_1)$ son las velocidades del objeto en las posiciones s_0 y s_1.
Sugerencia: por la regla de la cadena,

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

(b) ¿Cuántos pies-libras de trabajo se requieren para lanzar una pelota de béisbol a una velocidad de 90 millas/h?

3. (a) Un jardinero atrapa una pelota de béisbol a 280 pies del plato de *home* y la arroja directamente al cátcher con una velocidad inicial de 100 pies/s. Suponga que la velocidad $v(t)$ de la bola después de t segundos satisface la ecuación diferencial $dv/dt = -\frac{1}{10}v$ debido a la resistencia del aire. ¿Cuánto tarda la bola en llegar al plato (home)? (Desprecie cualquier movimiento vertical de la bola.)

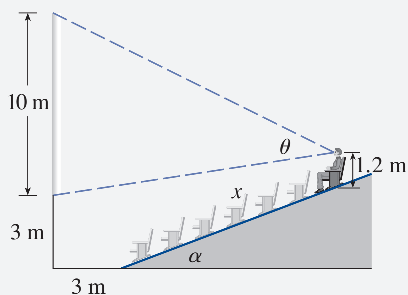
(b) El mánager del equipo se pregunta si la bola llegará a *home* antes apoyándose en un jugador de cuadro. El parador en corto puede colocarse entre el jardinero y el plato de *home*, captura la pelota lanzada por el jardinero, gira y tira la pelota al cátcher con una velocidad inicial de 105 pies/s. El mánager registra el tiempo de intervención del parador en corto (capturar, girar, tirar) en medio segundo. ¿A qué distancia de *home* debe posicionarse el parador en corto para minimizar el tiempo total de llegada de la pelota a *home*? ¿El mánager debería alentar a un tiro directo o un tiro con relevo? ¿Qué sucede si el parador en corto puede lanzar a 115 pies/s?



(c) ¿Con qué velocidad debe lanzar el parador en corto para que su lanzamiento de relevo iguale el tiempo de un tiro directo?

PROYECTO DE APLICACIÓN  DÓNDE SENTARSE EN EL CINE

Una sala de cine tiene una pantalla que está colocada a 3 m del suelo y tiene 10 m de altura. La primera fila de asientos está ubicada a 3 metros de la pantalla, y las filas están separadas 1 metro. El piso de la zona de asientos está inclinado un ángulo de $\alpha = 20°$ arriba de la horizontal, y la distancia inclinada hasta donde usted está sentado es x. La sala tiene 21 filas de asientos, de modo que $0 \leqslant x \leqslant 20$. Suponga que decide que el mejor lugar para sentarse es la fila donde el ángulo θ que subtiende la pantalla a sus ojos es un máximo. Suponga también que sus ojos están 1.2 m arriba del piso, como se muestra en la figura. (En el ejercicio 4.7.78 se estudia una versión más sencilla de este problema, en el que el piso es horizontal, pero este proyecto plantea una situación más complicada y requiere tecnología.)



1. Demuestre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab}\right)$$

donde $$a^2 = (3 + x\cos\alpha)^2 + (11.8 - x\,\text{sen}\,\alpha)^2$$

y $$b^2 = (3 + x\cos\alpha)^2 + (x\,\text{sen}\,\alpha - 1.8)^2$$

2. Con una gráfica de θ como una función de x estime el valor de x que maximiza θ. ¿En cuál fila debe sentarse? ¿Cuál es el ángulo de visión θ en esta fila?

3. Utilice un sistema algebraico computacional para derivar θ y calcule un valor numérico para la raíz de la ecuación $d\theta/dx = 0$. ¿Este valor confirma su resultado del problema 2?

4. Con una gráfica de θ estime el valor promedio de θ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 20$. Luego utilice su sistema algebraico computacional para calcular el valor promedio. Compare con los valores máximos y mínimos de θ.

6 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) Trace dos curvas representativas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Muestre cómo aproximar al área entre estas curvas mediante una suma de Riemann, y trace los rectángulos correspondientes de aproximación. Luego escriba una expresión para el área exacta.
(b) Explique cómo cambia la situación si las curvas tienen ecuaciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$, donde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.

2. Suponga que Sue corre más rápido que Kathy en la competencia de los 1500 m. ¿Cuál es el significado físico del área entre sus curvas de velocidad durante el primer minuto de la competencia?

3. (a) Suponga que S es un sólido con áreas de sección transversal conocidas. Explique cómo obtener un valor aproximado del volumen de S mediante una suma de Riemann. Escriba una expresión para el volumen exacto.
(b) Si S es un sólido de revolución, ¿cómo se determinan las áreas de las secciones transversales?

4. (a) ¿Cuál es el volumen de un cascarón cilíndrico?
(b) Explique cómo utilizar los cascarones cilíndricos para calcular el volumen de un sólido de revolución.
(c) ¿Por qué preferiría usted usar el método de cálculo mediante cascarones en lugar del método de las rebanadas?

5. Suponga que empuja usted un libro al otro lado de una mesa de 6 m de largo ejerciendo una fuerza $f(x)$ en cada punto desde $x = 0$ hasta $x = 6$. ¿Qué representa $\int_0^6 f(x)\,dx$? Si $f(x)$ se mide en newtons, ¿cuáles son las unidades para la integral?

6. (a) ¿Cuál es el valor promedio de una función f sobre un intervalo $[a, b]$?
(b) ¿Qué establece el teorema del valor medio para integrales? ¿Cuál es su interpretación geométrica?

EJERCICIOS

1–6 Encuentre el área de la región acotada por cada una de las curvas siguientes.

1. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

2. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt[3]{x}, \quad y = x - 2$

3. $y = 1/x, \quad y = x^2, \quad y = 0, \quad x = e$

4. $x + y = 0, \quad x = y^2 + 3y$

5. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2), \quad y = x^2 - 2x$

6. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2, \quad x = 2$

7–11 Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar cada una de las regiones acotadas por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

7. $y = 2x,\ y = x^2$; alrededor del eje x

8. $x = 1 + y^2,\ y = x - 3$; alrededor del eje y

9. $x = 0,\ x = 9 - y^2$; alrededor de $x = -1$

10. $y = x^2 + 1,\ y = 9 - x^2$; alrededor de $y = -1$

11. $x^2 - y^2 = a^2,\ x = a + h$ (donde $a > 0, h > 0$); alrededor del eje y

12–14 Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido obtenido al rotar la región acotada por cada una de las curvas dadas sobre el eje especificado.

12. $y = \tan x,\ y = x,\ x = \pi/3$; alrededor del eje y

13. $y = \cos^2 x,\ |x| \leqslant \pi/2,\ y = \frac{1}{4}$; alrededor de $x = \pi/2$

14. $y = \sqrt{x},\ y = x^2$; alrededor de $y = 2$

15. Encuentre los volúmenes de los sólidos obtenidos mediante la rotación de la región acotada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de las rectas siguientes.
(a) El eje x (b) El eje y (c) $y = 2$

16. Sea $\mathcal{R}$ la región en el primer cuadrante acotada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Calcule las cantidades siguientes
(a) El área de $\mathcal{R}$
(b) El volumen obtenido al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x
(c) El volumen obtenido al rotar $\mathcal{R}$ en torno al eje y

17. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por las curvas $y = \tan(x^2)$, $x = 1$ y $y = 0$. Utilice la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar las cantidades siguientes.
(a) El área de $\mathcal{R}$
(b) El volumen obtenido al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x

18. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = x^6 - x + 1$. Estime las cantidades siguientes.
(a) Las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas
(b) El área de $\mathcal{R}$
(c) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ rota alrededor del eje x
(d) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ rota alrededor del eje y

19–22 Cada una de las integrales siguientes representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx$

20. $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x \, dx$

21. $\int_0^{\pi} \pi(2 - \operatorname{sen} x)^2 \, dx$

22. $\int_0^{4} 2\pi(6 - y)(4y - y^2) \, dy$

---

23. La base de un sólido es un disco circular con radio 3. Encuentre el volumen del sólido si las secciones transversales paralelas y perpendiculares a la base son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa ubicada a lo largo de la base.

24. La base de un sólido es la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2 - x^2$. Encuentre el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados y uno de sus lados coincide con la base.

25. La altura de un monumento es de 20 m. Un corte transversal horizontal a una distancia de x metros desde la parte superior es un triángulo equilátero con $\frac{1}{4}x$ metros de lado. Encuentre el volumen del monumento.

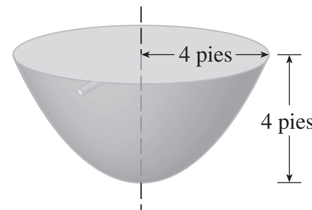
26. (a) La base de un sólido es un cuadrado con vértices en (1, 0), (0, 1), $(-1, 0)$ y $(0, -1)$. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo. Encuentre el volumen del sólido.
(b) Muestre que se puede calcular el volumen más fácilmente del sólido del inciso (a), cortándolo y rearmándolo para formar un cono.

27. Se requiere una fuerza de 30 N para mantener estirado un resorte desde su longitud natural de 12 a 15 cm de longitud. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde 12 hasta 20 cm?

28. Un ascensor de 1600 lb está suspendido por un cable de 200 pies que pesa 10 lb/pies. ¿Cuánto trabajo es necesario para elevar el ascensor una distancia de 30 pies desde el sótano hasta el tercer piso?

29. Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paraboloide de revolución, como se muestra en la figura; es decir, su forma se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de un eje vertical.
(a) Si su altura es de 4 pies y el radio en la parte superior es de 4 pies, encuentre el trabajo necesario para sacar el agua fuera del tanque.

(b) Después de que se han realizado 4000 pies-lb de trabajo, ¿cuál es la profundidad del agua restante en el tanque?



30. Un tanque de acero tiene la forma de un cilindro circular orientado verticalmente con diámetro 4 m y 5 m de altura. El tanque está lleno ahora a un nivel de 3 m de aceite tiene una densidad de 920 kg/m³. Determine el trabajo necesario para bombear el aceite hacia fuera a través de un tubo de descarga de 1 m en la parte superior del tanque.

31. Encuentre el valor promedio de la función $f(t) = \sec^2 t$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

32. (a) Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ en el intervalo [1, 4].
(b) Encuentre el valor c que garantiza el teorema del valor medio para integrales tales que $f_{\text{prom}} = f(c)$.
(c) Trace la gráfica de f en [1, 4] y un rectángulo cuya área es la misma que el área bajo la gráfica de f.

33. Si f es una función continua, ¿cuál es el límite cuando $h \to 0$ del valor promedio de f sobre el intervalo $[x, x + h]$?

34. Sea $\mathcal{R}_1$ la región acotada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = b$, donde $b > 0$. Sea $\mathcal{R}_2$ la región acotada por $y = x^2$, $x = 0$ y $y = b^2$.
(a) ¿Existe un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tienen la misma área?
(b) ¿Existe un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ barre el mismo volumen cuando gira alrededor del eje x que alrededor del eje y?
(c) ¿Existe un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ barren el mismo volumen cuando giran alrededor del eje x?
(d) ¿Existe un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ barren el mismo volumen cuando giran alrededor del eje y?

Problemas adicionales

1. (a) Encuentre una función f continua positiva tal que el área bajo la gráfica de f desde 0 hasta t es $A(t) = t^3$ para toda $t > 0$.
   (b) Un sólido se genera al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = f(x)$, donde f es una función positiva y $x \geqslant 0$. El volumen generado por la parte de la curva desde $x = 0$ hasta $x = b$ es b^2 para toda $b > 0$. Determine la función f.

2. Existe una recta que pasa por el origen que divide la región definida por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x en dos regiones de igual área. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

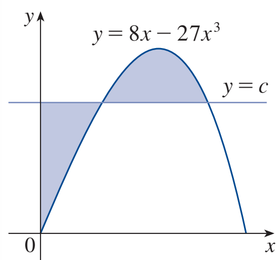
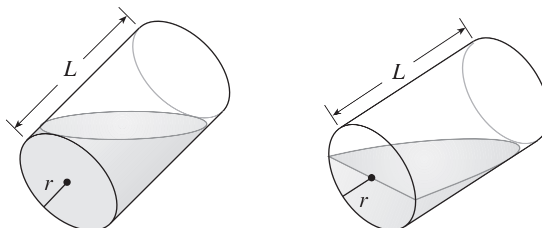


FIGURA PARA EL PROBLEMA 3

3. En la figura se ilustra una recta horizontal $y = c$ que interseca a la curva $y = 8x - 27x^3$. Encuentre el número c tal que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales.

4. Un vaso cilíndrico de vidrio, de radio r y altura L, se llena con agua y luego se ladea hasta que el agua que queda en el recipiente cubre exactamente la base.
   (a) Determine una manera de "rebanar" el agua en secciones transversales, rectangulares y paralelas, y luego *plantee* una integral definida para determinar el volumen del agua en el vaso.
   (b) Encuentre una manera para obtener "rebanadas" de agua que sean secciones transversales y paralelas, pero que sean trapezoides, y luego *plantee* una integral definida para obtener el volumen del agua.
   (c) Determine el volumen de agua en el vaso evaluando una de las integrales de los incisos (a) o (b).
   (d) Encuentre el volumen del agua en el vaso a partir de consideraciones puramente geométricas.
   (e) Suponga que el recipiente se ladea hasta que el agua cubre exactamente la mitad de la base. ¿En qué dirección puede usted "rebanar" el agua en secciones transversales triangulares? ¿Y en secciones transversales rectangulares? ¿Y en secciones transversales que son segmentos de círculos? Determine el volumen de agua en el vaso.



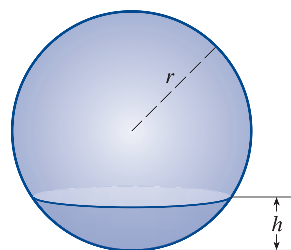


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. (a) Demuestre que el volumen de un segmento de altura h de una esfera de radio r es

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

   (Véase la figura.)
   (b) Demuestre que si una esfera de radio 1 se corta mediante un plano a una distancia x del centro de tal manera que el volumen de un segmento es el doble del volumen del otro, entonces x es una solución de la ecuación

$$3x^3 - 9x + 2 = 0$$

   donde $0 < x < 1$. Utilice el método de Newton para determinar una x con una aproximación de cuatro decimales.
   (c) Utilice la fórmula para el volumen de un segmento de una esfera para demostrar que la profundidad x en la cual una esfera flotante de radio r se hunde en el agua es una raíz de la ecuación

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$$

   donde s es el peso específico de la esfera. Suponga que una esfera de madera de radio igual a 0.5 m tiene peso específico de 0.75. Calcule la profundidad, con una aproximación de cuatro decimales, a la cual la esfera se hunde.
   (d) Un tazón semiesférico tiene radio de 12 cm y le entra agua a razón de 3 cm^3/s.
      (i) ¿Qué tan rápido sube el nivel de agua en el tazón en el instante en que el agua tiene 7 cm de profundidad?
      (ii) En un cierto instante, el agua tiene 8 cm de profundidad. ¿Qué tiempo se requiere para llenar con agua el tazón?

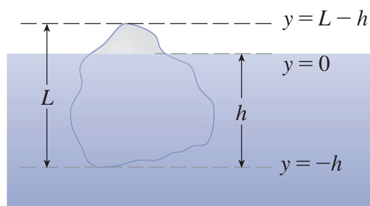


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación de un objeto parcial o totalmente sumergido en un líquido es igual al peso del líquido que desaloja el objeto. Por tanto, en el caso de un objeto de densidad ρ_0, que flota parcialmente sumergido en un líquido de densidad ρ_f, la fuerza de flotación es $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\, dy$, donde g es la aceleración debida a la gravedad y $A(y)$ es el área de una sección transversal representativa del objeto (véase la figura). El peso del objeto está dado por

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)\, dy$$

(a) Demuestre que el porcentaje del volumen del objeto por arriba de la superficie del líquido es

$$100\, \frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

(b) La densidad del hielo es 917 $\mathrm{kg/m^3}$, y la densidad del agua de mar es de 1030 $\mathrm{kg/m^3}$. ¿Qué porcentaje del volumen de un iceberg sobresale del agua?

(c) Un cubo de hielo flota en un vaso lleno con agua hasta el borde. ¿Se derramará el agua cuando se derrita el cubo de hielo?

(d) Una esfera de radio 0.4 m y de peso insignificante flota en un enorme lago de agua dulce. ¿Qué tanto trabajo se requiere para sumergir toda la esfera? La densidad del agua es de 1000 $\mathrm{kg/m^3}$.

7. El agua que se encuentra en un tazón abierto se evapora con una rapidez proporcional al área de la superficie del agua. (Esto significa que la rapidez de decremento del volumen es proporcional al área de la superficie.) Demuestre que la profundidad del agua disminuye a una rapidez constante, sin importar la forma del tazón.

8. Una esfera de radio 1 se sobrepone a una esfera más pequeña de radio r de tal manera que su intersección es una circunferencia de radio r. (En otras palabras, cuando ambas se cortan, el resultado es un círculo de radio máximo de la esfera menor.) Determine r de modo que el volumen en el interior de la esfera pequeña y el volumen incluyendo el exterior de la esfera mayor sea tan grande como sea posible.

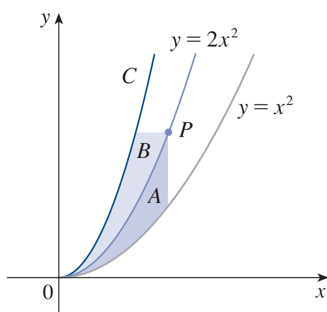
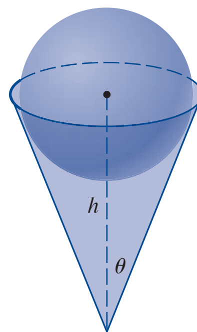


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. En la figura se ilustra una curva C con la propiedad de que para todo punto P en la mitad sobre la curva $y = 2x^2$, las áreas A y B son iguales. Determine una ecuación para C.

10. Un vaso de papel lleno con agua tiene la forma de un cono de altura h y ángulo semivertical θ. (Véase la figura.) Una pelota se coloca con todo cuidado en el vaso, con lo que se desplaza una parte del agua y se derrama. ¿Cuál es el radio de la pelota que ocasiona que se derrame el volumen máximo de agua?



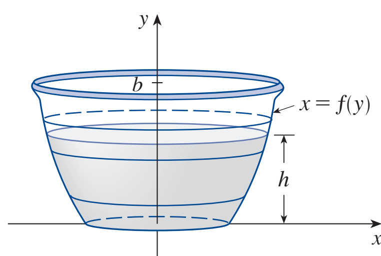


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

11. Una *clepsidra* o reloj de agua es un recipiente de vidrio con un pequeño agujero en el fondo a través del cual el agua puede salir. El "reloj" se calibra para que mida el tiempo, colocando marcas en el recipiente que corresponden a los niveles de agua en tiempos con igual separación. Sea $x = f(y)$ continua en el intervalo $[0, b]$ y suponga que el recipiente se formó al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje y. Sea V el volumen de agua y h la altura del nivel de agua en el tiempo t.

(a) Determine V en función de h.

(b) Demuestre que

$$\frac{dV}{dt} = \pi [f(h)]^2 \frac{dh}{dt}$$

(c) Suponga que A es el área del agujero en el fondo del recipiente. De la ley de Torricelli se tiene que la razón de cambio del volumen del agua es

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

donde k es una constante negativa. Determine una fórmula para la función f tal que dh/dt es una constante C. ¿Cuál es la ventaja de tener $dh/dt = C$?

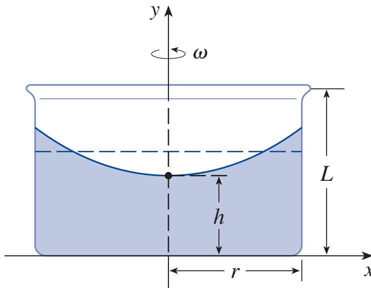


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

12. Un tanque cilíndrico de radio r y altura L está lleno en parte con un líquido cuyo volumen es V. Si se hace girar el tanque alrededor del eje de simetría con rapidez angular constante w, entonces el tanque inducirá un movimiento rotatorio en el líquido alrededor del mismo eje. A la larga, el líquido estará girando a la misma rapidez angular que el tanque. La superficie del líquido será convexa, como se indica en la figura, porque la fuerza centrífuga en las partículas del líquido aumenta con la distancia desde el eje del tanque. Se puede demostrar que la superficie del líquido es un paraboloide de revolución generado al hacer girar la parábola

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

alrededor del eje y, donde g es la aceleración de la gravedad.

(a) Determine h como una función de w.

(b) ¿A qué rapidez angular la superficie del líquido tocará el fondo? ¿A qué rapidez se derramará el agua por el borde?

(c) Suponga que el radio del tanque es 2 m, la altura es 7 m y que el tanque y el líquido giran a la misma rapidez angular constante. La superficie del líquido está a 5 m abajo de la parte superior del depósito en el eje central y a 4 m abajo de la parte superior del tanque a un 1 m fuera desde el eje central.

(i) Determine la rapidez angular del tanque y el volumen del líquido.

(ii) ¿Qué tanto por debajo de la parte superior del tanque está el líquido en la pared del mismo?

13. Considere la gráfica de una polinomial cúbica que interseca transversalmente la parábola $y = x^2$ cuando $x = 0$, $x = a$ y $x = b$, donde $0 < a < b$. Si las dos regiones entre las curvas tienen la misma área, ¿cómo se relaciona b con a?

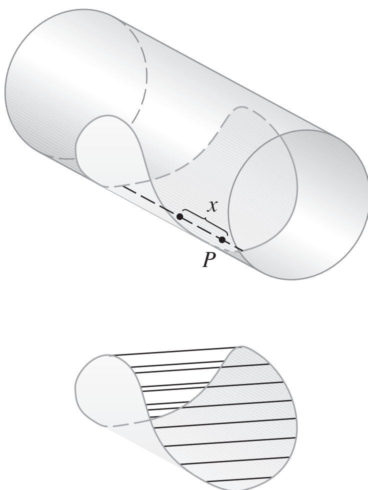


FIGURA PARA EL PROBLEMA 14

SAC **14.** Suponga que se planea hacer un taco con una tortilla de 8 pulg de diámetro, de modo que la tortilla parezca que está rodeando en parte un cilindro circular. Llene la tortilla hasta la orilla (y no más) con carne, queso y otros ingredientes. El problema es decidir cómo curvar la tortilla para maximizar el volumen de comida que pueda contener.

(a) Empiece por colocar un cilindro circular de radio r a lo largo del diámetro de la tortilla y rodee con esta el cilindro. Sea x la distancia desde el centro de la tortilla hasta el punto P en el diámetro (véase la figura). Demuestre que el área de la sección transversal del taco lleno en el plano que pasa por P y es perpendicular al eje del cilindro es

$$A(x) = r\sqrt{16 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{r}\sqrt{16 - x^2}\right)$$

y escriba una expresión para el volumen del taco lleno.

(b) Determine (aproximadamente) el valor de r que maximiza el volumen del taco. (Recurra a un método gráfico con su SAC.)

15. Si la recta tangente en un punto P sobre la curva $y = x^3$ corta transversalmente otra vez la curva en Q, sea A el área de la región acotada por la curva y el segmento de recta PQ. Sea B el área de la región definida de la misma manera iniciando con Q, en lugar de P. ¿Cuál es la relación entre A y B?

7 Técnicas de integración


© USDA

La fotografía muestra una mosca del gusano tornillo, la primera plaga efectivamente eliminada de una región por la técnica del insecto estéril sin pesticidas. La idea es introducir machos estériles dentro de la población que al aparearse con las hembras no produzcan descendencia. En el ejercicio 7.4.67 se evaluará una integral que relaciona la población de insectos femeninos con el tiempo.

CON EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL cálculo es posible integrar una función si conoce una antiderivada; esto es, una integral indefinida. A continuación se resumen las integrales más importantes aprendidas hasta ahora.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$$

En este capítulo se desarrollarán técnicas para utilizar estas fórmulas básicas de integración para obtener integrales indefinidas de funciones más complicadas. En la sección 5.5, aprendió el método de integración más importante, la regla de sustitución. La otra técnica general, la integración por partes, se presenta en la sección 7.1. Después aprenderá métodos especiales para clases de funciones particulares, como funciones trigonométricas y funciones racionales.

La integración no es tan sencilla como la derivación. No existen reglas que garanticen absolutamente la obtención de una integral indefinida de una función, así que se discutirá una estrategia para la integración en la sección 7.5.

7.1 Integración por partes

Cada regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente. Por ejemplo, a la regla de sustitución para la integración, le corresponde la regla de la cadena para la derivación. La regla de integración que le corresponde a la derivación de un producto se llama *integración por partes*.

La regla del producto establece que si f y g son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

o $$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Se puede reacomodar esta ecuación como

1 $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

La fórmula 1 se llama **fórmula para la integración por partes**. Tal vez sea más fácil recordarla en la notación siguiente: sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces, las diferenciales son $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$, así que, por la regla de sustitución, la fórmula para la integración por partes será

2 $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN CON LA FÓRMULA 1 Suponga que elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Para g puede elegir *cualquier* antiderivada de g'.) Así, utilizando la fórmula 1, tiene

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Es muy aconsejable verificar derivando la respuesta. Si lo hace, obtendrá x sen x, como es de esperarse.

Es conveniente utilizar el patrón:

$$u = \square \qquad dv = \square$$
$$du = \square \qquad v = \square$$

SOLUCIÓN CON LA FÓRMULA 2 Sea

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Entonces $$du = dx \qquad v = -\cos x$$

y por lo que

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \int \overbrace{x}^{u}\, \overbrace{\operatorname{sen} x\, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\, \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\, \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$ ■

NOTA El objetivo al utilizar la integración por partes es obtener una integral más sencilla que la original. Así, en el ejemplo 1, la original es $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ y se expresa en términos de la integral más sencilla $\int \cos x\, dx$. Si hubiera elegido $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\, dx$, entonces $du = \cos x\, dx$ y $v = x^2/2$, por lo que la integral por partes da

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Aunque esto es cierto, $\int x^2 \cos x\, dx$ es una integral más difícil que la que quiere resolver. En general, cuando decida escoger u y dv, usualmente tratará de elegir $u = f(x)$ de manera que resulte fácil de derivar (o al menos no tan complicada), y que $dv = g'(x)\, dx$ sea fácil de integrar para obtener v.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \ln x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí no tiene opciones para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

Integrando por partes, se obtiene

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

Se acostumbra escribir $\int 1\, dx$ como $\int dx$.

Verifique su respuesta derivando.

La integración por partes es eficaz en este ejemplo porque la derivada de la función $f(x) = \ln x$ es más sencilla que f. ■

EJEMPLO 3 Encuentre $\int t^2 e^t\,dt$.

SOLUCIÓN Observe que t^2 resulta más sencilla cuando la deriva (mientras que e^t no cambia si la deriva o la integra), así que elija

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\,dt$$

Entonces $$du = 2t\,dt \qquad v = e^t$$

Integrando por partes se obtiene

$$\int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int te^t\,dt \tag{3}$$

La integral que obtuvo, $\int te^t\,dt$, es más sencilla que la original, pero aún no está resuelta porque no tiene solución inmediata. Es necesario utilizar la integración por partes por segunda vez, haciendo $u = t$ y $dv = e^t\,dt$. Entonces $du = dt$, $v = e^t$, y

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt$$
$$= te^t - e^t + C$$

Poniendo esto en la ecuación 3, se obtiene

$$\int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int te^t\,dt$$
$$= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C)$$
$$= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C$$ ■

EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

En el ejercicio 50 del apéndice H, se da un método más fácil, utilizando números complejos.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x se simplifican cuando se derivan, pero de cualquier manera inténtelo eligiendo $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$, así que la integración por partes da

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx \tag{4}$$

La integral que obtiene, $\int e^x \cos x\,dx$, no es más sencilla que la original, pero al menos no es más difícil. Habiendo tenido éxito en el ejemplo anterior al integrar por partes dos veces, persevere e integre por partes nuevamente. Esta vez con $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$ y

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \tag{5}$$

A primera vista parece que no avanzó mucho, porque llegó a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que es de donde partió. Sin embargo, si sustituye la expresión para $\int e^x \cos x\,dx$ de la ecuación 5 en la ecuación 4, obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

La figura 1 ilustra el ejemplo 4 con las gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como verificación visual de su trabajo, observe que $f(x) = 0$ cuando F tiene un máximo o un mínimo.

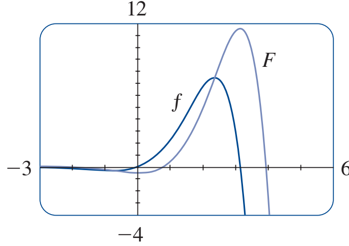


FIGURA 1

Esto puede verse como una ecuación que se resuelve para la integral incógnita. Sumando $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ a ambos lados, obtiene

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividiendo entre 2 y sumando la constante de integración, resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$ ■

Si combina la fórmula para la integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, se pueden evaluar integrales definidas por partes. Evaluando ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y utilizando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene

6 $$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx$$

EJEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Por lo que la fórmula 6 da

$$\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx = x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

$$= 1 \cdot \tan^{-1}1 - 0 \cdot \tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

Ya que $\tan^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, la integral del ejemplo 5 se puede interpretar como el área de la región que se muestra en la figura 2.

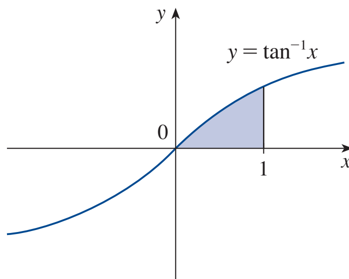


FIGURA 2

Para evaluar esta integral utilice la sustitución $t = 1 + x^2$ (ya que u tiene otro significado en este ejemplo). Entonces $dt = 2x\, dx$, por lo que $x\, dx = \frac{1}{2}\, dt$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; cuando $x = 1$, $t = 2$; por lo que

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Por tanto $$\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$ ■

EJEMPLO 6 Demuestre la fórmula de reducción siguiente

La ecuación 7 se llama *fórmula de reducción* porque el exponente n se reduce a $n - 1$ y $n - 2$.

7 $$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un número entero.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Entonces $$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x \cos x\, dx \qquad v = -\cos x$$

así al integrar por partes se obtiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x \cos^2 x\, dx$$

Dado que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

Como en el ejemplo 4, resuelva esta ecuación para la integral deseada tomando el último término del lado derecho y pasándolo al lado izquierdo. Por lo que se tiene

$$n\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx$$

o $$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx$$ ■

La fórmula de reducción (7) es útil porque, al utilizarla repetidamente, puede expresar $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\, dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\, dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 EJERCICIOS

1–2 Evalúe las integrales siguientes utilizando integración por partes con las elecciones de u y dv indicadas.

1. $\int xe^{2x}\, dx; \quad u = x,\ dv = e^{2x}\, dx$

2. $\int \sqrt{x}\ln x\, dx; \quad u = \ln x,\ dv = \sqrt{x}\, dx$

3–36 Evalúe la integral.

3. $\int x\cos 5x\, dx$

4. $\int ye^{0.2y}\, dy$

5. $\int re^{r/2}\, dr$

6. $\int t\operatorname{sen} 2t\, dt$

7. $\int (x^2 + 2x)\cos x\, dx$

8. $\int t\sec^2 2t\, dt$

9. $\int \cos^{-1}x\, dx$

10. $\int \ln\sqrt{x}\, dx$

11. $\int t^4\ln t\, dt$

12. $\int \tan^{-1}2y\, dy$

13. $\int t\csc^2 t\, dt$

14. $\int x\cosh ax\, dx$

15. $\int \ln\sqrt[3]{x}\, dx$

16. $\int \frac{z}{10^z}\, dz$

17. $\int \arctan 4t\, dt$

18. $\int s\, 2^s\, ds$

19. $\int z^3e^z\, dz$

20. $\int x\tan^2 x\, dx$

21. $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\, dx$

22. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\, dx$

23. $\int_0^{1/2} x\cos \pi x\, dx$

24. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\, dx$

25. $\int_0^2 y\operatorname{senh} y\, dy$

26. $\int_1^2 w^2\ln w\, dw$

27. $\int_1^5 \frac{\ln R}{R^2}\, dR$

28. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\, dy$

29. $\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\cos x\, dx$

30. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\, dx$

31. $\int_1^5 \frac{M}{e^M}\, dM$

32. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\, dx$

33. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\, dx$

34. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}}\, dr$

35. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x\, dx$

36. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s)\, ds$

37–42 Primero haga una sustitución y después utilice integración por partes para evaluar las integrales siguientes.

37. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

38. $\int \cos(\ln x)\, dx$

39. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

40. $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\, dt$

41. $\int x \ln(1 + x)\, dx$

42. $\int \frac{\operatorname{arcsen}(\ln x)}{x}\, dx$

43–46 Evalúe las integrales indefinidas siguientes. Ilustre y verifique que su respuesta sea razonable, al trazar la gráfica de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$).

43. $\int x e^{-2x}\, dx$

44. $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

45. $\int x^3 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

46. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$

47. (a) Utilice la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Utilice el inciso (a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

48. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(b) Utilice el inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x\, dx$.
(c) Use los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x\, dx$.

49. (a) Utilice la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.
(b) Utilice el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.
(c) Utilice el inciso (a) para demostrar que, para potencias impares del seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n + 1)}$$

50. Demuestre que, para potencias pares del seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

51–54 Utilice la integración por partes para demostrar las fórmulas de reducción siguientes.

51. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

52. $\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx$

53. $\int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n - 1} - \int \tan^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

54. $\int \sec^n x\, dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n - 1} + \frac{n - 2}{n - 1} \int \sec^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

55. Utilice el ejercicio 51 para encontrar $\int (\ln x)^3\, dx$.

56. Use el ejercicio 52 para encontrar $\int x^4 e^x\, dx$.

57–58 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas.

57. $y = x^2 \ln x, \quad y = 4 \ln x$

58. $y = x^2 e^{-x}, \quad y = x e^{-x}$

59–60 Utilice una gráfica para aproximar la coordenada x de los puntos de intersección de las curvas dadas. Después encuentre (en forma aproximada) el área de la región acotada por las curvas.

59. $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}x\right), \quad y = 2 - x^2$

60. $y = x \ln(x + 1), \quad y = 3x - x^2$

61–64 Utilice el método de los cascarones cilíndricos para encontrar el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas dadas alrededor de los ejes dados.

61. $y = \cos(\pi x/2),\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$ alrededor del eje y

62. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1;$ alrededor del eje y

63. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0;$ alrededor de $x = 1$

64. $y = e^x,\ x = 0,\ y = 3;$ alrededor del eje x

65. Calcule el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = 2$ alrededor de cada eje.
(a) el eje y (b) el eje x

66. Calcule el valor promedio de $f(x) = x \sec^2 x$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$.

67. La función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$ se discutió en el ejemplo 5.3.3 y se usa en forma extensa en la teoría de la óptica. Encuentre $\int S(x)\, dx$. [Su respuesta involucrará a $S(x)$.]

68. Un cohete acelera al quemar su combustible, de manera que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial del cohete al despegar (incluyendo su combustible) es m, el combustible se consume con una rapidez r y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t está dado por la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s y $v_e = 3000$ m/s, encuentre la altura del cohete un minuto después del despegue.

69. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta a una velocidad $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué tan lejos llegará después de t segundos?

70. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, demuestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

71. Suponga que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 x f''(x)\,dx$.

72. (a) Utilice integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

(b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugerencia*: utilice el inciso (a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]

(c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, trace un diagrama para dar una interpretación geométrica del inciso (b).

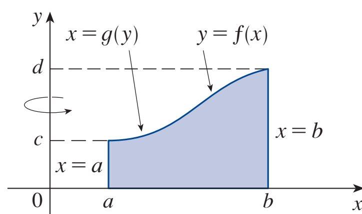
(d) Utilice el inciso (b) para evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$.

73. Utilizando cascarones cilíndricos, se obtuvo la fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, pero ahora puede utilizar integración por partes para demostrarla por medio del método de las rebanadas de la sección 6.2, al menos para el caso en el que f es inyectiva y, por tanto, tiene una función inversa g. Utilice la figura para demostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi [g(y)]^2\,dy$$

Haga la sustitución $y = f(x)$ y después utilice integración por partes sobre la integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$



74. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Demuestre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Utilice el ejercicio 50 para demostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use los incisos (a) y (b) para demostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Utilice el inciso (c) y los ejercicios 49 y 50 para demostrar que

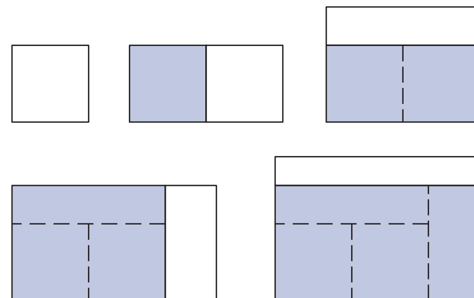
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Usualmente, esta fórmula se expresa como el producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

y se conoce como el *producto de Wallis*.

(e) Construya rectángulos como los siguientes: empiece con un cuadrado de área 1 y adjunte alternativamente rectángulos de área 1 junto al rectángulo anterior o encima de este (véase la figura). Encuentre el límite de las razones del ancho y la altura de estos rectángulos.



7.2 Integrales trigonométricas

En esta sección utilizará identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas. Empiece con las potencias del seno y el coseno.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int \cos^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN No es útil sustituir simplemente $u = \cos x$, ya que entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Para integrar potencias del coseno, necesita un sen x como factor extra. Del mismo modo, una potencia del seno requiere un cos x como factor adicional. Debido a esto, es posible separar un factor coseno y convertir el factor restante $\cos^2 x$ en una expresión que involucre al seno, utilizando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x$$

Puede entonces evaluar la integral sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$, así $du = \cos x\, dx$ y

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$ ■

En general, se intenta escribir una integral que implique potencias de seno y coseno en una forma en la que haya solo un factor seno (y el resto de la expresión en términos del coseno) o solo un factor coseno (y el resto de la expresión en términos del seno). La identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ posibilita esta conversión entre potencias pares del seno y el coseno.

EJEMPLO 2 Encuentre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN Podría convertir $\cos^2 x$ a $1 - \operatorname{sen}^2 x$, pero se tendría una expresión en términos de sen x sin ningún factor extra cos x. En cambio, si separa un solo factor seno y reescribe el factor restante $\operatorname{sen}^4 x$ en términos de cos x:

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

Sustituyendo $u = \cos x$, se tiene $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, por lo que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du \\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$ ■

En la figura 1 se muestra la gráfica del integrando $\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x$ del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

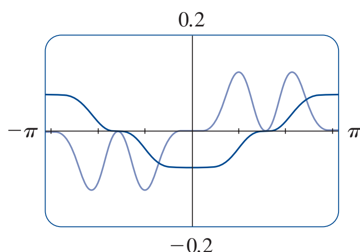


FIGURA 1

En los ejemplos anteriores, una potencia impar del seno o el coseno permite separar un factor y el resto convertirlo en una potencia par. Si el integrando contiene potencias pares del seno y el coseno, esta estrategia falla. En este caso, puede aprovechar las identidades siguientes del ángulo medio (véanse las ecuaciones 17b y 17a en el apéndice D):

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

El ejemplo 3 muestra que el área de la región en la figura 2 es $\pi/2$.

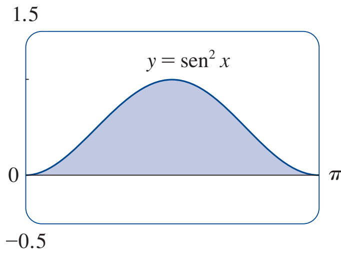


FIGURA 2

SOLUCIÓN Si escribe $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, no se facilita la evaluación de la integral. Sin embargo, utilizando la fórmula del ángulo medio para $\operatorname{sen}^2 x$, tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^\pi$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi$$

Observe que hizo mentalmente la sustitución $u = 2x$ cuando integró $\cos 2x$. En el ejercicio 7.1.47, se presentó otro método para evaluar esta integral. ■

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría evaluarse utilizando la fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$ (ecuación 7.1.7) junto con el ejemplo 3 (como en el ejercicio 7.1.47), pero un método mejor es expresar $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ y utilizar la fórmula del ángulo medio:

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Ya que vuelve a aparecer $\cos^2 2x$, use otra vez la fórmula del ángulo medio

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Lo cual da

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \tfrac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C \qquad ■$$

Para resumir, se proporciona una guía para evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, donde $m \geqslant 0$ y $n \geqslant 0$ son números enteros.

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$

(a) Si la potencia del coseno es impar ($n = 2k + 1$), extraiga un factor coseno y utilice $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x\, (\cos^2 x)^k \cos x\, dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x\, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

Después sustituya $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Si la potencia del seno es impar ($m = 2k + 1$), extraiga un factor seno y use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del coseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x\, \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x\, \operatorname{sen} x\, dx$$

Luego sustituya $u = \cos x$. [Observe que si la potencia de ambos, seno y coseno, es impar, puede utilizarse (a) o (b).]

(c) Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, utilice las identidades del ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algunas veces es conveniente utilizar la identidad

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Puede utilizar una estrategia similar para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$. Dado que $(d/dx) \tan x = \sec^2 x$, es posible separar un factor $\sec^2 x$ y convertir la potencia restante (par) de la secante en una expresión que involucra la tangente, utilizando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. O, puesto que $(d/dx) \sec x = \sec x \tan x$, puede separar un factor $\sec x \tan x$ y convertir la potencia restante (par) de tangente a secante.

EJEMPLO 5 Evalúe $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si separa un factor $\sec^2 x$, puede expresar el factor restante $\sec^2 x$ en términos de la tangente utilizando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Entonces, es posible evaluar la integral sustituyendo $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x\, dx$:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^6 x\, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int u^6 (1 + u^2)\, du = \int (u^6 + u^8)\, du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \tfrac{1}{7} \tan^7 x + \tfrac{1}{9} \tan^9 x + C$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUCIÓN Si separa un factor $\sec^2\theta$, como en el ejemplo anterior, queda un factor $\sec^5\theta$ que no se convierte con facilidad a tangente. Sin embargo, si separa un factor $\sec\theta \tan\theta$, puede convertir la potencia restante de la tangente en una expresión que involucre solo la secante, por medio de la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Por lo que la integral se puede evaluar sustituyendo $u = \sec\theta$, por tanto $du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \tan^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du \\
&= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores muestran estrategias para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ para los dos casos que aquí se resumen.

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

(a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), extraiga un factor $\sec^2 x$ y utilice $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de $\tan x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \tan^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^m x \, (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Después sustituya $u = \tan x$.

(b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), sustituya un factor $\sec x \tan x$ y utilice $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los factores restantes en términos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx
\end{aligned}$$

Luego se sustituye $u = \sec x$.

Para otros casos, no hay guías claras. Puede necesitar identidades, integración por partes y, ocasionalmente, un poco de ingenio. Algunas veces será necesario integrar $\tan x$ utilizando la fórmula establecida en (5.5.5):

$$\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C$$

También necesita la integral indefinida de la secante:

La fórmula 1 fue descubierta por James Gregory en 1668 (véase su biografía en la página 198). Gregory utilizó esta fórmula para resolver un problema en la elaboración de tablas náuticas.

1
$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Podría verificar la fórmula 1 derivando el lado derecho, o como sigue. Primero multiplique el numerador y el denominador por $\sec x + \tan x$:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

Si sustituye $u = \sec x + \tan x$, entonces $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx$, por lo que la integral resulta $\int (1/u)\, du = \ln|u| + C$. Así, tiene

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

EJEMPLO 7 Determine $\int \tan^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí solo aparece $\tan x$, así que utilice $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescribir un factor $\tan^2 x$ en términos de $\sec^2 x$.

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$
$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$$

En la primera integral sustituya mentalmente $u = \tan x$ por lo que $du = \sec^2 x\, dx$. ■

Si aparece una potencia par de la tangente con una potencia impar de la secante, es útil expresar el integrando completamente en términos de la $\sec x$. Las potencias de la $\sec x$ pueden requerir integración por partes, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 Encuentre $\int \sec^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí puede integrar por partes con

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$$
$$du = \sec x \tan x\, dx \qquad v = \tan x$$

Entonces
$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Utilizando la fórmula 1 y resolviendo para la integral requerida, obtiene

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C$$ ■

Integrales como la del ejemplo anterior podrían parecer muy complejas, pero ocurren con frecuencia en aplicaciones de la integración, como se verá en el capítulo 8. Integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$ se pueden determinar mediante métodos similares utilizando la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

Por último, es posible hacer uso de otro conjunto de identidades trigonométricas:

Estas identidades producto se discuten en el apéndice D.

2 Para evaluar las integrales (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ o (c) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, utilice la identidad correspondiente:

$$\text{(a)}\ \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\text{(b)}\ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\text{(c)}\ \cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

EJEMPLO 9 Evalúe $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría evaluarse utilizando integración por partes, pero es más fácil utilizar la identidad en la ecuación 2(a) como sigue:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx &= \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\right) + C\end{aligned}$$ ■

7.2 EJERCICIOS

1–49 Evalúe la integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\, dx$

3. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7\theta \cos^5\theta\, d\theta$

4. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$

5. $\int \operatorname{sen}^5(2t)\cos^2(2t)\, dt$

6. $\int t\cos^5(t^2)\, dt$

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$

8. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$

9. $\int_0^{\pi} \cos^4(2t)\, dt$

10. $\int x \operatorname{sen}^3 x\, dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

12. $\int_0^{\pi/2} (2 - \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$

13. $\int \sqrt{\cos\theta}\, \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$

14. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2(1/t)}{t^2}\, dt$

15. $\int \cot x \cos^2 x\, dx$

16. $\int \tan^2 x \cos^3 x\, dx$

17. $\int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x\, dx$

18. $\int \operatorname{sen} x \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) dx$

19. $\int t \operatorname{sen}^2 t\, dt$

20. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$

21. $\int \tan x \sec^3 x\, dx$

22. $\int \tan^2\theta \sec^4\theta\, d\theta$

23. $\int \tan^2 x\, dx$

24. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\, dx$

25. $\int \tan^4 x \sec^6 x\, dx$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^6\theta \tan^6\theta\, d\theta$

27. $\int \tan^3 x \sec x\, dx$

28. $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx$

29. $\int \tan^3 x \sec^6 x\, dx$

30. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 t\, dt$

31. $\int \tan^5 x \, dx$

32. $\int \tan^2 x \sec x \, dx$

33. $\int x \sec x \tan x \, dx$

34. $\int \frac{\operatorname{sen} \phi}{\cos^3 \phi} \, d\phi$

35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 x \, dx$

36. $\int \csc^4 x \cot^6 x \, dx$

37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^5 \phi \csc^3 \phi \, d\phi$

38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4 \theta \cot^4 \theta \, d\theta$

39. $\int \csc x \, dx$

40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^3 x \, dx$

41. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x \, dx$

42. $\int \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 6\theta \, d\theta$

43. $\int_0^{\pi/2} \cos 5t \cos 10t \, dt$

44. $\int \operatorname{sen} x \sec^5 x \, dx$

45. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$

46. $\int \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x} \, dx$

47. $\int \frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x} \, dx$

48. $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$

49. $\int x \tan^2 x \, dx$

50. Si $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x \sec x \, dx = I$, exprese el valor de $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \sec x \, dx$ en términos de I.

51–54 Evalúe las integrales indefinidas siguientes. Ilustre y verifique que su respuesta es razonable, al trazar la gráfica del integrando y su antiderivada (tome $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2) \, dx$

52. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x \, dx$

53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x \, dx$

54. $\int \sec^4\left(\tfrac{1}{2}x\right) dx$

55. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Evalúe $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ por cuatro métodos:
(a) al sustituir $u = \cos x$
(b) al sustituir $u = \operatorname{sen} x$
(c) con la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
(d) al integrar por partes
Explique las diferencias aparentes en las respuestas.

57–58 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^3 x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

58. $y = \tan x, \quad y = \tan^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4$

59–60 Utilice la gráfica del integrando para intuir el valor de la integral. Después use el método de esta sección para probar que su intuición sea correcta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \, dx$

60. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x \, dx$

61–64 Encuentre el volumen obtenido al rotar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

61. $y = \operatorname{sen} x, \ y = 0, \ \pi/2 \leq x \leq \pi;$ alrededor del eje x

62. $y = \operatorname{sen}^2 x, \ y = 0, \ 0 \leq x \leq \pi;$ alrededor del eje x

63. $y = \operatorname{sen} x, \ y = \cos x, \ 0 \leq x \leq \pi/4;$ alrededor de $y = 1$

64. $y = \sec x, \ y = \cos x, \ 0 \leq x \leq \pi/3;$ alrededor de $y = -1$

65. Una partícula se mueve sobre una línea recta de acuerdo con la función velocidad $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encuentre su posición $s = f(t)$ si $f(0) = 0$.

66. La electricidad doméstica se suministra en la forma de corriente alterna que varía de 155 V a -155 V con una frecuencia de 60 ciclos por segundo (Hz). El voltaje está dado por la ecuación

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\,\pi t)$$

donde t es el tiempo en segundos. Los voltímetros leen el voltaje RMS, por sus siglas en inglés (raíz media cuadrática), que es la raíz cuadrada del valor promedio de $[E(t)]^2$ sobre un ciclo.
(a) Calcule el voltaje RMS de la corriente doméstica.
(b) Muchas estufas eléctricas requieren un voltaje RMS de 220 V. Encuentre la amplitud A correspondiente necesaria para el voltaje $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demuestre las fórmulas siguientes, donde m y n son enteros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

70. Una *serie finita de Fourier* está dada por la suma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx$$
$$= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

Demuestre que el m-ésimo coeficiente a_m está dado por la fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx$$

7.3 Sustitución trigonométrica

En la determinación del área de un círculo o una elipse, surge una integral de la forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, donde $a > 0$. Si fuese $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, la sustitución $u = a^2 - x^2$ sería eficaz; pero, tal como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ es más difícil. Si cambia la variable de x a θ por la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, entonces la identidad $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permite eliminar el signo de la raíz porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta\,|$$

Observe la diferencia entre la sustitución $u = a^2 - x^2$ (en la que la nueva variable es una función de la variable anterior) y la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$ (la variable anterior es una función de la nueva).

En general, es posible hacer una sustitución de la forma $x = g(t)$ al usar a la inversa la regla de sustitución. A fin de simplificar los cálculos, suponga que g tiene una función inversa; es decir, g es inyectiva. En este caso, si se reemplazan u por x y x por t en la regla de sustitución (ecuación 5.5.4), se obtiene

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Este tipo de sustitución se llama *sustitución inversa*.

Se puede hacer la sustitución inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ siempre que defina una función inyectiva. Esto puede llevarse a cabo restringiendo θ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

En la tabla siguiente se listan las sustituciones trigonométricas que son eficaces para las expresiones con radicales debido a las identidades trigonométricas especificadas. En cada caso, la restricción sobre θ se impone para asegurar que la función que define la sustitución es inyectiva. (Estos son los mismos intervalos empleados en la sección 1.5 al definir las funciones inversas.)

Tabla de sustituciones trigonométricas

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen}\theta,\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan\theta,\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec\theta,\quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, donde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Entonces $dx = 3 \cos\theta\, d\theta$ y

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{9 \cos^2\theta} = 3\,|\cos\theta\,| = 3 \cos\theta$$

(Observe que $\cos\theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Así, la regla de la sustitución inversa da

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\,\mathrm{sen}^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta \\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta \\ &= \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta \\ &= -\cot\theta - \theta + C\end{aligned}$$

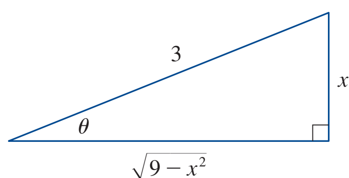


FIGURA 1

$\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{x}{3}$

Puesto que esta es una integral indefinida, debe regresar a la variable original x. Esto puede hacerse ya sea por medio de identidades trigonométricas para expresar $\cot\theta$ en términos de $\mathrm{sen}\,\theta = x/3$ o dibujando un diagrama como el de la figura 1, donde θ se interpreta como un ángulo de un triángulo rectángulo. Ya que $\mathrm{sen}\,\theta = x/3$, denote x al lado opuesto y asigne el valor 3 a la hipotenusa. Entonces el teorema de Pitágoras da la longitud del lado adyacente $\sqrt{9-x^2}$, así que puede simplificar leyendo simplemente el valor de $\cot\theta$ en la figura como:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

(Aunque $\theta > 0$ en el diagrama, esta expresión para $\cot\theta$ es válida aun cuando $\theta < 0$.) Dado que $\mathrm{sen}\,\theta = x/3$, tiene $\theta = \mathrm{sen}^{-1}(x/3)$, así que

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUCIÓN Resolviendo la ecuación para y, obtiene

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{o} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

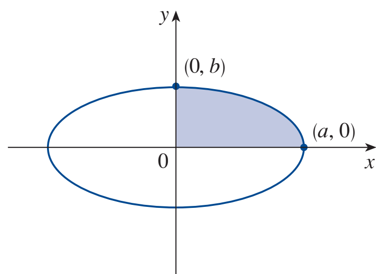


FIGURA 2

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Ya que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes, el área total A es cuatro veces el área en el primer cuadrante (véase la figura 2). La parte de la elipse en el primer cuadrante está dada por la función

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

y por tanto
$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Para evaluar esta integral sustituya $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$. Entonces $dx = a\cos\theta\,d\theta$.

Para cambiar los límites de integración observe que, cuando $x = 0$, sen $\theta = 0$, por lo que $\theta = 0$; cuando $x = a$, sen $\theta = 1$, por lo que $\theta = \pi/2$. También,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a|\cos\theta| = a\cos\theta$$

ya que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Por tanto

$$\begin{aligned} A &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\ &= 2ab\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab \end{aligned}$$

Se ha demostrado que el área de una elipse con semiejes a y b es πab. En particular, tomando $a = b = r$, se demuestra la famosa fórmula del área de un círculo de radio r, πr^2. ■

NOTA Dado que la del ejemplo 2 es una integral definida, se cambiaron los límites de integración y no se tuvo que regresar a la variable x.

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 2\tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Entonces $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4(\tan^2\theta + 1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

Por lo que se tiene

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4\tan^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$$

Para evaluar esta integral trigonométrica, ponga todo en términos de sen θ y cos θ:

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Por tanto, haciendo la sustitución $u = \operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C \\ &= -\frac{\csc\theta}{4} + C \end{aligned}$$

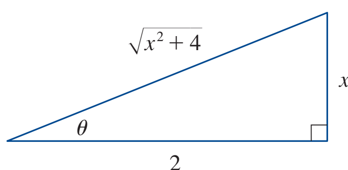


FIGURA 3

$\tan\theta = \dfrac{x}{2}$

Utilice la figura 3 para determinar que $\csc\theta = \sqrt{x^2 + 4}/x$ y, por tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$ ■

EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí podría utilizarse la sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$ (como en el ejemplo 3). Pero es más simple la sustitución directa $u = x^2 + 4$, porque $du = 2x\,dx$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$ ■

NOTA En el ejemplo 4 se ilustra el hecho de que, aun cuando sean posibles las sustituciones trigonométricas, no necesariamente dan la solución más fácil. Por eso, hay que buscar la opción de solución más sencilla.

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, donde $a > 0$.

SOLUCIÓN 1 Sea $x = a\sec\theta$, donde $0 < \theta < \pi/2$ o bien $\pi < \theta < 3\pi/2$. Entonces $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a|\tan\theta| = a\tan\theta$$

Por tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

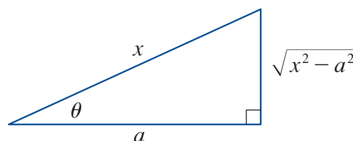


FIGURA 4

$\sec\theta = \dfrac{x}{a}$

El triángulo de la figura 4 da $\tan\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, así que se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$
$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C$$

Escribiendo $C_1 = C - \ln a$, se tiene

1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C_1$$

SOLUCIÓN 2 Para $x > 0$, también puede utilizarse la sustitución hiperbólica $x = a\cosh t$. Con la identidad $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, se tiene

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2\operatorname{senh}^2 t} = a\operatorname{senh} t$$

Dado que $dx = a\operatorname{senh} t\,dt$, se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\operatorname{senh} t\,dt}{a\operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

Puesto que $\cosh t = x/a$, se tiene $t = \cosh^{-1}(x/a)$ y

2 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aunque las fórmulas 1 y 2 parecen muy diferentes, en realidad son equivalentes por la fórmula 3.11.4. ■

NOTA Como se ve en el ejemplo 5, las sustituciones hiperbólicas pueden utilizarse en vez de las sustituciones trigonométricas y, algunas veces, conducen a respuestas más simples; pero por lo general, se utilizan identidades trigonométricas porque son más conocidas que las hiperbólicas.

Como se muestra en el ejemplo 6, a veces es buena idea utilizar la sustitución trigonométrica cuando se presenta $(x^2 + a^2)^{n/2}$ en una integral, donde n es cualquier entero. Lo mismo es verdadero cuando se presenta $(a^2 - x^2)^{n/2}$ o $(x^2 - a^2)^{n/2}$.

EJEMPLO 6 Encuentre $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx$.

SOLUCIÓN Primero observe que $(4x^2 + 9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2 + 9})^3$, así que lo adecuado es la sustitución trigonométrica. Aunque $\sqrt{4x^2 + 9}$ no es realmente una de las expresiones de la tabla de sustituciones trigonométricas, se convierte en una de ellas si hace la sustitución preliminar $u = 2x$. Cuando combina esto con la sustitución de la tangente, se tiene $x = \frac{3}{2}\tan\theta$, lo cual da $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ y

$$\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Cuando $x = 0$, $\tan\theta = 0$, por lo que $\theta = 0$; cuando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, por lo que $\theta = \pi/3$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta}\, \tfrac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta \\
&= \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

Ahora sustituya $u = \cos\theta$, de modo que $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Cuando $\theta = 0$, $u = 1$; cuando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$; por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx &= -\tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1 - u^2}{u^2}\, du \\
&= \tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} (1 - u^{-2})\, du = \tfrac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} \\
&= \tfrac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2} + 2\right) - (1 + 1)\right] = \frac{3}{32}
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$.

SOLUCIÓN Se puede transformar el integrando en una función para la cual es apropiada la sustitución trigonométrica, completando el cuadrado bajo el signo de raíz:

$$\begin{aligned}
3 - 2x - x^2 &= 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1) \\
&= 4 - (x + 1)^2
\end{aligned}$$

Esto sugiere que haga la sustitución $u = x + 1$. Entonces $du = dx$ y $x = u - 1$, por lo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\, du$$

La figura 5 muestra la gráfica del integrando en el ejemplo 7 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

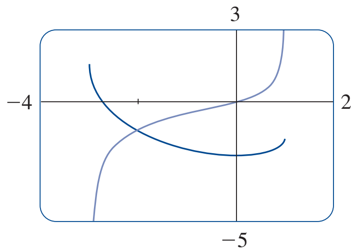


FIGURA 5

Ahora sustituya $u = 2 \operatorname{sen} \theta$ y se obtiene $du = 2 \cos \theta \, d\theta$ y $\sqrt{4 - u^2} = 2 \cos \theta$; por lo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2 \cos \theta}\, 2 \cos \theta \, d\theta \\
&= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1)\, d\theta \\
&= -2 \cos \theta - \theta + C \\
&= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

■

7.3 EJERCICIOS

1–3 Evalúe las integrales siguientes utilizando la sustitución trigonométrica indicada. Dibuje y etiquete el triángulo rectángulo asociado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\, dx; \quad x = 3 \sec \theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2}\, dx; \quad x = 3 \operatorname{sen} \theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx; \quad x = 3 \tan \theta$

4–30 Evalúe la integral.

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4}\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}, \quad a > 0$

8. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - 16}}$

9. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$

10. $\displaystyle\int_0^{2/3} \sqrt{4 - 9x^2}\, dx$

11. $\displaystyle\int_0^{1/2} x\sqrt{1 - 4x^2}\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{4 + t^2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\, dx$

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

24. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$

25. $\displaystyle\int x^2\sqrt{3 + 2x - x^2}\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}}\, dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{1 - x^4}\, dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}\, dt$

31. (a) Utilice una sustitución trigonométrica para demostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

(b) Utilice la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para demostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Estas fórmulas están conectadas con la fórmula 3.11.3.

32. Evalúe

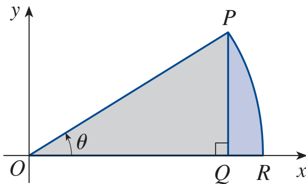
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\, dx$$

(a) por sustitución trigonométrica.
(b) por la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Determine el área de la región acotada por la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

35. Demuestre la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para el área de un sector de un círculo de radio r y ángulo central θ. [*Sugerencia*: suponga que $0 < \theta < \pi/2$ y coloque el centro del círculo en el origen de manera que se ocupe la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces A es la suma del área del triángulo POQ y el área de la región PQR en la figura.]



36. Evalúe la integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

Trace la gráfica del integrando y su integral indefinida en la misma pantalla y verifique que su respuesta sea razonable.

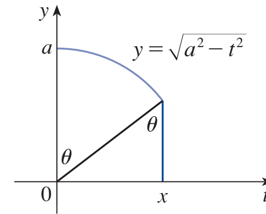
37. Encuentre el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor del eje x la región acotada por las curvas $y = 9/(x^2 + 9)$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

38. Determine el volumen del sólido obtenido al rotar alrededor de la recta $x = 1$, la región bajo la curva $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

39. (a) Utilice una sustitución trigonométrica para verificar que

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

(b) Utilice la figura para dar una interpretación trigonométrica de ambos términos del lado derecho de la ecuación del inciso (a).



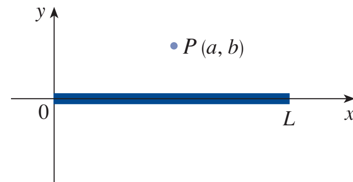
40. La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide el disco $x^2 + y^2 \leqslant 8$ en dos partes. Encuentre las áreas de ambas partes.

41. Un toro se genera al rotar la circunferencia $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ alrededor del eje x. Encuentre el volumen encerrado por el toro.

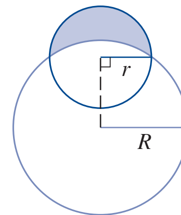
42. Una varilla cargada de longitud L produce un campo eléctrico en un punto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

donde λ es la densidad de carga por unidad de longitud de la varilla y ε_0 es la permitividad del espacio libre (véase la figura). Evalúe la integral para determinar una expresión para el campo eléctrico $E(P)$.



43. Encuentre el área de la región sombreada (llamada luna) acotada por los arcos de circunferencia de radios r y R (véase la figura).



44. Un tanque de almacenamiento de agua tiene la forma de un cilindro de 10 m de diámetro. Está montado de manera que las secciones transversales circulares quedan verticales. Si la profundidad del agua es de 7 m, ¿qué porcentaje de la capacidad total se está utilizando?

7.4 Integración de funciones racionales por fracciones parciales

En esta sección se mostrará cómo integrar cualquier función racional (una razón de polinomios) al expresarla como una suma de fracciones simples, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabe cómo integrar. Para ilustrar el método, observe que al tomar el denominador común de las fracciones $2/(x-1)$ y $1/(x+2)$, se obtiene

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Ahora, si se invierte el procedimiento, verá cómo integrar la función del lado derecho de esta ecuación:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver cómo funciona en general el método de fracciones parciales, considere la función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. Es posible expresar f como una suma de fracciones simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. A una función racional de este estilo se le llama *propia*. Recuerde que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, entonces el grado de P es n y se expresa como grado$(P) = n$.

Si f es *impropia*, esto es, grado$(P) \geqslant$ grado(Q), entonces se debe tomar el paso preliminar de dividir Q entre P (por división larga) hasta obtener el residuo $R(x)$ de manera que grado$(R) <$ grado(Q). El enunciado de la división es

1 $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde S y R también son funciones polinomiales.

Como se ilustra en los ejemplos siguientes, algunas veces este paso preliminar es todo lo que se necesita.

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 2 \\ x-1 & x^3 \quad\quad + x \\ & -(x^3 - x^2) \\ & x^2 + x \\ & -(x^2 - x) \\ & 2x \\ & -(2x-2) \\ & 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN Dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, primero ejecute la división larga. Esto permite escribir

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

■

En el caso de una ecuación 1 cuyo denominador es más complicado, el paso siguiente es factorizar el denominador $Q(x)$ tanto como sea posible. Puede demostrarse que cualquier polinomio Q puede factorizarse como un producto de factores lineales (de la forma $ax + b$) y factores cuadráticos irreducibles (de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$). Por ejemplo, si $Q(x) = x^4 - 16$, se podría factorizar como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

El tercer paso es expresar la función racional propia $R(x)/Q(x)$ (de la ecuación 1) como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \qquad \text{o} \qquad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$$

Existe un teorema que garantiza que esto siempre es posible. Enseguida se explican los detalles de los cuatro casos posibles.

CASO I El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.
Esto significa que se puede escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

donde no hay factores repetidos (y ningún factor es un múltiplo constante de otro). En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

2
$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Estas constantes se pueden determinar como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUCIÓN Ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no es necesario dividir. Se factoriza el denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Puesto que el denominador tiene tres factores lineales diferentes, la descomposición en fracciones parciales del integrando (2) tiene la forma

3
$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Después de este ejemplo, se proporciona otro método para determinar A, B y C.

Para determinar los valores de A, B y C, multiplique ambos lados de esta ecuación por el común denominador, $x(2x - 1)(x + 2)$, para obtener

4
$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación 4 y escribirlo en la forma polinomial estándar, se obtiene

5
$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Las formas polinomiales de la ecuación 5 son idénticas, así que sus coeficientes deben ser iguales. El coeficiente de x^2 del lado derecho, $2A + B + 2C$, debe ser igual al coeficiente de x^2 del lado izquierdo, 1. Del mismo modo, los coeficientes de x son iguales y los términos constantes son iguales. Esto plantea el sistema de ecuaciones siguiente para A, B y C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolviendo, se obtiene $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$, por lo que

Se puede verificar este trabajo llevando los términos a un denominador común y luego sumándolos.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\,\frac{1}{x + 2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

La figura 1 muestra las gráficas del integrando del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $K = 0$). ¿Cuál es cuál?

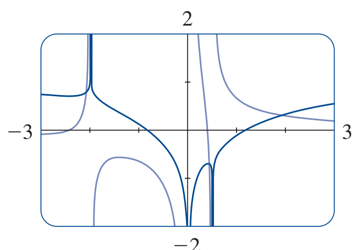


FIGURA 1

En la integración del término de en medio se hizo mentalmente la sustitución $u = 2x - 1$, lo cual da $du = 2\,dx$ y $dx = \frac{1}{2}\,du$. ■

NOTA Se puede utilizar un método alternativo para encontrar los coeficientes A, B y C del ejemplo 2. La ecuación 4 es una identidad y, por tanto, es verdadera para todo valor de x. Elija valores para x que simplifiquen la ecuación. Si hace $x = 0$ en la ecuación 4, entonces el segundo y tercer términos del lado derecho desaparecen y la ecuación se reduce a $-2A = -1$, o $A = \frac{1}{2}$. Del mismo modo, $x = \frac{1}{2}$ da $5B/4 = \frac{1}{4}$ y $x = -2$ da $10C = -1$, por lo que $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$. (Se podría objetar la validez de la ecuación 3 para $x = 0$, $\frac{1}{2}$ o -2, así que, ¿por qué la ecuación 4 es válida para estos valores? De hecho, la ecuación 4 es verdadera para todos los valores de x, aun $x = 0$, $\frac{1}{2}$ y -2. Véase la razón en el ejercicio 73.)

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, donde $a \neq 0$.

SOLUCIÓN El método de fracciones parciales da

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

y, por tanto,

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Utilizando el método de la nota anterior, haga $x = a$ en esta ecuación y obtendrá $A(2a) = 1$, por lo que $A = 1/(2a)$. Si pone $x = -$a, obtendrá $B(-2a) = 1$, por lo que $B = -1/(2a)$. Así

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x - a| - \ln|x + a|\right) + C$$

Puesto que $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, es posible escribir la integral como

6
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

En los ejercicios 57-58 se muestran las formas de uso de la fórmula 6. ■

CASO II $Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten. Suponga que el primer factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite r veces; esto es, $(a_1x + b_1)^r$ se presenta en la factorización de $Q(x)$. Entonces, en lugar del término simple $A_1/(a_1x + b_1)$ de la ecuación 2, usaría

7
$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Como ejemplo, podría escribir

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

pero es preferible trabajar un ejemplo simple en más detalle.

EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

SOLUCIÓN El primer paso es dividir. El resultado de la división larga es

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

El segundo paso es factorizar el denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Puesto que $Q(1) = 0$, se sabe que $x - 1$ es un factor y se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Puesto que el factor lineal $x - 1$ se presenta dos veces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador, $(x-1)^2(x+1)$, se obtiene

8
$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

Otro método para encontrar los coeficientes:
Sea $x = 1$ en (8): $B = 2$.
Sea $x = -1$: $C = -1$.
Sea $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Ahora, igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} A \qquad + C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + \ C &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo, se obtiene $A = 1$, $B = 2$ y $C = -1$, por lo que

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K \qquad \blacksquare$$

CASO III ***Q*(*x*) contiene factores cuadráticos irreducibles, de los que ninguno se repite.**

Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, además de las fracciones parciales de las ecuaciones 2 y 7, la expresión para $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

9 $$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes que han de determinarse. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x/[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)]$ tiene una descomposición por fracciones parciales de la forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

El término dado en (9) se puede integrar completando el trinomio cuadrado (si es necesario) y utilizando la fórmula

10 $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Dado que $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ no puede factorizarse más, se escribe

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, se tiene

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2+4) + (Bx + C)x$$

$$= (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

Igualando coeficientes, se obtiene

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Por tanto, $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$ y así

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx$$

Para integrar el segundo término, se reparte en dos:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Haga la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera de estas integrales, por lo que $du = 2x\,dx$. La segunda integral se evalúa por medio de la fórmula 10 con $a = 2$:

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K$$ ■

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx$.

SOLUCIÓN Ya que el grado del numerador *no es menor que* el grado del denominador, primero divida para obtener

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3}$$

Observe que la cuadrática $4x^2 - 4x + 3$ es irreducible porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Esto significa que no puede factorizarse, así que no es necesario utilizar la técnica de fracciones parciales.

Para integrar la función dada, complete el cuadrado en el denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x-1)^2 + 2$$

Esto sugiere que puede hacer la sustitución $u = 2x - 1$. Entonces $du = 2dx$ y $x = \frac{1}{2}(u+1)$, así que

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3}\right) dx$$

$$= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u+1)-1}{u^2+2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2-4x+3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$ ■

NOTA El ejemplo 6 ilustra el procedimiento general para integrar una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \qquad \text{donde } b^2-4ac<0$$

Complete el cuadrado en el denominador y después haga una sustitución para llevar la integral a la forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Entonces, la primera integral es un logaritmo y la segunda se expresa en términos de $\tan^{-1}$.

CASO IV $Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido.
Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces en lugar de una única fracción parcial (9), la suma

11 $$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

se presenta en la descomposición en fracciones parciales de $R(x)/Q(x)$. Cada uno de los términos en (11) puede integrarse con una sustitución o al completar primero el cuadrado si es necesario.

Sería muy tedioso determinar a mano los valores numéricos de los coeficientes del ejemplo 7. La mayoría de los sistemas algebraicos computacionales pueden encontrar los valores numéricos muy rápidamente. Por ejemplo, el comando de Maple

```
convert(f, parfrac, x)
```

o el comando de Mathematica

```
Apart[f]
```

da los valores siguientes:

$A = -1, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = D = -1,$
$E = \frac{15}{8}, \quad F = -\frac{1}{8}, \quad G = H = \frac{3}{4},$
$I = -\frac{1}{2}, \quad J = \frac{1}{2}$

EJEMPLO 7 Exprese la forma de descomposición de fracciones parciales de la función

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}$$ ■

EJEMPLO 8 Evalúe $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN La forma de descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, se tiene

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x$$
$$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex$$
$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

Si se igualan coeficientes, se obtiene el sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tiene la solución $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ y $E = 0$. Por lo que,

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K$$ ■

En el segundo y cuarto términos se hizo la sustitución mental $u = x^2 + 1$.

NOTA El ejemplo 8 salió bastante bien porque el coeficiente E resultó ser 0. En general, podría conseguir un término de la forma $1/(x^2 + 1)^2$. Una forma de integrar tal término es hacer la sustitución $x = \tan\theta$. Otro método es utilizar la fórmula en el ejercicio 72.

Algunas veces se pueden evitar las fracciones parciales cuando se integra una función racional. Por ejemplo, aunque la integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx$$

puede determinarse por el método del caso III, es mucho más fácil observar que si $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2 + 3)dx$, por lo que

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3 + 3x| + C$$

Racionalización de sustituciones

Algunas funciones no racionales pueden cambiarse a funciones racionales por medio de una sustitución adecuada. En particular, cuando un integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt[n]{g(x)}$, puede ser eficaz la sustitución $u = \sqrt[n]{g(x)}$. En los ejercicios se presentan otros ejemplos.

EJEMPLO 9 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x + 4}$. Entonces $u^2 = x + 4$, por lo que $x = u^2 - 4$ y $dx = 2u\,du$. Por tanto,

$$\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2 - 4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2 - 4}\,du = 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2 - 4}\right) du$$

Se puede evaluar esta integral, ya sea factorizando $u^2 - 4$ como $(u - 2)(u + 2)$ y usando fracciones parciales, o bien utilizando la fórmula 6 con $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4}$$

$$= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln\left|\frac{u - 2}{u + 2}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{x + 4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sqrt{x + 4} + 2}\right| + C$$ ■

7.4 EJERCICIOS

1–6 Exprese en la forma de descomposición de fracciones parciales las funciones siguientes (como en el ejemplo 7). No determine el valor numérico de los coeficientes.

1. (a) $\dfrac{4 + x}{(1 + 2x)(3 - x)}$ (b) $\dfrac{1 - x}{x^3 + x^4}$

2. (a) $\dfrac{x - 6}{x^2 + x - 6}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2 + x + 6}$

3. (a) $\dfrac{1}{x^2 + x^4}$ (b) $\dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

4. (a) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ (b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}$

5. (a) $\dfrac{x^4 + 1}{x^5 + 4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2 - 9)^2}$

6. (a) $\dfrac{t^6 + 1}{t^6 + t^3}$ (b) $\dfrac{x^5 + 1}{(x^2 - x)(x^4 + 2x^2 + 1)}$

7–38 Evalúe la integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x - 6}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int \frac{r^2}{r + 4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)}\,dx$ **10.** $\displaystyle\int \frac{1}{(t + 4)(t - 1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2 + 3x + 1}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 6}\,dx$

13. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 - 4x - 10}{x^2 - x - 6}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^3 + x^2}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2 - 7y - 12}{y(y + 2)(y - 3)}\,dy$ **18.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2 + 6x + 2}{x^2 + 3x + 2}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2(x + 2)}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x(3 - 5x)}{(3x - 1)(x - 1)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}$ **22.** $\displaystyle\int \frac{x^4 + 9x^2 + x + 2}{x^2 + 9}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{10}{(x - 1)(x^2 + 9)}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4x + 3}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{x^3 + 6x - 2}{x^4 + 6x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x + 4}{x^2 + 2x + 5}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 5}{x^4 + 4x^2 + 3}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 1}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{3x^2 + x + 4}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 4x^2 + 3}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{x^5 + x - 1}{x^3 + 1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{5x^4 + 7x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 7}{(x^2 - 4x + 6)^2}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}\,dx$

39–52 Haga una sustitución para expresar el integrando como una función racional y después evalúe las integrales siguientes.

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$ **40.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x + 3} + x}$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{x}}$ **42.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}\,dx$ **44.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^2}$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Sugerencia*: sustituya $u = \sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx$ **48.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t + 3\tan t + 2}\,dt$ **50.** $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x - 2)(e^{2x} + 1)}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^x}$ **52.** $\displaystyle\int \frac{\cosh t}{\operatorname{senh}^2 t + \operatorname{senh}^4 t}\,dt$

53–54 Utilice integración por partes, junto con las técnicas de esta sección, para evaluar las integrales siguientes.

53. $\displaystyle\int \ln(x^2 - x + 2)\,dx$ **54.** $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx$

55. Use la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 - 2x - 3)$ para decidir si $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positiva o negativa. Use la gráfica para dar una estimación del valor de la integral y después utilice fracciones parciales para encontrar el valor exacto.

56. Evalúe

$$\int \frac{1}{x^2 + k}\,dx$$

considerando varios casos para la constante k.

57–58 Evalúe las integrales siguientes completando el cuadrado y utilizando la fórmula 6.

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$ **58.** $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{4x^2 + 12x - 7}\,dx$

59. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) observó que la sustitución $t = \tan(x/2)$ convierte cualquier función racional del sen x y cos x en una función racional ordinaria de t.

(a) Si $t = \tan(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, dibuje un triángulo rectángulo o utilice identidades trigonométricas para demostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

(b) Demuestre que

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

(c) Demuestre que

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}\,dt$$

60–63 Utilice la sustitución del ejercicio 59 para transformar el integrando en una función racional de t y después evalúe las integrales siguientes.

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}\,dx$

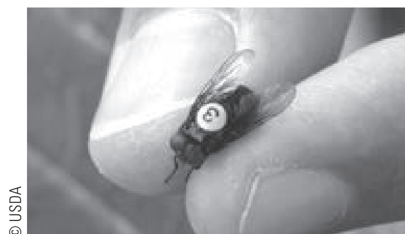
63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x}\,dx$

64–65 Encuentre el área de la región bajo la curva dada de 1 a 2.

64. $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$ **65.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - x^2}$

66. Encuentre el volumen del sólido resultante, si la región bajo la curva $y = 1/(x^2 + 3x + 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ gira alrededor de (a) el eje x y (b) el eje y.

67. Un método para desacelerar el crecimiento de una población de insectos sin usar pesticidas es introducir en la población varios machos estériles que se aparean con hembras fértiles, pero no producen descendencia. (La fotografía muestra una mosca del gusano tornillo, la primera plaga efectivamente eliminada de una región por este método.)


© USDA

Si P representa el número de insectos hembra en una población y S el número de machos estériles introducidos cada generación, sea r la tasa de nacimiento de hembras que descienden de hembras que se aparearon con machos no estériles, entonces la población de hembras se relaciona con el tiempo t por

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r - 1)P - S]}\,dP$$

Suponga que una población de insectos con 10 000 hembras crece a una tasa de $r = 1.1$ y se agregan 900 machos estériles. Evalúe la integral para obtener una ecuación que relacione la población de hembras con el tiempo. (Observe que la ecuación resultante no se puede resolver de manera explícita para P.)

68. Factorice $x^4 + 1$ como una diferencia de cuadrados, sumando y restando primero la misma cantidad. Utilice esta factorización para evaluar $\int 1/(x^4 + 1)\,dx$.

69. (a) Utilice un sistema algebraico computacional para encontrar la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Utilice el inciso (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ (a mano) y compárela con el resultado al utilizar el SAC para integrar f directamente. Comente en relación con cualquier discrepancia.

SAC **70.** (a) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Utilice el inciso (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ y trace la gráfica de f y su integral indefinida en la misma pantalla.

(c) Utilice la gráfica de f para descubrir las características principales de la gráfica de $\int f(x)\,dx$.

71. El número racional $\frac{22}{7}$ se ha utilizado como una aproximación para el número π desde la época de Arquímedes. Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1 - x)^4}{1 + x^2}\,dx = \frac{22}{7} - \pi$$

72. (a) Use integración por partes para demostrar que, para cualquier entero positivo n,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}\,dx = \frac{x}{2a^2(n - 1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2a^2(n - 1)} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

(b) Utilice el inciso (a) para evaluar

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$$

73. Suponga que F, G y Q son polinomios y que

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para toda x, excepto cuando $Q(x) = 0$. Demuestre que $F(x) = G(x)$ para toda x. [*Sugerencia*: utilice la continuidad.]

74. Si f es una función cuadrática tal que $f(0) = 1$ y

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}\,dx$$

es una función racional, determine el valor de $f'(0)$.

75. Si $a \neq 0$ y n es un número entero positivo, encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$f(x) = \frac{1}{x^n(x-a)}$$

[*Sugerencia:* primero encuentre el coeficiente de $1/(x-a)$. Después reste el término resultante y simplifique lo que le queda.]

7.5 Estrategias para la integración

Como se ha visto, la integración es más desafiante que la derivación. Para obtener la derivada de una función, resulta evidente cuál fórmula de derivación debe aplicarse. Pero podría no ser obvio qué técnica utilizar para integrar una función dada.

Hasta ahora se han aplicado técnicas individuales en cada sección. Por ejemplo, normalmente se utiliza la sustitución en los ejercicios 5.5, integración por partes en los ejercicios 7.1 y fracciones parciales en los ejercicios 7.4. Pero en esta sección se presenta una colección de diferentes integrales al azar y el principal reto es reconocer cuál técnica o fórmula utilizar. No es posible disponer de una regla precisa y rápida que se aplique en una situación dada, pero es posible dar algunos consejos sobre la estrategia que puede ser útil.

Un prerrequisito para aplicar una estrategia es conocer las fórmulas básicas de integración. En la tabla siguiente se reunieron las integrales de la lista previa junto con varias fórmulas adicionales aprendidas en este capítulo.

Tabla de fórmulas de integración Las constantes de integración se han omitido.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	**2.** $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$
3. $\int e^x\,dx = e^x$	**4.** $\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b}$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$	**6.** $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$	**8.** $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$
9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$	**10.** $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$
11. $\int \sec x\,dx = \ln\lvert \sec x + \tan x\rvert$	**12.** $\int \csc x\,dx = \ln\lvert \csc x - \cot x\rvert$
13. $\int \tan x\,dx = \ln\lvert \sec x\rvert$	**14.** $\int \cot x\,dx = \ln\lvert \operatorname{sen} x\rvert$
15. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	**16.** $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
17. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$	**18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0$
***19.** $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	***20.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert$

La mayoría de estas fórmulas debe memorizarlas. Es útil conocerlas todas, pero las marcadas con un asterisco no necesitan memorizarse porque se deducen con facilidad. La fórmula 19 se puede evitar utilizando fracciones parciales y, en lugar de la fórmula 20, pueden usarse sustituciones trigonométricas.

Una vez que cuente con estas fórmulas básicas de integración, si no se ve inmediatamente cómo atacar una integral dada, puede ensayar la estrategia siguiente de cuatro pasos.

1. Si es posible, simplifique el integrando Algunas veces, el uso de manipulaciones algebraicas o identidades trigonométricas puede simplificar el integrando y hacer obvio el método de integración. He aquí algunos ejemplos

$$\int \sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x})\,dx = \int (\sqrt{x} + x)\,dx$$

$$\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$$

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)\,dx$$

$$= \int (1 + 2\operatorname{sen} x\cos x)\,dx$$

2. Busque una sustitución obvia Intente encontrar alguna función $u = g(x)$ en el integrando cuya diferencial $du = g'(x)\,dx$ también esté presente, además de un factor constante. Por ejemplo, en la integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$$

observe que si $u = x^2 - 1$, entonces $du = 2x\,dx$. Por tanto, utilice la sustitución $u = x^2 - 1$, en vez del método de fracciones parciales.

3. Clasifique el integrando de acuerdo con su forma Si los pasos 1 y 2 no conducen a la solución, entonces analice la forma del integrando $f(x)$.

(a) *Funciones trigonométricas*. Si $f(x)$ es un producto de potencias del sen x y cos x, de tan x y sec x, o de cot x y csc x, entonces utilice las sustituciones recomendadas en la sección 7.2.

(b) *Funciones racionales*. Si f es una función racional, utilice el procedimiento de la sección 7.4 que implica fracciones parciales.

(c) *Integración por partes*. Si $f(x)$ es un producto de una potencia de x (o una polinomial) y una función trascendente (tal como una función trigonométrica, exponencial o logarítmica), entonces ensaye integración por partes, eligiendo u y dv de acuerdo con las recomendaciones dadas en la sección 7.1. Si considera las funciones de los ejercicios 7.1, verá que la mayoría de estas son del tipo que se describe.

(d) *Radicales*. Los tipos particulares de sustituciones se recomiendan cuando aparecen ciertos radicales.

(i) Si se presenta $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$, utilice sustituciones trigonométricas de acuerdo con la tabla de la sección 7.3.

(ii) Si se presenta $\sqrt[n]{ax + b}$, utilice la racionalización de la sustitución $u = \sqrt[n]{ax + b}$. Más a menudo, a veces esto funciona para $\sqrt[n]{g(x)}$.

4. Intente de nuevo Si los primeros tres pasos no conducen a la solución, recuerde que básicamente solo existen dos métodos de integración: sustitución y por partes.

(a) *Intente la sustitución*. Aun si ninguna sustitución es obvia (paso 2), cierta inspiración o inventiva (o incluso desesperación) puede sugerirle una sustitución apropiada.

(b) *Intente por partes.* Aunque la integración por partes se utiliza en la mayoría de las veces sobre productos de la forma descrita en el paso 3(c), a veces es eficaz en funciones únicas. En la sección 7.1, se ve que funciona para $\tan^{-1}x$, $\text{sen}^{-1}x$ y $\ln x$, y todas estas son funciones inversas.

(c) *Manipule el integrando*. Las manipulaciones algebraicas (tal vez racionalizando el denominador o utilizando identidades trigonométricas) pueden ser útiles para transformar la integral en una forma más fácil. Estas transformaciones pueden ser más sustanciales que en el paso 1 y pueden requerir cierto ingenio. He aquí un ejemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\, dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{1 + \cos x}{\text{sen}^2 x}\, dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\right) dx$$

(d) *Relacione el problema con problemas previos*. Cuando se ha adquirido cierta experiencia en integración, puede utilizarse un método en una integral dada similar a uno que ya se haya utilizado en una integral previa. O incluso podría expresarse la integral dada en términos de una previa. Por ejemplo, $\int \tan^2 x \sec x\, dx$ es una integral desafiante, pero si utiliza la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, puede escribir

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

y si $\int \sec^3 x\, dx$ se ha evaluado previamente (véase el ejemplo 7.2.8), entonces este resultado se puede utilizar en el problema presente.

(e) *Utilice varios métodos*. Algunas veces se requieren dos o tres métodos para evaluar una integral. La evaluación podría implicar varias sustituciones sucesivas de diferentes tipos, o podría combinarse la integración por partes con una o más sustituciones.

En los ejemplos siguientes se muestra un método de ataque, pero no resuelve por completo la integral.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx$

En el paso 1 reescriba la integral:

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$$

La integral es ahora de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ con m impar, así que puede utilizar la recomendación de la sección 7.2.

Alternativamente, si en el paso 1 escribe

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx$$

entonces tiene que continuar como sigue, con la sustitución $u = \cos x$:

$$\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x}\,\text{sen}\,x\,dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6}(-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6}\,du = \int (u^{-4} - u^{-6})\,du$$ ■

EJEMPLO 2 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

De acuerdo con (ii) en el paso 3(d), sustituya $u = \sqrt{x}$. Entonces $x = u^2$, por lo que $dx = 2u\,du$ y

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int ue^u\,du$$

El integrando es ahora un producto de u y una función trascendente e^u por lo que puede ser integrada por partes. ■

EJEMPLO 3 $\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\,dx$

Aquí, ninguna simplificación o sustitución es obvia, así que los pasos 1 y 2 no son adecuados. El integrando es una función racional así que aplique el procedimiento de la sección 7.4, recordando que el primer paso es dividir. ■

EJEMPLO 4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Aquí todo lo que se necesita es el paso 2. Sustituya $u = \ln x$ porque su diferencial es $du = dx/x$, que aparece en la integral. ■

EJEMPLO 5 $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx$

Aunque la racionalización de sustitución

$$u = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

funciona aquí [(ii) en el paso 3(d)], conduce a una función racional muy complicada. Un método más fácil es por medio de algunas manipulaciones algebraicas [ya sea como en el paso 1 o como en el paso 4(c)]. Multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{1 - x}$, se tiene

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx = \int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

$$= \text{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C$$ ■

■ ¿Pueden integrarse todas las funciones continuas?

Surge la pregunta: ¿estas estrategias de integración permitirán determinar la integral de toda función continua? Por ejemplo, ¿es posible utilizarlas para obtener $\int e^{x^2}\,dx$? La respuesta es no, al menos no en términos de las funciones con las que está familiarizado.

Las funciones tratadas en este libro se llaman **funciones elementales**. Estas funciones son las polinomiales, racionales, potencias (x^n), exponenciales (b^x), logarítmicas, trigonométricas y sus inversas, hiperbólicas y sus inversas, y todas las funciones que pueden obtenerse por las cinco operaciones: suma, resta, multiplicación, división y composición. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

es una función elemental.

Si f es una función elemental, entonces f' es una función elemental, pero $\int f(x)\,dx$ no necesariamente es una función elemental. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Puesto que f es continua, su integral existe, y si F se define como

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

entonces, se sabe de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo, que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Así, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada F, pero se ha demostrado que F no es una función elemental. Esto significa que no importa el esfuerzo que se haga, ya que nunca se logrará evaluar $\int e^{x^2}\,dx$ en términos de las funciones que conoce. (Sin embargo, en el capítulo 11, verá cómo expresar $\int e^{x^2}\,dx$ como una serie infinita.) Lo mismo puede decirse de las integrales siguientes:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3 + 1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De hecho, la mayoría de las funciones elementales no tiene antiderivadas elementales. Sin embargo, puede usted estar seguro que todas las integrales en los ejercicios siguientes son funciones elementales.

7.5 EJERCICIOS

1–82 Evalúe la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 (3x + 1)^{\sqrt{2}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{y}\ln y\,dy$

4. $\displaystyle\int \tan^3\theta\,d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t}{(t - 3)^2}\,dt$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3 - x^4}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1 + y^2}\,dy$

8. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x - 1}{x^2 - 4x - 5}\,dx$

9. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x + 2}{x^2 + 3x - 4}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\cos(1/x)}{x^3}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^3 + 3x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$

14. $\displaystyle\int \ln(1 + x^2)\,dx$

15. $\displaystyle\int x\sec x\tan x\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^\pi t\cos^2 t\,dt$

18. $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

19. $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,dx$

20. $\displaystyle\int e^2\,dx$

21. $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 2x - 8}\,dx$

24. $\displaystyle\int (1 + \tan x)^2 \sec x\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + 12t}{1 + 3t}\,dt$

26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + e^x}$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \sqrt{at}\,dt$

29. $\displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx$

30. $\displaystyle\int_{-1}^2 |\,e^x - 1\,|\,dx$

31. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\,dx$

32. $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$

33. $\displaystyle\int \cos 2x \cos 6x\,dx$

34. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + 4\cot x}{4 - \cot x}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \sec^2\theta\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^2 \tan x}{1 + \cos^4 x}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta \tan\theta}{\sec^2\theta - \sec\theta}\,d\theta$

40. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 6x \cos 3x\,dx$

41. $\displaystyle\int \theta \tan^2\theta\,d\theta$

42. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3}\,dx$

44. $\displaystyle\int \sqrt{1 + e^x}\,dx$

45. $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{(x - 1)e^x}{x^2}\,dx$

47. $\displaystyle\int x^3 (x - 1)^{-4}\,dx$

48. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2 - \sqrt{1 - x^2}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x + 1}}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x + 1}}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 1}}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^4 + 1)}$

53. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

54. $\displaystyle\int (x + \operatorname{sen} x)^2\,dx$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + x\sqrt{x}}$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}$

57. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x + c}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 16}$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}}$

61. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1 + \cos\theta}$

62. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1 + \cos^2\theta}$

63. $\displaystyle\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\,dx$

64. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}\,dx$

65. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^4 x}\,dx$

66. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$

67. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6 + 3x^3 + 2}\,dx$

69. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\,dx$

70. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + 2e^x - e^{-x}}\,dx$

71. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{\ln(x + 1)}{x^2}\,dx$

73. $\displaystyle\int \frac{x + \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

74. $\displaystyle\int \frac{4^x + 10^x}{2^x}\,dx$

75. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x - x}$

76. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{1 + e^x}}\,dx$

78. $\displaystyle\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\,dx$

79. $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

80. $\displaystyle\int \frac{\sec x \cos 2x}{\operatorname{sen} x + \sec x}\,dx$

81. $\displaystyle\int \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}\,dx$

82. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}\,dx$

---

83. Las funciones $y = e^{x^2}$ y $y = x^2 e^{x^2}$ no tienen antiderivadas elementales, pero sí $y = (2x^2 + 1)e^{x^2}$. Determine $\int (2x^2 + 1)e^{x^2}\,dx$.

84. Se sabe que $F(x) = \int_0^x e^{e^t}\,dt$ es una función continua por el FTC1, aunque no es una función elemental. Las funciones

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

tampoco son elementales, pero se pueden expresar en términos de F. Obtenga las integrales siguientes en términos de F.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,dx$

7.6 Integración utilizando tablas y sistemas algebraicos computacionales

En esta sección se describe cómo utilizar tablas y sistemas algebraicos computacionales para integrar funciones que tienen antiderivadas elementales. Sin embargo, se debe

tener en mente que aun el sistema algebraico computacional más poderoso no puede encontrar fórmulas explícitas para las antiderivadas de funciones como e^{x^2} o de las otras funciones descritas al final de la sección 7.5.

Tablas de integrales

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando se aborda una integral difícil de determinar a mano y no se tiene acceso a un sistema algebraico computacional. En las páginas de referencia al final de este libro se proporciona una tabla relativamente breve de 120 integrales, categorizada por forma. Tablas más extensas están disponibles en el CRC *Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31a. ed. de Daniel Zwillinger (Boca Ratón, FL, 2002) (709 elementos) o en el de Gradshteyn y Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7e (San Diego, 2007), que contiene cientos de páginas de integrales. Sin embargo, hay que recordar que las integrales no surgen frecuentemente en la forma exacta en la que se presentan en las tablas. Normalmente es necesario utilizar la regla de sustitución o manipulaciones algebraicas para transformar una integral dada en una de las formas de la tabla.

EJEMPLO 1 La región acotada por las curvas $y = \arctan x$, $y = 0$ y $x = 1$ gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Utilizando el método de cascarones cilíndricos, se ve que el volumen es

$$V = \int_0^1 2\pi x \arctan x \, dx$$

La tabla de integrales aparece en las páginas de referencia 6-10 al final del libro.

En la sección de la tabla de integrales titulada *Formas trigonométricas inversas* localice la fórmula 92:

$$\int u \tan^{-1}u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \tan^{-1}u - \frac{u}{2} + C$$

Por lo que el volumen es

$$V = 2\pi \int_0^1 x \tan^{-1}x \, dx = 2\pi \left[\frac{x^2 + 1}{2} \tan^{-1}x - \frac{x}{2} \right]_0^1$$

$$= \pi\left[(x^2 + 1) \tan^{-1}x - x\right]_0^1 = \pi(2 \tan^{-1}1 - 1)$$

$$= \pi[2(\pi/4) - 1] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi$$

■

EJEMPLO 2 Utilice la tabla de integrales para encontrar $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx$.

SOLUCIÓN Si revisa en la sección de la tabla titulada *Formas que involucran* $\sqrt{a^2 - u^2}$, verá que la forma más cercana es la número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} \, du = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Esto no es exactamente lo que tiene, pero la puede utilizar si primero hace la sustitución $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5 - u^2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}} \, du$$

Después utilice la fórmula 34 con $a^2 = 5$ (por lo que $a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}}\,du = \frac{1}{8}\left(-\frac{u}{2}\sqrt{5 - u^2} + \frac{5}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= -\frac{x}{8}\sqrt{5 - 4x^2} + \frac{5}{16}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C$$ ■

EJEMPLO 3 Utilice la tabla de integrales para evaluar $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Si revisa la sección *Formas trigonométricas*, verá que ninguna de las formas incluye explícitamente a u^3 como factor. Sin embargo, puede utilizar la fórmula de reducción en la forma 84 con $n = 3$:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\,dx$$

85. $\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

Ahora necesita evaluar $\int x^2\cos x\,dx$. Puede utilizar la fórmula de reducción de la forma 85 con $n = 2$, seguido de la forma 82:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= x^2\operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - x\cos x) + K$$

Combinando estos cálculos, se obtiene

$$\int x^3\operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C$$

donde $C = 3K$. ■

EJEMPLO 4 Utilice la tabla de integrales para encontrar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que la tabla da las formas que implican $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ pero no $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, primero complete el cuadrado:

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$$

Si hace la sustitución $u = x + 1$ (entonces $x = u - 1$), el integrando implicará el patrón $\sqrt{a^2 + u^2}$:

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx = \int (u - 1)\sqrt{u^2 + 3}\,du$$

$$= \int u\sqrt{u^2 + 3}\,du - \int \sqrt{u^2 + 3}\,du$$

La primera integral se determina utilice la sustitución $t = u^2 + 3$:

$$\int u\sqrt{u^2 + 3}\,du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}t^{3/2} = \tfrac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

Para la segunda integral utilice la fórmula 21 con $a = \sqrt{3}$:

$$\int \sqrt{u^2 + 3}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 3} + \tfrac{3}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 3}\right)$$

Por tanto

$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}(x^2+2x+4)^{3/2} - \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+4} - \tfrac{3}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right) + C$$

■

Sistemas algebraicos computacionales

Ha visto que el uso de las tablas implica relacionar la forma del integrando dado con las formas del integrando en las tablas. Las computadoras son particularmente aptas para comparar patrones. Así como se utilizan sustituciones conjuntamente con las tablas, un SAC puede ejecutar sustituciones que transforman una integral dada en una que aparece almacenada en la memoria. Así, no es de sorprender que un sistema algebraico computacional destaque en la integración. Esto no significa que la integración a mano sea una habilidad obsoleta. Verá que el cálculo manual algunas veces produce una integral indefinida en una forma que es más conveniente que la respuesta dada por una máquina.

Para empezar, vea qué pasa cuando se le pide a una máquina que integre la función relativamente simple $y = 1/(3x-2)$. Utilizando la sustitución $u = 3x - 2$, un cálculo fácil a mano da

$$\int \frac{1}{3x-2}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|3x-2| + C$$

mientras Mathematica y Maple regresan la respuesta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x-2)$$

La primera cuestión a notar es que el sistema algebraico computacional omite la constante de integración. En otras palabras, produce una antiderivada *particular*, no la más general. Por tanto, cuando se hace uso de una máquina de integración, se tendría que agregar una constante. Segundo, los signos de valor absoluto se omiten en la respuesta dada por la máquina. Esto está bien si al problema solo le conciernen valores de x mayores que $\frac{2}{3}$. Pero si está interesado en otros valores de x, entonces necesita insertar el símbolo de valor absoluto.

En el ejemplo siguiente se reconsidera la integral del ejemplo 4, pero esta vez se le pidió la respuesta a una máquina.

EJEMPLO 5 Utilice un sistema algebraico computacional para encontrar $\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$.

SOLUCIÓN Maple proporciona la respuesta

$$\tfrac{1}{3}(x^2+2x+4)^{3/2} - \tfrac{1}{4}(2x+2)\sqrt{x^2+2x+4} - \frac{3}{2}\,\text{arcsenh}\,\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x)$$

Esta parece diferente de la respuesta encontrada en el ejemplo 4, pero es equivalente porque el tercer término se puede reescribir utilizando la identidad

Esta es la ecuación 3.11.3

$$\text{arcsenh}\,x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Por lo que

$$\text{arcsenh}\,\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x) = \ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x) + \sqrt{\tfrac{1}{3}(1+x)^2+1}\right]$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1+x+\sqrt{(1+x)^2+3}\right]$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)$$

El término resultante adicional $-\frac{3}{2}\ln(1/\sqrt{3})$ puede absorberse por la constante de integración.

Mathematica aporta la respuesta

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2+2x+4}-\frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1+x}{\sqrt{3}}\right)$$

Mathematica combina los dos primeros términos del ejemplo 4 (y el resultado de Maple) en un solo término mediante factorización. ■

EJEMPLO 6 Utilice un SAC para determinar $\int x(x^2+5)^8\,dx$.

SOLUCIÓN Maple y Mathematica dan la misma respuesta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18}+\tfrac{5}{2}x^{16}+50x^{14}+\tfrac{1750}{3}x^{12}+4375x^{10}+21875x^8+\tfrac{218750}{3}x^6+156250x^4+\tfrac{390625}{2}x^2$$

Es claro que ambos sistemas deben haber desarrollado $(x^2+5)^8$ mediante el teorema del binomio y después integrado cada término.

Si se integra a mano utilizando la sustitución $u=x^2+5$, se obtiene

La TI-89 también produce esta respuesta.

$$\int x(x^2+5)^8\,dx=\tfrac{1}{18}(x^2+5)^9+C$$

Para la mayoría de los propósitos, esta es la forma más conveniente de respuesta. ■

EJEMPLO 7 Utilice un SAC para encontrar $\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\,dx$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 7.2.2 encuentra que

$$\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\,dx=-\tfrac{1}{3}\cos^3 x+\tfrac{2}{5}\cos^5 x-\tfrac{1}{7}\cos^7 x+C \tag{1}$$

Maple y la TI-89 reportan la respuesta

$$-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^4 x\cos^3 x-\tfrac{4}{35}\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x-\tfrac{8}{105}\cos^3 x$$

mientras que Mathematica produce

$$-\tfrac{5}{64}\cos x-\tfrac{1}{192}\cos 3x+\tfrac{3}{320}\cos 5x-\tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Sospeche que existen identidades trigonométricas que demuestran que estas tres respuestas son equivalentes. De hecho, si le pide a Maple y Mathematica que simplifiquen sus expresiones utilizando identidades trigonométricas, finalmente producirán la misma forma de la respuesta que en la ecuación 1. ■

7.6 EJERCICIOS

1–4 Utilice la forma indicada en la tabla de integrales en las páginas de referencia para evaluar las integrales.

1. $\int_0^{\pi/2}\cos 5x\cos 2x\,dx$; fórmula 80

2. $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$; fórmula 113

3. $\int_1^2\sqrt{4x^2-3}\,dx$; fórmula 39

4. $\int_0^1\tan^3(\pi x/6)\,dx$; fórmula 69

5–32 Utilice la tabla de integrales de las páginas de referencia 6–10 para evaluar las integrales siguientes.

5. $\int_0^1 2x \cos^{-1}x \, dx$

6. $\int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 7}} \, dx$

7. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 9} \, dx$

8. $\int \frac{e^x}{4 - e^{2x}} \, dx$

9. $\int \frac{\sqrt{9x^2 + 4}}{x^2} \, dx$

10. $\int \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$

11. $\int_0^\pi \cos^6\theta \, d\theta$

12. $\int x\sqrt{2 + x^4} \, dx$

13. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

14. $\int_0^\pi x^3 \operatorname{sen} x \, dx$

15. $\int \frac{\coth(1/y)}{y^2} \, dy$

16. $\int \frac{e^{3t}}{\sqrt{e^{2t} - 1}} \, dt$

17. $\int y\sqrt{6 + 4y - 4y^2} \, dy$

18. $\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} \, dx$

19. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$

20. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{5 - \operatorname{sen} \theta}} \, d\theta$

21. $\int \frac{e^x}{3 - e^{2x}} \, dx$

22. $\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2 - x^4} \, dx$

23. $\int \sec^5 x \, dx$

24. $\int x^3 \operatorname{arcsen}(x^2) \, dx$

25. $\int \frac{\sqrt{4 + (\ln x)^2}}{x} \, dx$

26. $\int \operatorname{sen}^6 2x \, dx$

27. $\int \frac{\cos^{-1}(x^{-2})}{x^3} \, dx$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

29. $\int \sqrt{e^{2x} - 1} \, dx$

30. $\int e^t \operatorname{sen}(\alpha t - 3) \, dt$

31. $\int \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

32. $\int \frac{\sec^2\theta \tan^2\theta}{\sqrt{9 - \tan^2\theta}} \, d\theta$

---

33. La región bajo la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$ de 0 a π rota alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

34. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando la región bajo la curva $y = \operatorname{arcsen} x$, $x \geqslant 0$, rota alrededor del eje y.

35. Verifique la fórmula 53 en la tabla de integrales (a) derivando y (b) sustituyendo $t = a + bu$.

36. Verifique la fórmula 31 (a) al derivar y (b) al sustituir $u = a \operatorname{sen} \theta$.

SAC **37–44** Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar la integral. Compare la respuesta con el resultado utilizando tablas. Si las respuestas no son las mismas, demuestre que son equivalentes.

37. $\int \sec^4 x \, dx$

38. $\int \csc^5 x \, dx$

39. $\int x^2\sqrt{x^2 + 4} \, dx$

40. $\int \frac{dx}{e^x(3e^x + 2)}$

41. $\int \cos^4 x \, dx$

42. $\int x^2\sqrt{1 - x^2} \, dx$

43. $\int \tan^5 x \, dx$

44. $\int \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} \, dx$

SAC **45.** (a) Utilice la tabla de integrales para evaluar $F(x) = \int f(x) \, dx$, donde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

¿Cuál es el dominio de f y de F?

(b) Utilice un SAC para evaluar $F(x)$. ¿Cuál es el dominio de la función F que produce el SAC? ¿Hay una discrepancia entre este dominio y el dominio de la función F que encontró en el inciso (a)?

SAC **46.** A veces los sistemas algebraicos computacionales necesitan ayuda humana. Intente determinar

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2} \, dx$$

con un sistema algebraico computacional. Si no obtiene respuesta, haga una sustitución que cambie la integral en una que el SAC *pueda* evaluar.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

SAC PATRONES EN INTEGRALES

En este proyecto se utiliza un sistema algebraico computacional para investigar integrales indefinidas de familias de funciones. Observando los patrones que ocurren en la integral de varios miembros de la familia, infiera primero, y después demuestre, una fórmula general para la integral de cualquier miembro de la familia.

1. (a) Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar las integrales siguientes.

(i) $\int \frac{1}{(x + 2)(x + 3)} \, dx$

(ii) $\int \frac{1}{(x + 1)(x + 5)} \, dx$

(iii) $\int \frac{1}{(x + 2)(x - 5)} \, dx$

(iv) $\int \frac{1}{(x + 2)^2} \, dx$

(b) Con base en el patrón de sus respuestas del inciso (a), infiera el valor de la integral

$$\int \frac{1}{(x + a)(x + b)}\,dx$$

si $a \neq b$. ¿Qué pasa si $a = b$?

(c) Verifique su suposición pidiendo a su SAC que evalúe la integral del inciso (b). Luego demuéstrela utilizando fracciones parciales.

2. (a) Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar las integrales siguientes.

(i) $\int \operatorname{sen} x \cos 2x\,dx$ (ii) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x\,dx$ (iii) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x\,dx$

(b) Con base en el patrón de sus respuestas del inciso (a), infiera el valor de la integral

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx$$

(c) Verifique su suposición con un SAC. Después demuéstrela utilizando las técnicas de la sección 7.2. ¿Para qué valores de a y b es esta válida?

3. (a) Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar las integrales siguientes.

(i) $\int \ln x\,dx$ (ii) $\int x \ln x\,dx$ (iii) $\int x^2 \ln x\,dx$

(iv) $\int x^3 \ln x\,dx$ (v) $\int x^7 \ln x\,dx$

(b) Con base en el patrón de sus respuestas del inciso (a), infiera el valor de

$$\int x^n \ln x\,dx$$

(c) Utilice integración por partes para demostrar la suposición que hizo en el inciso (b). ¿Para qué valores de n es esto válido?

4. (a) Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar las integrales siguientes.

(i) $\int xe^x\,dx$ (ii) $\int x^2e^x\,dx$ (iii) $\int x^3e^x\,dx$

(iv) $\int x^4e^x\,dx$ (v) $\int x^5e^x\,dx$

(b) Con base en el patrón de sus respuestas del inciso (a), infiera el valor de $\int x^6e^x\,dx$. Después, utilice su SAC para verificar su suposición.

(c) Basado en los patrones de los incisos (a) y (b), haga una conjetura sobre el valor de la integral

$$\int x^ne^x\,dx$$

cuando n es un entero positivo.

(d) Utilice inducción matemática para demostrar la suposición que hizo en el inciso (c).

7.7 Integración aproximada

Hay dos situaciones en las cuales es imposible encontrar el valor exacto de una integral definida.

La primera de ellas surge del hecho de que, al evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ utilizando el teorema fundamental del cálculo, se necesita conocer una antiderivada de f. Sin embargo, algunas veces es difícil, o aun imposible, encontrar una antiderivada (véase la sección 7.5).

Por ejemplo, es imposible evaluar exactamente las integrales siguientes:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$$

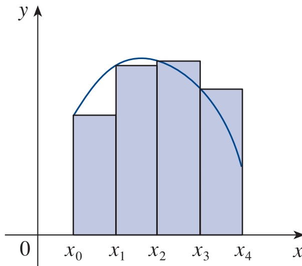
La segunda situación surge cuando la función es producto de un experimento científico, obtenida a través de lecturas en un instrumento o de una recolección de datos. Podría no haber fórmula para la función (véase el ejemplo 5).

En ambos casos se necesita encontrar valores aproximados de la integral definida. Ya se conoce un método. Recuerde que la integral definida se define como el límite de una suma de Riemann, por lo que se podría utilizar cualquier suma de Riemann como una aproximación a la integral: si divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$, entonces tiene

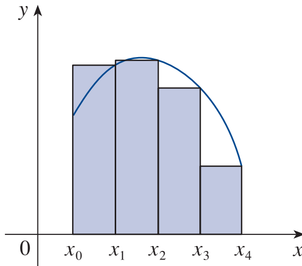
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

donde x_i^* es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si se elige x_i^* en el punto final izquierdo del intervalo, entonces $x_i^* = x_{i-1}$ y tiene

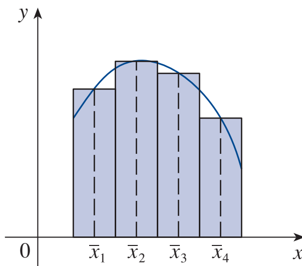
1
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$



(a) Aproximación por el punto final izquierdo



(b) Aproximación por el punto final derecho



(c) Aproximación por el punto medio

FIGURA 1

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces la integral representa un área y (1) representa una aproximación a esta área mediante los rectángulos que se muestran en la figura 1(a). Si elige x_i^* en el punto final del intervalo, entonces $x_i^* = x_i$ y tiene

2
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

[Véase la figura 1(b).] Las aproximaciones L_n y R_n definidas por las ecuaciones 1 y 2 se llaman **aproximación por el punto final izquierdo** y **aproximación por el punto final derecho**, respectivamente.

En la sección 5.2 también se considera el caso donde se elige x_i^* como el punto medio $\bar{x}_i$ del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. La figura 1(c) muestra la aproximación por el punto medio M_n, que parece ser mejor que L_n o R_n.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

y $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$$

Otra aproximación, llamada regla del trapecio, resulta de promediar las aproximaciones de las ecuaciones 1 y 2:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\Big[\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\Big]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

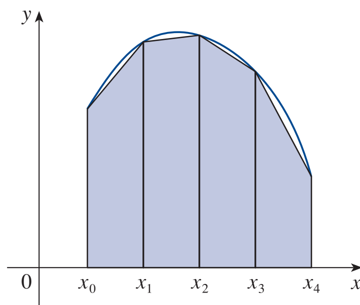


FIGURA 2
Aproximación trapezoidal

Regla trapezoidal

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $x_i = a + i\,\Delta x$.

La razón para el nombre de la regla del trapecio puede verse de la figura 2, que ilustra el caso con $f(x) \geqslant 0$ y $n = 4$. El área del trapezoide que está encima del i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

y si se suman las áreas de todos los trapezoides, se obtiene el lado derecho de la regla del trapecio.

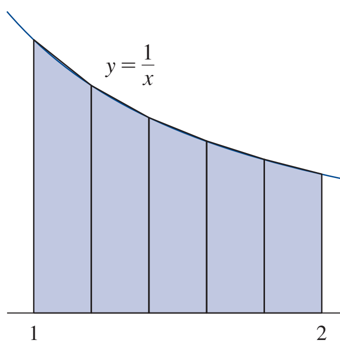


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Utilice (a) la regla del trapecio y (b) la regla del punto medio con $n = 5$ para aproximar la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 5$, $a = 1$ y $b = 2$, tiene $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0.2$, por lo que la regla del trapecio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0.2}{2}[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)]$$

$$= 0.1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.695635$$

Esta aproximación se muestra en la figura 3.

(b) Los puntos medios de los cinco subintervalos son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9, por lo que la regla del punto medio da

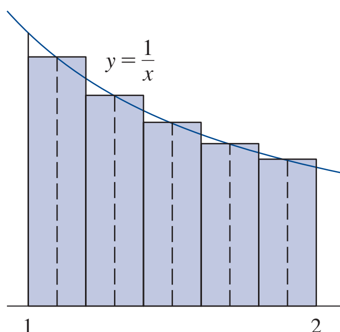


FIGURA 4

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

Esta aproximación se muestra en la figura 4. ■

En el ejemplo 1 elija deliberadamente una integral cuyo valor puede calcularse explícitamente, así puede ver qué tan precisas son las reglas del trapecio y del punto medio. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0.693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aproximación} + \text{error}$

El **error** al usar una aproximación se define como la cantidad que debe sumarse a la aproximación para que sea exacta. De los valores en el ejemplo 1, vea que los errores en

las aproximaciones por las reglas del trapecio y del punto medio para $n = 5$ son

$$E_T \approx -0.002488 \qquad \text{y} \qquad E_M \approx 0.001239$$

En general, se tiene

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{y} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

TEC Module 5.2/7.7 le permite comparar métodos de aproximación.

Las tablas siguientes muestran el resultado de cálculos similares a los del ejemplo 1, pero para $n = 5$, 10 y 20 y para las aproximaciones por el punto final izquierdo y el derecho, así como las reglas del trapecio y del punto medio.

Aproximaciones a $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.745635	0.645635	0.695635	0.691908
10	0.718771	0.668771	0.693771	0.692835
20	0.705803	0.680803	0.693303	0.693069

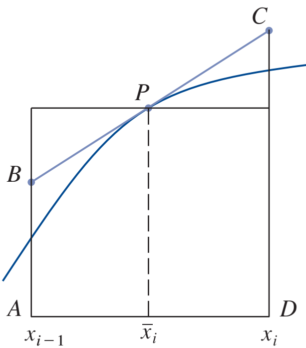
Errores correspondientes

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0.052488	0.047512	−0.002488	0.001239
10	−0.025624	0.024376	−0.000624	0.000312
20	−0.012656	0.012344	−0.000156	0.000078

Estas observaciones son verdaderas en la mayoría de los casos.

De estas tablas pueden hacerse varias observaciones:

1. En todos los métodos se obtuvieron aproximaciones más exactas cuando se incrementa el valor de n. (Pero valores muy grandes de n requieren de tantas operaciones aritméticas que se debe considerar del error de redondeo acumulado).
2. Los errores en las aproximaciones del punto final izquierdo y el derecho son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de aproximadamente 2 cuando se duplica el valor de n.
3. Las reglas del trapecio y del punto medio son mucho más exactas que las aproximaciones de punto final.
4. Los errores en las reglas del trapecio y del punto medio son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de alrededor de 4 cuando se duplica el valor de n.
5. El tamaño del error en la regla del punto medio es casi la mitad del tamaño del error en la regla del trapecio.



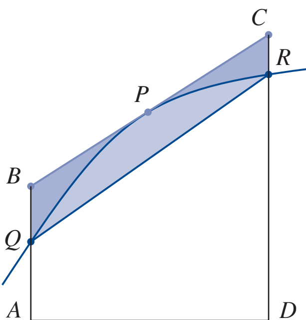


FIGURA 5

La figura 5 muestra por qué usualmente se puede esperar que la regla del punto medio sea más exacta que la del trapecio. El área de un rectángulo representativo en la regla del punto medio es la misma que la del trapecio $ABCD$ cuyo lado superior es tangente a la gráfica de P. El área de este trapezoide es más próxima al área bajo la gráfica de lo que es el área del trapezoide $AQRD$ empleado en la regla del trapecio. [El error del punto medio (sombreado por encima de la curva) es más pequeño que el error trapezoidal (sombreado por debajo de la curva).]

Estas observaciones se corroboran en las estimaciones de error siguientes y que se demuestran en textos de análisis numérico. Note que la observación 4 corresponde a n^2 en cada denominador porque $(2n)^2 = 4n^2$. El hecho de que las estimaciones dependan del tamaño de la segunda derivada no es de sorprender si se considera la figura 5, porque $f''(x)$ mide qué tanto se curva la gráfica. [Recuerde que $f''(x)$ mide qué tan rápido cambia la pendiente de $y = f(x)$.]

3 **Límites de error** Suponga que $|f''(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_T y E_M son los errores en las reglas del trapecio y del punto medio, respectivamente, entonces

$$|E_T| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{y} \qquad |E_M| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Aplique esta estimación del error para la aproximación por la regla del trapecio del ejemplo 1. Si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. Como $1 \leqslant x \leqslant 2$, tiene $1/x \leqslant 1$, por lo que

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Por tanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ y $n = 5$ en la estimación de error (3), vea que

K puede ser cualquier número más grande que todos los valores de $|f''(x)|$, pero valores más pequeños que K dan mejores límites de error.

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0.006667$$

Comparando esta estimación de error de 0.006667 con el error real de casi 0.002488, vea que es posible que el error real sea sustancialmente menor que el límite superior para el error dado por (3).

EJEMPLO 2 ¿Qué tan grande debería tomarse n para garantizar que las reglas del trapecio y del punto medio para $\int_1^2 (1/x)\,dx$, tengan una exactitud dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN En el cálculo precedente, se vio que $|f''(x) \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, así que es posible tomar $K = 2$, $a = 1$ y $b = 2$ en (3). La exactitud dentro de 0.0001 significa que el tamaño del error debería ser menor que 0.0001. Por tanto, elija n de manera que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.0001$$

Resolviendo la desigualdad para n, se obtiene

$$n^2 > \frac{2}{12(0.0001)}$$

o

$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0006}} \approx 40.8$$

Es muy posible que un valor menor para n sea suficiente, pero 41 es el valor más pequeño para el cual la fórmula del límite del error puede *garantizar* exactitud dentro de 0.0001.

Así, $n = 41$ asegurará la exactitud deseada.

Para la misma exactitud con la regla del punto medio, elija n tal que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.0001 \qquad \text{por lo que} \qquad n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$$



EJEMPLO 3

(a) Utilice la regla del punto medio con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Dé un límite superior para el error involucrado en esta aproximación.

SOLUCIÓN

(a) Dado que $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$, la regla del punto medio da

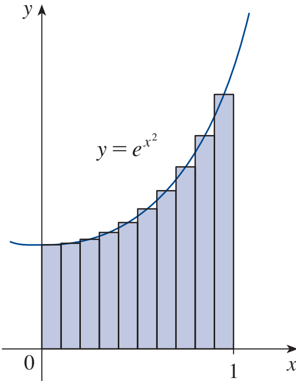


FIGURA 6

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \Delta x\,[f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.85) + f(0.95)]$$

$$= 0.1[e^{0.0025} + e^{0.0225} + e^{0.0625} + e^{0.1225} + e^{0.2025} + e^{0.3025}$$

$$+ e^{0.4225} + e^{0.5625} + e^{0.7225} + e^{0.9025}]$$

$$\approx 1.460393$$

La figura 6 ilustra esta aproximación.

(b) Ya que $f(x) = e^{x^2}$, se tiene $f'(x) = 2xe^{x^2}$ y $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. También, puesto que $0 \leqslant x \leqslant 1$, tiene $x^2 \leqslant 1$ y así

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

El error estimado da el límite superior para el error. Son escenarios teóricos del peor de los casos. El error real en este caso resulta ser de cerca de 0.0023.

Tomando $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$ en el error estimado (3), verá que un límite superior para el error es

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0.007$$ ■

■ La regla de Simpson

Otra regla para la integración aproximada resulta del uso de parábolas en lugar de segmentos de recta para aproximar la curva. Como antes, divida $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez suponga que n es un número *par*. Entonces aproxime la curva $y = f(x) \geqslant 0$ sobre cada par consecutivo de intervalos, por una parábola como se muestra en la figura 7. Si $y_i = f(x_i)$, entonces $P_i(x_i, y_i)$ es el punto en la curva que está arriba de x_i. Una parábola representativa pasa por tres puntos consecutivos P_i, P_{i+1} y P_{i+2}.

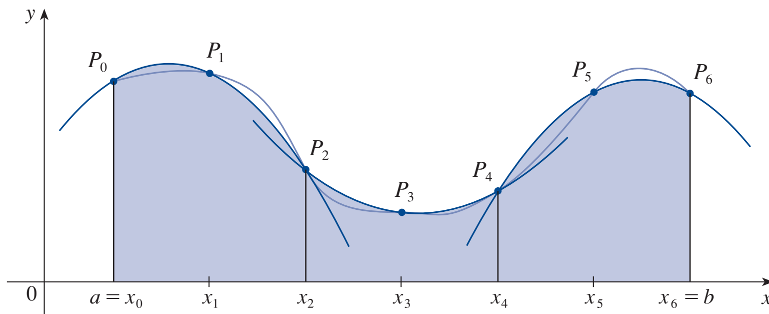


FIGURA 7

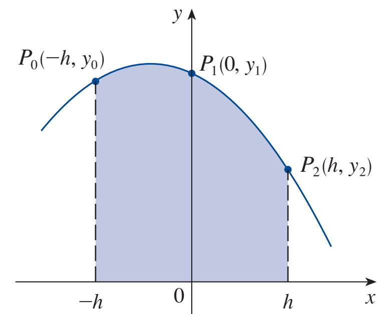


FIGURA 8

Para simplificar sus cálculos, primero considere el caso donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$ (véase la figura 8). Sabe que la ecuación de la parábola que pasa por P_0, P_1 y

P_2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ y, por tanto, el área bajo la parábola desde $x = -h$ hasta $x = h$ es

Aquí emplee el teorema 5.5.7. Observe que $Ax^2 + C$ es par y Bx es impar.

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx = 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h$$

$$= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$$

Pero, dado que la parábola pasa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ y $P_2(h, y_2)$, tiene

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

y por tanto $$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Así, puede reescribir el área bajo la parábola como

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ahora, si se desplaza esta parábola horizontalmente, el área bajo esta no cambia. Esto significa que el área bajo la parábola que pasa por P_0, P_1 y P_2 desde $x = x_0$ hasta $x = x_2$ en la figura 7 es aún

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

De manera similar, el área bajo la parábola que pasa por P_2, P_3 y P_4 de $x = x_2$ a $x = x_4$ es

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Si calcula de esta manera las áreas bajo todas las parábolas y suma los resultados, obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Aunque ha deducido esta aproximación para el caso en el que $f(x) \geqslant 0$, es una aproximación razonable para cualquier función continua f y se le conoce como regla de Simpson en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761). Observe el patrón de coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 4, 1.

Simpson

Thomas Simpson fue un autodidacta en matemáticas que llegó a ser uno de los mejores matemáticos ingleses del siglo XVIII. Lo que se conoce como regla de Simpson, ya era del dominio de Cavalieri y Gregory en el siglo XVII, pero Simpson la popularizó en su libro *Mathematical Dissertations* (1743).

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$

$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde n es par y $\Delta x = (b - a)/n$

EJEMPLO 4 Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\, dx$.

SOLUCIÓN Poniendo $f(x) = 1/x$, $n = 10$ y $\Delta x = 0.1$ en la regla de Simpson, se obtiene

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \approx S_{10}$$

$$= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]$$

$$= \frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.693150$$

Observe que, en el ejemplo 4, la regla de Simpson da una *mucho* mejor aproximación ($S_{10} \approx 0.693150$) para los valores verdaderos de la integral ($\ln 2 \approx 0.693147\ldots$) que los de la regla del trapecio ($T_{10} \approx 0.693771$) o de la regla del punto medio ($M_{10} \approx 0.692835$). Resulta (véase el ejercicio 50) que las aproximaciones en la regla de Simpson son promedios ponderados de los de las reglas del trapecio y del punto medio:

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Recuerde que usualmente E_T y E_M tienen signos opuestos y $|E_M|$ es casi la mitad del tamaño de $|E_T|$).

En muchas aplicaciones de cálculo se necesita evaluar una integral aun cuando no se conoce ninguna fórmula explícita para y como función de x. Una función puede darse en forma gráfica o como una tabla de valores de una colección de datos. Si hay evidencia de que los valores no cambian con rapidez, entonces aún puede utilizarse la regla del trapecio o la regla de Simpson para encontrar un valor aproximado de $\int_a^b y\, dx$, la integral de y respecto a x.

EJEMPLO 5 La figura 9 muestra el tráfico de datos en la conexión de Estados Unidos a SWITCH, la red suiza universitaria y de investigación, el 10 de febrero de 1998. $D(t)$ es el gasto de información, medido en megabits por segundo (Mb/s). Utilice la regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos en la conexión de la medianoche hasta el mediodía de ese día.

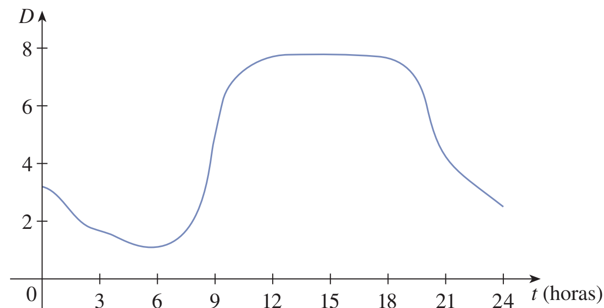


FIGURA 9

SOLUCIÓN Puesto que se desea que las unidades sean congruentes y $D(t)$ se mide en megabits por segundo, convierta las unidades de t de horas a segundos. Si $A(t)$ es la cantidad de datos (en megabits), transmitida en el instante t, donde t se mide en segundos, entonces $A'(t) = D(t)$. Así, por el teorema del cambio neto

(véase la sección 5.4), la cantidad total de datos transmitidos a mediodía (cuando $t = 12 \times 60^2 = 43\,200$) es

$$A(43\,200) = \int_0^{43\,200} D(t)\,dt$$

Estime los valores de $D(t)$ a intervalos de una hora a partir de la gráfica y compílelos en la tabla.

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$	t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3.2	7	25 200	1.3
1	3 600	2.7	8	28 800	2.8
2	7 200	1.9	9	32 400	5.7
3	10 800	1.7	10	36 000	7.1
4	14 400	1.3	11	39 600	7.7
5	18 000	1.0	12	43 200	7.9
6	21 600	1.1			

Después, utilice la regla de Simpson con $n = 12$ y $\Delta t = 3600$ para estimar la integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^{43\,200} A(t)\,dt &\approx \frac{\Delta t}{3}[D(0) + 4D(3600) + 2D(7200) + \cdots + 4D(39\,600) + D(43\,200)] \\
&\approx \frac{3600}{3}[3.2 + 4(2.7) + 2(1.9) + 4(1.7) + 2(1.3) + 4(1.0) \\
&\qquad + 2(1.1) + 4(1.3) + 2(2.8) + 4(5.7) + 2(7.1) + 4(7.7) + 7.9] \\
&= 143\,880
\end{aligned}$$

Así, la cantidad total de datos transmitida de la medianoche hasta el mediodía es de alrededor de 144 000 megabits, o 144 gigabits. ■

n	M_n	S_n
4	0.69121989	0.69315453
8	0.69266055	0.69314765
16	0.69302521	0.69314721

n	E_M	E_S
4	0.00192729	−0.00000735
8	0.00048663	−0.00000047
16	0.00012197	−0.00000003

La tabla en el margen muestra cómo se compara la regla de Simpson con la regla del punto medio para la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$, cuyo valor es aproximadamente de 0.69314718. La segunda tabla muestra cómo decrece el error E_s en la regla de Simpson, por un factor de casi 16 cuando n se duplica. (En los ejercicios 27 y 28 se le pide comprobar esto para dos integrales adicionales.) Esto es consistente con la aparición de n^4 en el denominador de la estimación de error siguiente para la regla de Simpson. Esto es similar a las estimaciones dadas en (3) para las reglas del trapecio y del punto medio, pero se utiliza la cuarta derivada de f.

4 Límite de error para la regla de Simpson Suponga que $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_S es el error implicado al utilizar la regla de Simpson, entonces

$$|E_S| \leqslant \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande debe tomar n para garantizar que la aproximación de la regla de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ sea exacta dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN Si $f(x) = 1/x$, entonces $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Dado que $x \geqslant 1$, se tiene $1/x \leqslant 1$, por lo que

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

Por tanto, puede tomar $K = 24$ en (4). Por lo que para un error menor de 0.0001, debería elegir n de manera que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.0001$$

Esto da
$$n^4 > \frac{24}{180(0.0001)}$$

o
$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0.00075}} \approx 6.04$$

Por tanto, $n = 8$ (n debe ser par) da la exactitud deseada. (Compare esto con el ejemplo 2, donde obtuvo $n = 41$ para la regla del trapecio y $n = 29$ para la regla del punto medio.) ■

Muchas calculadoras y sistemas algebraicos computacionales tienen un algoritmo integrado que calcula una aproximación de una integral definida. Algunas de estas máquinas utilizan la regla de Simpson; otras utilizan técnicas más complejas como la integración numérica *adaptativa*. Esto significa que si una función fluctúa mucho más en cierta parte del intervalo que en cualquier otra parte, entonces esta parte se divide en más subintervalos. Esta estrategia reduce el número de cálculos requeridos para lograr la exactitud prescrita.

EJEMPLO 7

(a) Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Estime el error implicado en esta aproximación.

SOLUCIÓN

(a) Si $n = 10$, entonces $\Delta x = 0.1$ y la regla de Simpson da

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + \cdots + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)]$$

$$= \frac{0.1}{3}[e^0 + 4e^{0.01} + 2e^{0.04} + 4e^{0.09} + 2e^{0.16} + 4e^{0.25} + 2e^{0.36} + 4e^{0.49} + 2e^{0.64} + 4e^{0.81} + e^1]$$

$$\approx 1.462681$$

La figura 10 ilustra los cálculos del ejemplo 7. Observe que los arcos parabólicos son muy cercanos a la gráfica de $y = e^{x^2}$ que son prácticamente indistinguibles de esta.

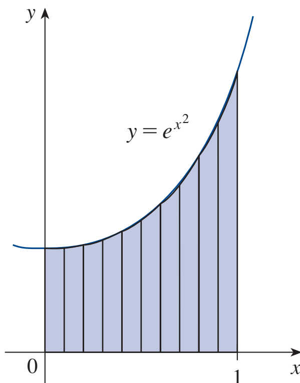


FIGURA 10

(b) La cuarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ es

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

y así, dado que $0 \leqslant x \leqslant 1$, se tiene

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Por tanto, escribiendo $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$ en (4), se ve que el error es a lo más

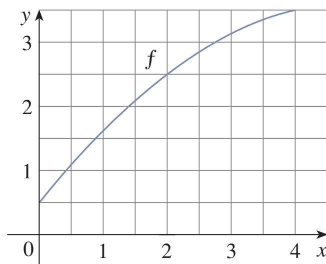
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0.000115$$

(Compare esto con el ejemplo 3.) Así, con un redondeo a tres decimales, se tiene

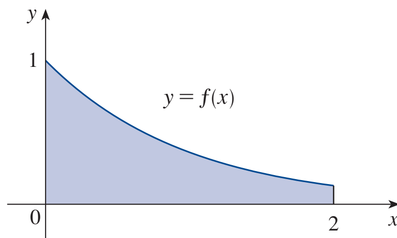
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1.463$$ ■

7.7 EJERCICIOS

1. Sea $\int_0^4 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Utilice la gráfica para encontrar L_2, R_2 y M_2.
(b) ¿Son estas sobreestimaciones o subestimaciones de I?
(c) Utilice la gráfica para encontrar T_2. ¿Cómo se compara esta con I?
(d) Para cualquier valor de n, enumere los números L_n, R_n, M_n, T_n e I, en orden creciente.



2. Se utilizaron las aproximaciones por la izquierda, por la derecha, la regla del trapecio y la regla del punto medio para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra. Las estimaciones fueron 0.7811, 0.8675, 0.8632 y 0.9540, y se utilizó el mismo número de subintervalos en cada caso.
(a) ¿Cuál regla produce cuál estimación?
(b) ¿Entre cuáles dos aproximaciones está el valor verdadero de $\int_0^2 f(x)\,dx$?



3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ utilizando (a) la regla del trapecio y (b) la regla del punto medio, cada una con $n = 4$. A partir de una gráfica del integrando, decida si sus respuestas son subestimadas o sobreestimadas ¿Qué se puede concluir acerca del valor verdadero de la integral?

4. Dibuje la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x^2)$ en el rectángulo de vista $[0, 1]$ por $[0, 0.5]$ y sea $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
(a) Utilice la gráfica para decidir si L_2, R_2, M_2 y T_2 son subestimaciones o sobreestimaciones de I.
(b) Para cualquier valor de n, enumere los números L_n, R_n, M_n, T_n e I, en orden creciente.
(c) Calcule L_5, R_5, M_5 y T_5. A partir de la gráfica, ¿cuál piensa usted que da la mejor estimación de I?

5–6 Utilice (a) la regla del punto medio y (b) la regla de Simpson para aproximar cada una de las integrales dadas con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.) Compare sus resultados con el valor verdadero para determinar el error en cada aproximación.

5. $\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\,dx, \quad n = 8$

6. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx, \quad n = 6$

7–18 Utilice (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson para aproximar las integrales dadas con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.)

7. $\int_1^2 \sqrt{x^3 - 1}\,dx, \quad n = 10$

8. $\int_0^2 \frac{1}{1 + x^6}\,dx, \quad n = 8$

9. $\int_1^4 \sqrt{\ln x}\,dx, \quad n = 6$

10. $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{1 + \cos x}\,dx, \quad n = 4$

11. $\int_0^4 x^3 \operatorname{sen} x\,dx, \quad n = 8$

12. $\int_1^3 e^{1/x}\,dx, \quad n = 8$

13. $\int_0^4 \sqrt{y}\cos y\,dy, \quad n = 8$

14. $\int_2^3 \frac{1}{\ln t}\,dt, \quad n = 10$

15. $\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^4}\,dx, \quad n = 10$

16. $\int_1^3 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt, \quad n = 4$

17. $\int_0^4 \ln(1 + e^x)\,dx, \quad n = 8$

18. $\int_0^1 \sqrt{x + x^3}\,dx, \quad n = 10$

19. (a) Encuentre las aproximaciones T_8 y M_8 para la integral $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$.
(b) Estime los errores en las aproximaciones del inciso (a).
(c) ¿Qué tan grande se debe elegir n de modo que las aproximaciones T_n y M_n para la integral del inciso (a) tengan una exactitud dentro de 0.0001?

20. (a) Encuentre las aproximaciones T_{10} y M_{10} para $\int_1^2 e^{1/x}\,dx$.
(b) Estime los errores en la aproximación del inciso (a).
(c) ¿Qué tan grande se debe elegir n de manera que las aproximaciones T_n y M_n para la integral del inciso (a) tengan una exactitud dentro de 0.0001?

21. (a) Encuentre las aproximaciones T_{10}, M_{10} y S_{10} para $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ y los errores correspondientes E_T, E_M y E_S.
(b) Compare los errores reales del inciso (a) con las estimaciones del error dadas por (3) y (4).
(c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n, M_n y S_n para la integral del inciso (a) estén dentro de una exactitud de 0.00001?

22. ¿Qué tan grande debería ser n para garantizar que la aproximación por la regla de Simpson para $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ esté dentro de 0.00001?

23. La dificultad con las estimaciones de error es que suele ser muy difícil calcular cuatro derivadas y obtener a mano un buen límite superior K para $|f^{(4)}(x)|$. Pero los sistemas algebraicos computacionales no tienen problema para calcular $f^{(4)}$ y graficarla, así que es posible encontrar con facilidad un valor de K a partir de una gráfica hecha por la máquina. Este ejercicio trata con las aproximaciones a la integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ donde $f(x) = e^{\cos x}$.

(a) Utilice una gráfica para obtener un buen límite superior para $|f''(x)|$.
(b) Utilice M_{10} para aproximar I.
(c) Use el inciso (a) para estimar el error en el inciso (b).
(d) Utilice la capacidad de integración numérica integrada en su SAC para aproximar I.
(e) ¿Cómo se compara el error real con la estimación de error del inciso (c)?
(f) Utilice una gráfica para obtener un buen límite superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(g) Utilice S_{10} para aproximar I.
(h) Utilice el inciso (f) para estimar el error en el inciso (g).
(i) ¿Cómo se compara el error verdadero con el error estimado en el inciso (h)?
(j) ¿Qué tan grande debería ser n para garantizar que el tamaño del error al utilizar S_n sea menor que 0.0001?

24. Repita el ejercicio 23 para la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^3}\,dx$.

25–26 Encuentre las aproximaciones L_n, R_n, T_n y M_n para $n = 5$, 10 y 20. Después, calcule los errores correspondientes E_L, E_R, E_T y E_M. (Redondee sus respuestas a seis decimales. Si lo desea, puede utilizar el comando SUM de un sistema algebraico computacional). ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando se duplica n?

25. $\int_0^1 xe^x\,dx$

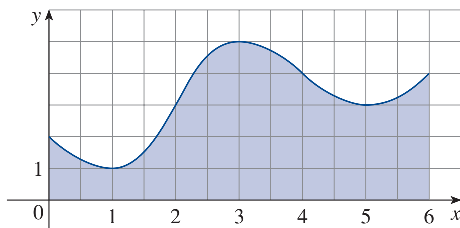
26. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

27–28 Encuentre las aproximaciones T_n, M_n y S_n para $n = 6$ y 12. Después calcule los correspondientes errores E_T, E_M y E_S. (Redondee sus respuestas a seis decimales. Si lo desea, puede utilizar el comando SUM de su sistema algebraico computacional). ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué pasa con los errores cuando n se duplica?

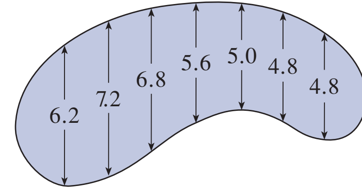
27. $\int_0^2 x^4\,dx$

28. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

29. Estime el área bajo la gráfica en la figura utilizando (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson, cada una con $n = 6$.



30. Los anchos (en metros) de una piscina en forma de riñón se midieron a intervalos de dos metros como se indica en la figura. Utilice la regla de Simpson para estimar el área de la piscina.



31. (a) Utilice la regla del punto medio y los datos dados para estimar el valor de la integral $\int_1^5 f(x)\,dx$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.4	3.5	4.0
1.5	2.9	4.0	4.1
2.0	3.3	4.5	3.9
2.5	3.6	5.0	3.5
3.0	3.8		

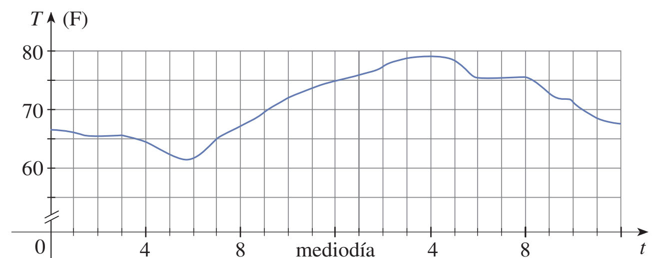
(b) Si se sabe que $-2 \leqslant f''(x) \leqslant 3$ para toda x, estime el error implicado en la aproximación en el inciso (a).

32. (a) Se da una tabla de valores de una función g. Utilice la regla de Simpson para estimar $\int_0^{1.6} g(x)\,dx$.

x	$g(x)$	x	$g(x)$
0.0	12.1	1.0	12.2
0.2	11.6	1.2	12.6
0.4	11.3	1.4	13.0
0.6	11.1	1.6	13.2
0.8	11.7		

(b) Si $-5 \leqslant g^{(4)}(x) \leqslant 2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1.6$, estime el error implicado en la aproximación en el inciso (a).

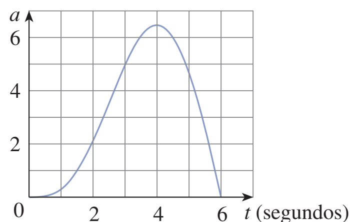
33. Se muestra una gráfica de temperatura en la ciudad de Boston el 11 de agosto de 2013. Utilice la regla de Simpson con $n = 12$ para estimar el promedio de temperatura de ese día.



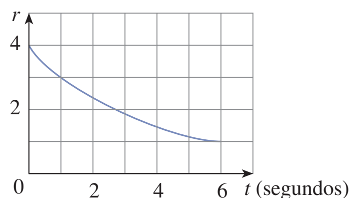
34. Se empleó una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor durante los primeros 5 segundos de una competencia (véase la tabla). Utilice la regla de Simpson para estimar la distancia que cubrió el corredor durante ese lapso.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

35. Se muestra la gráfica de la aceleración $a(t)$ de un automóvil medida en m/s^2. Utilice la regla de Simpson para estimar el aumento de velocidad del automóvil durante el intervalo de 6 segundos.



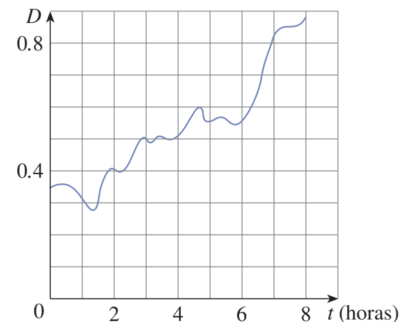
36. El agua se fuga de un depósito con una rapidez de $r(t)$ litros por hora, donde la gráfica de r es como se muestra. Utilice la regla de Simpson para estimar la cantidad total de agua que escapa durante las primeras 6 horas.



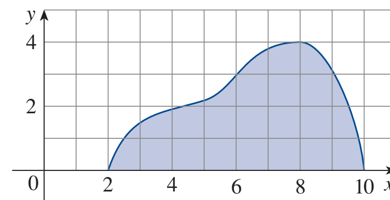
37. La tabla da el consumo de potencia en megavatios en Ontario desde la medianoche a las 6:00 a.m. el 10 de diciembre de 2004. Utilice la regla de Simpson para estimar la potencia utilizada durante ese período. (Use el hecho de que la potencia es la derivada de la energía.)

t	P	t	P
0:00	17 888	3:30	16 835
0:30	17 398	4:00	17 065
1:00	17 110	4:30	17 264
1:30	16 881	5:00	17 577
2:00	16 832	5:30	17 992
2:30	16 950	6:00	18 216
3:00	16 833		

38. En la gráfica se muestra el tráfico de datos en una línea de datos TI del proveedor de servicio de internet de la medianoche a las 8:00 a.m. D es el flujo de datos medido en megabits por segundo. Utilice la regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese período.



39. Utilice la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar el volumen del sólido obtenido al rotar la región que se muestra en la figura, alrededor de (a) el eje x y (b) el eje y.



40. La tabla muestra valores de una función fuerza $f(x)$, donde x está medido en metros y $f(x)$ en newtons. Utilice la regla de Simpson para estimar el trabajo realizado por la fuerza al mover un objeto a una distancia de 18 m.

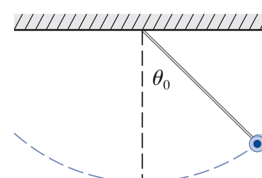
x	0	3	6	9	12	15	18
$f(x)$	9.8	9.1	8.5	8.0	7.7	7.5	7.4

41. La región acotada por las curvas $y = 1/(1 + e^{-x})$, el eje x, y el eje y y la recta $x = 10$ es rotada alrededor del eje x. Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar el volumen del sólido resultante.

SAC **42.** En la figura se muestra un péndulo con longitud L que forma un ángulo máximo θ_0 con la vertical. Utilizando la segunda ley de Newton, se puede demostrar que el período T (el tiempo para una oscilación completa) está dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

donde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. Si $L = 1$ m y $\theta_0 = 42°$, utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para encontrar el período.



43. La intensidad de luz con longitud de onda λ que viaja por una rejilla de difracción con N ranuras en un ángulo θ está dado por $I(\theta) = N^2 \operatorname{sen}^2 k/k^2$, donde $k = (\pi N d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$ y d es la distancia entre ranuras adyacentes. Un láser de helio-neón con longitud de onda $\lambda = 632.8 \times 10^{-9}$ m está emitiendo una estrecha banda de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$ a través de una rejilla con 10 000 ranuras espaciadas 10^{-4} m. Utilice la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar la intensidad total de luz $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\, d\theta$ que emerge de la rejilla.

44. Utilice la regla del trapecio con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20} \cos(\pi x)\, dx$. Compare su resultado con el valor verdadero. ¿Puede explicar la discrepancia?

45. Trace la gráfica de una función continua sobre [0, 2] para la cual la regla del trapecio con $n = 2$ es más exacta que la regla del punto medio.

46. Trace la gráfica de una función continua sobre [0, 2] para la cual la aproximación por el punto extremo final con $n = 2$ es más exacta que la regla de Simpson.

47. Si f es una función positiva y $f''(x) < 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, demuestre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\, dx < M_n$$

48. Demuestre que si f es una función polinomial de grado 3 o menor, entonces la regla de Simpson da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\, dx$.

49. Demuestre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

50. Demuestre que $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

7.8 Integrales impropias

Al establecer la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ se trata con una función f definida sobre un intervalo finito $[a, b]$ y se supone que f no tiene una discontinuidad infinita (véase la sección 5.2). En esta sección se extenderá el concepto de integral definida al caso donde el intervalo es infinito y también para el caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$. En cada caso la integral se llama *impropia*. Una de las más importantes aplicaciones de esta idea se da en la distribución de probabilidad, que será estudiada en la sección 8.5.

Tipo 1: intervalos infinitos

Considere la región infinita S que está bajo la curva $y = 1/x^2$, por encima del eje x y a la derecha de la recta $x = 1$. Podría pensarse que, puesto que S se extiende al infinito, su área debe ser infinita, pero vea esto con más detalle. El área de la parte de S que está a la izquierda de la recta $x = t$ (sombreada en la figura 1) es

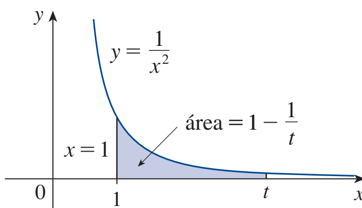


FIGURA 1

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Observe que $A(t) < 1$ sin importar qué tan grande se elija t.

También observe que

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada se aproxima a 1 cuando $t \to \infty$ (véase la figura 2), por lo que se dice que el área de la región infinita S es igual a 1 y se escribe

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

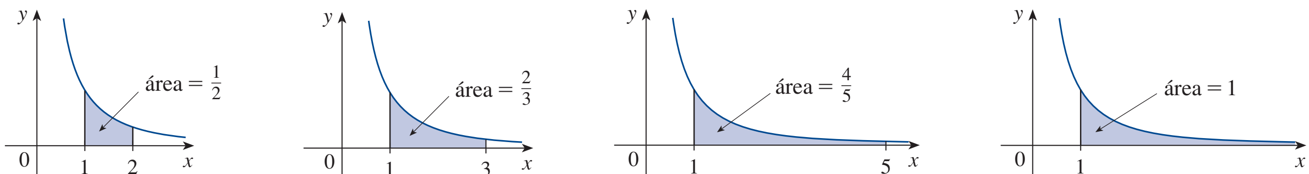


FIGURA 2

Usando este ejemplo como guía, se define la integral de f (no necesariamente una función positiva) sobre un intervalo infinito como el límite de las integrales sobre intervalos finitos.

1 Definición de una integral impropia de tipo 1

(a) Si $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que el límite exista (como un número finito).

(b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que este límite exista (como un número finito).

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si el límite correspondiente existe, y **divergentes** si el límite no existe.

(c) Si ambas $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

En el inciso (c) se puede utilizar cualquier número real a (véase el ejercicio 76).

Cualesquiera de las integrales impropias en la definición 1 puede interpretarse como un área, siempre que f sea una función positiva. Por ejemplo, en el caso (a) si $f(x) \geqslant 0$ y la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces se define el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en la figura 3 como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Esto es apropiado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es el límite cuando $t \to \infty$ del área bajo la gráfica de f desde a hasta t.

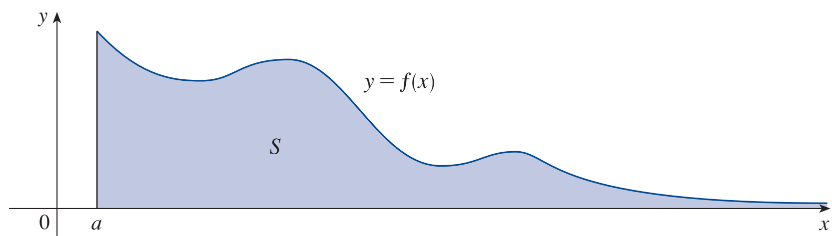


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Determine si la integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN De acuerdo con el inciso (a) de la definición 1, se tiene

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

El límite no existe como un número finito y, por tanto, la integral impropia $\int_1^\infty (1/x)$ es divergente. ■

Compare el resultado del ejemplo 1 con el ejemplo dado al principio de esta sección:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \ \text{ converge} \qquad\qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \ \text{ diverge}$$

Geométricamente, esto indica que, aunque las curvas $y = 1/x^2$ y $y = 1/x$ se parecen mucho para $x > 0$, la región bajo $y = 1/x^2$ a la derecha de $x = 1$ (la región sombreada en la figura 4) tiene un área finita, mientras que el área de la correspondiente región bajo $y = 1/x$ (figura 5) tiene un área infinita. Observe que ambas $1/x^2$ y $1/x$ tienden a 0 cuando $x \to \infty$, pero $1/x^2$ tiende a 0 más rápido que $1/x$. Los valores de $1/x$ no decrecen lo suficientemente rápido para que su integral tenga un valor finito.

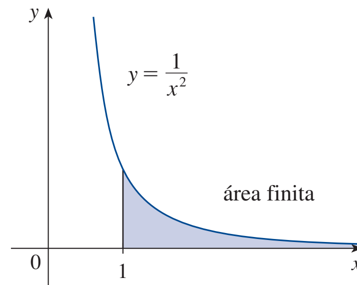


FIGURA 4
$\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ converge

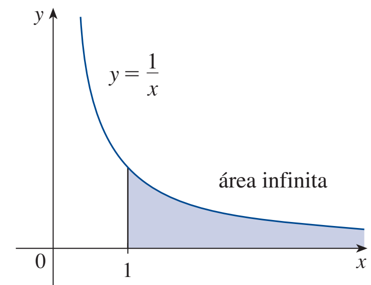


FIGURA 5
$\int_1^\infty (1/x)\,dx$ diverge

EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN Utilizando el inciso (b) de la definición 1, se tiene

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x\,dx$$

Se integra por partes con $u = x$, $dv = e^x\,dx$ por lo que $du = dx$ y $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

TEC En Module 7.8 puede investigar visual y numéricamente si algunas integrales impropias son convergentes o divergentes.

Se sabe que $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$ y, por la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(-e^t) = 0$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}(-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 + 0 = -1$$ ■

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Es conveniente elegir $a = 0$ en la definición 1(c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Ahora debe evaluar por separado las integrales del lado derecho:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\tan^{-1}t - \tan^{-1}0) = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ya que ambas integrales son convergentes, la integral dada es convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

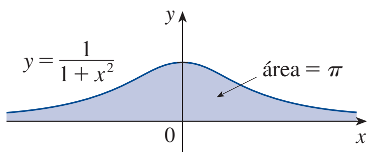


FIGURA 6

Puesto que $1/(1 + x^2) > 0$, la integral impropia dada puede interpretarse como el área de la región infinita que está bajo la curva $y = 1/(1 + x^2)$ y por arriba del eje x (véase la figura 6). ■

EJEMPLO 4 ¿Para qué valores de p, la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

es convergente?

SOLUCIÓN Se sabe del ejemplo 1 que si $p = 1$, entonces la integral es divergente, por lo que se supone que $p \neq 1$. Entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$, así que cuando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ y $1/t^{p-1} \to 0$. Por tanto

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si } p > 1$$

y, en consecuencia, la integral converge. Pero si $p < 1$, entonces $p - 1 < 0$, por lo que

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{cuando } t \to \infty$$

y la integral diverge. ■

Se resume el resultado del ejemplo 4 para futuras referencias:

2 $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{es convergente si } p > 1 \text{ y divergente si } p \leqslant 1.$$

Tipo 2: integrandos discontinuos

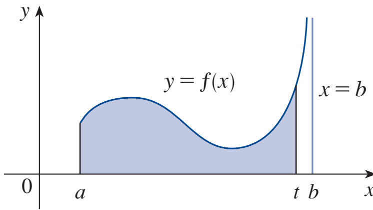


FIGURA 7

Suponga que f es una función continua positiva definida sobre un intervalo finito $[a, b)$, pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y arriba del eje x entre a y b. (Para integrales del tipo 1, las regiones se extienden indefinidamente en una dirección horizontal. Aquí la región es infinita en una dirección vertical.) El área de la parte de S entre a y t (la región sombreada en la figura 7) es

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si sucede que $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \to b^-$, entonces se dice que el área de la región S es A y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Utilice esta ecuación para definir una integral impropia de tipo 2, aun cuando f no es una función positiva, sin importar qué tipo de discontinuidad tenga f en b.

Los incisos (b) y (c) de la definición 3 se ilustran en las figuras 8 y 9 para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y f tiene asíntotas verticales en a y c, respectivamente.

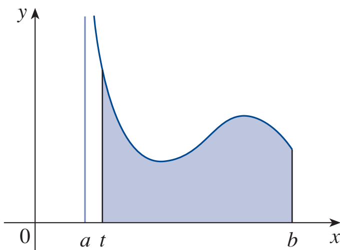


FIGURA 8

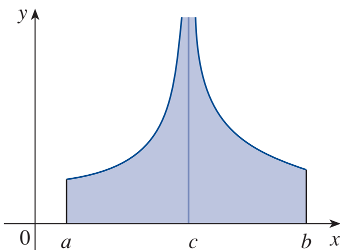


FIGURA 9

3 Definición de una integral impropia de tipo 2

(a) Si f es continua en $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

(b) Si f es continua sobre $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama **convergente** si existe el límite correspondiente, y **divergente** si el límite no existe.

(c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, y ambas $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 5 Encuentre $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero note que la integral dada es impropia porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tiene una asíntota vertical $x = 2$. Dado que hay una discontinuidad infinita en el punto

final izquierdo de [2, 5], utilice el inciso (b) de la definición 3:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5$$

$$= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) = 2\sqrt{3}$$

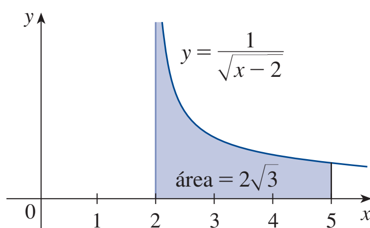


FIGURA 10

Por lo que la integral impropia dada es convergente y, puesto que el integrando es positivo, se puede interpretar el valor de la integral como el área de la región sombreada en la figura 10. ■

EJEMPLO 6 Determine si $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Observe que la integral dada es impropia porque $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Utilizando el inciso (a) de la definición 3 y la fórmula 14 de la tabla de integrales, se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to(\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1] = \infty$$

Ya que $\sec t \to \infty$ y $\tan t \to \infty$ cuando $t \to (\pi/2)^-$. Así la integral impropia dada es divergente. ■

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^3 \dfrac{dx}{x-1}$ si es posible.

SOLUCIÓN Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando. Puesto que aparece a la mitad del intervalo [0, 3], debe utilizarse el inciso (c) de la definición 3 con $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde $$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln|t-1| - \ln|-1|\right) = \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

porque $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Así $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente. Esto implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. [No se necesita evaluar $\int_1^3 dx/(x-1)$.] ■

⊘ **ADVERTENCIA** Si no hubiera notado la asíntota $x = 1$ en el ejemplo 7 y se hubiera confundido la integral con una integral ordinaria, entonces se podría caer en el cálculo erróneo siguiente:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esto es incorrecto porque la integral es impropia y debe calcularla en términos de límites.

De ahora en adelante, siempre que se encuentre el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ debe usted decidir, observando la función f en $[a, b]$, si esta es una integral definida ordinaria o una integral impropia.

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_0^1 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Se sabe que la función $f(x) = \ln x$ tiene una asíntota vertical en 0 puesto

que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Por lo que la integral dada es impropia y se tiene

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\,dx$$

Ahora integre por partes con $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$ y $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x\,dx = x \ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$

$$= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t) = -t \ln t - 1 + t$$

Para encontrar el límite del primer término utilice la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to 0^+} t \ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

Por tanto $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} (-t \ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$$

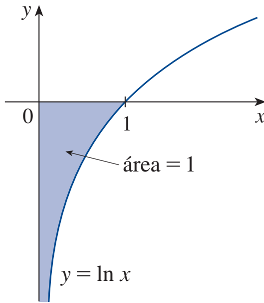


FIGURA 11

La figura 11 muestra la interpretación geométrica de este resultado. El área de la región sombreada sobre $y = \ln x$ y debajo del eje x es 1. ■

■ Una prueba de comparación para las integrales impropias

Algunas veces es imposible encontrar el valor exacto de una integral impropia y aún es importante saber si converge o diverge. En tales casos, es útil el teorema siguiente que, aunque se establece para integrales de tipo 1, un teorema similar es válido para integrales de tipo 2.

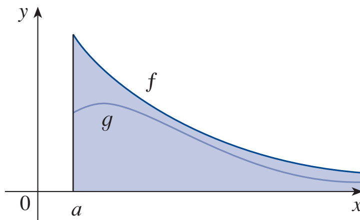


FIGURA 12

Teorema de comparación Suponga que f y g son funciones continuas con $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

(b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

Se omite la demostración del teorema de comparación, pero la figura 12 muestra su factibilidad. Si el área bajo la curva superior $y = f(x)$ es finita, entonces también lo es el área bajo la curva inferior $y = g(x)$. Y si el área bajo $y = g(x)$ es infinita, entonces el área bajo $y = f(x)$ también lo es. [Observe que lo contrario no es necesariamente cierto: si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ puede o no ser convergente, y si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ puede o no ser divergente.]

EJEMPLO 9 Demuestre que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ es convergente.

SOLUCIÓN No se puede evaluar directamente la integral porque la antiderivada de e^{-x^2} no es una función elemental (como se explicó en la sección 7.5). Escriba

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

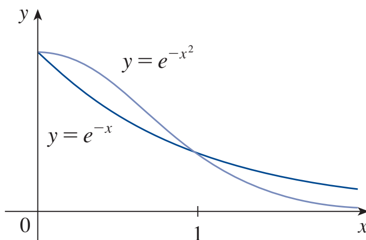


FIGURA 13

y observe que la primera integral al lado derecho es justo una integral definida ordinaria. En la segunda integral, utilice el hecho de que para $x \geqslant 1$ se tiene $x^2 \geqslant x$, y así $-x^2 \leqslant -x$ y por tanto, $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ (véase la figura 13). La integral de e^{-x} se evalúa fácilmente:

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Por tanto, tomando $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el teorema de comparación, se ve que $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente, por lo que se sigue que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. ■

En el ejemplo 9 se demuestra que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente sin calcular su valor. En el ejercicio 72 se indica cómo demostrar que su valor es aproximadamente 0.8862. En la teoría de probabilidad es importante conocer el valor exacto de esta integral impropia, como se verá en la sección 8.5; utilizando los métodos del cálculo multivariable puede demostrarse que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$. La tabla 1 ilustra la definición de una integral impropia mostrando cómo los valores (generados por computadora) de $\int_0^t e^{-x^2}\,dx$ tienden a $\sqrt{\pi}/2$ cuando t es muy grande. De hecho, estos valores convergen muy rápido porque $e^{-x^2} \to 0$ muy rápidamente cuando $x \to \infty$.

Tabla 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

EJEMPLO 10 La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente por el teorema de comparación porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

y $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente por el ejemplo 1 [o por (2) con $p = 1$]. ■

La tabla 2 ilustra la divergencia de la integral en el ejemplo 10. Al parecer, los valores no tienden a un número fijo.

Tabla 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1000	7.1271392134
10 000	9.4297243064

7.8 EJERCICIOS

1. Explique por qué cada una de las integrales siguientes es impropia.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cot x\,dx$

2. ¿Cuáles de las integrales siguientes son impropias? ¿Por qué?

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \tan x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$

3. Encuentre el área bajo la curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ y evalúela para $t = 10$, 100 y 1000. Después encuentre el área total bajo esta curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Trace la gráfica de las funciones $f(x) = 1/x^{1.1}$ y $g(x) = 1/x^{0.9}$ en los rectángulos de vista [0, 10] por [0, 1] y [0, 100] por [0, 1].
(b) Encuentre las áreas bajo las gráficas de f y g desde $x = 1$ hasta $x = t$ y evalúelas para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10} y 10^{20}.
(c) Encuentre el área total bajo cada curva para $x \geqslant 1$, si esta existe.

5–40 Determine si cada una de las integrales siguientes es convergente o divergente. Evalúe las que sean convergentes.

5. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$ **6.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx$ **8.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

9. $\displaystyle\int_2^\infty e^{-5p}\,dp$ **10.** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 2^r\,dr$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (y^3 - 3y^2)\,dy$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}^2\alpha\,d\alpha$ **16.** $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}\,d\theta$

17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$ **18.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}$

19. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{z}{z^4+4}\,dz$ **24.** $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{y}}\,dy$ **26.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{5-x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$

34. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x\, dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta\, d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$

37. $\displaystyle\int_0^1 r \ln r\, dr$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\, d\theta$

39. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

40. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

41–46 Trace cada una de las regiones siguientes y encuentre su área (si el área es finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x}\}$

42. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{x}\}$

43. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/(x^3 + x)\}$

44. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant xe^{-x}\}$

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$

46. $S = \left\{(x, y) \mid -2 < x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x+2}\right\}$

47. (a) Si $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, utilice su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\, dx$, para t = 2, 5, 10, 100, 1000 y 10 000. ¿Parece que $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente?
(b) Utilice el teorema de comparación con $f(x) = 1/x^2$ para demostrar que $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente.
(c) Ilustre el inciso (b) al trazar la gráfica de f y g sobre la misma pantalla para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Utilice su gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente.

48. (a) Si $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, utilice su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\, dx$ para t = 5, 10, 100, 1000 y 10 000. ¿Parece que $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es convergente o divergente?
(b) Utilice el teorema de comparación con $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para demostrar que $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es divergente.
(c) Ilustre el inciso (b) graficando f y g sobre la misma pantalla para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Utilice su gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es divergente.

49–54 Utilice el teorema de comparación para determinar si cada una de las integrales siguientes es convergente o divergente.

49. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1}\, dx$

50. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{\sqrt{x^4 - x}}\, dx$

52. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2 + e^x}\, dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\, dx$

54. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$

55. La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\, dx$$

es impropia por dos razones: el intervalo $[0, \infty)$ es infinito, y el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0. Evalúela expresándola como una suma de integrales impropias de tipo 2 y tipo 1 como sigue:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\, dx$$

56. Evalúe

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$$

por el mismo método que en el ejercicio 55.

57–59 Encuentre los valores de p para los cuales la integral converge y evalúe la integral para esos valores de p.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$

58. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\, dx$

60. (a) Evalúe la integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ para n = 0, 1, 2 y 3.
(b) Infiera el valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ cuando n es un entero positivo arbitrario.
(c) Demuestre su suposición usando inducción matemática.

61. (a) Demuestre que $\int_{-\infty}^\infty x\, dx$ es divergente.
(b) Demuestre que

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t x\, dx = 0$$

Esto demuestra que no se puede definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t f(x)\, dx$$

62. La *rapidez promedio* de las moléculas de un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\, dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas y v es la rapidez molecular. Demuestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Del ejemplo 1, se sabe que la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tiene un área infinita. Demuestre que rotando $\mathcal{R}$ alrededor del eje x se obtiene un sólido con volumen finito.

64. Utilice la información y los datos del ejercicio 6.4.33 para encontrar el trabajo requerido para impulsar un satélite de 1000 kg fuera del campo gravitacional terrestre.

65. Encuentre la *velocidad de escape* v_0 necesaria para impulsar un cohete de masa m fuera del campo gravitacional de un planeta con masa M y radio R. Utilice la ley de la gravitación de Newton (véase el ejercicio 6.4.33) y el hecho de que la energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ suministra el trabajo necesario.

66. Los astrónomos utilizan una técnica llamada *estereografía estelar* para determinar la densidad de las estrellas en un cúmulo estelar a partir de la densidad observada (en dos dimensiones) que puede analizarse en una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R, la densidad de estrellas depende solo de la distancia r desde el centro del cúmulo. Si la densidad estelar percibida está dada por $y(s)$, donde s es la distancia plana observada del centro del cúmulo y $x(r)$ es la densidad real, se puede demostrar que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}} x(r)\, dr$$

Si la densidad real de las estrellas en un cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

67. Un fabricante quiere producir lámparas que duren cerca de 700 horas pero, por supuesto, algunas se queman más rápido que otras. Sea $F(t)$ la fracción de las lámparas de la compañía que se queman antes de t horas, de modo que $F(t)$ yace siempre entre 0 y 1.

(a) Trace una gráfica aproximada de lo que usted piensa que es la forma de la gráfica de F.
(b ¿Cuál es el significado de la derivada $r(t) = F'(t)$?
(c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^\infty r(t)\, dt$? ¿Por qué?

68. Como se vio en la sección 3.8, una sustancia radiactiva decae exponencialmente: la masa en el tiempo t es $m(t) = m(0)e^{kt}$, donde $m(0)$ es la masa inicial y k es una constante negativa. La *vida media* M de un átomo en la sustancia es

$$M = -k \int_0^\infty t e^{kt}\, dt$$

Para el isótopo radiactivo ^{14}C, utilizado en la datación por radiocarbono, el valor de k es -0.000121. Encuentre la vida media de un átomo de ^{14}C.

69. En un estudio de la propagación del consumo de drogas ilegales desde un usuario entusiasta de una población de N usuarios, los autores modelaron el número de nuevos usuarios esperados por la ecuación

$$\gamma = \int_0^\infty \frac{cN(1 - e^{-kt})}{k} e^{-\lambda t}\, dt$$

donde c, k y λ son constantes positivas. Evalúe esta integral para expresar γ en términos de c, N, k y λ.

Fuente: F. Hoppensteadt *et al*., "Threshold Analysis of a Drug Use Epidemic Model," *Mathematical Biosciences* 53 (1981): 79-87.

70. El tratamiento de diálisis elimina urea y otros productos de desecho de la sangre de un paciente desviando del flujo de sangre desde el exterior a través de una máquina llamada dializador. La tasa a la que se elimina urea de la sangre (en mg/min) está a menudo bien descrita por la ecuación

$$u(t) = \frac{r}{V} C_0 e^{-rt/V}$$

donde r es la tasa de flujo de sangre a través del dializador (en mL/min), V es el volumen de la sangre del paciente (en mL) y C_0 es la cantidad de urea en la sangre (en mg) al tiempo $t = 0$. Evalúe la integral $\int_0^\infty u(t)$ e interprétela.

71. Determine qué tan grande debe ser el número a para que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0.001$$

72. Estime el valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ expresándolo como la suma de $\int_0^4 e^{-x^2} dx$ y $\int_4^\infty e^{-x^2} dx$. Aproxime la primera integral utilizando la regla de Simpson con $n = 8$ y demuestre que la segunda integral es más pequeña que $\int_4^\infty e^{-4x} dx$, la cual es menor que 0.0000001.

73. Si $f(t)$ es continua para $t \geqslant 0$, la *transformada de Laplace* de f es la función F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

y el dominio de F es el conjunto que consiste en todos los números s para los cuales la integral converge. Encuentre las transformadas de Laplace de las funciones siguientes.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

74. Demuestre que si $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde M y a son constantes, entonces la transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

75. Suponga que $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ y $0 \leqslant f'(t) \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde f' es continua. Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ y la transformada de Laplace de $f'(t)$ es $G(s)$, demuestre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

76. Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ es convergente y a y b son números reales, demuestre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$$

77. Demuestre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

78. Demuestre que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\; dy$ interpretando las integrales como áreas.

79. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

80. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

81. Suponga que f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. ¿Es posible que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ sea convergente?

82. Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, entonces la integral siguiente es convergente.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$

7 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Establezca la regla para la integración por partes. En la práctica, ¿cómo se utiliza?

2. ¿Cómo se evalúa $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ si m es impar? ¿Qué pasa si n es impar? ¿Qué ocurre si m y n son pares?

3. Si la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ se presenta en una integral, ¿qué sustitución se puede intentar? ¿Qué pasa si se presenta $\sqrt{a^2 + x^2}$? ¿Y si se presenta $\sqrt{x^2 - a^2}$?

4. ¿Cuál es la forma de la descomposición en fracciones parciales de una función racional $P(x)/Q(x)$ si el grado de P es menor que el grado de Q, y $Q(x)$ tiene factores lineales distintos? ¿Qué pasa si tiene factores lineales repetidos? ¿Y qué ocurre *si* $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible (no repetido)? ¿Y si el factor cuadrático se repite?

5. Establezca las reglas para la aproximación de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ con la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson. ¿Cuál esperaría que diera la mejor estimación? ¿Cómo se aproxima la estimación del error para cada regla?

6. Defina las integrales impropias siguientes.

(a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

7. Defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ para cada uno de los casos siguientes.

(a) f tiene una discontinuidad infinita en a.
(b) f tiene una discontinuidad infinita en b.
(c) f tiene una discontinuidad infinita en c, donde $a < c < b$.

8. Establezca el teorema de comparación para integrales impropias.

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $\dfrac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ puede escribirse en la forma $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$.

2. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ puede escribirse en la forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-2}$.

3. $\dfrac{x^2+4}{x^2(x-4)}$ puede escribirse en la forma $\dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x-4}$.

4. $\dfrac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ puede escribirse en la forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+4}$.

5. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln 15$.

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ es convergente.

7. Si f es continua, entonces $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$.

8. La regla del punto medio es siempre más exacta que la regla del trapecio.

9. (a) Toda función elemental tiene una derivada elemental.
(b) Toda función elemental tiene una antiderivada elemental.

10. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

11. Si f es una función continua y decreciente en $[1, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

12. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ son ambas convergentes, entonces $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ es convergente.

13. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ son ambas divergentes, entonces $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ es divergente.

14. Si $f(x) \leqslant g(x)$ y $\int_0^\infty g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ también diverge.

EJERCICIOS

Nota: en los ejercicios 7.5 se proporciona práctica adicional en técnicas de integración.

1–40 Evalúe la integral

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{sen} x}}{\sec x}\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} t \operatorname{sen} 2t\,dt$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_1^2 x^5 \ln x\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \cos^2\theta\,d\theta$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

9. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx$

13. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{\sec^6\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$

17. $\displaystyle\int x\cosh x\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int x\sec x\tan x\,dx$

20. $\displaystyle\int \tan^5\theta\,\sec^3\theta\,d\theta$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

22. $\displaystyle\int \cos\sqrt{t}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

24. $\displaystyle\int te^{\sqrt{t}}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+6x-4}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

26. $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\operatorname{sen} 2x\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x}{1+|x|}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

31. $\displaystyle\int_0^{\ln 10} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$

34. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^{3/2}}}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\,d\theta$

37. $\displaystyle\int (\cos x+\operatorname{sen} x)^2\cos 2x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\tan\theta}}{\operatorname{sen} 2\theta}\,d\theta$

41–50 Evalúe la integral o demuestre que es divergente.

41. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

42. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

44. $\displaystyle\int_2^{6} \frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy$

45. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{2-3x}\,dx$

47. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

48. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x}$

49. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

50. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

51–52 Evalúe cada una de las integrales indefinidas siguientes. Ilustre y verifique que su respuesta sea razonable graficando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

51. $\displaystyle\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

53. Trace la gráfica de la función $f(x) = \cos^2 x\,\operatorname{sen}^3 x$ y utilice la gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Luego evalúe la integral para confirmar su suposición.

SAC **54.** (a) ¿Cómo evaluaría $\int x^5 e^{-2x}\,dx$ a mano? (No realice la integración.)

(b) ¿Cómo evaluaría $\int x^5 e^{-2x}\,dx$ utilizando tablas? (No realice la evaluación.)

(c) Utilice un SAC para evaluar $\int x^5 e^{-2x}\,dx$.

(d) Trace la gráfica del integrando y la integral indefinida en la misma pantalla.

55–58 Utilice la tabla de integrales de las páginas de referencia para evaluar la integral.

55. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2-4x-3}\,dx$

56. $\displaystyle\int \csc^5 t\,dt$

57. $\displaystyle\int \cos x\sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}\,dx$

59. Verifique la fórmula 33 en la tabla de integrales (a) derivando y (b) utilizando una sustitución trigonométrica.

60. Verifique la fórmula 62 en la tabla de integrales.

61. ¿Es posible encontrar un número n tal que $\int_0^{\infty} x^n\,dx$ sea convergente?

62. ¿Para qué valores de a es $\int_0^{\infty} e^{ax}\cos x\,dx$ convergente? Evalúe la integral para esos valores de a.

63–64 Utilice (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral dada. Redondee sus respuestas a seis decimales.

63. $\displaystyle\int_2^{4} \frac{1}{\ln x}\,dx$

64. $\displaystyle\int_1^{4} \sqrt{x}\cos x\,dx$

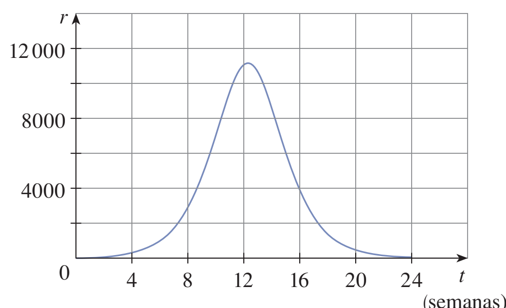
65. Estime los errores implicados en el ejercicio 63, incisos (a) y (b). ¿Cuán grande debe ser n en cada caso, para garantizar un error menor que 0.00001?

66. Utilice la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar el área bajo la curva $y = e^x/x$ de $x = 1$ a $x = 4$.

67. La lectura en un velocímetro (v) en un automóvil fue hecha a intervalos de un minuto y registrados en una tabla. Utilice la regla de Simpson para estimar la distancia recorrida por el automóvil.

t (min)	v (km/h)	t (min)	v (km/h)
0	64	6	90
1	67	7	91
2	72	8	91
3	78	9	88
4	83	10	90
5	86		

68. Una población de abejas aumentó en una proporción de $r(t)$ abejas por semana, donde la gráfica de r es como se muestra. Utilice la regla de Simpson con seis subintervalos para estimar el incremento de la población de abejas durante las primeras 24 semanas.

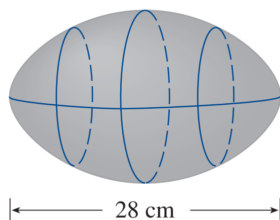


SAC **69.** (a) Si $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, utilice una gráfica para encontrar un límite superior para $|f^{(4)}(x)|$.

(b) Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_0^\pi f(x)\, dx$ y utilice el inciso (a) para estimar el error.

(c) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al utilizar S_n sea menor que 0.00001?

70. Suponga que se le pide estimar el volumen de un balón de futbol. Al hacer la medición encuentra que un balón de futbol mide 28 cm de largo. Con una cuerda se determina que la circunferencia en su punto más amplio es de 53 cm. La circunferencia a 7 cm de cada extremo es de 45 cm. Utilice la regla de Simpson para hacer su estimación.



71. Utilice el teorema de comparación para determinar si la integral es convergente o divergente.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2 + \text{sen}\, x}{\sqrt{x}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}}\, dx$

72. Encuentre el área de la región acotada por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y la recta $y = 3$.

73. Determine el área acotada por las curvas $y = \cos x$ y $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

74. Determine el área de la región acotada por las curvas $y = 1/(2 + \sqrt{x})$, $y = 1/(2 - \sqrt{x})$ y $x = 1$.

75. La región bajo la curva $y = \cos^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, se rota alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

76. La región en el ejercicio 75 rota alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.

77. Si f' es continua sobre $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, demuestre que

$$\int_0^\infty f'(x)\, dx = -f(0)$$

78. Es posible extender la definición de valor promedio de una función continua a un intervalo infinito, definiendo el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - a} \int_a^t f(x)\, dx$$

(a) Encuentre el valor promedio de $y = \tan^{-1}x$ en el intervalo $[0, \infty)$.

(b) Si $f(x) \geqslant 0$ y $\int_a^\infty f(x)\, dx$ es divergente, demuestre que el valor promedio de f en el intervalo $[a, \infty)$ es $\lim_{x\to\infty} f(x)$, si este límite existe.

(c) Si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ es convergente, ¿cuál es el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, \infty)$?

(d) Encuentre el valor promedio de $y = \text{sen}\, x$ en el intervalo $[0, \infty)$.

79. Utilice la sustitución $u = 1/x$ para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx = 0$$

80. La magnitud de la fuerza de repulsión entre dos cargas con el mismo signo, una de tamaño 1 y la otra de tamaño q es

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

donde r es la distancia entre las cargas y ε_0 es una constante. El *potencial* V en un punto P debido a la carga q está definido como el trabajo realizado para traer una carga unitaria a P desde el infinito, a lo largo de una recta que une q y P. Encuentre una fórmula para V.

Problemas adicionales

Cubra la solución del ejemplo e inténtelo primero por sí mismo.

EJEMPLO

(a) Demuestre que si f es una función continua, entonces

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(b) Utilice el inciso (a) para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

para todo número positivo n.

SOLUCIÓN

(a) A primera vista, la ecuación dada podría parecer un poco desconcertante. ¿Cómo puede relacionarse el lado izquierdo con el lado derecho? Con frecuencia, las relaciones pueden hacerse a través de uno de los principios de resolución de problemas: *introduzca algo extra*. Aquí, el ingrediente extra es una nueva variable. Es común pensar en introducir una nueva variable cuando se utiliza la regla de sustitución para integrar una función específica. Pero esta técnica aún es útil en esta circunstancia en la que se tiene una función general f.

SP Los principios para la solución de problemas se discuten en la página 71.

Una vez que se concibe la sustitución, la forma del lado derecho hace pensar que debe ser $u = a - x$. Entonces $du = -dx$. Cuando $x = 0$, $u = a$; cuando $x = a$, $u = 0$. Así,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

Pero esta integral del lado derecho es solo otra forma de escribir $\int_0^a f(x)\,dx$. Así, la ecuación dada queda demostrada.

(b) Sea I la integral dada, y aplique el inciso (a) con $a = \pi/2$, se obtiene

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Las gráficas por computadora de la figura 1 hacen que parezca razonable que todas las integrales del ejemplo tengan el mismo valor. La gráfica de cada integrando se identifica con el valor correspondiente de n.

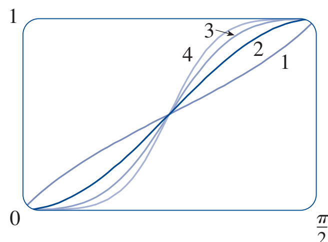


FIGURA 1

Una identidad trigonométrica bien conocida indica que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ y $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, por lo que se obtiene

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx$$

Observe que las dos expresiones para I son muy similares. De hecho, los integrandos tienen el mismo denominador. Esto hace pensar que deben sumarse las dos expresiones. Si se hace así, se obtiene

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, $I = \pi/4$. ■

Problemas

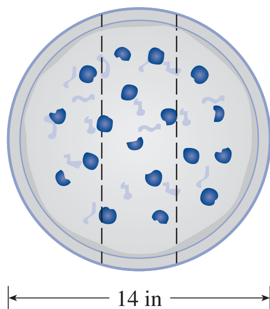


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1



1. Tres estudiantes de matemáticas han ordenado una pizza de 14 pulgadas. En lugar de cortar en la forma tradicional, deciden hacer cortes paralelos, como se ve en la figura. Debido a sus conocimientos de matemáticas, pueden determinar dónde cortar de modo que cada uno obtenga la misma cantidad de pizza. ¿Dónde se hacen los cortes?

2. Evalúe

$$\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx$$

Un método directo sería empezar con fracciones parciales, pero eso sería demasiado complejo. Intente una sustitución.

3. Evalúe $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right) dx$.

4. Los centros de dos discos con radio 1 están apartados una unidad. Encuentre el área de la unión de ellos.

5. Una elipse es cortada por un círculo de radio a. El eje mayor de la elipse coincide con un diámetro del círculo, y el eje menor tiene longitud $2b$. Demuestre que el área de la parte restante del círculo es la misma que el área de una elipse con semiejes a y $a - b$.

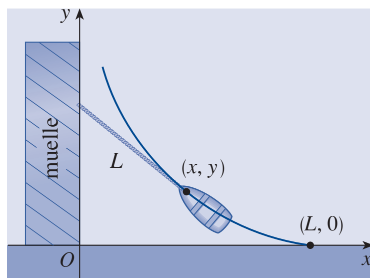


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. Un hombre parado inicialmente en el punto O camina a lo largo de un muelle jalando un bote mediante una cuerda de longitud L. El hombre mantiene la cuerda recta y tensa. La trayectoria que sigue el bote es una curva llamada *tractrix* y tiene la propiedad de que la cuerda es siempre tangente a la curva (véase la figura).

(a) Demuestre que si la trayectoria seguida por el bote es la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$

(b) Determine la función $y = f(x)$.

7. Una función f está definida por

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos t \cos(x - t)\,dt \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Encuentre el valor mínimo de f.

8. Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n n!$$

9. Demuestre que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

Sugerencia: empiece por demostrar que si I_n denota la integral, entonces

$$I_{k+1} = \frac{2k + 2}{2k + 3} I_k$$



10. Suponga que f es una función positiva tal que f' es continua.

(a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ sen nx con la gráfica de $y = f(x)$? ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?

(b) Haga una inferencia en cuanto al valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

con base en las gráficas del integrando.

(c) Utilizando integración por partes, confirme la inferencia que hizo en el inciso (b). [Utilice el hecho de que, puesto que f' es continua, hay una constante M tal que $|f'(x)| \leq M$ para $0 \leq x \leq 1$.]

11. Si $0 < a < b$, encuentre

$$\lim_{t\to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1 - x)]^t\, dx \right\}^{1/t}$$

12. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ y utilice la gráfica para estimar el valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\, dx$ es un máximo. Después encuentre el valor exacto de t que maximiza esta integral.

13. Evalúe $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1 + x^6} \right)^2 dx$.

14. Evalúe $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\, dx$.

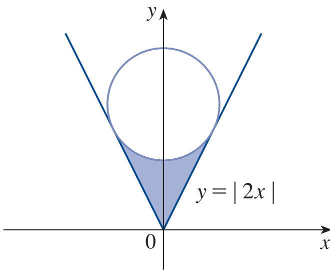


FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

15. El círculo con radio 1 que se muestra en la figura, toca la curva $y = |2x|$ dos veces. Encuentre el área de la región que está entre las dos curvas.

16. Un cohete se dispara verticalmente en línea recta quemando combustible a una razón constante de b kilogramos por segundo. Sea $v = v(t)$ la velocidad del cohete en el instante t, y suponga que la velocidad u del gas de salida es constante. Sea $M = M(t)$ la masa del cohete al tiempo t y observe que M disminuye cuando se quema el combustible. Si se desprecia la resistencia del aire, se deduce de la segunda ley de Newton que

$$F = M\frac{dv}{dt} - ub$$

donde la fuerza $F = -Mg$. Por lo que

$$\boxed{1} \qquad M\frac{dv}{dt} - ub = -Mg$$

Sea M_1 la masa del cohete sin combustible, M_2 la masa inicial del combustible y $M_0 = M_1 + M_2$. Entonces, hasta que se agota el combustible en el tiempo $t = M_2/b$, la masa es $M = M_0 - bt$.

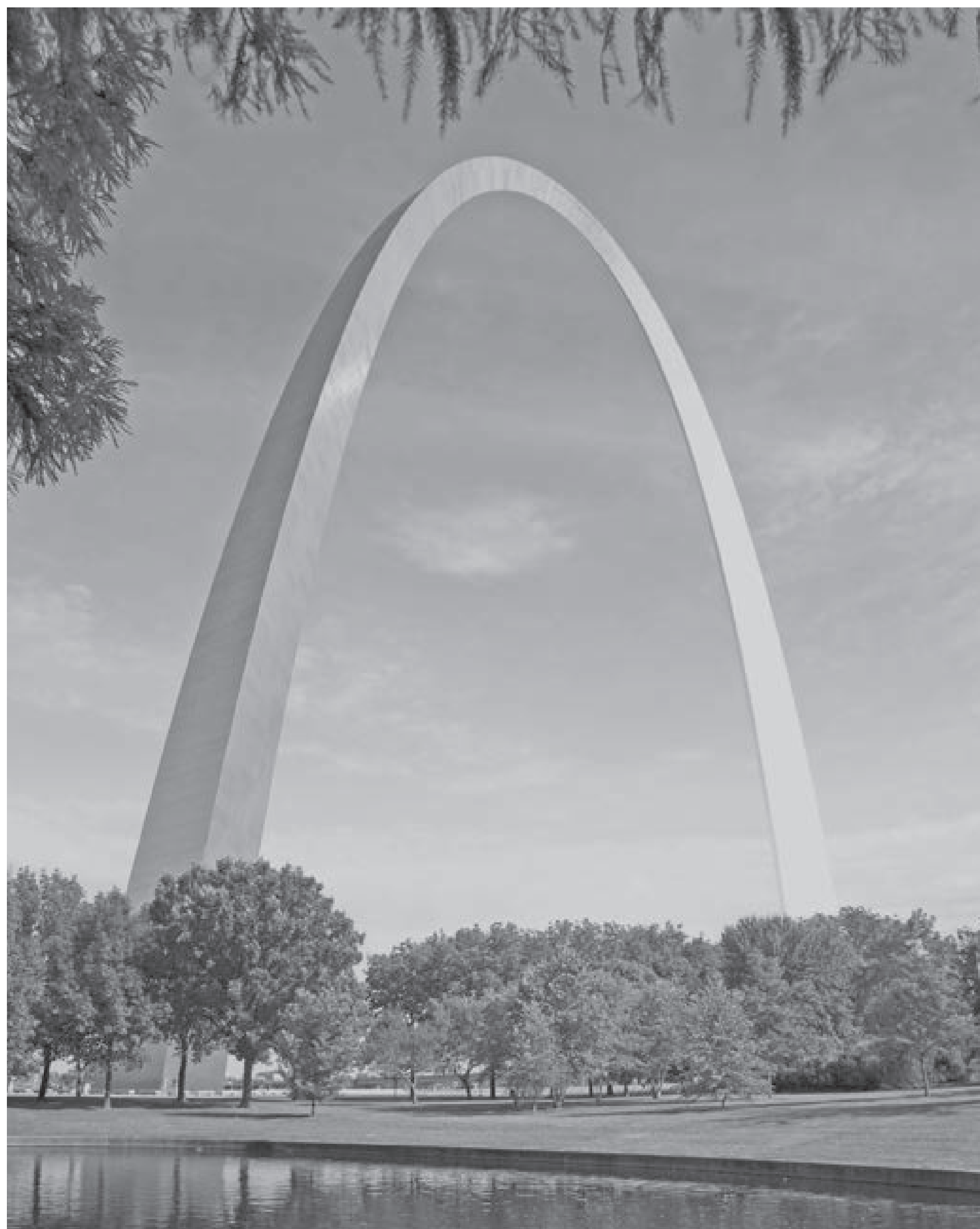
(a) Sustituya $M = M_0 - bt$ en la ecuación 1 y resuelva la ecuación resultante para v. Utilice la condición inicial $v(0) = 0$ para evaluar la constante.

(b) Determine la velocidad del cohete en el tiempo $t = M_2/b$. Esta se llama *velocidad de combustible agotado*.

(c) Determine la altura del cohete $y = y(t)$ y el tiempo en que se quema todo el combustible.

(d) Determine la altura del cohete en cualquier tiempo t.

8 Aplicaciones adicionales de la integración



El arco Gateway en San Louis, Missouri, mide 192 metros de alto y fue terminado en 1965. El arco fue diseñado por Eero Saarinen con una ecuación que implica la función coseno hiperbólico. En el ejercicio 8.1.42 se pide calcular la longitud de la curva que se utilizó.

ALGUNAS APLICACIONES de las integrales se abordaron en el capítulo 6: áreas, volúmenes, trabajo y valores promedio. Ahora se exploran algunas de otras muchas aplicaciones geométricas de la integración —la longitud de una curva y el área de una superficie—, así como cantidades de interés en física, ingeniería, biología, economía y estadística. Por ejemplo, se investigará el centro de gravedad de una placa, la fuerza ejercida por la presión del agua en una presa, el flujo sanguíneo del corazón humano y el tiempo promedio de espera durante una llamada telefónica de atención al cliente.

8.1 Longitud de arco

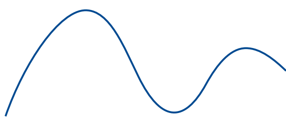


FIGURA 1

¿Qué se entiende por longitud de una curva? Podría pensar en ajustar un segmento de cuerda a la curva de la figura 1, y después medir la cuerda con una regla. Pero eso podría ser difícil de hacer con mucha exactitud si se tiene una curva complicada. Entonces, se necesita una definición precisa para la longitud de un arco de una curva, en el mismo sentido que las definiciones desarrolladas para los conceptos de área y volumen.

Si la curva es un polígono, se puede determinar con facilidad su longitud; solo se necesitan sumar las longitudes de los segmentos de recta que forman el polígono (puede usar la fórmula de la distancia para determinar esta entre los puntos extremos de cada segmento). Con esta estrategia, podemos definir la longitud de una curva general aproximándola primero mediante un polígono y luego tomando un límite cuando se incrementa el número de segmentos del polígono. Este proceso es conocido para el caso de un círculo, donde la circunferencia es el límite de longitudes de polígonos inscritos (véase la figura 2).

TEC Visual 8.1 muestra una animación de la figura 2.

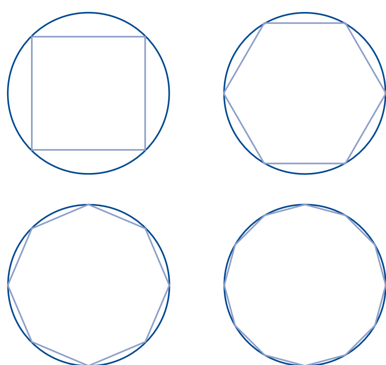


FIGURA 2

Ahora supongamos que una curva C se define mediante la función $y = f(x)$, donde f es continua y $a \leqslant x \leqslant b$. Así puede obtener una aproximación poligonal a C dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y de igual ancho a Δx. Si $y_i = f(x_i)$, entonces el punto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre C, y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, ilustrado en la figura 3, es una aproximación a C.

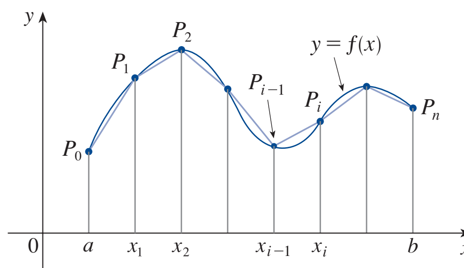


FIGURA 3

La longitud L de C es aproximadamente la longitud de este polígono y la aproximación es mejor cuando se incrementa n. (Véase la figura 4, donde se ha ampliado el arco de la curva entre P_{i-1} y P_i y se muestran las aproximaciones con valores sucesivamente más pequeños de Δx. Por tanto, se define la **longitud** L de la curva C con ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, como el límite de las longitudes de estos polígonos inscritos (si el límite existe):

1
$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

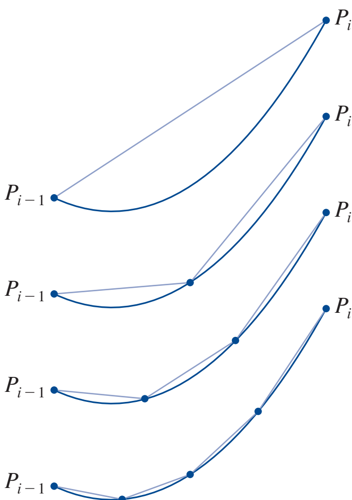


FIGURA 4

Observe que el procedimiento para definir la longitud de arco es muy similar al utilizado para definir área y volumen: se divide la curva en un gran número de partes pequeñas. Luego, se determinan las longitudes aproximadas de estas y se suman. Por último, se toma el límite cuando $n \to \infty$.

La definición de la longitud de arco expresada en la ecuación 1 no es muy conveniente para calcularse con una computadora pero se puede deducir una fórmula integral para L en el caso donde f tiene una derivada continua. [Tal función f se denomina **suave** porque un cambio pequeño en x produce un cambio pequeño en $f'(x)$.]

Si $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, entonces

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Al aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, hay un número x_i^* entre x_{i-1} y x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

esto es,

$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x$$

Por lo que

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\,\Delta x]^2}$$

$$= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \qquad \text{(ya que } \Delta x > 0\text{)}$$

Por tanto, por la definición 1,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Esta expresión se reconoce como igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

por la definición de una integral definida. Esta integral existe porque la función $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es continua. Con esto, se ha demostrado el teorema siguiente:

2 **Fórmula de la longitud de arco** Si f' es continua en $[a, b]$, entonces la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Si se usa la notación de Leibniz para derivadas, la fórmula de la longitud de arco se expresa como:

3
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre los puntos (1, 1) y (4, 8). (Véase la figura 5.)

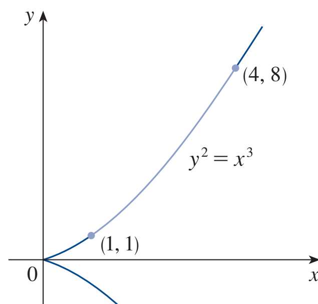


FIGURA 5

SOLUCIÓN Para la mitad superior de la curva se tiene

$$y = x^{3/2} \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

y, por tanto, la fórmula de longitud de arco da

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

Si sustituye $u = 1 + \frac{9}{4}x$, entonces $du = \frac{9}{4}dx$. Cuando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; cuando $x = 4$, $u = 10$.

Como comprobación de la respuesta al ejemplo 1, observe en la figura 5 que la longitud de arco debe ser un poco más grande que la distancia de (1, 1) a (4, 8), que es

$$\sqrt{58} \approx 7.615773$$

De acuerdo con el cálculo del ejemplo 1, se tiene

$$L = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \approx 7.633705$$

Con certeza suficiente, esta es un poco más grande que la longitud del segmento de recta.

Por tanto

$$L = \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\, du = \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10}$$

$$= \tfrac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right] = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \qquad \blacksquare$$

Si una curva tiene la ecuación $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, y $g'(y)$ es continua, entonces al intercambiar los papeles de x y y en la fórmula 2 o en la ecuación 3, se obtiene la fórmula siguiente para su longitud:

4
$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

EJEMPLO 2 Encuentre la longitud del arco de la parábola $y^2 = x$ de (0, 0) a (1, 1).

SOLUCIÓN Puesto que $x = y^2$, se tiene $dx/dy = 2y$, y la fórmula 4 da

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$$

Se hace la sustitución trigonométrica $y = \tfrac{1}{2}\tan\theta$, lo que da $dy = \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ y $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sec\theta$. Cuando $y = 0$, $\tan\theta = 0$; por tanto, $\theta = 0$; cuando $y = 1$, $\tan\theta = 2$, así que $\theta = \tan^{-1}2 = \alpha$, por ejemplo. Por tanto,

$$L = \int_0^\alpha \sec\theta \cdot \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^\alpha \qquad \text{(del ejemplo 7.2.8)}$$

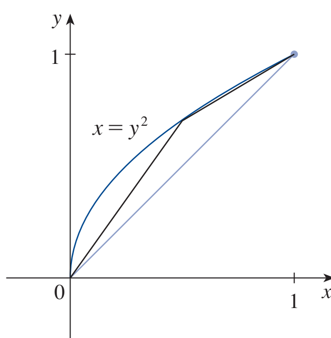
$$= \tfrac{1}{4}\left(\sec\alpha\tan\alpha + \ln|\sec\alpha + \tan\alpha|\right)$$

(Se pudo haber usado la fórmula 21 de la tabla de integrales.) Puesto que $\tan\alpha = 2$, se tiene que $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 5$, por lo que $\sec\alpha = \sqrt{5}$ y

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\left(\sqrt{5} + 2\right)}{4} \qquad \blacksquare$$

En la figura 6 se muestra el arco de la parábola cuya longitud se calculó en el ejemplo 2, junto con las aproximaciones poligonales que tienen segmentos de recta $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente. Para $n = 1$ la longitud aproximada es $L_1 = \sqrt{2}$, la diagonal de un cuadrado. En la tabla se muestran las aproximaciones L_n que se obtienen al dividir [0, 1] en n subintervalos iguales. Observe que cada vez que se duplica el número de lados de un polígono, se aproxima más a la longitud exacta, que es

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\left(\sqrt{5} + 2\right)}{4} \approx 1.478943$$



n	L_n
1	1.414
2	1.445
4	1.464
8	1.472
16	1.476
32	1.478
64	1.479

FIGURA 6

Debido a la presencia de la cuadrada en las fórmulas 2 y 4, el cálculo de una longitud de arco a menudo conduce a una integral que es muy difícil o incluso imposible de evaluar de manera explícita. Así, algunas veces, solo se puede encontrar una aproximación de la longitud de una curva, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3

(a) Plantee una integral para la longitud del arco de la hipérbola $xy = 1$ del punto $(1, 1)$ al punto $(2, \frac{1}{2})$.

(b) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de arco.

SOLUCIÓN

(a) Se tiene

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

y, por tanto, la longitud de arco es

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}\, dx$$

(b) Por medio de la regla de Simpson (véase la sección 7.7) con $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0.1$ y $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$, se tiene

Al verificar el valor de la integral definida con una aproximación más exacta producida por un sistema algebraico computacional, se ve que la aproximación por medio de la regla de Simpson es exacta con una aproximación de cuatro decimales.

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]$$

$$\approx 1.1321$$

■

La función longitud de arco

Es útil tener una función que mida la longitud de arco de una curva de un determinado punto de partida a cualquier otro punto sobre la curva. Así, si una curva suave C tiene la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, sea $s(x)$ la distancia a lo largo de C del punto inicial $P_0(a, f(a))$ al punto $Q(x, f(x))$. Entonces s es una función, llamada **función longitud de arco** y, por la fórmula 2,

5 $$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

(Se ha reemplazado la variable de integración por t para que x no tenga dos significados.) Se puede usar la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para derivar la ecuación 5 (ya que el integrando es una función continua):

6 $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

En la ecuación 6 se muestra que la razón de cambio de s respecto a x es siempre por lo menos 1 y es igual a 1 cuando $f'(x)$, la pendiente de la curva es 0. La derivada de la longitud de arco es

7 $$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

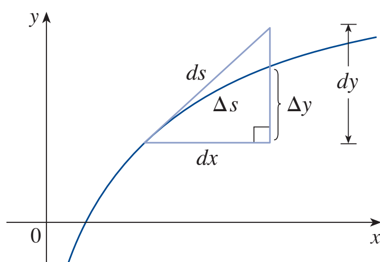


FIGURA 7

y esta ecuación se escribe a veces en la forma simétrica

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \tag{8}$$

La interpretación geométrica de la ecuación 8 se muestra en la figura 7. Puede usarse como recurso nemotécnico para recordar las fórmulas 3 y 4. Si escribe $L = \int ds$, entonces de la ecuación 8 se puede resolver para obtener (7), que da (3), o se puede resolver para obtener

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

que da (4).

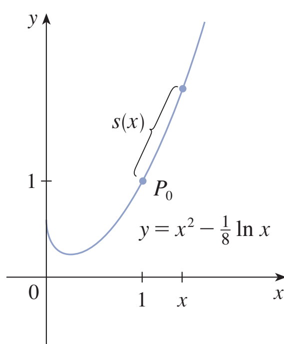


FIGURA 8

En la figura 8 se muestra la interpretación de la función longitud de arco del ejemplo 4. En la figura 9 se muestra la gráfica de esta función de longitud de arco. ¿Por qué $s(x)$ es negativa cuando x es menor que 1?

EJEMPLO 4 Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ tomando $P_0(1, 1)$ como el punto de partida.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, entonces

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x} \qquad \text{(ya que } > 0\text{)}$$

Por lo que la función longitud de arco está dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t + \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8}\ln t\Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8}\ln x - 1$$

Por ejemplo, la longitud de arco a lo largo de la curva de (1, 1) a (3, $f(3)$) es

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8.1373$$

■

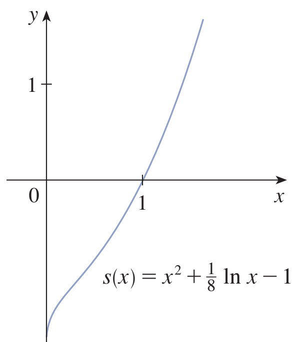


FIGURA 9

8.1 EJERCICIOS

1. Use la fórmula de longitud de arco (3) para encontrar la longitud de la curva $y = 2x - 5$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Compruebe su respuesta observando que la curva es un segmento de recta y calculando su longitud con la fórmula de la distancia.

2. Use la fórmula de la longitud de arco para encontrar la longitud de la curva $y = \sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Compruebe su respuesta observando que la curva es parte de una circunferencia.

3–8 Plantee una integral que represente la longitud de las curvas siguientes. Después, utilice su calculadora para encontrar la longitud con cuatro decimales de precisión.

3. $y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

4. $y = xe^{-x},\ 0 \leqslant x \leqslant 2$

5. $y = x - \ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant 4$

6. $x = y^2 - 2y,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$

7. $x = \sqrt{y} - y,\ 1 \leqslant y \leqslant 4$

8. $y^2 = \ln x,\ -1 \leqslant y \leqslant 1$

9–20 Determine la longitud exacta de la curva.

9. $y = 1 + 6x^{3/2},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

10. $36y^2 = (x^2 - 4)^3,\quad 2 \leqslant x \leqslant 3,\quad y \geqslant 0$

11. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x},\quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

12. $y^2 = 4(x + 4)^3,\quad 0 \leqslant x \leqslant 2,\quad y > 0$

13. $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3},\quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

14. $y = \ln(\cos x),\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

15. $y = \ln(\sec x),\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

16. $y = 3 + \frac{1}{2}\cosh 2x,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

17. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

18. $y = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

19. $y = \ln(1 - x^2),\quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

20. $y = 1 - e^{-x},\quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

21-22 Encuentre la longitud de arco de la curva del punto P al punto Q.

21. $y = \frac{1}{2}x^2,\quad P\left(-1, \frac{1}{2}\right),\quad Q\left(1, \frac{1}{2}\right)$

22. $x^2 = (y - 4)^3,\quad P(1, 5),\quad Q(8, 8)$

23-24 Trace la gráfica de la curva y estime visualmente su longitud. Luego utilice su calculadora para determinar la longitud precisa a cuatro decimales.

23. $y = x^2 + x^3,\quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

24. $y = x + \cos x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

25-28 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de arco de las curvas siguientes. Compare su respuesta con el valor de la integral que obtiene con su calculadora.

25. $y = x \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

26. $y = \sqrt[3]{x},\ 1 \leqslant x \leqslant 6$

27. $y = \ln(1 + x^3),\ 0 \leqslant x \leqslant 5$

28. $y = e^{-x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 2$

29. (a) Trace la gráfica de la curva $y = x\sqrt[3]{4 - x},\ 0 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Calcule las longitudes de polígonos inscritos con $n = 1$, 2 y 4 lados. (Divida el intervalo en subintervalos iguales.) Ilustre trazando estos polígonos (como en la figura 6).
(c) Plantee una integral para la longitud de la curva.
(d) Use su calculadora para encontrar la longitud de la curva redondeada a cuatro decimales. Compare con las aproximaciones del inciso (b).

30. Repita el ejercicio 29 para la curva

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SAC **31.** Use un sistema algebraico computacional o una tabla de integrales para encontrar la longitud *exacta* del arco de la curva $y = e^x$ que está entre los puntos $(0, 1)$ y $(2, e^2)$.

SAC **32.** Utilice un sistema algebraico computacional o una tabla de integrales para encontrar la longitud *exacta* del arco de la curva $y = x^{4/3}$ que está entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Si su sistema algebraico computacional tiene problemas para evaluar la integral, haga una sustitución que cambie la integral en una que el SAC pueda evaluar.

33. Trace la curva con ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y utilice la simetría para encontrar su longitud.

34. (a) Trace la curva $y^3 = x^2$.
(b) Use las fórmulas 3 y 4 para plantear dos integrales para la longitud de arco de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Observe que una de estas es una integral impropia y evalúelas.
(c) Determine la longitud de arco de esta curva de $(-1, 1)$ a $(8, 4)$.

35. Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = 2x^{3/2}$ con punto inicial $P_0(1, 2)$.

36. (a) Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = \ln(\operatorname{sen} x),\ 0 < x < \pi$, con punto inicial $(\pi/2, 0)$.
(b) Trace la gráfica de la curva y su función longitud de arco en la misma pantalla.

37. Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$ con punto inicial $(0, 1)$.

38. La función longitud de arco de una curva $y = f(x)$, donde f es una función creciente, es $s(x) = \int_0^x \sqrt{3t + 5}\, dt$.
(a) Si f tiene intersección $y = 2$, encuentre una ecuación para f.
(b) ¿Qué punto de la gráfica de f está a 3 unidades a lo largo de la curva desde la intersección con el eje y? Exprese su resultado redondeado a 3 cifras decimales.

39. Para la función $f(x) = \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$, demuestre que la longitud del arco en cualquier intervalo tiene el mismo valor que el área bajo la curva.

40. Un viento continuo arrastra un cometa hacia el oeste. La altura del cometa por encima de la superficie de la tierra de la posición horizontal $x = 0$ a $x = 25$ m está dada por $y = 50 - 0.1(x - 15)^2$. Encuentre la distancia recorrida por el cometa.

41. Un halcón que vuela a 15 m/s a una altitud de 180 m deja caer su presa accidentalmente. La trayectoria parabólica de la presa en descenso se describe mediante la ecuación

$$y = 180 - \frac{x^2}{45}$$

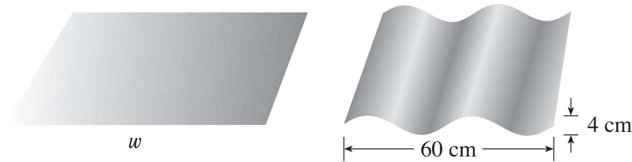
hasta que choca con el suelo, donde y es la altura sobre el suelo y x es la distancia horizontal recorrida en metros. Calcule la distancia que recorre la presa desde el momento en que se deja caer hasta que choca con el suelo. Exprese su respuesta correcta hasta el decímetro más próximo.

42. El arco Gateway en San Luis (EE. UU.) (véase la foto en la página 543) fue construido utilizando la ecuación

$$y = 211.49 - 20.96 \cosh 0.03291765x$$

para la curva central del arco, donde x y y se miden en metros y $|x| \leqslant 91.20$. Establezca una integral para la longitud de arco y utilice su calculadora para estimar su longitud al metro más cercano.

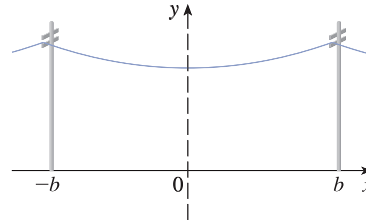
43. Un fabricante de techos de metal corrugado quiere producir paneles que miden 60 cm de ancho y 4 cm de espesor, procesando láminas planas de metal como se muestra en la figura. El perfil del techo toma la forma de una onda seno. Verifique que la curva seno tiene ecuación $y = 2\ \text{sen}(\pi x/15)$ y determine el ancho w de una lámina de metal plana requerida para construir un panel de 60 cm. (Con su calculadora evalúe la integral con una aproximación de cuatro dígitos significativos.)



44. (a) En la figura se muestra un cable telefónico que cuelga entre dos postes en $x = -b$ y $x = b$. El cable toma la forma de una catenaria con ecuación $y = c + a \cosh(x/a)$. Encuentre la longitud del cable.



(b) Suponga que dos postes de teléfono están a una distancia de 20 m y que la longitud del cable entre los postes es de 20.4 m. Si el punto mínimo del cable debe estar a 9 m arriba del suelo, ¿a qué altura en cada poste debe estar unido el cable?



45. Encuentre la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt \qquad 1 \leqslant x \leqslant 4$$



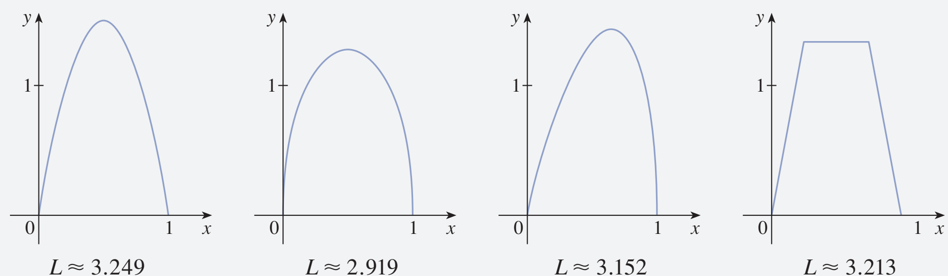
46. Las curvas con ecuaciones $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$, se llaman **circunferencias gordas**. Trace la gráfica de las curvas con $n = 2, 4, 6, 8$ y 10 para ver el porqué. Plantee una integral para la longitud L_{2k} de la circunferencia gorda con $n = 2k$. Sin intentar evaluar esta integral, exprese el valor del $\lim_{k \to \infty} L_{2k}$.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO — CONCURSO DE LONGITUDES DE ARCO

Las curvas que se muestran son ejemplos de gráficas de funciones continuas f que tienen las propiedades siguientes.

1. $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$.
2. $f(x) \geqslant 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.
3. El área bajo la gráfica de f de 0 a 1 es igual a 1.

Sin embargo, las longitudes L de estas curvas son diferentes.



Intente descubrir las fórmulas para dos funciones que satisfagan las condiciones dadas 1, 2 y 3. (Sus gráficas podrían ser parecidas a las que se muestran o podrían parecer bastante diferentes.) Después calcule la longitud de arco de cada gráfica. El elemento ganador será el que tenga la longitud de arco más pequeña.

8.2 Área de una superficie de revolución

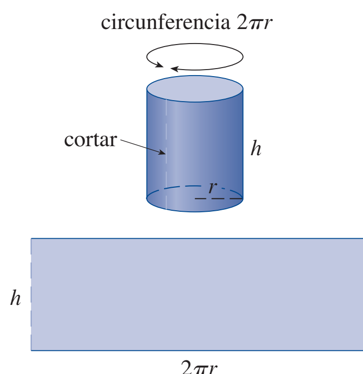


FIGURA 1

Una superficie de revolución se forma cuando se hace girar una curva alrededor de una recta. Tal superficie es la frontera lateral de un sólido de revolución del tipo analizado en las secciones 6.2 y 6.3.

Se desea definir el área de una superficie de revolución de tal manera que corresponda con nuestra intuición. Si el área de la superficie es A, puede imaginar que pintar la superficie requeriría la misma cantidad de pintura que una región plana con área A.

Se comenzará con algunas superficies simples. El área de la superficie lateral de un cilindro circular con radio r y altura h está dada por $A = 2\pi rh$ porque puede imaginarse como si se cortara el cilindro para después desenrollarlo (como en la figura 1) y obtener un rectángulo con dimensiones $2\pi r$ y h.

De igual manera, se puede tomar un cono circular con base de radio r y de altura inclinada l, córtelo a lo largo de la línea discontinua en la figura 2, y aplánelo para formar un sector de un círculo con radio l y ángulo central $\theta = 2\pi r/l$. Se sabe que, en general, el área de un sector de un círculo con radio l y ángulo θ es $\frac{1}{2} l^2\theta$ (véase el ejercicio 7.3.35) y, por tanto, en este caso es

$$A = \tfrac{1}{2}l^2\theta = \tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi rl$$

Por tanto, se define el área de la superficie lateral de un cono como $A = \pi rl$.

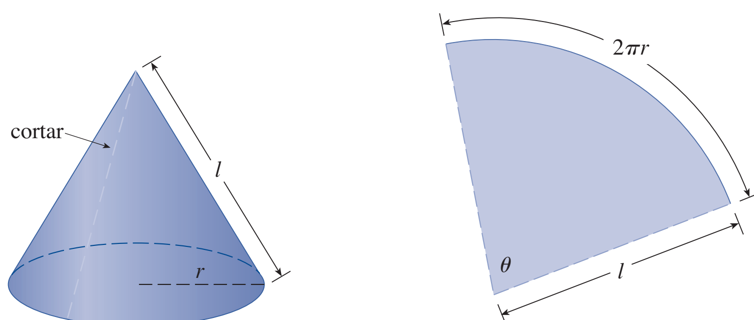


FIGURA 2

¿Qué hay acerca de las superficies de revolución más complicadas? Si se sigue la estrategia que se usó con la longitud de arco, se puede aproximar la curva original mediante un polígono. Cuando este se hace girar en torno a un eje, crea una superficie más simple cuya área se aproxima al área de la superficie real. Si se toma un límite, se puede determinar el área exacta de la superficie.

Entonces, la superficie de aproximación consta de varias *tiras*, cada una formada al hacer girar un segmento de recta alrededor de un eje. Para encontrar el área de la superficie, cada una de estas tiras puede ser considerada la porción de un cono circular, como se muestra en la figura 3. El área de la tira (o cono truncado) con una altura inclinada l y radios superior e inferior r_1 y r_2, respectivamente, se encuentra al restar las áreas de los dos conos:

1 $$A = \pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

Considerando los triángulos semejantes se tiene

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}$$

de donde se obtiene

$$r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \qquad \text{o} \qquad (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

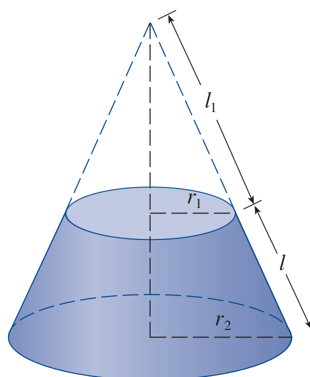


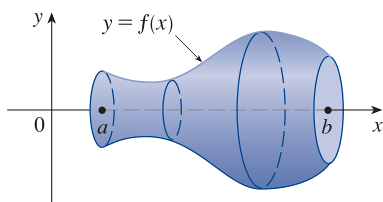
FIGURA 3

Al sustituir esto en la ecuación 1, se obtiene

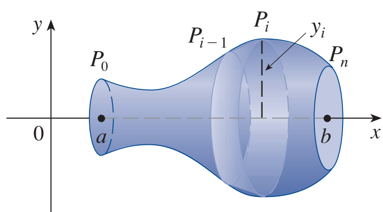
$$A = \pi(r_1 l + r_2 l)$$

o

2
$$A = 2\pi r l$$



(a) Superficie de revolución



(b) Tira de aproximación

FIGURA 4

donde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ es el radio promedio de la tira.

Ahora se aplicará esta fórmula a la estrategia. Consideremos la superficie que se muestra en la figura 4, que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, en torno al eje x, donde f es positiva y tiene una derivada continua. Para definir el área de la superficie, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx, como se hizo para determinar la longitud de arco. Si $y_i = f(x_i)$, entonces el punto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre la curva. La parte de la superficie entre x_{i-1} y x_i se aproxima al tomar el segmento de recta $P_{i-1}P_i$, y hacerlo girar alrededor del eje x. El resultado es una tira con altura inclinada $l = |P_{i-1}P_i|$ y radio promedio $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ por lo que, por la fórmula 2, el área de la superficie es

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|$$

Como en la demostración del teorema 8.1.2, se tiene

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

donde x_i^* es algún número en $[x_{i-1}, x_i]$. Cuando Δx es pequeño, se tiene $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ y también $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$, puesto que f es continua. Por tanto,

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

y así, una aproximación a lo que se considera el área de la superficie de revolución completa es

3
$$\sum_{i-1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

Esta aproximación mejora cuando $n \to \infty$ y, reconociendo a (3) como una suma de Riemann para la función $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Por tanto, en el caso donde f es positiva y tiene una derivada continua, para la superficie obtenida al hacer girar en torno al eje x la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, el **área de la superficie** se define como

4
$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Con la notación de Leibniz para derivadas, esta fórmula se convierte en

5
$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Si la curva se describe como $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, entonces la fórmula para el área de la superficie se transforma en

6
$$S = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

y ambas fórmulas 5 y 6 pueden resumirse simbólicamente, utilizando la notación para la longitud de arco dada en la sección 8.1, como

7
$$S = \int 2\pi y\, ds$$

Para la rotación en torno al eje y, la fórmula del área de la superficie se convierte en

8
$$S = \int 2\pi x\, ds$$

donde, como antes, puede usarse

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{o} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Estas fórmulas pueden recordarse si se considera a $2\pi y$ o $2\pi x$ como la circunferencia de un círculo trazado por el punto (x, y) sobre la curva cuando se hace girar alrededor del eje x o al eje y, respectivamente (véase la figura 5).

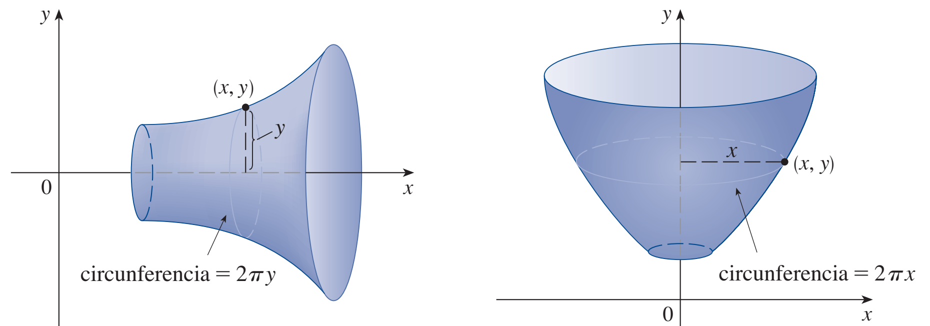


FIGURA 5 (a) Rotación en torno al eje x: $S = \int 2\pi y\, ds$ (b) Rotación respecto al eje y: $S = \int 2\pi x\, ds$

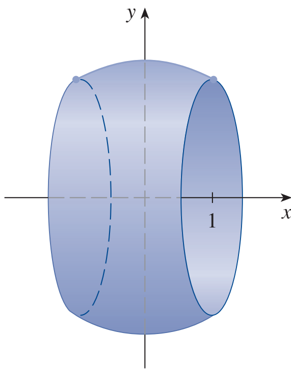


FIGURA 6

La figura 6 muestra la parte de la esfera cuya superficie se calculó en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 La curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ es un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco en torno al eje x. (La superficie es una parte de una esfera de radio 2. Véase la figura 6.)

SOLUCIÓN Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

y, por tanto, por la fórmula 5, el área de la superficie es

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{\frac{4 - x^2 + x^2}{4 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi(2) = 8\pi \end{aligned}$$

■

En la figura 7 se muestra la superficie de revolución cuya área se calculó como en el ejemplo 2.

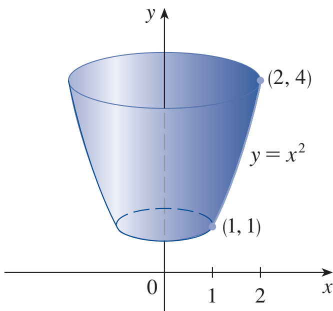


FIGURA 7

EJEMPLO 2 El arco de la parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ a $(2, 4)$ se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.

SOLUCIÓN 1 Utilizando

$$y = x^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

se tiene, de la fórmula 8,

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi x\, ds \\ &= \int_{1}^{2} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{1}^{2} x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx \end{aligned}$$

Al sustituir $u = 1 + 4x^2$, se tiene $du = 8x\, dx$. Recuerde que al cambiar los límites de integración, se tiene

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{5}^{17} \sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{8}\, du \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{5}^{17} u^{1/2}\, du = \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{2}{3} u^{3/2}\right]_{5}^{17} \\ &= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Utilizando

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Para comprobar la respuesta del ejemplo 2, observe en la figura 7 que el área de la superficie debe ser cercana a la de un cilindro circular, con la misma altura y radio a la mitad, entre el radio superior e inferior de la superficie: $2\pi(1.5)(3) \approx 28.27$. Se calculó que el área de la superficie era

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \approx 30.85$$

que parece razonable. De manera alternativa, el área de la superficie debe ser un poco más grande que el área de un cono truncado con la misma base y tapa. De la ecuación 2, esto es $2\pi(1.5)\left(\sqrt{10}\right) \approx 29.80$.

se tiene

$$S = \int 2\pi x\, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\, \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = 2\pi \int_1^4 \sqrt{y + \tfrac{1}{4}}\, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u}\, du \qquad \text{(donde } u = 1 + 4y\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

■

EJEMPLO 3 Encuentre el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, en torno al eje x.

SOLUCIÓN Utilizando la fórmula 5 con

$$y = e^x \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

se tiene

Otro método: Utilice la fórmula 6 con $x = \ln y$.

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du \qquad \text{(donde } u = e^x\text{)}$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta\, d\theta \qquad \text{(donde } u = \tan\theta \text{ y } \alpha = \tan^{-1}e\text{)}$$

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\Big[\sec\theta\, \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad \text{(según el ejemplo 7.2.8)}$$

$$= \pi\left[\sec\alpha\, \tan\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

O utilice la fórmula 21 de la tabla de integrales.

Ya que $\tan\alpha = e$, se tiene $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + e^2$ y

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

■

8.2 EJERCICIOS

1-6
(a) Plantee una integral para el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno (i) al eje x y (ii) al eje y.
(b) Utilice la capacidad numérica de su calculadora para evaluar las áreas de superficie con una aproximación de cuatro decimales.

1. $y = \tan x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

2. $y = x^{-2},\ 1 \leqslant x \leqslant 2$

3. $y = e^{-x^2},\ -1 \leqslant x \leqslant 1$

4. $x = \ln(2y + 1),\ 0 \leqslant y \leqslant 1$

5. $x = y + y^3,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$

6. $y = \tan^{-1} x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2$

7–14 Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x.

7. $y = x^3,\ 0 \leqslant x \leqslant 2$

8. $y = \sqrt{5 - x},\ 3 \leqslant x \leqslant 5$

9. $y^2 = x + 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 3$

10. $9x = y^2 + 18,\ 2 \leqslant x \leqslant 6$

11. $y = \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right),\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

12. $y = \sqrt{1 + 4x},\ 1 \leqslant x \leqslant 5$

13. $y = \operatorname{sen} \pi x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$

14. $x = 1 + 2y^2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2$

15-18 La curva dada se hace girar alrededor del eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.

15. $y = \frac{1}{3}x^{3/2}, \ 0 \leqslant x \leqslant 12$

16. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1$

17. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, \ 0 \leqslant y \leqslant a/2$

18. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \ 1 \leqslant x \leqslant 2$

19-22 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva alrededor del eje x. Compare su respuesta con el valor de la integral producido por su calculadora.

19. $y = \ln x, \ 1 \leqslant x \leqslant 3$

20. $y = x + \sqrt{x}, \ 1 \leqslant x \leqslant 2$

21. $y = xe^x, \ 0 \leqslant x \leqslant 1$

22. $y = x \ln x, \ 1 \leqslant x \leqslant 2$

SAC **23-24** Use un SAC o una tabla de integrales para encontrar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada en torno al eje x.

23. $y = 1/x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

24. $y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

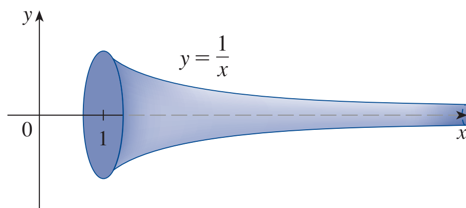
SAC **25-26** Use un SAC para encontrar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje y. Si su SAC tiene problema para evaluar la integral, exprese el área de la superficie como una integral en la otra variable.

25. $y = x^3, \ 0 \leqslant y \leqslant 1$

26. $y = \ln(x + 1), \ 0 \leqslant x \leqslant 1$

---

27. Si la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ se hace girar en torno al eje x, el volumen del sólido resultante es finito (véase el ejercicio 7.8.63). Demuestre que el área de la superficie es infinita. (La superficie se muestra en la figura y se conoce como **Cuerno de Gabriel**.)



28. Si la curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, se hace girar en torno al eje x, encuentre el área de la superficie resultante.

29. (a) Si $a > 0$, encuentre el área de la superficie generada al hacer girar el bucle de la curva $3ay^2 = x(a - x)^2$ alrededor del eje x.
(b) Determine el área de la superficie si el bucle se hace girar en torno al eje y.

30. Un grupo de ingenieros está construyendo un plato de satélite parabólico cuya forma se obtiene al hacer girar la curva $y = ax^2$ en torno al eje y. Si el plato tiene un diámetro de 10 pies y una profundidad máxima de 2 pies, encuentre el valor de a y el área de la superficie del plato.

31. (a) La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

se hace girar en torno al eje x para formar una superficie llamada *elipsoide* o *esferoide prolato*. Determine el área de la superficie de este elipsoide.
(b) Si la elipse del inciso (a) gira en torno a su eje menor (el eje y), la elipsoide resultante se le conoce como *esferoide oblato*. Encuentre el área de la superficie de este elipsoide.

32. Calcule el área de la superficie del toroide del ejercicio 6.2.63.

33. Si la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, se hace girar en torno a la recta horizontal $y = c$, donde $f(x) \leqslant c$, encuentre una fórmula para el área de la superficie resultante.

SAC **34.** Use el resultado del ejercicio 33 para plantear una integral que permita encontrar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, en torno a la recta $y = 4$. Después, use un SAC para evaluar la integral.

35. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en torno a la recta $y = r$.

36. (a) Demuestre que el área de la superficie de una zona de una esfera ubicada entre dos planos paralelos es $S = 2\pi Rh$, donde R es el radio de la esfera y h es la distancia entre los planos. (Observe que S solo depende de la distancia entre los planos, y no sobre su ubicación, siempre que ambos planos intersequen la esfera.)
(b) Demuestre que el área de la superficie de una zona de un *cilindro* con radio R y altura h es la misma que el área de la superficie de la zona de una *esfera* en el inciso (a).

37. Demuestre que si gira la curva $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ sobre el eje x, el área de la superficie resultante es el mismo valor que el volumen cerrado para cualquier intervalo de $a \leqslant x \leqslant b$.

38. Sea L la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, donde f es positiva y tiene una derivada continua. Sea S_f la superficie generada al girar la curva sobre el eje x. Si c es una constante positiva, defina $g(x) = f(x) + c$ y S_g sea el área de la superficie correspondiente generada por la curva $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Exprese S_g en términos de S_f y L.

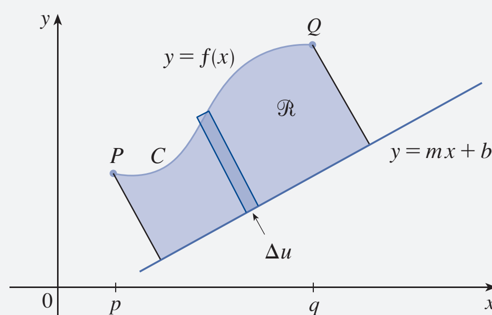
39. La fórmula 4 es válida solo cuando $f(x) \geqslant 0$. Demuestre que cuando $f(x)$ no necesariamente es positiva, la fórmula para el área de la superficie se transforma en

$$S = \int_a^b 2\pi \left| f(x) \right| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO ROTACIÓN SOBRE UNA PENDIENTE

Se sabe cómo encontrar el volumen de un sólido de revolución obtenido al hacer girar una región en torno a una recta horizontal o vertical (véase la sección 6.2). También se sabe cómo determinar el área de una superficie de revolución si se gira una curva en torno a una recta horizontal o vertical (véase la sección 8.2). Pero ¿qué pasa si se hace girar en torno a una recta inclinada, es decir, una recta que no sea horizontal ni vertical? En este proyecto se le pide descubrir fórmulas para el volumen de un sólido de revolución y para el área de una superficie de revolución cuando el eje de rotación es una recta inclinada.

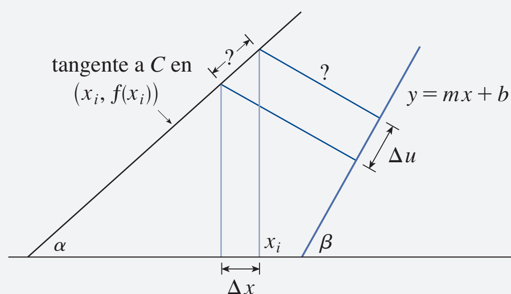
Sea C el arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $P(p, f(p))$ y $Q(q, f(q))$ y sea $\mathcal{R}$ la región limitada por C, por la recta $y = mx + b$ (que está totalmente por debajo de C) y por las perpendiculares a la recta desde P y Q.

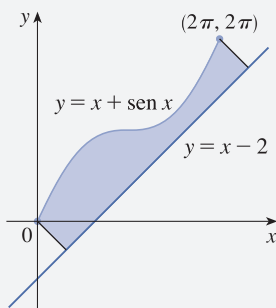


1. Demuestre que el área de $\mathcal{R}$ es

$$\frac{1}{1 + m^2}\int_p^q [f(x) - mx - b][1 + mf'(x)]\,dx$$

[*Sugerencia*: esta fórmula puede verificarse restando áreas, pero será útil en el proyecto deducirla aproximando primero el área por medio de rectángulos perpendiculares a la recta, como se muestra en la figura. Use la figura para expresar Δu en términos de Δx].





2. Determine el área de la región que se muestra en la figura de la izquierda.

3. Encuentre una fórmula (similar a la del problema 1) para el volumen del sólido obtenido al hacer girar $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y = mx + b$.

4. Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región del problema 2 en torno a la recta $y = x - 2$.

5. Obtenga una fórmula para el área de la superficie obtenida al hacer girar C alrededor de la recta $y = mx + b$.

SAC **6.** Use un sistema algebraico computacional para encontrar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, en torno a la recta $y = \frac{1}{2}x$. Luego aproxime su resultado a tres decimales.

8.3 Aplicaciones a la física y a la ingeniería

Entre las muchas aplicaciones del cálculo integral a la física y a la ingeniería, aquí se consideran dos: la fuerza, debida a la presión del agua, y los centros de masa. Como con las aplicaciones previas a la geometría (áreas, volúmenes y longitudes) y el trabajo, la estrategia es descomponer la cantidad física en un gran número de partes pequeñas, aproximar cada parte pequeña, sumar los resultados (dando una suma de Riemann), tomar el límite y después evaluar la integral resultante.

Fuerza y presión hidrostáticas

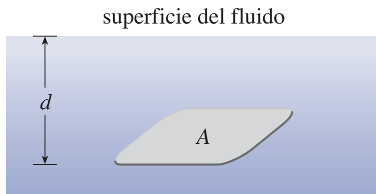


FIGURA 1

Los buceadores de aguas profundas saben que la presión del agua se incrementa al aumentar la profundidad. Esto se debe a que aumenta el peso del agua sobre ellos.

En general, suponga que una placa horizontal delgada con área de A metros cuadrados se sumerge en un fluido de densidad ρ kilogramos por metro cúbico a una profundidad de d metros debajo de la superficie del fluido, como en la figura 1. El fluido directamente arriba de la placa (piense en una columna de líquido) tiene volumen $V = Ad$, de modo que su masa es $m = \rho V = \rho Ad$. La fuerza ejercida por el fluido sobre la placa es

$$F = mg = \rho gAd$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. La **presión** P sobre la placa se define como la fuerza por unidad de área:

$$P = \frac{F}{A} = \rho gd$$

Al usar unidades inglesas estándares, se escribe $P = \rho gd = \delta d$, donde $\delta = \rho g$ es el *peso específico* (en oposición a ρ, que es la *masa específica*). Por ejemplo, el peso específico del agua es $\delta = 62.5$ lb/pies^3.

La unidad del SI para medir la presión es newtons por metro cuadrado, y se conoce como pascal (abreviatura: $1 \text{ N/m}^2 = 1$ Pa). Puesto que esta es una unidad pequeña, se emplea con frecuencia el kilopascal (kPa). Por ejemplo, debido a que la densidad del agua es $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, la presión en el fondo de una alberca de 2m de profundidad es

$$P = \rho gd = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m}$$
$$= 19\,600 \text{ Pa} = 19.6 \text{ kPa}$$

Un importante principio de la presión del fluido es el hecho comprobado experimentalmente de que *en cualquier punto, en un líquido, la presión es la misma en todas direcciones*. (Un buzo siente la misma presión en la nariz y en ambos oídos.) Así, la presión en *cualquier* dirección a una profundidad d en un fluido con masa específica ρ está dada por

1 $$P = \rho gd = \delta d$$

Esto ayuda a determinar la fuerza hidrostática (la fuerza ejercida por un fluido en reposo) contra una placa vertical, pared o presa. Este no es un problema directo porque la presión no es constante, sino que crece a medida que aumenta la profundidad.

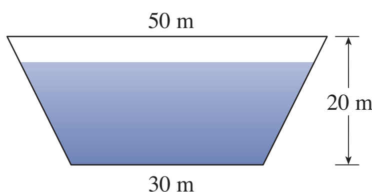


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Una presa tiene la forma del trapecio mostrado en la figura 2. La altura es 20 m y el ancho es 50 m en la parte superior y 30 m en el fondo. Determine la fuerza sobre la presa debida a la presión hidrostática si el nivel del agua es 4 m desde la parte superior de la presa.

SOLUCIÓN Se elige un eje x vertical con origen en la superficie del agua y dirigido hacia abajo como en la figura 3(a). La profundidad del agua es 16 m, así que se divide

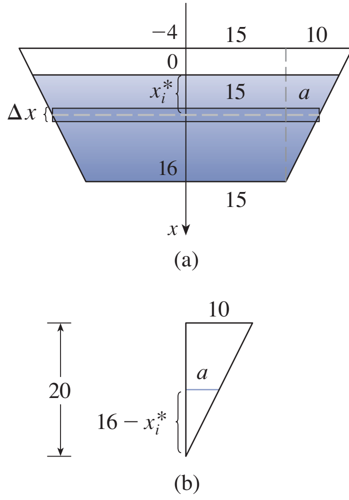


FIGURA 3

el intervalo [0, 16] en subintervalos de igual longitud con puntos extremos x_i y se elige $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La i-ésima tira horizontal de la presa se aproxima con un rectángulo con altura Δx y ancho w_i, donde, de los triángulos semejantes de la figura 3(b),

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad \text{o} \qquad a = \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2}$$

y, por tanto, $\quad w_i = 2(15 + a) = 2\left(15 + 8 - \tfrac{1}{2}x_i^*\right) = 46 - x_i^*$

Si A_i es el área de la i-ésima tira, entonces

$$A_i \approx w_i \, \Delta x = (46 - x_i^*)\, \Delta x$$

Si Δx es pequeña, entonces la presión P_i sobre la i-ésima tira es casi constante y se puede usar la ecuación 1 para escribir

$$P_i \approx 1000 g x_i^*$$

La fuerza hidrostática F_i que actúa sobre la i-ésima tira es el producto de la presión y el área:

$$F_i = P_i A_i \approx 1000 g x_i^* (46 - x_i^*)\, \Delta x$$

Si se suman estas fuerzas y se toma el límite cuando $n \to \infty$, se obtiene la fuerza hidrostática total sobre la presa:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i-1}^{n} 1000 g x_i^* (46 - x_i^*)\, \Delta x = \int_0^{16} 1000 g x (46 - x)\, dx \\ &= 1000(9.8) \int_0^{16} (46x - x^2)\, dx = 9800 \left[23x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{16} \\ &\approx 4.43 \times 10^7 \text{ N} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Determine la fuerza hidrostática sobre un extremo de un tambor cilíndrico con radio 3 pies si el tambor es sumergido 10 pies en agua.

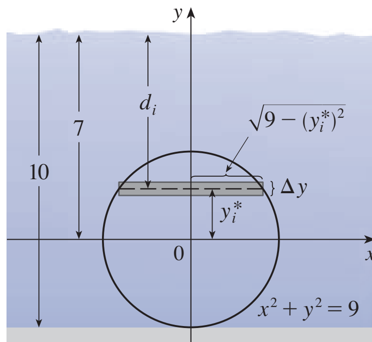


FIGURA 4

SOLUCIÓN En este ejemplo es conveniente elegir los ejes como en la figura 4, de modo que el origen esté colocado en el centro del tambor. Por tanto, la circunferencia tiene una ecuación simple: $x^2 + y^2 = 9$. Como en el ejemplo 1, se divide la región circular en tiras horizontales de igual ancho. De la ecuación de una circunferencia, se ve que la longitud de la i-ésima tira es $2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}$, por tanto, su área es

$$A_i = 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\, \Delta y$$

Ya que la densidad del agua es $\delta = 62.5$ lb/pies^3, la presión sobre esta tira es aproximadamente

$$\delta d_i = 62.5(7 - y_i^*)$$

y por tanto, la fuerza aproximada sobre la tira es

$$\delta d_i A_i = 62.5(7 - y_i^*)\, 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\, \Delta y$$

La fuerza total se obtiene sumando las fuerzas sobre todas las tiras y tomando el límite:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62.5(7 - y_i^*)\, 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\, \Delta y$$

$$= 125 \int_{-3}^{3} (7 - y)\sqrt{9 - y^2}\, dy$$

$$= 125 \cdot 7 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy - 125 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\, dy$$

La segunda integral es 0 porque el integrando es una función impar (véase el teorema 5.5.7). La primera integral se puede evaluar por medio de la sustitución trigonométrica $y = 3 \operatorname{sen} \theta$, pero es más simple observar que es el área de un disco semicircular con radio 3. Por tanto

$$F = 875 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy = 875 \cdot \tfrac{1}{2}\pi(3)^2$$

$$= \frac{7875\pi}{2} \approx 12{,}370 \text{ lb}$$

■

Momentos y centros de masa

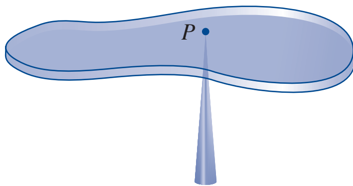


FIGURA 5

El principal objetivo aquí es encontrar el punto P sobre el que una placa delgada de cualquier forma se mantiene horizontal como en la figura 5. El punto se llama **centro de masa** (o centro de gravedad) de la placa.

Primero, se considera la situación más simple ilustrada en la figura 6, donde dos masas m_1 y m_2 se fijan a una varilla de masa insignificante en lados opuestos de un fulcro (punto de apoyo) y a distancias d_1 y d_2 de este. La varilla se equilibrará si

2 $$m_1 d_1 = m_2 d_2$$

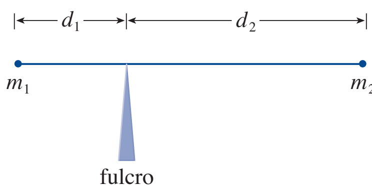


FIGURA 6

Este es un hecho experimental que descubrió Arquímedes y se llama ley de la palanca. (Imagine una persona de poco peso que pone en equilibrio a una persona más pesada en un balancín, sentándose a una mayor distancia en relación con el centro.)

Ahora suponga que la varilla está a lo largo del eje x con m_1 en x_1 y m_2 en x_2 y el centro de masa en $\bar{x}$. Si se comparan las figuras 6 y 7, se ve que $d_1 = \bar{x} - x_1$ y $d_2 = x_2 - \bar{x}$, entonces, la ecuación 2 da

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

3 $$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Los números m_1x_1 y m_2x_2 se llaman **momentos** de las masas m_1 y m_2(respecto al origen), y la ecuación 3 indica que el centro de masa $\bar{x}$ se obtiene al sumar los momentos de las masas y dividir entre la masa total $m = m_1 + m_2$.

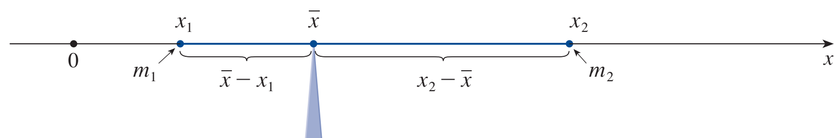


FIGURA 7

En general, si se tiene un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre el eje x, puede demostrarse de manera similar que el

centro de masa del sistema se localiza en

4
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}$$

donde $m = \Sigma m_i$ es la masa total del sistema, y la suma de los momentos individuales

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

se llama **momento del sistema respecto al origen**. La ecuación 4 se podría reescribir como $m\bar{x} = M$, que indica que si se considerara la masa total como si estuviera concentrada en el centro de masa $\bar{x}$, entonces su momento sería el mismo que el del sistema.

Ahora, considere un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano xy como se muestra en la figura 8. Por analogía con el caso unidimensional se define el **momento del sistema respecto al eje *y*** como

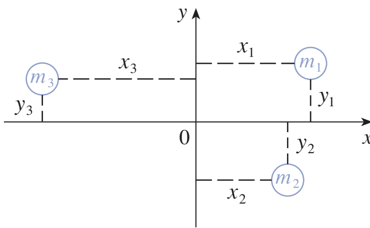


FIGURA 8

5
$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

y **el momento del sistema respecto al eje *x*** como

6
$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Entonces M_y mide la tendencia del sistema a girar respecto al eje y, y M_x mide la tendencia a girar respecto al eje x.

Como en el caso unidimensional, las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa están dadas en términos de los momentos por las fórmulas

7
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = \Sigma m_i$ es la masa total. Puesto que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$, el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es el punto donde una sola partícula de masa m tendría los mismos momentos que el sistema.

EJEMPLO 3 Encuentre los momentos y el centro de masa del sistema de objetos que tienen masas 3, 4 y 8 en los puntos $(-1, 1)$, $(2, -1)$ y $(3, 2)$, respectivamente.

SOLUCIÓN Se usan las ecuaciones 5 y 6 para calcular los momentos:

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$

$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

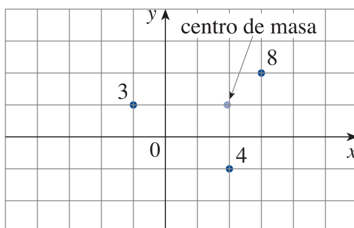


FIGURA 9

Puesto que $m = 3 + 4 + 8 = 15$, se usan las ecuaciones 7 para obtener

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Así, el centro de masa es $\left(1\frac{14}{15}, 1\right)$. (Véase la figura 9.) ■

Ahora se considerará una placa plana (llamada *lámina*) con densidad uniforme ρ que ocupa una región $\mathcal{R}$ del plano. Se desea localizar el centro de masa de la placa, llamado el **centroide** de $\mathcal{R}$. Para esto se utilizan los principios físicos siguientes: el **principio de simetría** señala que si $\mathcal{R}$ es simétrica respecto a la recta l, entonces el centroide de $\mathcal{R}$ está sobre l. (Si $\mathcal{R}$ se refleja respecto a l, entonces no cambia, y su centroide permanece fijo. Pero los únicos puntos fijos se encuentran sobre l.) Así, el centroide de un rectángulo es su centro geométrico. Los momentos se deben definir de modo que si toda la masa de una región se concentra en el centro de masa; entonces sus momentos permanecen sin cambio. Asimismo, el momento de la unión de dos regiones que no se traslapan debe ser la suma de los momentos de cada una de las regiones.

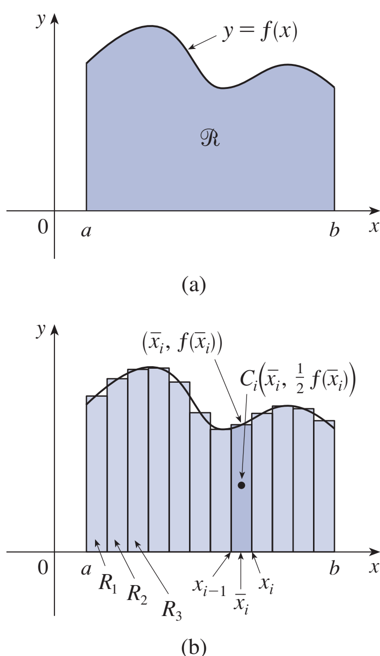


FIGURA 10

Suponga que la región $\mathcal{R}$ es del tipo que se muestra en la figura 10(a); es decir, $\mathcal{R}$ se sitúa entre las rectas $x = a$ y $x = b$, arriba del eje x y debajo de la gráfica de f, donde f es una función continua. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx. Se elige el mismo punto muestra x_i^* como el punto medio $\bar{x}_i$ del subintervalo i-ésimo; es decir, $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Esto determina la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$ que se muestra en la figura 10(b). El centroide del i-ésimo rectángulo de aproximación R_i es su centro $C_i\big(\bar{x}_i, \frac{1}{2} f(\bar{x}_i)\big)$. Su área es $f(\bar{x}_i)\,\Delta x$, de modo que su masa es

$$\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

El momento de R_i respecto al eje y es el producto de su masa y la distancia desde C_i al eje y, que es $\bar{x}_i$. Así

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\bar{x}_i = \rho\,\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Al sumar estos momentos, se obtiene el momento de la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$, y luego tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el momento de $\mathcal{R}$ mismo respecto al eje y:

$$M_y = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx$$

En un modo similar se calcula el momento de R_i respecto al eje x como el producto de su masa y la distancia de C_i al eje x (que es la mitad de la altura R_i):

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\tfrac{1}{2} f(\bar{x}_i) = \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

De nuevo se suman estos momentos y se toma el límite para obtener el momento de $\mathcal{R}$ respecto al eje x:

$$M_x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i-1}^{n} \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x = \rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

Al igual que para sistemas de partículas, el centro de masa de la placa se define tal que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. Sin embargo, la masa de la placa es el producto de su densidad y su área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\,dx$$

y, por tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x)\, dx}{\rho \int_a^b f(x)\, dx} = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx}{\rho \int_a^b f(x)\, dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$$

Observe la eliminación de las ρ. La ubicación del centro de masa es independiente de la densidad.

En resumen, el centro de masa de la placa (o el centroide de $\mathcal{R}$) se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

8 $$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x f(x)\, dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$

EJEMPLO 4 Encuentre el centro de masa de una placa semicircular de radio r.

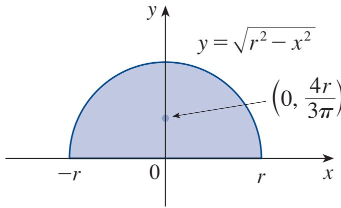


FIGURA 11

SOLUCIÓN Para usar (8) se coloca el semicírculo como en la figura 11 tal que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $a = -r$, $b -\ r$. Aquí no es necesario usar la fórmula para calcular $\bar{x}$ porque, por el principio de simetría, el centro de masa debe estar sobre el eje y, por tanto, $\bar{x} = 0$. El área del semicírculo es $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, por lo que

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi r^2} \cdot \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2 - x^2)\, dx \qquad \text{(ya que el integrando es par)}$$

$$= \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= \frac{2}{\pi r^2}\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}$$

El centro de masa se localiza en el punto $(0, 4r/(3\pi))$. ■

EJEMPLO 5 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN El área de la región es

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

así, con las fórmulas de 8, se obtiene

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} xf(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$$

$$= x\,\text{sen}\,x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\text{sen}\,x\,dx \quad \text{(mediante integración por partes)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{4}\Big[x + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

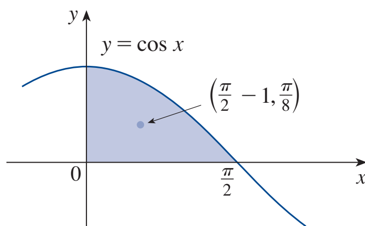


FIGURA 12

El centroide es $\left(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{8}\pi\right)$ y se muestra en la figura 12. ■

Si la región $\mathcal{R}$ se localiza entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$, como se muestra en la figura 13, entonces puede usarse la misma clase de argumento que condujo a las fórmulas 8 para demostrar que el centroide de $\mathcal{R}$ es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

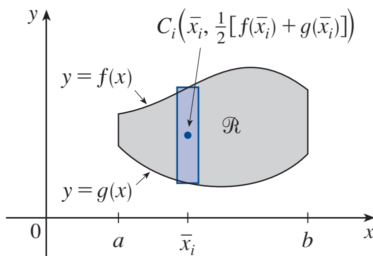


FIGURA 13

9

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

(Véase el ejercicio 51.)

EJEMPLO 6 Encuentre el centroide de la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

SOLUCIÓN La región está trazada en la figura 14. Se toma $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$ y $b = 1$ en las fórmulas 9. Primero observe que el área de la región es

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

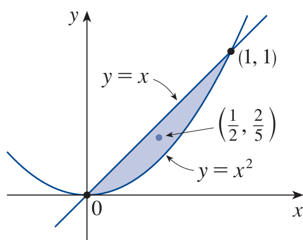


FIGURA 14

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x[f(x) - g(x)]\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 x(x - x^2)\,dx$$

$$= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

El centroide es $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$. ■

Se concluye esta sección mostrando una conexión sorprendente entre centroides y volúmenes de revolución.

Este teorema lleva el nombre del matemático griego Pappus de Alejandría, quien vivió en el siglo IV después de Cristo.

Teorema de Pappus Sea $\mathcal{R}$ la región plana que está completamente en un lado de una recta l en el plano. Si $\mathcal{R}$ se hace girar en torno a l, entonces el volumen del sólido resultante es el producto del área A de $\mathcal{R}$ y la distancia d recorrida por el centroide de $\mathcal{R}$.

DEMOSTRACIÓN Se da la demostración para el caso especial en que la región está entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$ como se muestra en la figura 13, y la recta l es el eje y. Con el método de los cascarones cilíndricos (véase la sección 6.3), se tiene

$$V = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= 2\pi(\bar{x}A) \quad \text{(por las fórmulas 9)}$$

$$= (2\pi\bar{x})A = Ad$$

donde $d = 2\pi\bar{x}$ es la distancia recorrida por el centroide durante una rotación en torno al eje y. ■

EJEMPLO 7 Un toro se forma al hacer girar un círculo de radio r en torno a una recta en el plano del círculo que es una distancia R ($> r$) desde el centro del círculo. Encuentre el volumen del toro.

SOLUCIÓN El círculo tiene área $A = \pi r^2$. Por el principio de simetría, su centroide es su centro geométrico y, por tanto, la distancia recorrida por el centroide durante una rotación es $d = 2\pi R$. Así, por el teorema de Pappus, el volumen del toro es

$$V = Ad = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$ ■

El método del ejemplo 7 debe compararse con el método del ejercicio 6.2.63.

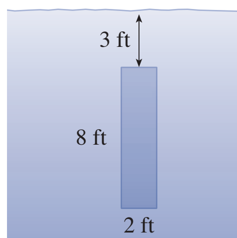
8.3 EJERCICIOS

1. Un acuario de 5 pies de largo, 2 pies de ancho y 3 pies de profundidad se llena de agua. Determine (a) la presión hidrostática en el fondo del acuario, (b) la fuerza hidrostática en el fondo y (c) la fuerza hidrostática en un extremo del acuario.

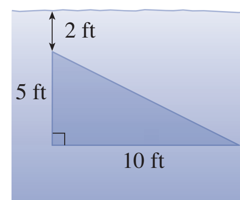
2. Un estanque de 8 m de largo, 4 m de ancho y 2 m de profundidad se llena con queroseno de densidad 820 kg/m^3 hasta una profundidad de 1.5 m. Encuentre (a) la presión hidrostática en el fondo del estanque, (b) la fuerza hidrostática en el fondo y (c) la fuerza hidrostática en un extremo del estanque.

3–11 Una placa vertical se sumerge en agua (o está parcialmente sumergida) y tiene la forma indicada. Explique cómo aproximar la fuerza hidrostática contra un extremo de la placa mediante una suma de Riemann. Luego, exprese la fuerza como una integral y evalúela.

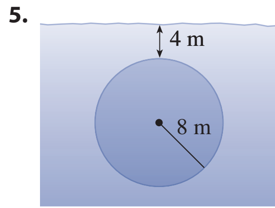
3.



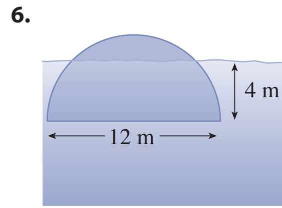
4.



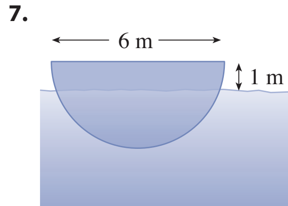
5.



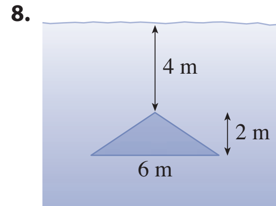
6.



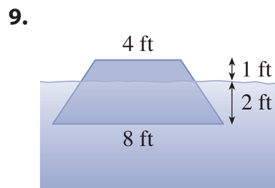
7.



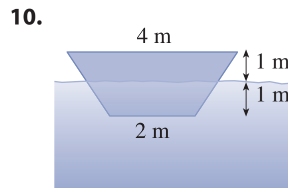
8.



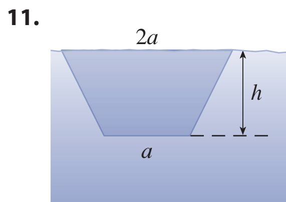
9.



10.



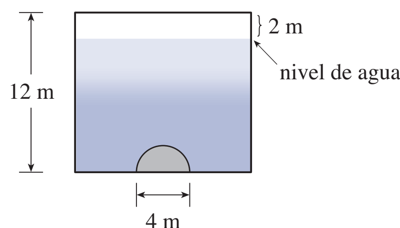
11.



12. Un camión cisterna con tanque en forma de cilindro horizontal con diámetro de 6 pies transporta leche cuya densidad es 64.6 lb/pies^3.
(a) Encuentre la fuerza ejercida por la leche sobre uno de los extremos del tanque, cuando este está lleno.
(b) ¿Y cuándo está a la mitad?

13. Una pileta se llena con un líquido de densidad 840 kg/m^3. Los extremos de la pileta son triángulos equiláteros con lados de 8 m de largo y vértice en la parte de abajo. Determine la fuerza hidrostática en un extremo de la pileta.

14. Una presa vertical tiene una compuerta semicircular como se muestra en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática que se ejerce contra la compuerta.



15. Un cubo con lados de 20 cm de largo está asentado sobre el fondo de un acuario en el que el agua tiene un metro de profundidad. Determine la fuerza hidrostática sobre (a) la parte superior del cubo y (b) uno de los lados del cubo.

16. Una presa está inclinada en un ángulo de 30° desde la vertical y tiene la forma de un trapecio isósceles de 100 pies de ancho en la parte superior y 50 pies de ancho en el fondo y con una altura inclinada de 70 pies. Encuentre la fuerza hidrostática sobre la presa cuando está llena de agua.

17. Una alberca mide 10 m de ancho y 20 m de largo, y su fondo es un plano inclinado. El extremo poco profundo tiene una profundidad de 1 m y el extremo profundo, 3 m. Si la alberca se llena de agua, estime la fuerza hidrostática sobre (a) el extremo poco profundo, (b) el extremo profundo, (c) uno de los lados y (d) el fondo de la alberca.

18. Suponga que una placa se sumerge verticalmente en un fluido con densidad ρ y el ancho de la placa es $w(x)$, a una profundidad de x metros debajo de la superficie del fluido. Si la parte superior de la placa está a una profundidad a y el fondo está a una profundidad b, demuestre que la fuerza hidrostática en un lado de la placa es

$$F = \int_a^b \rho g x\, w(x)\, dx$$

19. Una placa metálica es sumergida verticalmente en el mar, cuya agua está a una densidad de 64 lb/pie^3. En la tabla se muestran las medidas de su ancho, tomadas a las profundidades indicadas. Use la regla de Simpson para estimar la fuerza del agua contra la placa.

Profundidad (pies)	7.0	7.4	7.8	8.2	8.6	9.0	9.4
Ancho de la placa (pies)	1.2	1.8	2.9	3.8	3.6	4.2	4.4

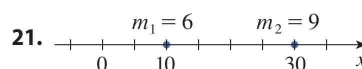
20. (a) Use la fórmula del ejercicio 18 para demostrar que

$$F = (\rho g \bar{x})A$$

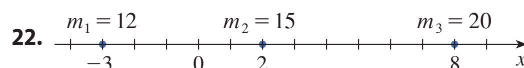
donde $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la placa y A es su área. Esta ecuación muestra que la fuerza hidrostática contra una región plana vertical es la misma que si la región estuviera horizontal a la profundidad del centroide de la región.
(b) Use el resultado del inciso (a) para dar otra solución al ejercicio 10.

21–22 Las masas puntuales m_i se localizan sobre el eje x como se muestra. Determine el momento M del sistema respecto al origen y el centro de masa $\bar{x}$.

21.



22.



23–24 Las masas m_i se localizan en los puntos P_i. Encuentre los momentos M_x y M_y y el centro de masa del sistema.

23. $m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 10;$
$P_1(1, 5),\ P_2(3, -2),\ P_3(-2, -1)$

24. $m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 1,\ m_4 = 4;$
$P_1(1, -2),\ P_2(3, 4),\ P_3(-3, -7),\ P_4(6, -1)$

25–28 Trace la región acotada por las curvas y estime en forma visual la ubicación del centroide. Después encuentre las coordenadas exactas del centroide.

25. $y = 2x, \quad y = 0, \quad x = 1$

26. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$

27. $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

28. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

29–33 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas dadas.

29. $y = x^2, \quad x = y^2$

30. $y = 2 - x^2, \quad y = x$

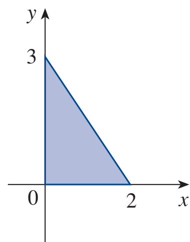
31. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x = \pi/4$

32. $y = x^3, \quad x + y = 2, \quad y = 0$

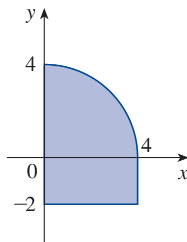
33. $x + y = 2, \quad x = y^2$

34–35 Calcule los momentos M_x y M_y y el centro de masa de una lámina con la densidad y forma dadas.

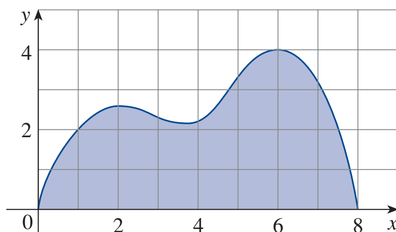
34. $\rho = 4$



35. $\rho = 6$



36. Utilice la regla de Simpson para estimar el centroide de la región que se muestra.



37. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 - 1$. Trace la región y trace la gráfica del centroide para ver si su respuesta es razonable.

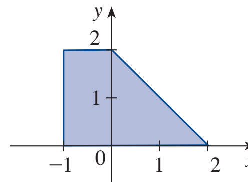


38. Use una gráfica para encontrar coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas $y = e^x$ y $y = 2 - x^2$. Luego determine (de manera aproximada) el centroide de la región acotada por estas curvas.

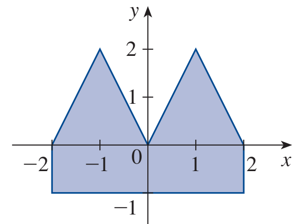
39. Demuestre que el centroide de cualquier triángulo se localiza en la intersección de las medianas. [*Sugerencia*: coloque los ejes de modo que los vértices sean $(a, 0)$, $(0, b)$ y $(c, 0)$. Recuerde que una mediana es un segmento de recta desde un vértice al punto medio del lado opuesto. Las medianas se intersecan en un punto a dos tercios del tramo de cada vértice (a lo largo de la mediana) al lado opuesto.]

40–41 Encuentre el centroide de la región que se muestra, no por integración, sino mediante la localización de los centroides de los rectángulos y triángulos (del ejercicio 39) y por medio de la suma de los momentos.

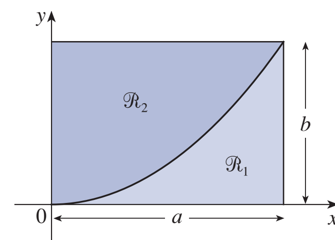
40.



41.



42. Un rectángulo $\mathcal{R}$ con lados a y b se divide en dos partes $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ mediante un arco de la parábola que tiene sus vértices en las esquinas de $\mathcal{R}$ y que pasa a través de la esquina opuesta. Encuentre el centroide en ambas $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.



43. Si $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la región que se encuentra bajo la gráfica de una función continua f, donde $a \leqslant x \leqslant b$, demuestre que

$$\int_a^b (cx + d)f(x)\,dx = (c\bar{x} + d)\int_a^b f(x)\,dx$$

44–46 Use el teorema de Pappus para encontrar el volumen del sólido dado.

44. Una esfera de radio r. (Use el ejemplo 4.)

45. Un cono con altura h y radio de la base r.

46. El sólido obtenido al hacer girar el triángulo con vértices (2, 3), (2, 5) y (5, 4) en torno al eje x.

47. El centroide de una *curva* se puede encontrar mediante un proceso similar al que se utilizó para encontrar el centroide de una región. Si C es una curva de longitud L, entonces el centroide es $(\bar{x}, \bar{y})$ donde $\bar{x} = (1/L) \int x\, ds$ y $\bar{y} = (1/L) \int y\, ds$. Aquí se asignan los límites adecuados de integración y ds se define como en las secciones 8.1 y 8.2. (El centroide a menudo no se encuentra sobre la curva misma. Si la curva fuera de alambre y se colocara en un tablero sin peso, el centroide sería el punto de equilibrio del tablero.) Encuentre el centroide del cuarto de círculo $y = \sqrt{16 - x^2}$, $0 \leq x \leq 4$.

48. El *segundo teorema de Pappus* tiene el mismo espíritu que el teorema de Pappus de la página 565, pero para el área de la superficie en lugar del volumen: que C sea una curva que se encuentra completamente en un lado de una línea l en el plano. Si C se gira alrededor de l, entonces el área de la superficie resultante es el producto de la longitud de arco de C y la distancia recorrida por el centroide C (véase el ejercicio 47).

(a) Demuestre el segundo teorema de Pappus para el caso en que C está dada por $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ y C se gira sobre el eje x.

(b) Utilice el segundo teorema de Pappus para calcular el área de la superficie de la media esfera obtenida girando la curva del ejercicio 47 sobre el eje x. ¿Su respuesta está de acuerdo con las fórmulas geométricas?

49. Utilice el segundo teorema de Pappus que se describe en el ejercicio 48 para encontrar la superficie del toro en el ejemplo 7.

50. Sea $\mathcal{R}$ la región localizada entre las curvas

$$y = x^m \qquad y = x^n \qquad 0 \leq x \leq 1$$

donde m y n son enteros con $0 \leq n < m$.

(a) Trace la región $\mathcal{R}$.

(b) Encuentre las coordenadas del centroide de $\mathcal{R}$.

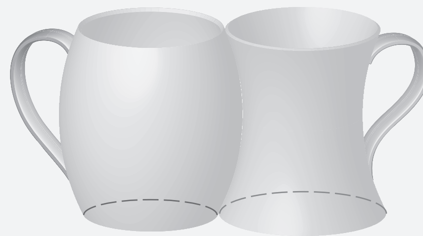
(c) Trate de encontrar los valores de m y n tales que el centroide esté *fuera* de $\mathcal{R}$.

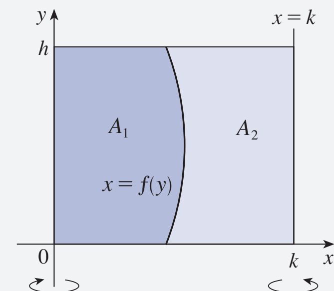
51. Demuestre las fórmulas 9.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

TAZAS DE CAFÉ COMPLEMENTARIAS

Suponga que puede elegir entre los dos tipos de taza de café que se muestran, una que se curva hacia fuera y una hacia dentro, y observe que tienen la misma altura y sus formas se ajustan entre sí. Le interesa saber a qué taza le cabe más café. Naturalmente podría llenar una taza con agua y verter el contenido en la otra, pero como estudiante de cálculo, decide un planteamiento más matemático. Despreciando el asa de cada una, observe que ambas tazas son superficies de revolución, de esta manera puede pensar el café como un volumen de revolución.





1. Suponga que las tazas tienen altura h, la taza A se forma por la rotación de la curva $x = f(y)$ en torno del eje y, y la taza B se forma por la rotación de la misma curva en torno de la recta $x = k$. Encuentre el valor de k tal que las dos tazas contengan la misma cantidad de café.

2. ¿Qué le indica el resultado del inciso 1 respecto a las áreas A_1 y A_2 que se muestran en la figura?

3. Utilice el teorema de Pappus para explicar su resultado en los incisos 1 y 2.

4. Con base en sus medidas y observaciones, sugiera un valor para h y una ecuación para $x = f(y)$ y calcule la cantidad de café que contiene cada una de las tazas.

8.4 Aplicaciones a la economía y la biología

En esta sección se consideran algunas aplicaciones de la integración a la economía (excedente del consumidor) y la biología (flujo sanguíneo, ritmo cardíaco). Otras se describen en los ejercicios.

Excedente del consumidor

Recuerde de la sección 4.7 que la función de demanda $p(x)$ es el precio que una compañía tiene que cargar para vender x unidades de un artículo. Por lo común, vender cantidades más grandes requiere bajar los precios, de modo que la función de demanda sea una función decreciente. La gráfica de una función de demanda representativa, llamada **curva de demanda**, se muestra en la figura 1. Si X es la cantidad del artículo que actualmente está disponible, entonces $P = p(X)$ es el precio actual de venta.

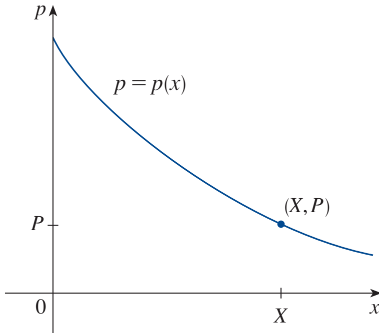


FIGURA 1
Una curva representativa de la demanda.

A un precio dado, algunos consumidores que compran un bien estarían dispuestos a pagar más; se benefician por no tener que hacerlo. La diferencia entre lo que un consumidor está dispuesto a pagar y lo que el consumidor realmente paga por un bien se llama el *excedente del consumidor*. Al encontrar el excedente del consumidor total entre todos los compradores de un bien, los economistas pueden evaluar el beneficio general de un mercado a la sociedad.

Para determinar el excedente del consumidor total, se verá la curva de demanda y se dividirá el intervalo $[0, X]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = X/n$, y sea $x_i^* = x_i$ el punto final derecho del i-ésimo subintervalo, como en la figura 2. De acuerdo con la curva de demanda, x_{i-1} unidades se comprarían a un precio de $p(x_{i-1})$ dólares por unidad. Para aumentar las ventas a x_i unidades, el precio por unidad tendría que bajarse a $p(x_i)$ dólares. En este caso, se podrían vender Δx unidades adicionales (pero no más). Los consumidores que habrían pagado $p(x_i)$ dólares le dieron un valor alto al producto; habrían pagado lo que valía para ellos. Así, al pagar sólo P dólares han ahorrado una cantidad de

$$(\text{ahorro por unidad})(\text{número de unidades}) = [p(x_i) - P]\Delta x$$

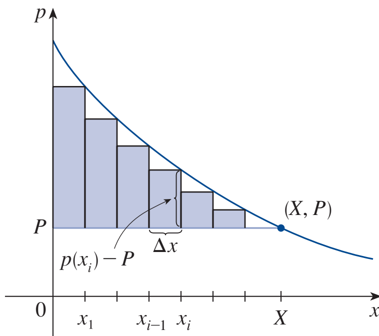


FIGURA 2

Al considerar grupos similares de consumidores dispuestos para cada uno de los subintervalos y sumar los ahorros, se obtiene el total de ahorros:

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

(Esta suma corresponde al área encerrada por los rectángulos de la figura 2.) Si $n \to \infty$, esta suma de Riemann se aproxima a la integral

$$\boxed{1} \qquad \int_0^X [p(x) - P]\,dx$$

lo que los economistas llaman el **excedente del consumidor** para el artículo.

El excedente del consumidor representa la cantidad de dinero que ahorran los consumidores al comprar el artículo a precio P, correspondiente a una cantidad demandada de X. En la figura 3 se muestra la interpretación del excedente del consumidor como el área bajo la curva de demanda y por encima de la recta $p = P$.

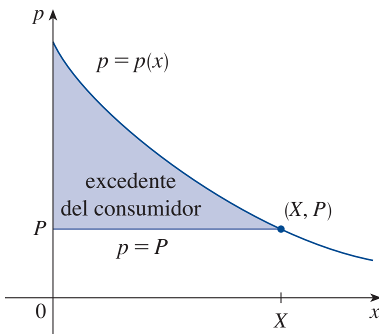


FIGURA 3

EJEMPLO 1 La demanda para un producto, en dólares, es

$$p = 1200 - 0.2x - 0.0001x^2$$

Determine el excedente del consumidor cuando el nivel de ventas es 500.

SOLUCIÓN Puesto que la cantidad de productos vendida es $X = 500$, el precio correspondiente es

$$P = 1200 - (0.2)(500) - (0.0001)(500)^2 = 1075$$

Por lo tanto, de la definición 1, el excedente del consumidor es

$$\begin{aligned}\int_0^{500} [p(x) - P]\,dx &= \int_0^{500} (1200 - 0.2x - 0.0001x^2 - 1075)\,dx\\ &= \int_0^{500} (125 - 0.2x - 0.0001x^2)\,dx\\ &= 125x - 0.1x^2 - (0.0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{500}\\ &= (125)(500) - (0.1)(500)^2 - \frac{(0.0001)(500)^3}{3}\\ &= \$33\,333.33\end{aligned}$$

■

Flujo sanguíneo

En el ejemplo 3.7.7, se analizó la ley de flujo laminar:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

que da la velocidad v de la sangre que fluye a lo largo de un vaso sanguíneo con radio R y longitud l a una distancia r del eje central, donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre. Ahora, para calcular la razón del flujo sanguíneo, o *caudal* (volumen por unidad de tiempo), se consideran radios más pequeños igualmente espaciados $r_1, r_2, \ldots$. El área aproximada del anillo (o arandela) con radio interno r_{i-1} y radio externo r_i es

$$2\pi r_i\,\Delta r \qquad \text{donde} \qquad \Delta r = r_i - r_{i-1}$$

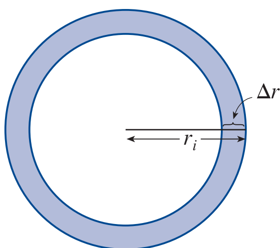


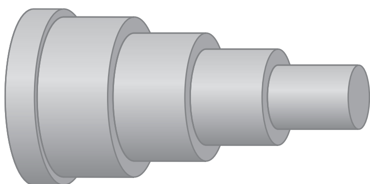
FIGURA 4

(Véase la figura 4.) Si Δr es pequeño, entonces la velocidad es casi constante en este anillo, y puede aproximarse mediante $v(r_i)$. Así, el volumen de sangre por unidad de tiempo que fluye por el anillo es aproximadamente

$$(2\pi r_i\,\Delta r)\,v(r_i) = 2\pi r_i\,v(r_i)\,\Delta r$$

y el volumen total de sangre que fluye por una sección transversal por unidad de tiempo es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i\,v(r_i)\,\Delta r$$


FIGURA 5

Esta aproximación se muestra en la figura 5. Observe que la velocidad (y, por tanto, el volumen por unidad de tiempo) se incrementa hacia el centro del vaso sanguíneo. La aproximación es mejor cuando se incrementa n. Cuando se toma el límite se obtiene el valor exacto del **caudal** (o *descarga*), que es el volumen de sangre que pasa una sección transversal por unidad de tiempo:

$$\begin{aligned}F &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i\,v(r_i)\,\Delta r = \int_0^R 2\pi r\,v(r)\,dr\\ &= \int_0^R 2\pi r\,\frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)\,dr\\ &= \frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R}\\ &= \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}\end{aligned}$$

La ecuación resultante

$$\boxed{2} \qquad F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

se llama **ley de Poiseuille** y muestra que el caudal es proporcional a la cuarta potencia del radio del vaso sanguíneo.

Gasto cardíaco

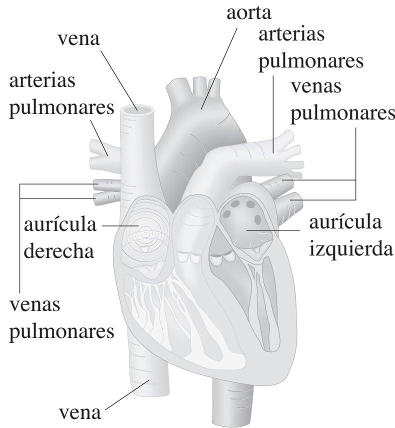


FIGURA 6

En la figura 6 se muestra el sistema cardiovascular humano. La sangre retorna del cuerpo por las venas, entra a la aurícula derecha del corazón y es bombeada para oxigenación a los pulmones por las arterias pulmonares. Después regresa a la aurícula izquierda por las venas pulmonares y sale hacia el resto del cuerpo por la aorta. El **gasto cardíaco** del corazón es el volumen de sangre que bombea este por unidad de tiempo, es decir, la razón del flujo sanguíneo hacia la aorta.

El *método de dilución de colorante* se emplea para medir el gasto cardíaco. Se inyecta colorante hacia la aurícula derecha y fluye por el corazón hacia la aorta. Una sonda insertada en la aorta mide la concentración del colorante que sale del corazón a tiempos igualmente espaciados en un intervalo $[0, T]$ hasta que se ha eliminado el colorante. Sea $c(t)$ la concentración del colorante en el tiempo t. Si se divide $[0, T]$ en subintervalos de igual extensión Δt, entonces la cantidad de colorante que fluye más allá del punto de medición durante el subintervalo de $t = t_{i-1}$ a $t = t_i$ es aproximadamente

$$(\text{concentración})(\text{volumen}) = c(t_i)(F\,\Delta t)$$

donde F es la razón del flujo que se trata de determinar. Así, el monto total de colorante es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i)F\,\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\,\Delta t$$

y, haciendo que $n \to \infty$, se encuentra que la cantidad de colorante es

$$A = F\int_0^T c(t)\,dt$$

Por lo que, el gasto cardíaco está dado por

$$\boxed{3} \qquad F = \frac{A}{\displaystyle\int_0^T c(t)\,dt}$$

donde se conoce la cantidad de colorante A y la integral puede aproximarse a partir de las lecturas de concentración.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6.1
1	0.4	7	4.0
2	2.8	8	2.3
3	6.5	9	1.1
4	9.8	10	0
5	8.9		

EJEMPLO 2 Un bolo de colorante de 5 mg se inyecta hacia la aurícula derecha. La concentración del colorante (en miligramos por litro) se mide en la aorta a intervalos de un segundo, como se muestra en la tabla. Estime el gasto cardíaco.

SOLUCIÓN Aquí $A = 5$, $\Delta t = 1$ y $T = 10$. Use la regla de Simpson para aproximar la integral de la concentración:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} c(t)\,dt &\approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0.4) + 2(2.8) + 4(6.5) + 2(9.8) + 4(8.9)\\ &\quad + 2(6.1) + 4(4.0) + 2(2.3) + 4(1.1) + 0]\\ &\approx 41.87\end{aligned}$$

Por lo que la fórmula 3 da el gasto cardíaco

$$F = \frac{A}{\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41.87} \approx 0.12 \text{ L/s} = 7.2 \text{ L/min}$$ ■

8.4 EJERCICIOS

1. La función de costo marginal $C'(x)$ se definió como la derivada de la función de costo. (Véanse las secciones 3.7 y 4.7.) Si el costo marginal de fabricar x metros de una tela es

$$C'(x) = 5 - 0.008x + 0.000009x^2$$

(medido en dólares por galón) y el costo de arranque fijo es $C(0) = \$20\,000$, use el teorema del cambio neto para encontrar el costo de producir los primeros 2000 metros de tela.

2. Una compañía estima que el ingreso marginal (en dólares por unidad) por la venta de x unidades de un producto es $48 - 0.0012x$. Suponiendo que la estimación es exacta, encuentre el incremento en los ingresos si aumentan las ventas de 5000 unidades a 10 000 unidades.

3. Una compañía minera estima que el costo marginal por extraer x toneladas de cobre de una mina es $0.6 + 0.008x$, medida en miles de dólares por tonelada. Los costos iniciales son \$100 000. ¿Cuál es el costo de extraer las primeras 50 toneladas de cobre? ¿Y cuál el de extraer las 50 toneladas siguientes?

4. La función de demanda para cierto artículo es $p(x) = 2000 - 46\sqrt{x}$. Determine el excedente del consumidor cuando el nivel de ventas para los paquetes es 400. Ilustre dibujando la curva de demanda e identificando el excedente del consumidor como un área.

5. Una curva de demanda está dada por $p = 450/(x + 8)$. Determine el excedente del consumidor cuando el precio de venta es \$10.

6. La **función de oferta** $p_S(x)$ para un artículo da la relación entre el precio de venta y el número de unidades que los fabricantes producirán a ese precio. Para un precio más alto, los fabricantes producirán más unidades, así que p_S es una función creciente de x. Sea X la cantidad del artículo que se produce actualmente, y sea $P = p_S(X)$ el precio actual. Algunos productores estarían dispuestos a fabricar y vender el artículo por un precio de venta menor y, por tanto, recibir más que su precio mínimo. Este exceso se llama **excedente del productor**. Un argumento similar a ese para el excedente del consumidor muestra que el excedente está dado por la integral

$$\int_0^X [P - p_S(x)]\,dx$$

Calcule el excedente del productor para la función de oferta $p_S(x) = 3 + 0.01x^2$ al nivel de ventas $X = 10$. Ilustre trazando la curva de oferta e identificando el excedente del productor como un área.

7. Si una curva de suministro se modela mediante la ecuación $p = 125 + 0.002x^2$, determine el excedente del productor cuando el precio de venta es \$625.

8. En un mercado puramente competitivo, el precio de un bien obedece naturalmente al valor donde la cantidad demandada por los consumidores coincide con la cantidad producida por los productores y se dice que el mercado está en *equilibrio*. Estos valores son las coordenadas del punto de intersección de las curvas de oferta y demanda.

(a) Dado que para un bien la curva de demanda $p = 50 - \frac{1}{20}x$ y la curva de oferta $p = 20 + \frac{1}{20}x$, ¿en qué cantidad y a qué precio para el bien está el mercado en equilibrio?

(b) Encuentre el excedente del consumidor y el excedente del productor cuando el mercado está en equilibrio. Ilustre trazando las curvas de oferta y de demanda e identifique los excedentes como áreas.

9. La suma del excedente del consumidor y del excedente del productor se llama el *excedente total*; es una medida que usan los economistas como un indicador de la salud económica de una sociedad. El excedente total se maximiza cuando el mercado de un bien está en equilibrio.

(a) La función de demanda para los estéreos del automóvil de una compañía de electrónica es $p(x) = 228.4 - 18x$ y la función de oferta es $p_S(x) = 27x + 57.4$, donde x se mide en miles. ¿Para qué cantidad está el mercado de los equipos de sonido en equilibrio?

(b) Calcule el excedente total máximo para los estéreos.

10. Una empresa de cámaras estima que la función de demanda para su nueva cámara digital es $p(x) = 312e^{-0.14x}$ y la función de oferta se estima $p_S(x) = 26e^{0.2x}$, donde x se mide en miles. Calcule el excedente total máximo.

11. Una compañía modeló la curva de demanda para su producto (en dólares) por la ecuación

$$p = \frac{800\,000e^{-x/5000}}{x + 20\,000}$$

Use una gráfica para estimar el nivel de ventas cuando el precio de venta es \$16. Después determine (en forma aproximada) el excedente del consumidor para este nivel de ventas.

12. Un cine ha estado cobrando \$10.00 por persona y vendiendo alrededor de 500 boletos. Después de encuestar a sus clientes, los propietarios del cine estiman que por cada 50 centavos que bajen el precio, la cantidad de asistentes se incrementará en 50 por noche. Encuentre la función de demanda y calcule

el superávit de consumo cuando los boletos se venden a $8.00.

13. Si la cantidad de capital que una compañía tiene en el tiempo t es $f(t)$, entonces la derivada, $f'(t)$, se llama el *flujo de inversión neto*. Suponga que el flujo de inversión neto es $\sqrt{t}$ millones de dólares por año (donde t se mide en años). Determine el incremento de capital (la *formación de capital*) del cuarto año al octavo.

14. El flujo de ingreso de una compañía es a razón de $f(t) = 9000\sqrt{1 + 2t}$, donde t se mide en años y $f(t)$ se mide en dólares por año, encuentre el ingreso total obtenido en los primeros cuatro años.

15. Si los ingresos se recolectan continuamente a una tasa de $f(t)$ de dólares por año y se invertirán a una tasa de interés constante r (compuesto continuamente) durante un período de T años, entonces el *valor futuro* del ingreso está dado por $\int_0^T f(t)\, e^{r(T-t)}\, dt$. Calcule el valor futuro después de 6 años para los ingresos recibidos a una tasa de $f(t) = 8000e^{0.04t}$ de dólares por año e invertido al 6.2% de interés.

16. El *valor actual* de un flujo de ingresos es la cantidad que tendría que invertir ahora para que coincida con el valor futuro como se describe en el ejercicio 15 y está dado por $\int_0^T f(t)\, e^{-rt}\, dt$. Encuentre el valor actual de los ingresos en el ejercicio 15.

17. La *ley de Pareto del ingreso* establece que el número de personas con ingresos entre $x = a$ y $x = b$ es $N = \int_a^b Ax^{-k}\, dx$, donde A y k son constantes con $A > 0$ y $k > 1$. El ingreso promedio de estas personas es

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b Ax^{1-k}\, dx$$

Calcule $\bar{x}$.

18. Un verano húmedo y cálido causa una explosión en la población de mosquitos en un área lacustre de descanso. El número de mosquitos se incrementa a una rapidez estimada de $2200 + 10e^{0.8t}$ por semana (donde t se mide en semanas). ¿En cuánto se incrementa la población de mosquitos entre las semanas quinta y novena del verano?

19. Use la ley de Poiseuille para calcular la razón del flujo sanguíneo en una pequeña arteria humana donde se puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm y $P = 4000$ dinas/cm^2.

20. La presión sanguínea alta resulta de la constricción de las arterias. Para mantener un flujo normal, el corazón tiene que bombear más fuerte, de modo que se incrementa la presión arterial. Use la ley de Poiseuille para demostrar que si R_0 y P_0 son valores normales del radio y la presión en una arteria, y los valores constreñidos son R y P, respectivamente, entonces para que el flujo permanezca constante, P y R se relacionan por la ecuación

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

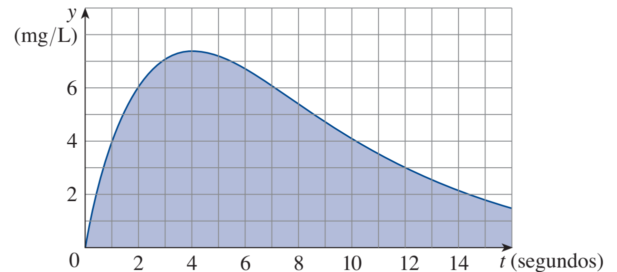
Deduzca que si el radio de una arteria se reduce a tres cuartos de su valor anterior, entonces la presión es más que el triple.

21. El método de dilución de colorante se emplea para medir el gasto cardíaco con 6 mg de colorante. Las concentraciones de colorante, en mg/L, se modelan mediante $c(t) = 20te^{-0.6t}$, $0 \leq t \leq 10$, donde t se mide en segundos. Determine el gasto cardíaco.

22. Después de una inyección de colorante de 5.5 mg, las lecturas de concentración de colorante, en mg/L, a intervalos de dos segundos son como se muestra en la tabla. Use la regla de Simpson para estimar el gasto cardíaco.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0.0	10	4.3
2	4.1	12	2.5
4	8.9	14	1.2
6	8.5	16	0.2
8	6.7		

23. Se muestra la gráfica de la función concentración $c(t)$ después de inyectar 7 mg de tintura dentro de un corazón. Aplique la regla de Simpson para estimar el gasto cardíaco.



8.5 Probabilidad

El cálculo desempeña un papel en el análisis del comportamiento aleatorio. Suponga que se considera el nivel de colesterol de una persona elegida al azar de un cierto grupo de edad, o la estatura de una mujer adulta elegida al azar o la duración de una batería de cierto tipo elegida en forma aleatoria. Tales cantidades se llaman **variables aleatorias continuas** porque sus valores varían en realidad en un rango de números reales, aunque podrían medirse o registrarse solo al entero más próximo. Quizá se desee conocer la probabilidad de que el nivel de colesterol sea mayor que 250, o la probabilidad de que la estatura de una mujer adulta esté entre 60 y 70 pulgadas o la probabilidad de que la duración de la

batería que se está comprando sea de entre 100 y 200 horas. Si X representa la duración de ese tipo de batería, la probabilidad mencionada se denota como sigue:

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200)$$

De acuerdo con la interpretación de frecuencia de la probabilidad, este número es la proporción a largo plazo de todas las baterías del tipo especificado cuyos tiempos de vida están entre 100 y 200 horas. Ya que esto representa una proporción, la probabilidad cae naturalmente entre 0 y 1.

Observe que siempre se utilizan *intervalos* de valores cuando se trabaja con funciones de densidad de probabilidad. Por ejemplo, no se usa una función de densidad para encontrar la probabilidad de que X sea *igual* a a.

Toda variable aleatoria continua X tiene una **función de densidad de probabilidad** f. Esto significa que la probabilidad de que X esté entre a y b se encuentra integrando f de a a b:

1 $$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Por ejemplo, en la figura 1 se muestra la gráfica de un modelo de la función de densidad de probabilidad f para una variable aleatoria X definida como la estatura en pulgadas de una mujer adulta en Estados Unidos (de acuerdo con los datos de la National Health Survey, Encuesta Nacional de Salud). La probabilidad de que la estatura de una mujer elegida al azar de esta población esté entre 60 y 70 pulgadas es igual al área bajo la gráfica de f de 60 a 70.

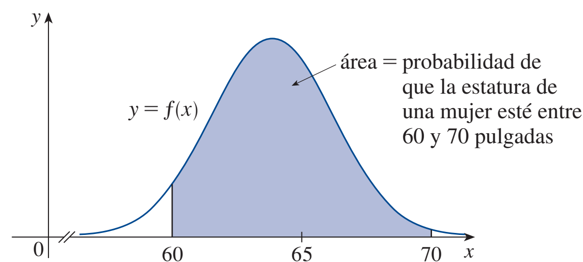


FIGURA 1
Función de densidad de probabilidad para la estatura de una mujer adulta.

En general, la función de densidad de probabilidad f de una variable aleatoria X satisface la condición $f(x) \geqslant 0$ para toda x. Debido a que las probabilidades se miden en una escala de 0 a 1, se tiene que

2 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 0.006x(10 - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ y $f(x) = 0$ para todos los otros valores de x.
(a) Verifique que f es una función de densidad de probabilidad.
(b) Determine $P(4 \leqslant X \leqslant 8)$.

SOLUCIÓN
(a) Para $0 \leqslant x \leqslant 10$ se tiene $0.006x(10 - x) \geqslant 0$, por tanto, $f(x) \geqslant 0$ para toda x. Es necesario verificar que también se satisface la ecuación 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{10} 0.006x(10 - x)\, dx = 0.006 \int_0^{10} (10x - x^2)\, dx$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{10} = 0.006\left(500 - \tfrac{1000}{3}\right) = 1$$

Por tanto, f es una función de densidad de probabilidad.

(b) La probabilidad de que X se encuentre entre 4 y 8 es

$$P(4 \leqslant X \leqslant 8) = \int_4^8 f(x)\,dx = 0.006 \int_4^8 (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0.006\Big[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_4^8 = 0.544$$

EJEMPLO 2 Fenómenos como los tiempos de espera y los tiempos de falla de equipo se modelan por lo común mediante funciones de densidad de probabilidad que decrecen en forma exponencial. Determine la forma exacta de tal función.

SOLUCIÓN Considere la variable aleatoria como el tiempo de espera en una llamada antes de que conteste un agente de una compañía a la que usted está llamando. Así que, en lugar de x, utilice t para representar en minutos el tiempo. Si f es la función de densidad de probabilidad y usted llama en el tiempo $t = 0$, entonces, de la definición 1, $\int_0^2 f(t)\,dt$ representa la probabilidad de que un agente conteste dentro de los primeros dos minutos y $\int_4^5 f(t)\,dt$ es la probabilidad de que la llamada sea contestada durante el minuto cinco.

Es claro que $f(t) = 0$ para $t < 0$ (el agente no puede contestar antes de que usted llame). Para $t > 0$ se nos dice que hay que usar una función que decrece en forma exponencial, es decir, una función de la forma $f(t) = Ae^{-ct}$, donde A y c son constantes positivas. Así,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Se usa la ecuación 2 para determinar el valor de A:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} Ae^{-ct}dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x Ae^{-ct}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{A}{c}e^{-ct}\right]_0^x = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{c}(1 - e^{-cx})$$

$$= \frac{A}{c}$$

Por tanto, $A/c = 1$ y así $A = c$. En estos términos, toda función de densidad exponencial tiene la forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

En la figura 2 se muestra una gráfica representativa. ■

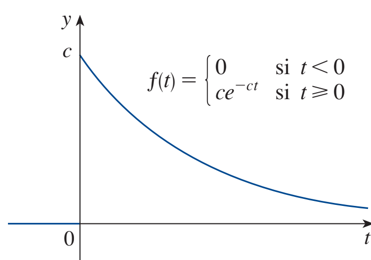


FIGURA 2
Una función de densidad exponencial.

■ Valores promedio

Hipotéticamente, usted está en espera de que una compañía conteste su llamada telefónica y se pregunta cuánto tiempo, en promedio, tendría que esperar. Sea $f(t)$ la función de densidad correspondiente, donde t se mide en minutos, y considere una muestra de N personas que han llamado a esta compañía. Es muy probable que ninguno de ellos tuviera que esperar más de una hora, así que se restringe la atención al intervalo $0 \leqslant t \leqslant 60$. Dividamos ese intervalo en n intervalos de longitud Δt y puntos extremos $0, t_1, t_2, \ldots, t_n = 60$. (Suponga que Δt dura un minuto, o medio minuto, o 10 segundos o incluso un

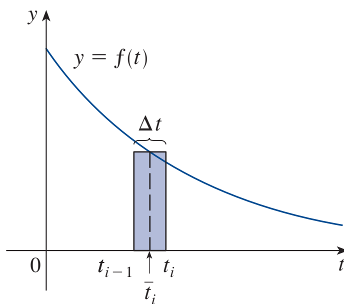


FIGURA 3

segundo.) La probabilidad de que la llamada de alguien sea contestada durante el período de tiempo de t_{i-1} a t_i es el área bajo la curva $y = f(t)$ de t_{i-1} a t_i, que es aproximadamente igual a $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$. (Esta es el área del rectángulo de aproximación en la figura 3, donde $\bar{t}_i$ es el punto medio del intervalo.)

Como la proporción a largo plazo de llamadas que son contestadas en el período de t_{i-1} a t_i es $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$, se espera que, de la muestra de N personas que llaman, la cantidad cuya llamada fue contestada en ese período es aproximadamente $N f(\bar{t}_i)\,\Delta t$ y el tiempo que cada uno esperó es de alrededor de $\bar{t}_i$. Por tanto, el tiempo total que esperaron es el producto de estos números: aproximadamente $\bar{t}_i[N f(\bar{t}_i)\,\Delta t]$. Al sumar todos estos intervalos se obtiene el total aproximado de los tiempos de espera de todos:

$$\sum_{i=1}^{n} N\bar{t}_i\, f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Si ahora se divide entre el número N de personas que llamaron, se obtiene el tiempo de espera *promedio* aproximado:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i\, f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Esto se reconoce como una suma de Riemann para la función $tf(t)$. Conforme se acorta el intervalo (es decir, $\Delta t \to 0$ y $n \to \infty$), esta suma de Riemann se aproxima a la integral

$$\int_0^{60} t\, f(t)\, dt$$

Esta integral se llama la *media del tiempo de espera*.

En general, la **media** de cualquier función de densidad de probabilidad se define como

Tradicionalmente, la media se indica con la letra griega μ(mu).

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

La media puede interpretarse como el valor promedio a largo plazo de la variable aleatoria X, también como una medida de la posición central de la función de densidad de probabilidad.

La expresión para la media se parece a una integral que se ha visto antes. Si $\mathcal{R}$ es la región que se encuentra bajo la gráfica de f, se sabe de la fórmula 8.3.8 que la coordenada x del centroide de $\mathcal{R}$ es

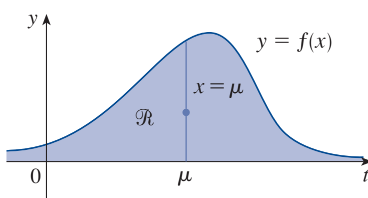


FIGURA 4
$\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la recta $x = \mu$

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \mu$$

debido a la ecuación 2. De modo que una placa delgada en la forma de $\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la recta vertical $x = \mu$. (Véase la figura 4.)

EJEMPLO 3 Encuentre la media de la distribución exponencial del ejemplo 2:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de media, se tiene

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, dt = \int_0^{\infty} tce^{-ct}\, dt$$

Para evaluar esta integral se usa la integración por partes, con $u = t$ y $dv = ce^{-ct}\,dt$, por lo que $du = dt$ y $v = -e^{-ct}$:

$$\int_0^\infty tce^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x tce^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left(-te^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\,dt \right)$$

El límite del primer término es 0 por la regla de L'Hôpital.

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c} \right) = \frac{1}{c}$$

La media es $\mu = 1/c$, por lo que puede reescribir la función de densidad de probabilidad como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

■

EJEMPLO 4 Suponga que el tiempo de espera promedio para que la llamada de un cliente sea contestada por un representante de la compañía es cinco minutos.
(a) Encuentre la probabilidad de que una llamada sea contestada durante el primer minuto, suponiendo que es apropiada una distribución exponencial.
(b) Determine la probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos antes de que su llamada sea contestada.

SOLUCIÓN
(a) Se tiene como dato que la media de la distribución exponencial es $\mu = 5$ min y, por tanto, del resultado del ejemplo 3, se sabe que la función de densidad de probabilidad es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.2e^{-t/5} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

donde t se mide en minutos. Por esto, la probabilidad de que una llamada sea contestada durante el primer minuto es

$$P(0 \leqslant T \leqslant 1) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 0.2e^{-t/5}\,dt = 0.2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1$$

$$= 1 - e^{-1/5} \approx 0.1813$$

Por consiguiente, cerca de 18% de las llamadas de los clientes serán contestadas durante el primer minuto.

(b) La probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos, es

$$P(T > 5) = \int_5^\infty f(t)\,dt = \int_5^\infty 0.2e^{-t/5}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_5^x 0.2e^{-t/5}\,dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x/5})$$

$$= \frac{1}{e} - 0 \approx 0.368$$

Cerca de 37% de los clientes espera más de cinco minutos antes de que su llamada sea contestada. ■

Observe el resultado del ejemplo 4(b): aun cuando el tiempo promedio de espera es 5 minutos, solo 37% de las personas que llaman espera más de 5 minutos. La razón es que algunas de las personas que llaman tienen que permanecer mucho más tiempo (quizá 10 o 15 minutos), y esto hace subir el promedio.

Otra medida central de una función de densidad de probabilidad es la *mediana*. Esta es un número m tal que la mitad de las personas que llaman tiene un tiempo de espera menor que m y la otra mitad tiene un tiempo de espera más largo que m. En general, la **mediana** de una función de densidad de probabilidad es el número m tal que

$$\int_m^\infty f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}$$

Esto significa que la mitad del área bajo la gráfica de f se localiza a la derecha de m. En el ejercicio 9 se le pidió demostrar que la mediana del tiempo de espera para la compañía descrita en el ejemplo 4 es aproximadamente 3.5 minutos.

Distribuciones normales

Muchos fenómenos aleatorios importantes, como las puntuaciones en pruebas de aptitud, estaturas y pesos de individuos de una población homogénea, precipitación pluvial anual en un determinado lugar, se modelan mediante una **distribución normal**. Esto significa que la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X es un miembro de la familia de funciones

3 $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

La desviación estándar se denota con la letra griega σ (sigma) minúscula.

Puede verificarse que la media para esta función es μ. La constante positiva σ se llama **desviación estándar**, que mide qué tan dispersos están los valores de X. De las gráficas en forma de campana de miembros de la familia de la figura 5, se ve que para valores pequeños de σ, los valores de X están agrupados respecto a la media, mientras que para valores más grandes de σ, los valores de X están más dispersos. Los estadísticos se sirven de métodos que les permiten usar conjuntos de datos para estimar μ y σ.

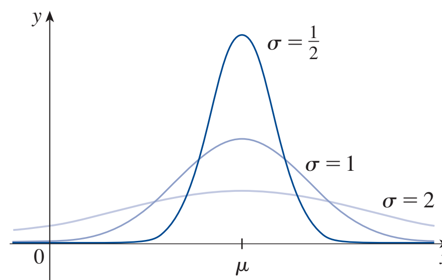


FIGURA 5
Distribuciones normales.

El factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ es necesario para hacer de f una función de densidad de probabilidad. De hecho, puede comprobarse por medio de los métodos de cálculo de varias variables que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx = 1$$

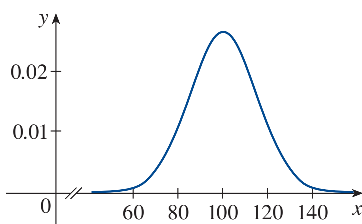


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Las puntuaciones del cociente intelectual (CI) tienen una distribución normal con media 100 y desviación estándar 15. (En la figura 6 se muestra la función de densidad de probabilidad correspondiente.)

(a) ¿Qué porcentaje de la población tiene una puntuación de CI entre 85 y 115?

(b) ¿Qué porcentaje de la población tiene un CI arriba de 140?

SOLUCIÓN

(a) Puesto que las puntuaciones CI tienen una distribución normal, se usa la función de densidad de probabilidad dada por la ecuación 3 con $\mu = 100$ y $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/(2 \cdot 15^2)} \, dx$$

Recuerde de la sección 7.5 que la función $y = e^{-x^2}$ no tiene una antiderivada elemental, por lo que no puede evaluarse la integral de manera exacta. Pero se puede usar la capacidad de integración numérica de una calculadora o computadora (o la regla del punto medio o la regla de Simpson) para estimar la integral. Al hacerlo se encuentra que

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0.68$$

Por tanto, cerca de 68% de la población tiene un CI entre 85 y 115, es decir, dentro de una desviación estándar de la media.

(b) La probabilidad de que la puntuación del CI de una persona elegida al azar sea mayor de 140 es

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450} \, dx$$

Para evitar la integral impropia, se podría aproximarla mediante la integral de 140 a 200. (Es bastante seguro decir que las personas con un CI de más de 200 son muy pocas.) Entonces

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450} \, dx \approx 0.0038$$

Por tanto, cerca de 0.4% de la población tiene un CI de más de 140. ■

8.5 EJERCICIOS

1. Sea $f(x)$ la función de densidad de probabilidad para la duración de la llanta de automóvil de la más alta calidad de un fabricante, donde x se mide en millas. Explique el significado de cada integral.

(a) $\int_{30\,000}^{40\,000} f(x)\, dx$ b) $\int_{25\,000}^{\infty} f(x)\, dx$

2. Sea $f(t)$ la función de densidad de probabilidad para el tiempo que le toma conducir a la escuela en la mañana, donde t se mide en minutos. Exprese las probabilidades siguientes como integrales.
(a) La probabilidad de que llegue a la escuela en menos de 15 minutos.
(b) La probabilidad de que tarde más de media hora en llegar a la escuela.

3. Sea $f(x) = xe^{-x}$ para $x \geqslant 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.
(a) Verifique que f es una función de densidad de probabilidad.
(b) Determine $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

4. La función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{3-x}}{(1 + e^{3-x})^2}$$

Es un ejemplo de una *distribución logística*.
(a) Compruebe que f es una función de densidad de probabilidad.
(b) Encuentre $P(3 \leqslant X \leqslant 4)$.
(c) Trace la gráfica f. ¿Qué significa la media? ¿Qué pasa con la mediana?

5. Sea $f(x) = c/(1 + x^2)$.
(a) ¿Para qué valor de c es f una función de densidad de probabilidad?
(b) Para este valor de c, encuentre $P(-1 < X < 1)$.

6. Sea $f(x) = k(3x - x^2)$ si $0 \leqslant x \leqslant 3$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$ o $x > 3$.
(a) ¿Para qué valor de k es f una función de densidad de probabilidad?
(b) Para ese valor de k, determine $P(X > 1)$.
(c) Encuentre la media.

7. Una ruleta de un juego de mesa indica al azar un número real entre 0 y 10. La ruleta es justa en el sentido de que indica un número en un intervalo dado con la misma probabilidad que indica un número en cualquier otro intervalo de la misma longitud.

(a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ si } x > 10 \end{cases}$$

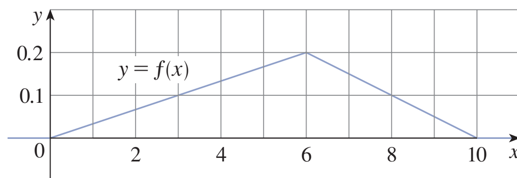
es una función de densidad de probabilidad para los valores de la ruleta.

(b) ¿Qué le dice su intuición acerca del valor de la media? Verifique su intuición evaluando una integral.

8. (a) Explique por qué la función cuya gráfica se muestra es una función de densidad de probabilidad.

(b) Use la gráfica para encontrar las probabilidades siguientes:
(i) $P(X < 3)$ (ii) $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$

(c) Calcule la media.



9. Demuestre que el tiempo de espera promedio para una llamada telefónica a la compañía descrita en el ejemplo 4 es de alrededor de 3.5 minutos.

10. (a) Cierto tipo de lámpara lleva una marca que indica una duración promedio de 1000 horas. Es razonable modelar la probabilidad de falla de estas lámparas mediante una función de densidad exponencial con media $\mu = 1000$. Use este modelo para encontrar la probabilidad de que la lámpara
(i) falle dentro de las primeras 200 horas,
(ii) se queme por más de 800 horas.

(b) ¿Cuál es la mediana de la duración de estas lámparas?

11. Un minorista en línea ha determinado que el tiempo promedio para que las transacciones de tarjetas de crédito sean aprobadas electrónicamente es de 1.6 segundos.

(a) Utilice una función de densidad exponencial para encontrar la probabilidad de que un cliente espere menos de un segundo para la aprobación de la tarjeta de crédito.

(b) Determine la probabilidad de que un cliente espere más de 3 segundos.

(c) ¿Cuál es el tiempo de aprobación mínimo para el 5% más lento de las transacciones?

12. El tiempo entre la infección y la presentación de los síntomas de faringitis estreptocócica es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad se puede aproximar por $f(t) = \frac{1}{15{,}676} t^2 e^{-0.05t}$ si $0 \leqslant t \leqslant 150$ y $f(t) = 0$ en otro caso (t medido en horas).

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente infectado mostrará síntomas dentro de las primeras 48 horas?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente infectado no mostrará síntomas hasta después de 36 horas?

Fuente: Adaptado de P. Sartwell, "The Distribution of Incubation Periods of Infectious Disease," *American Journal of Epidemiology* 141 (1995): 386–394.

13. El sueño REM es la fase de sueño cuando los sueños están más activos. En un estudio, la cantidad de sueño REM durante las primeras cuatro horas de dormir fue descrita por una variable aleatoria T con la función de densidad de probabilidad

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1600}t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 40 \\ \frac{1}{20} - \frac{1}{1600}t & \text{si } 40 < t \leqslant 80 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde t se mide en minutos

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de sueño REM esté entre 30 y 60 minutos?

(b) Encuentre la cantidad promedio de sueño REM.

14. De acuerdo con la National Health Survey, las estaturas de varones adultos en Estados Unidos tienen una distribución normal con media de 69.0 pulgadas y desviación estándar de 2.8 pulgadas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un varón adulto elegido al azar tenga una estatura de entre 65 y 73 pulgadas?

(b) ¿Qué porcentaje de la población de varones adultos tiene una estatura de más de 6 pies?

15. El "Proyecto basura" en la Universidad de Arizona informa que la cantidad de papel que se desecha en los hogares por semana tiene una distribución normal con media de 4.3 kg y desviación estándar de 1.9 kg. ¿Qué porcentaje de los hogares tira por lo menos 5 kg de papel a la semana?

16. La etiqueta de unas cajas indica que contiene 500 g de cereal. Una máquina que llena las cajas introduce pesos que tienen una distribución normal con desviación estándar de 12 g.

(a) Si el peso deseado es 500 g, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina llene una caja con menos de 480 g de cereal?

(b) Suponga que una ley establece que no más de 5% de las cajas de cereal de un fabricante puede contener menos del peso establecido de 500 g. ¿En qué peso debe fijar el fabricante su máquina de llenado?

17. La rapidez de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 100 km/h usualmente está distribuida con una media de 112 km/h y una desviación estándar de 8 km/h.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo elegido al azar esté viajando con una velocidad permitida por ley?

(b) Si los policías están instruidos para infraccionar a los automovilistas que conduzcan a 125 km/h o más, ¿qué porcentaje de automovilistas sería sancionado?

18. Demuestre que la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria normalmente distribuida tiene puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.

19. Para cualquier distribución normal, encuentre la probabilidad de que la variable aleatoria se localice dentro de dos desviaciones estándar de la media.

20. La desviación estándar para una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f y media μ se define por

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx\right]^{1/2}$$

Encuentre la desviación estándar para una función de densidad exponencial con media μ.

21. El átomo de hidrógeno se compone de un protón en el núcleo y un electrón, que se mueve respecto al núcleo. En la teoría cuántica de la estructura atómica, se supone que el electrón no se mueve en una órbita bien definida. En cambio, ocupa un estado conocido como *orbital*, que puede considerarse como una "nube" de carga negativa en torno al núcleo. En el estado de menor energía, llamado *estado base*, o *1s-orbital*, la forma de esta nube se supone como una esfera centrada en el núcleo. Esta esfera se describe en términos de la función de la densidad de probabilidad

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} \qquad r \geqslant 0$$

donde a_0 es el *radio de Bohr* ($a_0 \approx 5.59 \times 10^{-11}$ m). La integral

$$P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3} s^2 e^{-2s/a_0}\, ds$$

da la probabilidad de que el electrón se encuentre dentro de la esfera de radio r metros centrada en el núcleo.

(a) Compruebe que $p(r)$ es una función de densidad de probabilidad.

(b) Determine $\text{lím}_{n \to \infty} p(r)$. ¿Para qué valor de r la expresión $p(r)$ tiene su valor máximo?


(c) Trace la gráfica de la función de densidad.

(d) Encuentre la probabilidad de que el electrón esté dentro de la esfera de radio $4a_0$ centrada en el núcleo.

(e) Calcule la distancia media del electrón desde el núcleo en el estado base del átomo de hidrógeno.

8 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Cómo se define la longitud de una curva?
(b) Escriba una expresión para la longitud de una curva suave dada por $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.
(c) ¿Qué pasa si x se da como una función de y?

2. (a) Escriba una expresión para el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, en torno al eje x.
(b) ¿Qué pasa si x se da como una función de y?
(c) ¿Qué pasa si la curva se hace girar en torno al eje y?

3. Describa cómo se puede determinar la fuerza hidrostática contra una pared vertical sumergida en un fluido.

4. (a) ¿Cuál es el significado físico del centro de masa de una placa delgada?
(b) Si la placa está entre $y = f(x)$ y $y = 0$, donde $a \leqslant x \leqslant b$, escriba expresiones para las coordenadas del centro de masa.

5. ¿Qué establece el teorema de Pappus?

6. Dada una función de demanda $p(x)$, explique lo que se entiende por excedente del consumidor cuando la cantidad de un artículo actualmente disponible es X y el precio de venta actual es P. Ilustre con un trazo.

7. (a) ¿Qué es el gasto cardíaco del corazón?
(b) Explique cómo puede medirse el gasto cardíaco por el método de dilución de colorante.

8. ¿Qué es la función de densidad de probabilidad? ¿Qué propiedades tiene tal función?

9. Suponga que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad para el peso de una alumna universitaria, donde x se mide en kilogramos.
(a) ¿Cuál es el significado de la integral $\int_0^{60} f(x)\, dx$?
(b) Escriba una expresión para la media de esta función de densidad.
(c) ¿Cómo puede encontrarse la mediana de esta función de densidad?

10. ¿Qué es una distribución normal? ¿Cuál es el significado de la desviación estándar?

EJERCICIOS

1–3 Encuentre la longitud de la curva.

1. $y = 4(x - 1)^{3/2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 4$

2. $y = 2\ln\left(\text{sen}\,\frac{1}{2}x\right), \quad \pi/3 \leqslant x \leqslant \pi$

3. $12x = 4y^3 + 3y^{-1}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 3$

4. (a) Encuentre la longitud de la curva

$$y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2} \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2$$

(b) Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del inciso (a) en torno al eje y.

5. Sea C el arco de la curva $y = 2/(x + 1)$ del punto $(0, 2)$ a $\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Utilice una calculadora u otro dispositivo para encontrar el valor de cada una de las cantidades siguientes, precisas a cuatro decimales.
(a) La longitud de C.
(b) El área de la superficie obtenida al girar C sobre el eje x.
(c) El área de la superficie obtenida al girar C alrededor del eje y.

6. (a) La curva $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ se hace girar en torno al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.
(b) Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del inciso (a) en torno al eje x.

7. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de la curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

8. Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva seno del ejercicio 7 alrededor del eje x.

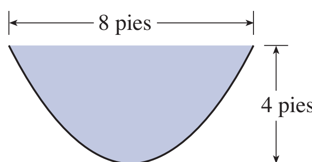
9. Encuentre la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\, dt \qquad 1 \leqslant x \leqslant 16$$

10. Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del ejercicio 9 en torno al eje y.

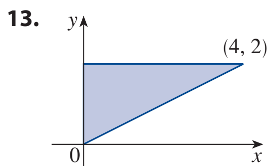
11. Una compuerta en un canal de irrigación se construye en la forma de un trapecio de 1 m de ancho en el fondo, 2 m de ancho en la parte superior y 1 m de altura. Se coloca verticalmente en el canal, de manera que el agua cubre hasta su parte superior. Determine la fuerza hidrostática sobre un lado de la compuerta.

12. Un canal se llena con agua, y sus extremos verticales tienen la forma de la región parabólica en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática en un extremo del canal.

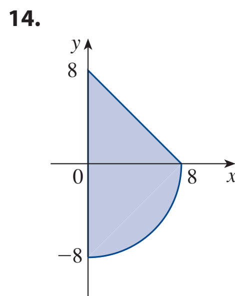


13-14 Determine el centroide de cada región que se muestra.

13.



14.



15-16 Encuentre el centroide de la región acotada entre las curvas dadas.

15. $y = \frac{1}{2}x, \quad y = \sqrt{x}$

16. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4, \quad x = 3\pi/4$

17. Encuentre el volumen obtenido cuando el círculo de radio 1 con centro $(1, 0)$ se hace girar en torno al eje y.

18. Use el teorema de Pappus y el hecho de que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$ para encontrar el centroide de la región semicircular acotada por la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje x.

19. La función de demanda para un artículo se da por

$$p = 2000 - 0.1x - 0.01x^2$$

Encuentre el excedente del consumidor cuando el nivel de ventas es 100.

20. Después de una inyección de 6 mg de colorante al corazón, las lecturas de concentración de colorante a intervalos de dos segundos se muestran en la tabla. Use la regla de Simpson para estimar el gasto cardíaco.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	14	4.7
2	1.9	16	3.3
4	3.3	18	2.1
6	5.1	20	1.1
8	7.6	22	0.5
10	7.1	24	0
12	5.8		

21. (a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{20} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 10 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad.
(b) Encuentre $P(X < 4)$.
(c) Calcule la media. ¿Es el valor que esperaría?

22. Los lapsos de embarazos humanos tienen una distribución normal con media de 268 días y una desviación estándar de 15 días. ¿Qué porcentaje de embarazos dura entre 250 días y 280 días?

23. El tiempo de espera en la fila de cierto banco se modela mediante una función de densidad exponencial con media de 8 minutos.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido en los primeros 3 minutos?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tenga que esperar más de 10 minutos?
(c) ¿Cuál es la mediana del tiempo de espera?

Problemas adicionales

1. Encuentre el área de la región $S = \{(x, y) | x \geqslant 0, y \leqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant 4y\}$.

2. Encuentre el centroide de la región encerrada por el rizo de la curva $y^2 = x^3 - x^4$.

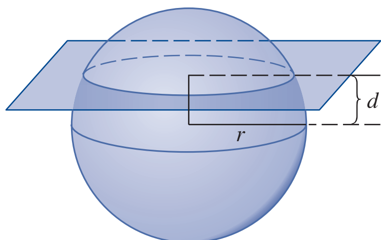
3. Si la esfera de radio r se corta mediante un plano cuya distancia desde el centro de la esfera es d, entonces la esfera se divide en dos piezas llamadas segmentos de una base (véase la primera figura). Las superficies correspondientes se llaman *zonas esféricas de una base*.

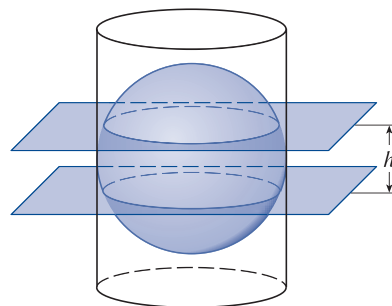
(a) Determine las áreas superficiales de las dos zonas esféricas indicadas en la figura.

(b) Calcule el área aproximada del océano Ártico suponiendo que su forma es aproximadamente circular, con centro en el Polo Norte y "circunferencia" a 75° latitud norte. Use $r = 6370$ km para el radio de la Tierra.

(c) Una esfera de radio r se inscribe en un cilindro circular recto de radio r. Dos planos perpendiculares al eje central del cilindro y apartados una distancia h cortan una zona *esférica de dos bases* en la esfera. Demuestre que el área de la superficie de la zona esférica es igual al área de la superficie de la región que los dos planos cortan en el cilindro.

(d) La *zona tórrida* es la región sobre la superficie de la Tierra que está entre el Trópico de Cáncer (23.45° latitud norte) y el Trópico de Capricornio (23.45° latitud sur). ¿Cuál es el área de la zona tórrida?





4. (a) Demuestre que un observador a la altura H arriba del Polo Norte de una esfera de radio r puede ver una parte de la esfera que tiene un área

$$\frac{2\pi r^2 H}{r + H}$$

(b) Dos esferas con radios r y R se colocan de modo que la distancia entre sus centros es d, donde $d > r + R$. ¿Dónde debe colocarse una luz sobre la recta que une los centros de las esferas para iluminar la superficie total más grande?

5. Suponga que la densidad del agua de mar, $\rho = \rho(z)$, varía con la profundidad z debajo de la superficie.

(a) Demuestre que la presión hidrostática está gobernada por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dz} = \rho(z)g$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Sea P_0 y ρ_0 la presión y la densidad en $z = 0$. Exprese la presión a profundidad z como una integral.

(b) Suponga que la densidad del agua de mar a la profundidad z está dada por $\rho = \rho_0 e^{z/H}$, donde H es una constante positiva. Encuentre la fuerza total, expresada como una integral, ejercida sobre un orificio circular vertical de radio r cuyo centro se localiza a una distancia $L > r$ debajo de la superficie.

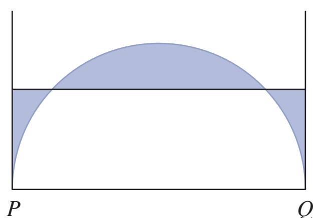


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. En la figura se muestra un semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes en P y Q. ¿A qué altura arriba del diámetro debe colocarse la recta horizontal para minimizar el área sombreada?

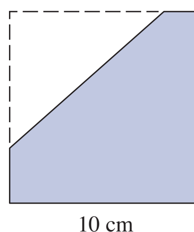
7. Sea P una pirámide con una base cuadrada de lado $2b$ y suponga que S es una esfera con su centro en la base de P y S es tangente a los ocho lados de P. Determine la altura de P.

Después calcule el volumen de la intersección de S y P.

8. Considere una placa metálica plana que se colocará verticalmente bajo el agua con la parte superior sumergida 2 m debajo de la superficie del agua. Determine una forma para la placa de modo que si esta se divide en cierto número de tiras horizontales de igual altura, la fuerza hidrostática en cada tira es la misma.

9. Un disco uniforme con radio 1 se cortará mediante una línea de modo que el centro de masa de la pieza más pequeña se localice a la mitad a lo largo de un radio. ¿Qué tan cerca del centro del disco debe hacerse el corte? (Exprese su respuesta con una aproximación de dos decimales.)

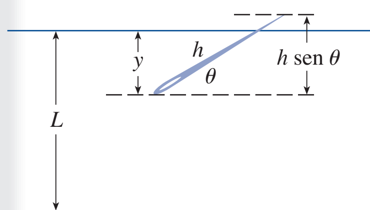
10. Un triángulo con área 30 cm² se corta desde una esquina de un cuadrado con lado 10 cm, como se muestra en la figura. Si el centroide de la región restante es 4 cm desde el lado derecho del cuadrado, ¿qué tan lejos está del fondo del cuadrado?



11. En un famoso problema del siglo XVIII conocido como *problema de la aguja de Buffon*, se deja caer una aguja de longitud h sobre una superficie plana (por ejemplo, una mesa) en la que se han dibujado rectas paralelas apartadas L unidades, $L \geqslant h$. El problema es determinar la probabilidad de que la aguja llegue al reposo cortando una de las rectas. Suponga que las rectas van de este a oeste, paralelas al eje x en un sistema coordenado rectangular (como en la figura). Sea y la distancia del extremo "sur" de la aguja a la recta más próxima al norte. (Si el extremo sur de la aguja está sobre una recta, sea $y = 0$. Si la aguja se encuentra de este a oeste, sea el extremo "oeste" el extremo "sur".) Sea θ el ángulo que la aguja forma con un rayo que se extiende hacia el este desde el extremo "sur". Entonces $0 \leqslant y \leqslant L$ y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Observe que la aguja interseca una de las rectas solo cuando $y < h \operatorname{sen} \theta$. El conjunto total de posibilidades para la aguja se puede identificar con la región rectangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, y la proporción de veces que una aguja corta una recta es el radio

$$\frac{\text{área debajo de } y = h \operatorname{sen} \theta}{\text{área del rectángulo}}$$

Este cociente es la probabilidad de que la aguja corte una recta. Encuentre la probabilidad de que la aguja interseque una recta si $h = L$. ¿Qué pasa si $h = \frac{1}{2}L$?



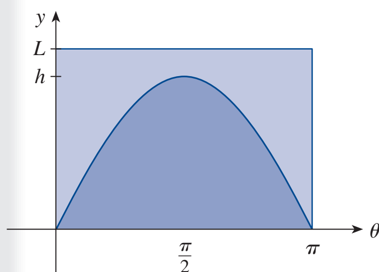


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

12. Si la aguja del problema 11 tiene longitud $h > L$, es posible que la aguja corte más de una recta.

(a) Si $L = 4$, encuentre la probabilidad de que una aguja de longitud 7 corte por lo menos una recta. [*Sugerencia*: proceda como en el problema 11. Defina y como antes; entonces el conjunto total de posibilidades para la aguja puede identificarse con la misma región rectangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. ¿Qué parte del rectángulo corresponde a la aguja que corta una recta?]

(b) Si $L = 4$, encuentre la probabilidad de que una aguja de longitud 7 corte *dos* rectas.

(c) Si $2L < h \leqslant 3L$, encuentre una fórmula general para la probabilidad de que la aguja interseque tres rectas.

13. Encuentre el centroide de la región encerrada por la elipse $x^2 + (x + y + 1)^2 = 1$.

9 Ecuaciones diferenciales

En la última sección de este capítulo se emplearon pares de ecuaciones diferenciales para investigar la relación entre las poblaciones de depredadores y presas, como jaguares y jabalíes, lobos y conejos, linces y liebres, mariquitas y pulgones.



TAL VEZ LA MÁS IMPORTANTE de todas las aplicaciones del cálculo está en las ecuaciones diferenciales. Cuando los físicos o los científicos sociales utilizan el cálculo, con frecuencia lo hacen para analizar una ecuación diferencial que ha aparecido en el proceso de modelado de algún fenómeno que están estudiando. Aun cuando a veces es imposible encontrar una fórmula explícita para la solución de una ecuación diferencial, se verá que hay métodos gráficos y numéricos que aportan la información necesaria.

9.1 Modelado con ecuaciones diferenciales

Ahora es un buen momento para leer (o releer) la discusión de un modelo matemático en la página 23.

Al describir el proceso de modelado en la sección 1.2, se habló sobre la formulación de un modelo matemático de un problema del mundo real, ya sea por razonamiento intuitivo acerca del fenómeno o de una ley física en función de la evidencia experimental. El modelo matemático con frecuencia toma la forma de una *ecuación diferencial*, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas. Esto no es sorprendente, porque en el problema del mundo real es común observar que ocurran cambios y se desea predecir el comportamiento futuro respecto a cómo cambian los valores actuales. Para comenzar, se examinan varios ejemplos de cómo surgen las ecuaciones diferenciales cuando se modelan fenómenos físicos.

Modelos para el crecimiento poblacional

Un modelo para el crecimiento de una población se basa en suponer que la población crece con una razón proporcional al tamaño de la población. Esa es una suposición razonable para una población de bacterias o animales en condiciones ideales (ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, inmunidad a enfermedades).

Identifique y denote las variables en este modelo:

t = tiempo (la variable independiente)

P = número de individuos en la población (la variable dependiente)

La razón de crecimiento de la población es la derivada dP/dt. Por lo que la suposición de que la razón de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población, se escribe como la ecuación

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad. La ecuación 1 es el primer modelo para el crecimiento poblacional; es una ecuación diferencial porque contiene una función desconocida P y su derivada dP/dt.

Una vez formulado un modelo, se consideran sus consecuencias. Si se descarta una población de 0, entonces $P(t) > 0$ para toda t. Por lo que si $k > 0$, entonces la ecuación 1 muestra que $P'(t) > 0$ para toda t. Esto significa que la población siempre está creciendo. De hecho, cuando crece $P(t)$ la ecuación 1 muestra que dP/dt se vuelve más grande. En otras palabras, la rapidez de crecimiento se incrementa cuando crece la población.

Trate de pensar en una solución para la ecuación 1. La ecuación pide encontrar una función cuya derivada sea un múltiplo constante de sí misma. Por el capítulo 3 se sabe que las funciones exponenciales tienen esa propiedad. De hecho, si se establece $P(t) = Ce^{kt}$, entonces

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Por lo que cualquier función exponencial de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ es una solución de la ecuación 1. En la sección 9.4 se verá que no hay otra solución.

Permitiendo que C varíe a través de todos los números reales, se obtiene la *familia* de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ cuyas gráficas se muestran en la figura 1. Pero las poblaciones tienen exclusivamente valores positivos y, por tanto, únicamente interesa conocer las soluciones con $C > 0$. Y probablemente se tiene interés solo en valores de t mayores que el tiempo inicial $t = 0$.

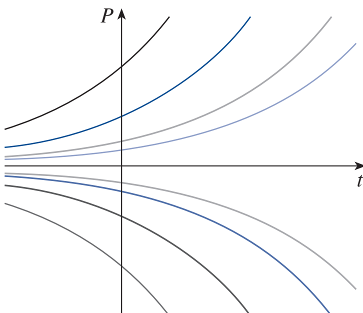


FIGURA 1

La familia de soluciones de $dP/dt = kP$

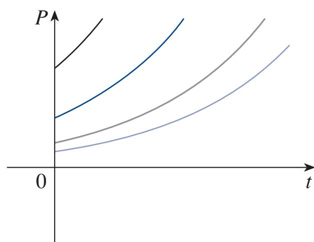


FIGURA 2

La familia de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ con $C > 0$ y $t \geqslant 0$

En la figura 2 se muestran las soluciones con significado físico. Al sustituir $t = 0$, se obtiene $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, por lo que la constante C resulta ser la población inicial, $P(0)$.

La ecuación 1 es apropiada para modelar el crecimiento poblacional en condiciones ideales, pero se tiene que reconocer que un modelo más real debe reflejar el hecho de que un determinado ambiente tiene recursos limitados. Muchas poblaciones comienzan incrementándose de manera exponencial, pero la población se estabiliza cuando se aproxima a su *capacidad de carga* M (o disminuye hacia M si alguna vez excede a M). Para que un modelo tome en cuenta ambas tendencias, se hacen dos suposiciones:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ si P es pequeña (al inicio, la rapidez de crecimiento es proporcional a P.)
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ *si* $P > M$ (P disminuye si excede a M.)

Una expresión simple que incorpora ambas suposiciones es la ecuación siguiente

2
$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Observe que, si P es pequeña en comparación con M, entonces P/M tiende a 0 y, por tanto, $dP/dt \approx kP$. Si $P > M$, entonces $1 - P/M$ es negativa y, por tanto, $dP/dt < 0$.

La ecuación 2 se llama *ecuación diferencial logística*, y la propuso el biólogo matemático holandés Pierre-François Verhulst en la década de 1840 como un modelo para el crecimiento de la población mundial. En la sección 9.4 se desarrollarán técnicas que permiten encontrar soluciones explícitas de la ecuación logística, pero por ahora se pueden deducir características cualitativas de las soluciones directamente de la ecuación 2. Primero observe que las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = M$ son soluciones porque, en cualquier caso, uno de los factores del lado derecho de la ecuación 2 es cero. (Esto en realidad tiene sentido físico: si la población es 0 o es igual a la capacidad de carga, P permanece constante.) Estas dos soluciones constantes se llaman **soluciones de equilibrio.**

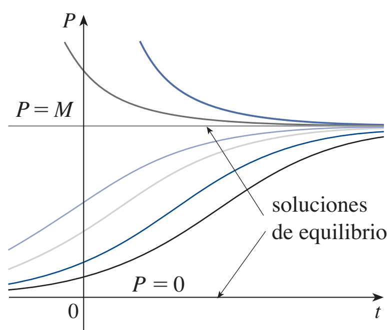


FIGURA 3
Soluciones de la ecuación logística

Si la población inicial $P(0)$ está entre 0 y M, entonces el lado derecho de la ecuación 2 es positivo, por tanto $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si la población rebasa la capacidad de carga ($P > M$), entonces $1 - P/M$ es negativa, por lo que $dP/dt < 0$ y la población decrece. Observe que, en cualquier caso, si la población tiende a la capacidad de carga ($P \to M$), entonces $dP/dt \to 0$, lo que significa que la población se estabiliza. Por lo que se espera que las soluciones de la ecuación diferencial logística tengan gráficas que se parezcan a las de la figura 3. Observe que las gráficas se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = M$.

Modelo para el movimiento de un resorte

Ahora se examina un ejemplo de un modelo de física. Considere el movimiento de un objeto con masa m sujeto en el extremo de un resorte vertical (como en la figura 4). En la sección 6.4 se analizó la ley de Hooke que establece que si un resorte se estira (o comprime) x unidades desde su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x:

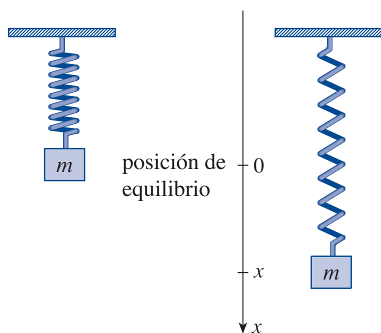


FIGURA 4

$$\text{Fuerza de restauración} = -kx$$

donde k es una constante positiva (llamada *constante del resorte*). Si se ignoran las fuerzas de resistencia externas (debidas a la resistencia del aire o la fricción) entonces, por la segunda ley de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración), se tiene

3
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Este es un ejemplo de lo que se llama una *ecuación diferencial de segundo orden* porque implica segundas derivadas. Vea qué se puede inferir acerca de la forma de la solución directamente de la ecuación. Puede reescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que dice que la segunda derivada de x es proporcional a x pero tiene signo opuesto. Se conocen dos funciones con esta propiedad, las funciones seno y coseno. De hecho, resulta que todas las soluciones de la ecuación 3 pueden escribirse como combinaciones de ciertas funciones seno y coseno (véase el ejercicio 4). Esto no es sorprendente; se espera que el resorte oscile respecto a su posición de equilibrio y, por tanto, es natural pensar que están implicadas las funciones trigonométricas.

Ecuaciones diferenciales generales

En general, una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas. El **orden** de la ecuación diferencial es el de la mayor de las derivadas que aparecen en la ecuación. Por lo que las ecuaciones 1 y 2 son de primer orden, y la ecuación 3 es de segundo. En las tres ecuaciones, la variable independiente se llama t y representa el tiempo, pero en general la variable independiente puede no representar tiempo. Por ejemplo, cuando se considera la ecuación diferencial

4
$$y' = xy$$

se entiende que y es una función desconocida de x.

Una función f se llama **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando $y = f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en la ecuación. Por lo que f es una solución de la ecuación 4 si

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos los valores de x en algún intervalo.

Cuando se pide *resolver* una ecuación diferencial, se espera encontrar todas las posibles soluciones de la ecuación. Ya se han resuelto algunas ecuaciones diferenciales particularmente simples, a saber, aquellas de la forma

$$y' = f(x)$$

Por ejemplo, se sabe que la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = x^3$$

está dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Pero, en general, resolver una ecuación diferencial no es una tarea fácil. No hay una técnica sistemática que permita resolver todas las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en la sección 9.2 se verá cómo dibujar gráficas aproximadas de soluciones aun cuando no se tiene fórmula explícita. También se aprenderá cómo encontrar aproximaciones numéricas a soluciones.

EJEMPLO 1 Demuestre que cualquier miembro de la familia de funciones

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

es una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUCIÓN Utilice la regla del cociente para derivar la expresión para y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

En la figura 5 se muestran las gráficas de siete miembros de la familia del ejemplo 1. La ecuación diferencial muestra que si $y \approx \pm 1$, entonces $y' \approx 0$. Esto se confirma por lo aplanado de las gráficas cerca de $y = 1$ y $y = -1$.

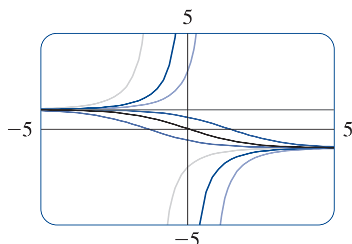


FIGURA 5

El lado derecho de la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Por tanto, para todo valor de c, la función dada es una solución de la ecuación diferencial. ■

Al aplicar ecuaciones diferenciales, normalmente no se está tan interesado en encontrar una familia de soluciones (la *solución general*) como en determinar una solución que satisfaga algún requerimiento adicional. En muchos problemas físicos se requiere encontrar la solución particular que satisface una condición de la forma $y(t_0) = y_0$. Esta se llama **condición inicial**, y el problema de encontrar una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial se llama **problema con valores iniciales**.

Desde el punto de vista geométrico, cuando se impone una condición inicial, se busca en la familia de curvas solución una que pase por el punto (t_0, y_0). Físicamente, esto corresponde a medir el estado de un sistema en el tiempo t_0 y usar la solución del problema con valor inicial para predecir el comportamiento futuro del sistema.

EJEMPLO 2 Encuentre una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaga la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN Al sustituir los valores $t = 0$ y $y = 2$ en la fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

del ejemplo 1, se obtiene

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Si esta ecuación se resuelve para c, se obtiene $2 - 2c = 1 + c$, que da $c = \frac{1}{3}$. Por tanto, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

9.1 EJERCICIOS

1. Demuestre que $y = x - x^{-1}$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 2x$.

2. Compruebe que $y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x$ es una solución del problema con valores iniciales

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x \qquad y(0) = -1$$

en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

3. (a) ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?
(b) Si r_1 y r_2 son los valores de r que encontró en el inciso (a), demuestre que todo integrante de la familia de funciones $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ también es una solución.

4. (a) ¿Para qué valores de k la función $y = \cos kt$ satisface la ecuación diferencial $4y'' = -25y$?
(b) Para esos valores de k, verifique que cualquier integrante de la familia de las funciones $y = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$ también es una solución.

5. ¿Cuáles de las funciones siguientes son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{sen} x$?

(a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \cos x$
(c) $y = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$ (d) $y = -\frac{1}{2}x \cos x$

6. (a) Demuestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = (\ln x + C)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.

(b) Ilustre el inciso (a) graficando diferentes miembros de la familia de soluciones en una pantalla común.
(c) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial $y(1) = 2$.
(d) Determine una solución de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial $y(2) = 1$.

7. (a) ¿Qué puede decir acerca de una solución de la ecuación $y' = -y^2$ con solo observar la ecuación diferencial?
(b) Compruebe que todos los miembros de la familia $y = 1/(x + C)$ son soluciones de la ecuación del inciso (a).
(c) ¿Puede pensar en una solución de la ecuación diferencial $y' = -y^2$ que no sea un miembro de la familia del inciso (b)?
(d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0.5$$

8. (a) ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una solución de la ecuación $y' = xy^3$ cuando x es cercana a 0? ¿Qué pasa si x es grande?
(b) Compruebe que todos los miembros de la familia

$$y = (c - x^2)^{-1/2}$$

son soluciones de la ecuación diferencial $y' = xy^3$.

(c) Trace la gráfica de varios miembros de la familia de soluciones en una pantalla común. ¿Las gráficas confirman lo que predijo en el inciso (a)?
(d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales.

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Una población se modela mediante una ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

(a) ¿Para qué valores de P la población es creciente?
(b) ¿Para qué valores de P la población es decreciente?
(c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

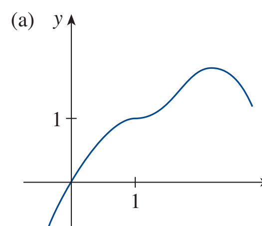
10. Una función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

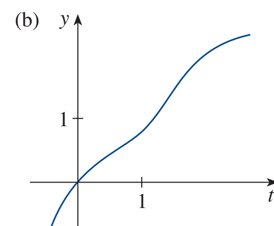
$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

(a) ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación?
(b) ¿Para qué valores de y es y creciente?
(c) ¿Para qué valores de y es y decreciente?

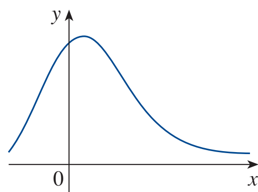
11. Explique por qué las funciones con las gráficas dadas *no pueden* ser soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y - 1)^2$$





12. La función de la gráfica dada es una solución de una de las ecuaciones diferenciales siguientes. Decida cuál es la ecuación correcta y justifique su respuesta.

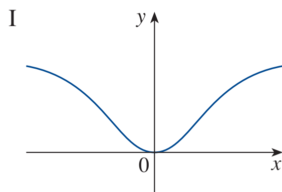


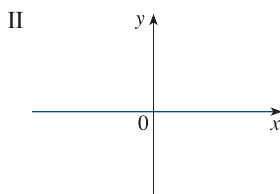
A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

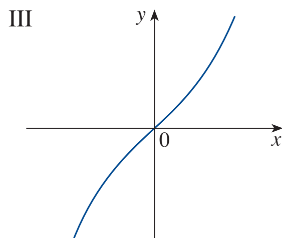
13. Relacione las ecuaciones diferenciales siguientes con las gráficas solución I-IV. Dé razones para sus elecciones.

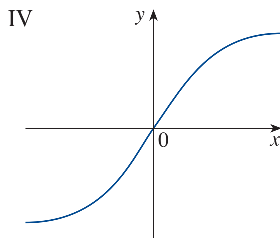
(a) $y' = 1 + x^2 + y^2$ (b) $y' = xe^{-x^2-y^2}$

(c) $y' = \dfrac{1}{1 + e^{x^2+y^2}}$ (d) $y' = \operatorname{sen}(xy)\cos(xy)$

I


II


III


IV


14. Suponga que se sirve una taza de café recién preparado con temperatura de 95 °C en una habitación donde la temperatura es de 20 °C.

(a) ¿Cuándo considera que el café se enfría con más rapidez? ¿Qué sucede con la rapidez de enfriamiento conforme pasa el tiempo? Explique.

(b) La ley de enfriamiento, de Newton, establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio ambiente, siempre que esta diferencia no sea muy grande. Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de enfriamiento para esta situación particular. ¿Cuál es la condición inicial? En vista de su respuesta al inciso (a), ¿considera que esta ecuación diferencial es un modelo apropiado para el enfriamiento?

(c) Realice un trazo aproximado de la gráfica de la solución del problema con valores iniciales del inciso (b).

15. Los psicólogos interesados en la teoría del aprendizaje estudian **curvas de aprendizaje**. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función del tiempo de capacitación t. La derivada dP/dt representa la rapidez a la que mejora el desempeño.

(a) ¿Cuándo considera que P se incrementa con más rapidez? ¿Qué sucede con dP/dt cuando t crece? Explique.

(b) Si M es el nivel máximo de desempeño del cual es capaz el alumno, explique por qué la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ es una constante positiva}$$

es un modelo razonable para el aprendizaje.

(c) Realice una gráfica aproximada de una posible solución de esta ecuación diferencial.

16. La ecuación de von Bertalanffy indica que la razón de crecimiento de la longitud de un pez determinado es proporcional a la diferencia entre la actual longitud L y la longitud asintótica L_∞ (en centímetros).

(a) Escriba una ecuación diferencial que exprese esta idea.

(b) Haga un trazo aproximado de la gráfica de una solución de un problema de valor inicial representativo para esta ecuación diferencial.

17. Las ecuaciones diferenciales se han utilizado ampliamente en el estudio de la disolución del fármaco para pacientes que recibieron medicamentos orales. Una de estas ecuaciones es la ecuación de Weibull para la concentración $c(t)$ del fármaco:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k}{t^b}(c_s - c)$$

donde k y c_s son constantes positivas y $0 < b < 1$. Verifique que

$$c(t) = c_s\left(1 - e^{-\alpha t^{1-b}}\right)$$

es una solución de la ecuación de Weibull para $t > 0$, donde $\alpha = k/(1 - b)$. ¿Cuál es la ecuación diferencial que nos indica cómo se produce la disolución del fármaco?

9.2 Campos direccionales y método de Euler

Desafortunadamente, es imposible resolver la mayoría de las ecuaciones diferenciales en términos de una fórmula explícita para la solución. En esta sección se muestra que, a pesar de la ausencia de una solución explícita, aún se puede aprender mucho acerca de la solución por un método gráfico (campos direccionales) o método numérico (método de Euler).

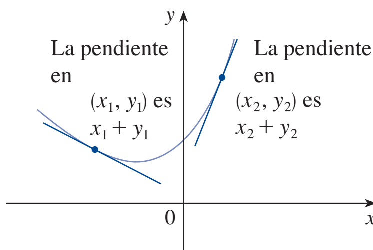


FIGURA 1
Una solución de $y' = x + y$

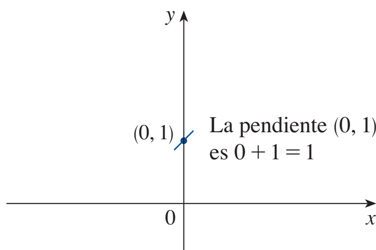


FIGURA 2
Comienzo de la curva solución que pasa por (0, 1)

TEC En Module 9.2A se muestran los campos direccionales y las curvas solución de diferentes ecuaciones diferenciales.

Campos direccionales

Suponga que se le pide trazar la gráfica de la solución del problema con valores iniciales

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

No se conoce una fórmula para la solución, por lo que ¿cómo puede trazar su gráfica? Considere lo que significa la ecuación diferencial. La ecuación $y' = x + y$ indica que la pendiente en cualquier punto (x, y) sobre la gráfica (llamada *curva solución*) es igual a la suma de las coordenadas x y y del punto (véase la figura 1). En particular, debido a que la curva pasa por el punto (0, 1), su pendiente ahí debe ser $0 + 1 = 1$. Por lo que una pequeña parte de la curva solución cerca del punto (0, 1) tiene la apariencia de un corto segmento de recta que pasa por (0, 1) con pendiente 1 (véase la figura 2).

Como una guía para trazar el resto de la curva, se dibujan segmentos de recta cortos en varios puntos (x, y) con pendiente $x + y$. El resultado se llama *campo direccional* y se muestra en la figura 3. Por ejemplo, el segmento de recta en el punto (1, 2) tiene pendiente $1 + 2 = 3$. El campo direccional permite ver la forma general de las curvas solución indicando la dirección en que proceden las curvas en cada punto.

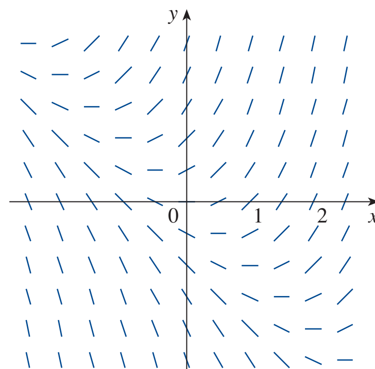


FIGURA 3
Campo direccional para $y' = x + y$

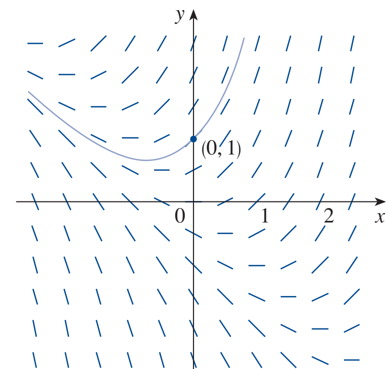


FIGURA 4
Curva solución que pasa por (0, 1)

Ahora se puede trazar la curva solución a través del punto (0, 1) siguiendo el campo direccional como en la figura 4. Observe que se ha dibujado la curva para que sea paralela a segmentos de recta cercanos.

En general, suponga que se tiene una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y' = F(x, y)$$

donde $F(x, y)$ es alguna expresión en x y y. La ecuación diferencial dice que la pendiente de una curva solución en un punto (x, y) sobre la curva es $F(x, y)$. Si se dibujan segmentos cortos de recta con pendiente $F(x, y)$ en varios puntos (x, y), el resultado se llama **campo direccional** (o **campo de pendientes**). Estos segmentos de recta indican la dirección en que apunta una curva solución, por lo que el campo direccional ayuda a ver la forma general de estas curvas.

EJEMPLO 1

(a) Trace el campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.
(b) Use el inciso (a) para trazar la curva solución que pasa por el origen.

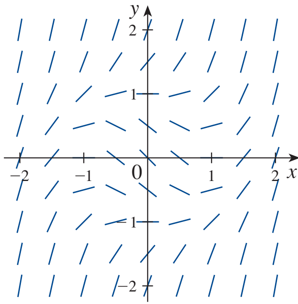


FIGURA 5

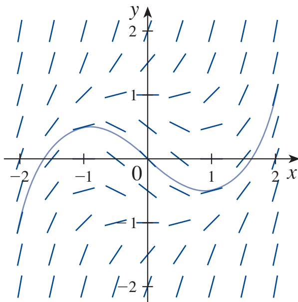


FIGURA 6

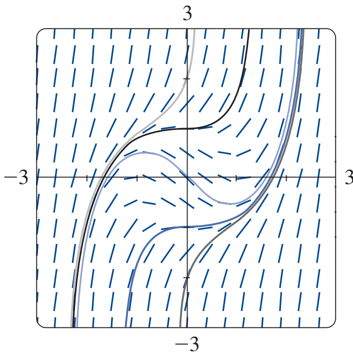


FIGURA 7

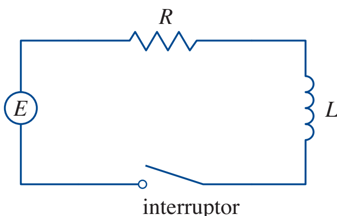


FIGURA 8

SOLUCIÓN

(a) Se empieza por calcular la pendiente en varios puntos en la tabla siguiente:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

Ahora se dibujan segmentos de recta cortos con estas pendientes en estos puntos. El resultado es el campo direccional de la figura 5.

(b) Empiece en el origen y muévase a la derecha en la dirección del segmento de recta (cuya pendiente es -1). Continúe con el trazo de la curva solución para que se mueva paralela a los segmentos de recta cercanos. La curva solución resultante se muestra en la figura 6. Volviendo al origen, se traza también la curva solución a la izquierda. ■

Mientras más segmentos de recta se dibujen en un campo direccional, más clara se vuelve la ilustración. Por supuesto, es tedioso calcular pendientes y dibujar segmentos de recta para un enorme número de puntos a mano, pero las calculadoras son muy adecuadas para esta tarea. En la figura 7 se muestra un campo direccional más detallado trazado por computadora para la ecuación diferencial del ejemplo 1, que permite trazar, con razonable exactitud, las curvas solución que se muestran en la figura 8 con intersecciones en y: -2, -1, 0, 1 y 2.

Ahora observará cómo los campos direccionales dan una idea de las situaciones físicas. El circuito eléctrico simple que se muestra en la figura 8 contiene una fuerza electromotriz (por lo común una batería o generador) que produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henrys (H).

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Por lo que se tiene

1
$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden que modela la corriente I en el tiempo t.

EJEMPLO 2 Considere que en el circuito simple de la figura 8 la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H y la batería da un voltaje constante de 60 V.

(a) Dibuje un campo direccional para la ecuación 1 con estos valores.
(b) ¿Qué se puede decir acerca del valor límite de la corriente?
(c) Identifique las soluciones de equilibrio.
(d) Si el interruptor está cerrado cuando $t = 0$ por lo que la corriente empieza con $I(0) = 0$, use el campo direccional para trazar la curva solución.

SOLUCIÓN

(a) Si se sustituye $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$ en la ecuación 1, se obtiene

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

El campo direccional para esta ecuación diferencial se muestra en la figura 9.

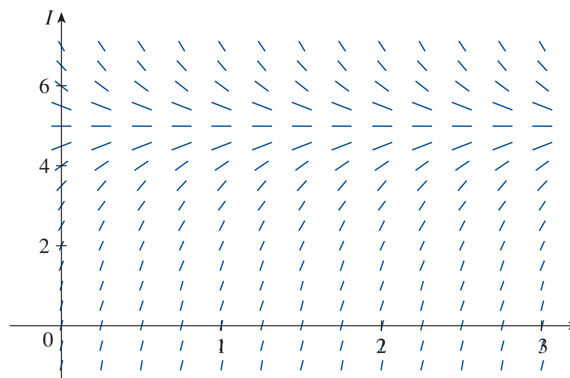


FIGURA 9

(b) Del campo direccional parece que las soluciones se aproximan al valor 5 A, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 5$$

(c) Pareciera que la función constante $I(t) = 5$ es una solución de equilibrio. De hecho, esto se puede comprobar de manera directa a partir de la ecuación diferencial $dI/dt = 15 - 3I$. Si $I(t) = 5$, entonces el lado izquierdo es $dI/dt = 0$ y el lado derecho es $15 - 3(5) = 0$.

(d) Se usa el campo direccional para trazar la curva solución que pasa por (0, 0), como se muestra en la primera curva, desde la izquierda, en la figura 10.

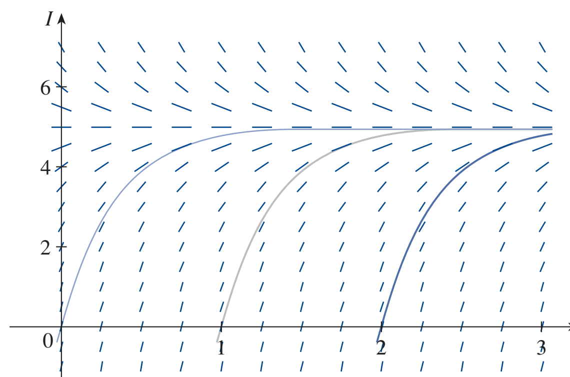


FIGURA 10

■

Observe en la figura 9 que los segmentos de recta a lo largo de cualquier recta horizontal son paralelos. Eso es porque la variable independiente t no aparece del lado derecho de la ecuación $I' = 15 - 3I$. En general, una ecuación diferencial de la forma

$$y' = f(y)$$

en la que falta la variable independiente en el lado derecho se llama **autónoma**. Para dicha ecuación, las pendientes correspondientes a dos puntos distintos con la misma coordenada y deben ser iguales. Esto significa que, si se conoce una solución para una ecuación diferencial autónoma, entonces se puede obtener infinitamente muchas otras desplazando solo la gráfica de la ecuación conocida a la derecha o a la izquierda. En la figura 10 se muestran las soluciones que resultan de desplazar la curva solución del ejemplo 2 una o dos unidades de tiempo (a saber, segundos) a la derecha. Corresponden a cerrar el interruptor cuando $t = 1$ o $t = 2$.

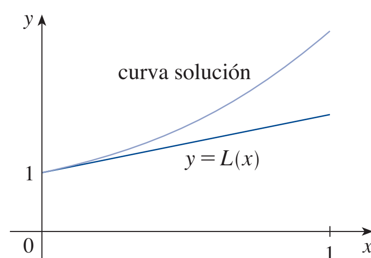


FIGURA 11
Primera aproximación de Euler

Método de Euler

La idea básica detrás de los campos direccionales se puede usar para encontrar aproximaciones numéricas a soluciones de ecuaciones diferenciales. Se muestra el método en el problema con valor inicial que se empleó para introducir campos direccionales:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

La ecuación diferencial dice que $y'(0) = 0 + 1 = 1$, por lo que la curva solución en el punto (0, 1) tiene pendiente 1. Como una primera aproximación a la solución se podría usar la aproximación lineal $L(x) = x + 1$. En otras palabras, se podría usar la recta tangente en (0, 1) como aproximación a la curva solución (véase la figura 11).

La idea de Euler era mejorar esta aproximación siguiendo solo una corta distancia a lo largo de esta recta tangente y luego hacer una corrección a mitad de curso cambiando la dirección como indica el campo direccional. En la figura 12 se muestra lo que sucede si se comienza a lo largo de la recta tangente pero se detiene cuando $x = 0.5$. (Esta distancia horizontal recorrida se llama *tamaño de paso*.) Ya que $L(0.5) = 1.5$, se tiene $y(0.5) \approx 1.5$ y se toma (0.5, 1.5) como el punto de partida para un nuevo segmento de recta. La ecuación diferencial indica que $y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2$, por lo que se usa la función lineal

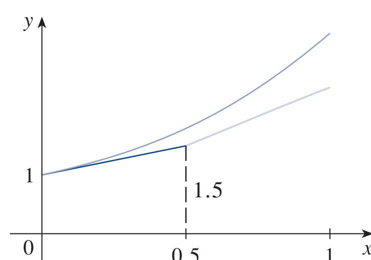


FIGURA 12
Aproximación de Euler con tamaño de paso 0.5

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

como una aproximación a la solución para $x > 0.5$ (el segmento más claro en la figura 12). Si se reduce el tamaño de paso de 0.5 a 0.25, se obtiene una mejor aproximación de Euler, como se muestra en la figura 13.

En general, el método de Euler propone empezar en el punto dado por el valor inicial y avanzar en la dirección indicada por el campo direccional. Deténgase después de un corto tiempo, examine la pendiente en la nueva ubicación y avance en esta dirección. Continúe deteniéndose y cambiando la dirección de acuerdo con el campo direccional. El método de Euler no produce la solución exacta para un problema con valor inicial, da aproximaciones. Pero al disminuir el tamaño de paso (y por tanto al incrementar el número de las correcciones intermedias), se obtienen aproximaciones cada vez mejores a la solución exacta. (Compare las figuras 11, 12 y 13.)

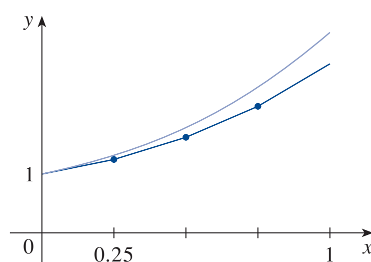


FIGURA 13
Aproximación de Euler con tamaño de paso 0.25

Para el problema general con valores iniciales de primer orden $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, nuestro objetivo es encontrar valores aproximados para la solución en números igualmente espaciados x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$,..., donde h es el tamaño de paso. La ecuación diferencial nos dice que la pendiente en (x_0, y_0) es $y' = F(x_0, y_0)$, por lo que la figura 14 muestra que el valor aproximado de la solución cuando $x = x_1$ es

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

De manera similar, $$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

En general, $$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

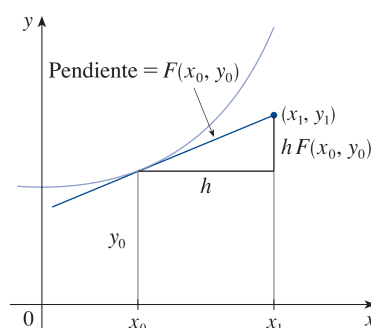


FIGURA 14

Método de Euler Los valores aproximados para la solución del problema con valor inicial $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con tamaño de paso h, en $x_n = x_{n-1} + h$, son

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

EJEMPLO 3 Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para construir una tabla de valores aproximados de la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

SOLUCIÓN Se tiene que $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $F(x, y) = x + y$. Por lo que se tiene

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$$

Esto significa que si $y(x)$ es la solución exacta, entonces $y(0.3) \approx 1.362$.

Procediendo con cálculos similares, se obtienen los valores de la tabla:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0.1	1.100000	6	0.6	1.943122
2	0.2	1.220000	7	0.7	2.197434
3	0.3	1.362000	8	0.8	2.487178
4	0.4	1.528200	9	0.9	2.815895
5	0.5	1.721020	10	1.0	3.187485

■

Los paquetes de software que producen soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales son refinaciones del método de Euler. Aunque el método de Euler es simple y no es preciso, se trata de la idea básica en la cual se cimentan métodos más precisos.

Para una tabla más exacta de valores del ejemplo 3, podría disminuirse el tamaño de paso. Pero para un gran número de pasos pequeños, la cantidad de cálculos es considerable y, por tanto, se requiere programar una calculadora o computadora para realizarlos. En la tabla siguiente se muestran los resultados de aplicar el método de Euler con tamaño de paso decreciente al problema con valor inicial del ejemplo 3.

Observe que las estimaciones de Euler en la tabla parecen estar tendiendo a un límite, a saber, los valores verdaderos de $y(0.5)$ y $y(1)$. En la figura 15 se muestran las gráficas de las aproximaciones de Euler con tamaños de paso 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01 y 0.005. Cuando el tamaño de paso h se aproxima a 0, la tendencia es hacia la curva solución exacta.

TEC Module 9.2B muestra cómo funciona el método de Euler desde el punto de vista numérico y visual para diversas ecuaciones diferenciales y tamaños de paso.

Tamaño de paso	Estimación de Euler de $y(0.5)$	Estimación de Euler de $y(1)$
0.500	1.500000	2.500000
0.250	1.625000	2.882813
0.100	1.721020	3.187485
0.050	1.757789	3.306595
0.020	1.781212	3.383176
0.010	1.789264	3.409628
0.005	1.793337	3.423034
0.001	1.796619	3.433848

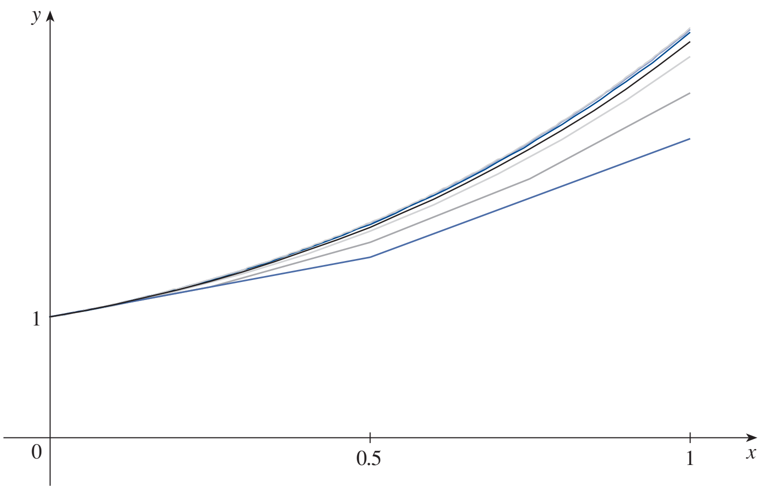


FIGURA 15 Aproximación de Euler tendiendo a la solución exacta

Euler

Leonhard Euler (1707-1783) fue el principal matemático de mediados del siglo XVIII y el más prolífico de todos los tiempos. Nació en Suiza pero pasó casi toda su carrera en las academias de ciencias apoyadas por Catalina la Grande en San Petersburgo y Federico el Grande en Berlín. Las contribuciones de Euler llenan cerca de 100 volúmenes grandes. Como dijo el físico francés Arago, "Euler calculaba sin esfuerzo aparente como los hombres respiran o como las águilas se sostienen en el aire". Los cálculos y escritos de Euler no disminuyeron por cuidar de sus 13 hijos ni estar totalmente ciego los últimos 17 años de su vida. De hecho, ya ciego, dictaba sus descubrimientos a sus ayudantes gracias a su prodigiosa memoria e imaginación. Sus tratados de cálculo y de casi todos los otros temas de matemáticas se convirtieron en la guía para la instrucción en matemáticas, y la ecuación $e^{i\pi} + 1 = 0$ que él descubrió reúne los cinco números más famosos de todas las matemáticas.

EJEMPLO 4 En el ejemplo 2 se examinó un circuito eléctrico simple con resistencia de 12 Ω, inductancia de 4 H y una batería con voltaje de 60 V. Si el interruptor está cerrado cuando $t = 0$, se modeló la corriente I en el tiempo t mediante el problema con valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime la corriente en el circuito medio segundo después de que se cierra el interruptor.

SOLUCIÓN Use el método de Euler con $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ y tamaño de paso $h = 0.1$ segundo:

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3 \cdot 0) = 1.5$$

$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3 \cdot 1.5) = 2.55$$

$$I_3 = 2.55 + 0.1(15 - 3 \cdot 2.55) = 3.285$$

$$I_4 = 3.285 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.285) = 3.7995$$

$$I_5 = 3.7995 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.7995) = 4.15965$$

Por lo que la corriente después de 0.5 s es

$$I(0.5) \approx 4.16 \text{ A}$$

■

9.2 EJERCICIOS

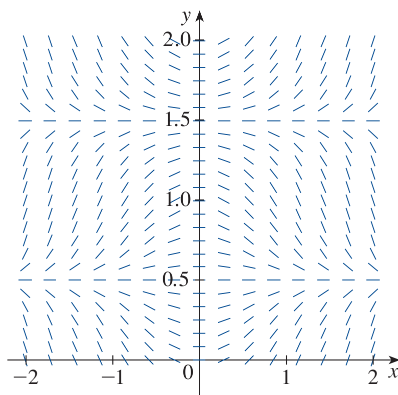
1. Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x \cos \pi y$.

(a) Trace las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(i) $y(0) = 0$ (ii) $y(0) = 0.5$

(iii) $y(0) = 1$ (iv) $y(0) = 1.6$

(b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio.



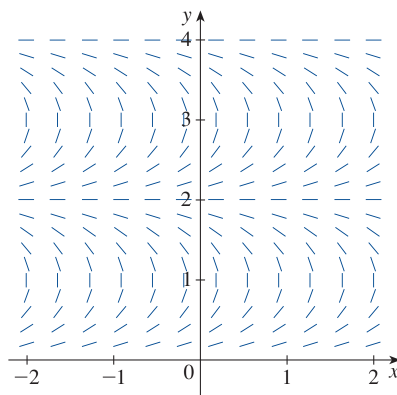
2 Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = \tan\left(\frac{1}{2}\pi y\right)$

(a) Trace las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = 0.2$

(iii) $y(0) = 2$ (iv) $y(1) = 3$

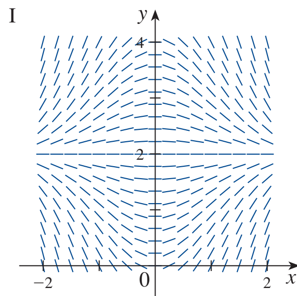
(b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio.

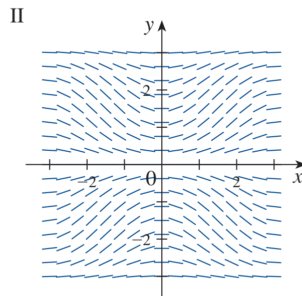


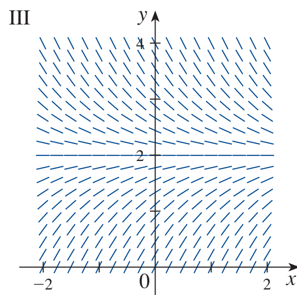
3-6 Relacione cada ecuación diferencial con su campo direccional (marcado I-IV). Dé razones para su respuesta.

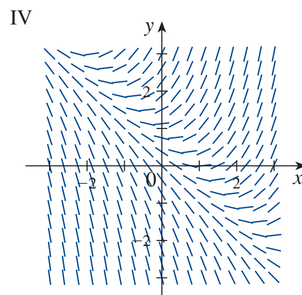
3. $y' = 2 - y$ **4.** $y' = x(2 - y)$

5. $y' = x + y - 1$ **6.** $y' = \sin x \text{ sen } y$









7. Use el campo direccional marcado con I (arriba) para trazar las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2.5$ (c) $y(0) = 3.5$

8. Utilice el campo direccional marcado con III (de arriba) para trazar las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales que se proporcionan.

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2.5$ (c) $y(0) = 3.5$

9-10 Trace un campo direccional para la ecuación diferencial. Después úselo para trazar tres curvas solución.

9. $y' = \frac{1}{2}y$ **10.** $y' = x - y + 1$

11-14 Trace el campo direccional de la ecuación diferencial. Después utilícelo para trazar una curva solución que pasa por el punto dado.

11. $y' = y - 2x$, $(1, 0)$ **12.** $y' = xy - x^2$, $(0, 1)$

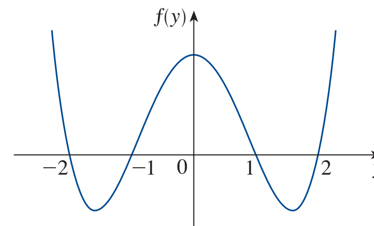
13. $y' = y + xy$, $(0, 1)$ **14.** $y' = x + y^2$, $(0, 0)$

SAC **15-16** Use un sistema algebraico computacional para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial dada. Imprímalo y trace sobre él la curva solución que pasa por (0, 1). Después use el SAC para trazar la curva solución y compárela con su trazo.

15. $y' = x^2y - \frac{1}{2}y^2$ **16.** $y' = \cos(x + y)$

SAC **17.** Use un sistema algebraico computacional para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y^3 - 4y$. Imprímalo y trace sobre él soluciones que satisfacen la condición inicial $y(0) = c$ para varios valores de c. ¿Para qué valores de c existe $\lim_{t\to\infty} y(t)$? ¿Cuáles son los posibles valores para este límite?

18. Trace una gráfica aproximada de un campo direccional para la ecuación diferencial autónoma $y' = f(y)$, donde la gráfica de f es como se muestra. ¿Cómo depende el comportamiento límite de las soluciones del valor de $y(0)$?



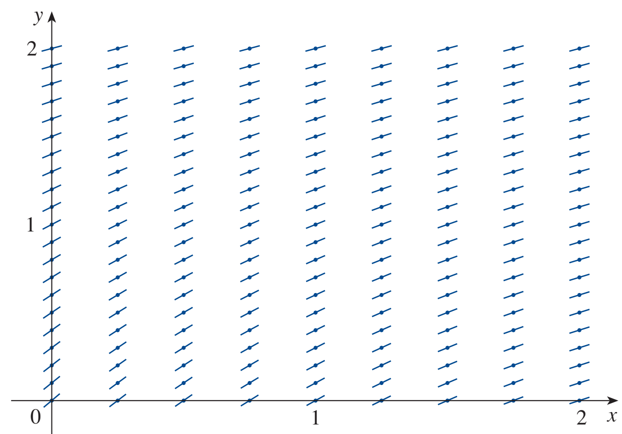
19. (a) Use el método de Euler con cada uno de los tamaños de paso para estimar el valor de $y(0.4)$, donde y es la solución del problema con valores iniciales $y' = y$, $y(0) = 1$.

(i) $h = 0.4$ (ii) $h = 0.2$ (iii) $h = 0.1$

(b) Se sabe que la solución exacta del problema con valores iniciales del inciso (a) es $y = e^x$. Trace, de la manera más exacta posible, la gráfica de $y = e^x$, $0 \leq x \leq 0.4$, junto con las aproximaciones de Euler usando el tamaño de paso del inciso (a). (Sus trazos deben parecerse a las figuras 11, 12 y 13.) Use sus trazos para decidir si sus estimaciones del inciso (a) son subestimaciones o sobreestimaciones.

(c) El error en el método de Euler es la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado. Encuentre los errores cometidos en el inciso (a) al usar el método de Euler para estimar el valor verdadero de $y(0.4)$, es decir, $e^{0.4}$. ¿Qué sucede con el tamaño del error cada vez que el tamaño de paso se reduce a la mitad?

20. Se muestra un campo direccional para una ecuación diferencial. Dibuje, con una regla, las gráficas de las aproximaciones de Euler a la curva solución que pasa por el origen. Use tamaños de paso $h = 1$ y $h = 0.5$. ¿Las estimaciones de Euler serán subestimaciones o sobreestimaciones? Explique.



21. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = 1 - xy$, $y(0) = 0$.

22. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = x^2y - \frac{1}{2}y^2$, $y(0) = 1$.

23. (a) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.
(b) Repita el inciso (a) con tamaño de paso 0.1.

24. (a) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(0.6)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = \cos(x + y)$, $y(0) = 0$.
(b) Repita el inciso (a) con tamaño de paso 0.1.

25. (a) Programe una calculadora o computadora para usar el método de Euler para calcular $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

(i) $h = 1$ (ii) $h = 0.1$
(iii) $h = 0.01$ (iv) $h = 0.001$

(b) Compruebe que $y = 2 + e^{-x^3}$ es la solución exacta de la ecuación diferencial.
(c) Encuentre los errores de usar el método de Euler para calcular $y(1)$ con los tamaños de paso del inciso (a). ¿Qué sucede con el error cuando se divide entre 10 el tamaño de paso?

SAC **26.** (a) Programe un sistema algebraico computacional, usando el método de Euler con tamaño de paso 0.01, para calcular $y(2)$, donde y es la solución del problema con valor inicial

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

(b) Compruebe su trabajo usando el SAC para dibujar la curva solución.

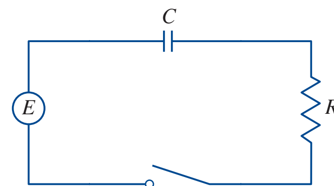
27. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con una capacitancia de C farads (F) y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs, C), por lo que en este caso la ley de Kirchhoff da

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$, por lo que se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F y la batería da un voltaje constante de 60 V.
(a) Dibuje un campo direccional para esta ecuación diferencial.
(b) ¿Cuál es el valor límite de la carga?
(c) ¿Hay una solución de equilibrio?
(d) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el campo direccional para trazar la curva solución.
(e) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar la carga después de medio segundo.



28. En el ejercicio 9.1.14 se considera una taza de café a 95 °C en una habitación a 20 °C. Suponga que sabe que el café se enfría a razón de 1 °C por minuto cuando su temperatura es de 70 °C.
(a) ¿Cuál es la ecuación diferencial en este caso?
(b) Trace un campo direccional y utilícelo para trazar la curva de solución para el problema de valor inicial. ¿Cuál es el valor límite de la temperatura?
(c) Use un método de Euler con el paso del tamaño $h = 2$ minutos para estimar la temperatura del café después de 10 minutos.

9.3 Ecuaciones separables

Se han considerado ecuaciones diferenciales de primer orden desde un punto de vista geométrico (campos direccionales) y desde un punto de vista numérico (método de Euler). ¿Qué hay acerca del punto de vista simbólico? Sería bueno tener una fórmula explícita para una solución de una ecuación diferencial. Desafortunadamente, eso no siempre es posible. Pero en esta sección se examina cierto tipo de ecuación diferencial que se *puede* resolver de manera explícita.

Una **ecuación separable** es una ecuación diferencial de primer orden en que la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x por una función de y. En otras palabras, se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

El nombre *separable* viene del hecho de que la expresión del lado derecho se puede "separar" en una función de x y una función de y.

De manera equivalente, si $f(y) \neq 0$, se podría escribir

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver esta ecuación se reescribe en la forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

La técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables fue utilizada primero por James Bernoulli (en 1690) para resolver un problema de péndulos y por Leibniz (en una carta a Huygens en 1691). John Bernoulli explicó el método general en un documento publicado en 1694.

por lo que las y están de un lado de la ecuación y las x están del otro lado. Después se integran ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

La ecuación 2 define y implícitamente como una función de x. En algunos casos se podría resolver para y en términos de x.

Se emplea la regla de la cadena para justificar este procedimiento: si h y g satisfacen (2), entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

por tanto,

$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

y

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Por lo que se satisface la ecuación 1.

EJEMPLO 1

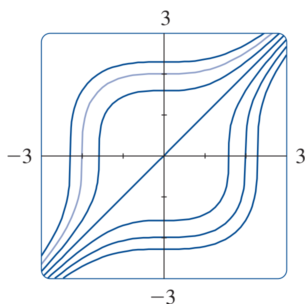
(a) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Encuentre la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN

(a) Se expresa la ecuación en términos de diferenciales y se integran ambos lados:

La figura 1 muestra las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1. La solución del problema de valor inicial del inciso (b) corresponde a la segunda curva desde la izquierda.



$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

donde C es una constante arbitraria. (Se podría haber usado una constante C_1 del lado izquierdo y otra constante C_2 del lado derecho. Pero luego se combinan estas dos constantes al escribir $C = C_2 - C_1$.)

Al despejar y, se obtiene

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Se podría dejar la solución de esta manera o se podría escribir en la forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

donde $K = 3C$. (Ya que C es una constante arbitraria, K también lo es.)

(b) Si $x = 0$ en la solución general del inciso (a), se obtiene $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 2$, se debe tener $\sqrt[3]{K} = 2$, por tanto, $K = 8$. Por lo que la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$ ■

Algunos sistemas algebraicos computacionales grafican curvas definidas por ecuaciones implícitas. En la figura 2 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2. Vistas de izquierda a derecha, los valores de C de las curvas son 3, 2, 1, 0, −1, −2 y −3.

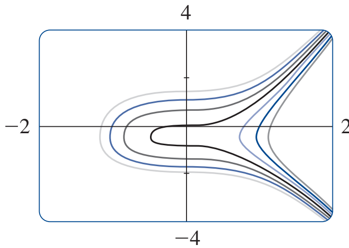


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en forma diferencial e integrar ambos lados, se tiene

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

3 $$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C$$

donde C es una constante. La ecuación 3 da la solución general en forma implícita. En este caso, es imposible resolver la ecuación para expresar y de forma explícita como una función de x. ■

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $y' = x^2 y$.

SOLUCIÓN Primero se reescribe la ecuación utilizando la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Si $y \neq 0$, se puede reescribir en forma diferencial e integrar:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Si una solución y es una función que satisface $y(x) \neq 0$ para alguna x, se deduce del teorema de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales que $y(x) \neq 0$ para toda x.

Esta ecuación define y de manera implícita como una función de x. Pero en este caso puede resolverse de forma explícita para y como sigue:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

por tanto, $$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Se verifica fácilmente que la función $y = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial dada. Así, se puede escribir la solución general en la forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

donde A es una constante arbitraria ($A = e^C$, o $A = -e^C$, o $A = 0$). ■

En la figura 3 se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial del ejemplo 3. Compárelo con la figura 4, en la que se usa la ecuación $y = Ae^{x^3/3}$ para graficar soluciones para varios valores de A. Si emplea el campo direccional para trazar curvas solución con intersecciones en y: 5, 2, 1, -1 y -2, se parecerán a las curvas de la figura 4.

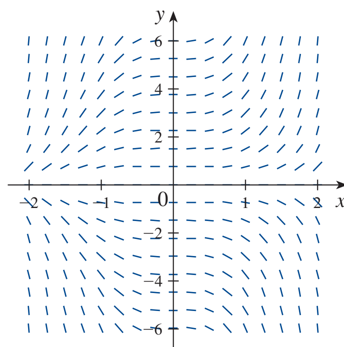


FIGURA 3

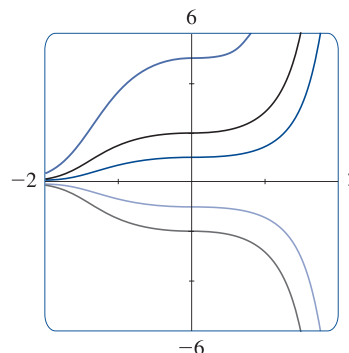


FIGURA 4

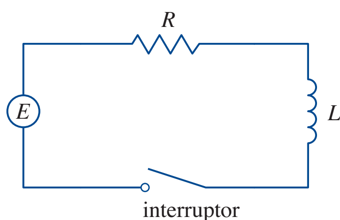


FIGURA 5

EJEMPLO 4 En la sección 9.2 se modeló la corriente $I(t)$ en el circuito eléctrico que se muestra en la figura 5 mediante la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encuentre una expresión para la corriente en un circuito donde la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H, una batería que da un voltaje constante de 60 V y el interruptor cierra el circuito en $t = 0$. ¿Cuál es el valor límite de la corriente?

SOLUCIÓN Con $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$, la ecuación se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

y el problema con valor inicial es

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Esta ecuación es de variables separables y se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3}\ln|15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t}$$

Ya que $I(0) = 0$, se tiene $5 - \frac{1}{3}A = 0$, por lo que $A = 15$ y la solución es

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

La corriente límite, en amperes, es

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$ ■

En la figura 6 se muestra cómo la solución del ejemplo 4 (la corriente) se aproxima a su valor límite. Al comparar con la figura 9.2.10 se muestra que pudo dibujarse una curva solución bastante exacta a partir del campo direccional.

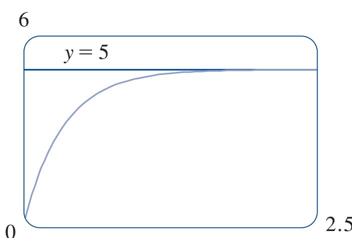


FIGURA 6

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que corta ortogonalmente cada curva de la familia, es decir, en ángulos rectos (véase la figura 7). Por ejemplo, cada miembro de la familia de rectas, $y = mx$, que pasan por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia $x^2 + y^2 = r^2$ de circunferencias concéntricas con centro en el origen (véase la figura 8). Se dice que las dos familias son trayectorias ortogonales entre sí.

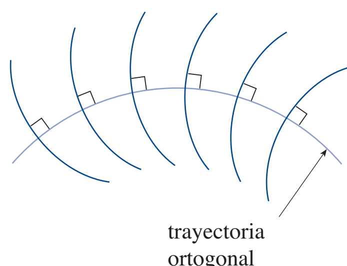


FIGURA 7

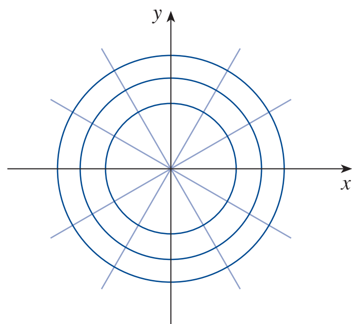


FIGURA 8

EJEMPLO 5 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = ky^2$, donde k es una constante arbitraria.

SOLUCIÓN Las curvas $x = ky^2$ forman una familia de parábolas cuyo eje de simetría es el eje x. El primer paso es encontrar una sola ecuación diferencial que sea satisfecha para todos los miembros de la familia. Se deriva $x = ky^2$, se obtiene

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Esta ecuación diferencial depende de k, pero se necesita una ecuación que sea válida para los valores de k de manera simultánea. Para eliminar k se observa que, de la ecuación general de la parábola que se proporciona $x = ky^2$, se tiene $k = x/y^2$, por tanto, la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}y} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Esto significa que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) sobre una de las parábolas es $y' = y/(2x)$. En una trayectoria ortogonal, la pendiente de la recta tangente debe ser el recíproco negativo de esta pendiente. Por tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

Esta ecuación diferencial es separable y se resuelve como sigue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

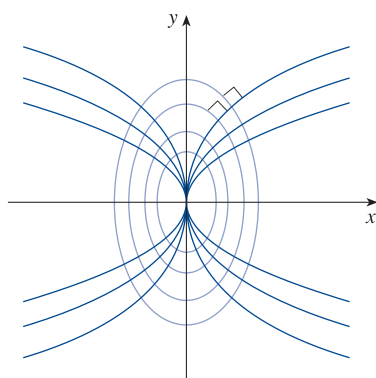


FIGURA 9

donde C es una constante positiva arbitraria. Entonces, las trayectorias ortogonales son la familia de elipses dada por la ecuación 4 y trazada en la figura 9. ■

Las trayectorias ortogonales aparecen en varias ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático, las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. También, las líneas de corriente en aerodinámica son trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales de velocidad.

Problemas de mezclas

Un problema de mezclas característico implica un tanque de capacidad fija lleno con una solución completamente homogénea de alguna sustancia, como una sal. Una solución de una determinada concentración entra al recipiente en una proporción fija, y la mezcla, totalmente agitada, sale con una proporción fija, que puede diferir de la proporción entrante. Si $y(t)$ denota la cantidad de sustancia en el recipiente en el tiempo t, entonces $y'(t)$ es la proporción a la que la sustancia está siendo añadida menos la proporción a la cual está siendo removida. La descripción matemática de esta situación suele llevar a una ecuación diferencial separable de primer orden. Se puede usar el mismo tipo de razonamiento para representar diversos fenómenos: reacciones químicas, descarga de contaminantes en un lago, inyección de un fármaco en el torrente sanguíneo.

EJEMPLO 6 Un tanque contiene 20 kg de sal disuelta en 5000 L de agua. Se introduce salmuera al tanque que contiene 0.03 kg de sal por litro de agua a razón de 25 L/min. La solución se mantiene mezclada por completo y sale del recipiente con la misma razón. ¿Cuánta sal queda en el recipiente después de media hora?

SOLUCIÓN Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos. Se tiene como dato que $y(0) = 20$ y se quiere determinar $y(30)$. Esto se hace al encontrar una ecuación diferencial que satisface $y(t)$. Observe que dy/dt es la razón de cambio de la cantidad de sal, por lo que

5 $$\frac{dy}{dt} = (\text{razón de entrada}) - (\text{razón de salida})$$

donde (razón de entrada) es la razón a la que la sal entra al recipiente y (razón de salida) es la razón a la que la sal sale del recipiente. Se tiene

$$\text{razón de entrada} = \left(0.03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0.75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

El tanque contiene siempre 5000 L de líquido, por lo que la concentración en el tiempo t es $y(t)/5000$ (medida en kilogramos por litro). Ya que la salmuera sale a razón de 25 L/min, se tiene

$$\text{razón de salida} = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

En la figura 10 se muestra la gráfica de la función $y(t)$ del ejemplo 6. Observe que, conforme pasa el tiempo, la cantidad de sal se aproxima a 150 kg.

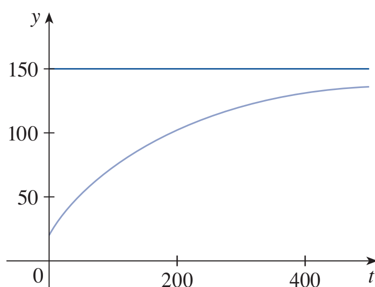


FIGURA 10

Por lo que de la ecuación 5 se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Al resolver esta ecuación diferencial separable, se obtiene

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Ya que $y(0) = 20$, se tiene $-\ln 130 = C$, por lo que

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Por tanto, $$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Ya que $y(t)$ es continua y $y(0) = 20$ y el lado derecho nunca es 0, se deduce que $150 - y(t)$ es siempre positiva. Por tanto, $|150 - y| = 150 - y$ también

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

La cantidad de sal después de 30 minutos es

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$ ■

9.3 EJERCICIOS

1–10 Resuelva la ecuación diferencial

1. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$

3. $xyy' = x^2 + 1$

4. $y' + xe^y = 0$

5. $(e^y - 1)y' = 2 + \cos x$

6. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1 + t^4}{ut^2 + u^4t^2}$

7. $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{t\sec\theta}{\theta e^{t^2}}$

8. $\dfrac{dH}{dR} = \dfrac{RH^2\sqrt{1 + R^2}}{\ln H}$

9. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

10. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y\sec\theta}$

11-18 Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial que se indica.

11. $\dfrac{dy}{dx} = xe^y, \quad y(0) = 0$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{y}, \quad y(0) = -1$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}, \quad y(0) = -3$

14. $x + 3y^2\sqrt{x^2 + 1}\,\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1$

15. $x\ln x = y\left(1 + \sqrt{3 + y^2}\right)y', \quad y(1) = 1$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$

17. $y'\tan x = a + y, \quad y(\pi/3) = a, \quad 0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dL}{dt} = kL^2\ln t, \quad L(1) = -1$

19. Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 2) y cuya pendiente en (x, y) es x/y.

20. Encuentre la función f tal que $f'(x) = xf(x) - x$ y $f(0) = 2$.

21. Resuelva la ecuación diferencial $y' = x + y$ haciendo el cambio de variable $u = x + y$.

22. Resuelva la ecuación diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$ haciendo el cambio de variable $v = y/x$.

23. (a) Resuelva la ecuación diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.
(b) Resuelva el problema con valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$, y trace la gráfica de la solución.
(c) ¿El problema con valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$, tiene una solución? Explique.

24. Resuelva la ecuación $e^{-y}y' + \cos x = 0$ y trace la gráfica de varias integrantes de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

SAC **25.** Resuelva el problema con valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, y trace la gráfica de la solución (si su SAC hace gráficas implícitas).

SAC **26.** Resuelva la ecuación $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ y trace la gráfica de varios miembros de la familia de soluciones (si su SAC hace gráficas implícitas). ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

SAC **27-28**
(a) Use un sistema algebraico computacional para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial. Imprímalo y utilícelo para trazar algunas curvas solución sin resolver la ecuación diferencial.
(b) Resuelva la ecuación diferencial.
(c) Utilice un SAC para trazar varias integrantes de la familia de soluciones obtenida en el inciso (b). Compare con las curvas del inciso (a).

27. $y' = y^2$

28. $y' = xy$

29-32 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Use un dispositivo de graficación para trazar varios miembros de cada familia en una pantalla común.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$

30. $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

31. $y = \dfrac{k}{x}$

32. $y = \dfrac{1}{x + k}$

33-35 Una **ecuación integral** es una ecuación que contiene una función desconocida $y(x)$ y una integral que implica $y(x)$. Resuelva la ecuación integral dada. [*Sugerencia*: utilice una condición inicial obtenida de la ecuación integral.]

33. $y(x) = 2 + \int_2^x [t - ty(t)]\,dt$

34. $y(x) = 2 + \int_1^x \dfrac{dt}{ty(t)}, \quad x > 0$

35. $y(x) = 4 + \int_0^x 2t\sqrt{y(t)}\,dt$

36. Encuentre una ecuación f tal que $f(3) = 2$ y

$$(t^2 + 1)f'(t) + [f(t)]^2 + 1 = 0 \qquad t \neq 1$$

[*Sugerencia*: utilice la fórmula de la adición para $\tan(x + y)$ en la página de referencia 2.]

37. Resuelva el problema con valor inicial del ejercicio 9.2.27 para encontrar una expresión para la carga en el tiempo t. Encuentre el valor límite de la carga.

38. En el ejercicio 9.2.28, se analizó una ecuación diferencial que modela la temperatura de una taza de café a 95 °C en una habitación a 20 °C. Resuelva la ecuación diferencial, para encontrar una expresión para la temperatura del café en el tiempo t.

39. En el ejercicio 9.1.15 se formuló un modelo para el aprendizaje en la forma de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

donde $P(t)$ mide el desempeño de alguien que aprende una habilidad después de un tiempo de entrenamiento t, M es el nivel máximo de desempeño y k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial para encontrar una expresión para $P(t)$. ¿Cuál es el límite de esta expresión?

40. En una reacción química elemental, las moléculas simples de dos reactivos A y B forman una molécula del producto C: $A + B \longrightarrow C$. La ley de acción de masas establece que la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B:

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]$$

(Véase el ejemplo 3.7.4) por lo que, si las concentraciones iniciales son $[A] = a$ moles/L y $[B] = b$ moles/L y se escribe $x = [C]$, entonces se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

(a) Suponiendo que $a \neq b$, determine x como una función de t. Use el hecho de que la concentración inicial de C es 0.
(b) Determine $x(t)$ suponiendo que $a = b$. ¿Cómo se simplifica esta expresión para $x(t)$ si se sabe que $[C] = \frac{1}{2}a$ después de 20 segundos?

41. En contraste con la situación del ejercicio 40, los experimentos muestran que la reacción $H_2 + Br_2 \longrightarrow 2HBr$ satisface la ley de rapidez

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H_2][Br_2]^{1/2}$$

y, de este modo, para esta reacción la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

donde $x = [HBr]$ y a y b son las concentraciones iniciales de hidrógeno y bromo.
(a) Determine x como una función de t en el caso donde $a = b$. Use el hecho de que $x(0) = 0$.
(b) Si $a > b$, encuentre t como una función de x. [*Sugerencia*: realizar la integración, haga la sustitución $u = \sqrt{b - x}$.]

42. Una esfera con radio 1 m tiene temperatura 15 °C. Está dentro de una esfera concéntrica con radio 2 m y temperatura 25 °C. La temperatura $T(r)$ a una distancia r desde el centro común de las esferas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Si hace que $S = dT/dr$, entonces S satisface una ecuación diferencial de primer orden. Resuélvala para encontrar una expresión para la temperatura $T(r)$ entre las esferas.

43. Se administra una solución de glucosa por vía intravenosa en el torrente sanguíneo con una rapidez constante r. Conforme se añade la glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina del torrente sanguíneo con una rapidez que es proporcional a la concentración en ese momento. De esta manera, un modelo para la concentración $C = C(t)$ de la solución de glucosa en el torrente sanguíneo es

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

donde k es una constante positiva.
(a) Suponga que la concentración en el tiempo $t = 0$ es C_0. Determine la concentración en cualquier tiempo t resolviendo la ecuación diferencial.
(b) Suponiendo que $C_0 < r/k$, encuentre $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete su respuesta.

44. Cierto país pequeño tiene 10 mil millones de dólares en papel moneda en circulación, y cada día entran a los bancos del país 50 millones. El gobierno decide introducir una nueva moneda y pide a los bancos que reemplacen los billetes viejos por los nuevos, siempre que la moneda antigua llegue a los bancos. Sea $x = x(t)$ la cantidad de la nueva moneda en circulación en el tiempo t, con $x(0) = 0$.
(a) Formule un modelo matemático en la forma de un problema con valor inicial que represente el "flujo" de la nueva moneda en circulación.
(b) Resuelva el problema con valor inicial encontrado en el inciso (a).
(c) ¿En cuánto tiempo los nuevos billetes representan 90% de la moneda en circulación?

45. Un tanque contiene 1000 L de salmuera con 15 kg de sal disuelta. El agua pura entra al tanque a razón de 10 L/min.

La solución se mantiene completamente mezclada y sale con la misma razón. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de 20 minutos?

46. El aire en una habitación con 180 m^3 de volumen contiene inicialmente 0.15% de dióxido de carbono. Aire fresco con únicamente 0.05% de dióxido de carbono circula hacia adentro de la habitación a razón de 2 m^3/min y el aire mezclado circula hacia fuera en la misma proporción. Encuentre el porcentaje de dióxido de carbono en la habitación como una función del tiempo. ¿Qué sucede en períodos prolongados?

47. Un tanque con 2000 L de cerveza contiene 4% de alcohol (en volumen). Se bombea cerveza con 6% de alcohol hacia adentro del tanque a razón de 20 L/min y la mezcla se bombea hacia afuera en la misma proporción. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol después de una hora?

48. Un tanque contiene 1000 L de agua pura. La salmuera que contiene 0.05 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 5 L/min. La salmuera que contiene 0.04 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 10 L/min. La solución se mantiene totalmente mezclada y sale del tanque a razón de 15 L/min. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de una hora?

49. Cuando cae una gota de lluvia, aumenta de tamaño y, por tanto, su masa en tiempo t es una función de t, $m(t)$. La rapidez de crecimiento de la masa es $km(t)$ para alguna constante positiva k. Cuando se aplica la ley de Newton del movimiento a la gota de lluvia, se obtiene $(mv)' = gm$, donde v es la velocidad de la gota (con dirección hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad. La *velocidad terminal* de la gota de lluvia es $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encuentre una expresión para la velocidad terminal de g y k.

50. Un objeto de masa m se mueve horizontalmente a través de un medio que resiste el movimiento con una fuerza que es una función de la velocidad; es decir,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

donde $v = v(t)$ y $s = s(t)$ representan la velocidad y la posición del objeto en el tiempo t, respectivamente. Por ejemplo, considere un bote que se mueve en el agua.

(a) Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, es decir, $f(v) = -kv$, k es una constante positiva. (Este modelo es apropiado para valores pequeños de v.) Sean $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$ los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que recorre el objeto desde el tiempo $t = 0$?

(b) Para valores más grandes de v un mejor modelo se obtiene suponiendo que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Newton fue el primero en proponer este modelo.) Sean v_0 y s_0 los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que viaja el objeto en este caso?

51. *Crecimiento alométrico* en biología se refiere a las relaciones entre tamaños de partes de un organismo (longitud del cráneo y longitud del cuerpo, por ejemplo). Si $L_1(t)$ y $L_2(t)$ son los tamaños de dos órganos en un organismo de edad t, entonces L_1 y L_2 satisfacen la ley alómera si sus tasas de crecimiento específicas son proporcionales:

$$\frac{1}{L_1}\frac{dL_1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt}$$

donde k es una constante.

(a) Utilice la ley de alometría para describir una ecuación diferencial que relacione L_1 y L_2 y resuélvala para expresar L_1 como función de L_2.

(b) En un estudio de varias especies de algas unicelulares, la constante de proporcionalidad de la ley de alometría que relaciona B (biomasa celular) y V (volumen celular) se encontró que es $k = 0.0794$. Exprese B como función de V.

52. Un modelo para el crecimiento del tumor está dado por la ecuación de Gompertz

$$\frac{dV}{dt} = a(\ln b - \ln V)V$$

donde a y b son constantes positivas y V es el volumen del tumor medido en mm^3.

(a) Encuentre una familia de soluciones para el volumen del tumor en función del tiempo.

(b) Encuentre la solución que tiene un volumen inicial de tumor de $V(0) = 1$ mm^3.

53. Sea $A(t)$ el área de un cultivo de tejido en el tiempo t y sea M el área final del tejido cuando se completa el crecimiento. La mayor parte de las divisiones celulares ocurren en la periferia del tejido y el número de células de la periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Así, un modelo razonable para el crecimiento del tejido se obtiene suponiendo que la rapidez de crecimiento del área es proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$.

(a) Formule una ecuación diferencial y empléela para demostrar que el tejido crece más rápido cuando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

SAC (b) Resuelva la ecuación diferencial para encontrar una expresión para $A(t)$. Use un sistema algebraico computacional para llevar a cabo la integración.

54. De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m que ha sido proyectado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre es

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

donde $x = x(t)$ es la distancia del objeto arriba de la superficie en el tiempo t, R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad. Asimismo, por la segunda ley de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$ y, por tanto

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

(a) Suponga que un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Sea h la altura máxima sobre la superficie alcanzada por el objeto. Demuestre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Sugerencia*: por la regla de la cadena, $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$.]

(b) Calcule $v_e = \lim_{h \to \infty} v_0$. Este límite se llama *velocidad de escape* para la Tierra.

(c) Use $R = 6370$ km y $g = 9.8$ m/s^2 para calcular v_e en kilómetros por segundo.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿QUÉ TAN RÁPIDO SE VACÍA UN TANQUE?

Si el agua (u otro líquido) drena de un tanque, se espera que el flujo sea mayor al principio (cuando la profundidad del agua es máxima) y disminuya poco a poco conforme disminuye el nivel del agua. Pero se necesita una descripción matemática más precisa de cómo disminuye el flujo, para contestar el tipo de preguntas que hacen los ingenieros: ¿en cuánto tiempo se drena por completo un tanque? ¿Cuánta agua debe contener un tanque para garantizar cierta presión de agua mínima para un sistema de aspersión?

Sean $h(t)$ y $V(t)$ la altura y el volumen de agua en el tanque en el tiempo t, respectivamente. Si el agua sale por un orificio con área a en el fondo del tanque, entonces la ley de Torricelli dice que

1 $$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Así, la rapidez a la cual fluye el agua desde el tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del agua.

1. (a) Suponga que el tanque es cilíndrico con altura de 2 m y radio 1 m, y el orificio es circular con radio de 2 cm. Si se toma $g = 10$ m/s^2, demuestre que h satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -0.0004\sqrt{20h}$$

(b) Resuelva esta ecuación para encontrar la altura del agua en el tiempo t, bajo el supuesto de que el tanque está lleno en el tiempo $t = 0$.

(c) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

El problema 2(b) se realiza mejor como una demostración de salón de clases o como un proyecto de grupo con tres alumnos en cada grupo: un cronometrador que indique los segundos, una persona a cargo de la altura cada 10 segundos y alguien que registre estos valores.



© Richard Le Borne, Dept. Mathematics, Tennessee Technological University

2. Como resultado de la rotación y viscosidad del líquido, el modelo teórico dado por la ecuación 1 no es bastante exacto. En cambio, el modelo

2 $$\frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

se emplea con más frecuencia y la constante k (que depende de las propiedades físicas del líquido) se determina de los datos relacionados con el drenado del tanque.

(a) Suponga que hace un orificio en el costado de una botella cilíndrica y la altura h del agua (arriba del orificio) disminuye de 10 cm a 3 cm en 68 segundos. Use la ecuación 2 a fin de encontrar una expresión para $h(t)$. Evalúe $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$.

(b) Haga un orificio de 4 mm cerca del fondo de la parte cilíndrica de una botella de plástico de bebida gaseosa de dos litros. Adhiera una tira de cinta adhesiva marcada en centímetros de 0 a 10, con 0 que corresponde a la parte superior del orificio. Con un dedo sobre el orificio, llene la botella con agua hasta la marca de 10 cm. Luego quite su dedo del orificio y registre los valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Es probable que encuentre que transcurren 68 segundos para que el nivel disminuya a $h = 3$ cm.) Compare sus datos con los valores de $h(t)$ del inciso (a). ¿Qué tan bien predice el modelo los valores reales?

3. En muchas partes del mundo, el agua para los sistemas de aspersión en grandes hoteles y hospitales se suministra por gravedad desde tanques cilíndricos en o cerca de los techos de los edificios. Suponga que un tanque de este tipo tiene radio de 3 m y que el diámetro de la salida

es de 6 cm. Un ingeniero tiene que garantizar que la presión del agua será por lo menos 104 kPa por un período de 10 minutos. (Cuando ocurre un incendio, el sistema eléctrico podría fallar y podría tomar hasta 10 minutos la activación del generador de emergencia y la bomba de agua.) ¿Qué altura debe especificar el ingeniero para el tanque, para que se garantice esa presión? (Use el hecho de que la presión del agua a una profundidad de d metros es $P = 10d$ kilopascales. Véase la sección 8.3.)

4. No todos los tanques de agua tienen forma cilíndrica. Suponga que un tanque tiene área de sección transversal $A(h)$ a la altura h. Entonces el volumen del agua hasta la altura h es $V = \int_0^h A(u)\, du$, por tanto, el teorema fundamental del cálculo da $dV/dh = A(h)$. Se deduce que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}$$

y, por consiguiente, la ley de Torricelli se convierte en

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) Suponga que el tanque tiene la forma de una esfera con radio 2 m y al principio está lleno con agua hasta la mitad. Si el radio del orificio circular es 1 cm y se toma $g = 10\ \text{m/s}^2$, demuestre que h satisface la ecuación diferencial

$$(4h - h^2)\frac{dh}{dt} = -0.0001\sqrt{20h}$$

(b) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿QUÉ ES MÁS RÁPIDO, SUBIR O BAJAR?

Suponga que lanza una bola al aire. ¿Considera que tarda más en alcanzar su altura máxima o en regresar al suelo desde su altura máxima? En este proyecto se resolverá este problema, pero, antes de empezar, piense en esa situación y haga una inferencia con base en su intuición física.

1. Una bola con masa m se lanza hacia arriba verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial positiva v_0. Se supone que las fuerzas que actúan sobre la bola son la fuerza de gravedad y una fuerza retardadora por la resistencia del aire con dirección opuesta a la dirección del movimiento y con magnitud $p\,|v(t)|$, donde p es una constante positiva y $v(t)$ es la velocidad de la bola en el tiempo t. Tanto en el ascenso como en el descenso, la fuerza total que actúa sobre la bola es $-pv - mg$. [Durante el ascenso, $v(t)$ es positiva y la resistencia actúa hacia abajo; durante el descenso, $v(t)$ es negativa y la resistencia actúa hacia arriba.] Así, por la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$mv' = -pv - mg$$

Resuelva esta ecuación diferencial para demostrar que la velocidad es

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

2. Demuestre que la altura de la bola, hasta que choca con el suelo, es

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-pt/m}) - \frac{mgt}{p}$$

Al modelar la fuerza debida a la resistencia del aire, se han empleado varias funciones, dependiendo de las características físicas y la rapidez de la bola. Aquí se usa un modelo lineal, $-pv$, pero un modelo cuadrático ($-pv^2$ en el camino ascendente y pv^2 en el camino descendente) es otra posibilidad para magnitudes de velocidades más altas (véase el ejercicio 9.3.50). Para una pelota de golf, los experimentos han mostrado que un buen modelo es $-pv^{1.3}$ hacia arriba y $p\,|v|^{1.3}$ hacia abajo. Pero no importa qué función fuerza $-f(v)$ se utilice [donde $f(v) > 0$ para $v > 0$ y $f(v) < 0$ para $v < 0$], la respuesta a la pregunta es la misma. Véase F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually," *American Mathematical Monthly* 108 (2001), pp. 437−440.

3. Sea t_1 el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima. Demuestre que

$$t_1 = \frac{m}{p} \ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Determine este tiempo para una bola con masa 1 kg y velocidad inicial 20 m/s. Suponga que la resistencia de aire es $\frac{1}{10}$ de la rapidez.

4. Sea t_2 el tiempo que la bola cae de regreso a la Tierra. Para la bola particular del problema 3, estime t_2 por medio de una gráfica de la función altura $y(t)$. ¿Qué es más rápido, subir o bajar?

5. En general, no es fácil determinar t_2 porque es imposible resolver la ecuación $y(t) = 0$ en forma explícita. Sin embargo, se puede usar un método indirecto para determinar si el ascenso o el descenso es más rápido: se determina si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. Demuestre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2 \ln x\right)$$

donde $x = e^{pt_1/m}$. Entonces demuestre que $x > 1$ y la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

es creciente para $x > 1$. Use este resultado para decidir si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. ¿Qué se puede concluir? ¿Es más rápido el ascenso o el descenso?

9.4 Modelos para el crecimiento poblacional

En esta sección se estudian ecuaciones diferenciales que se aplican para modelar el crecimiento de población: la ley de crecimiento natural, la ecuación logística y otras.

Ley de crecimiento natural

Uno de los modelos para el crecimiento poblacional considerado en la sección 9.1 se basó en la suposición de que la población crece a una tasa proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

¿Es esa una suposición razonable? Suponga que se tiene una población (de bacterias, por ejemplo) con tamaño $P = 1000$ y en determinado momento crece con una rapidez de $P' = 300$ bacterias por hora. Ahora se toman otras 1000 bacterias del mismo tipo y se colocan en la primera población. Cada mitad de la nueva población creció en una proporción de 300 bacterias por hora. Se esperaría que la población total de 2000 se incrementara a una tasa de 600 bacterias por hora inicialmente (siempre que haya espacio suficiente y nutrición). De este modo, si se duplica el tamaño, se duplica la proporción de crecimiento. Parece razonable que la rapidez de crecimiento deba ser proporcional al tamaño.

En general, si $P(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la rapidez de cambio de P con respecto a t es proporcional a su tamaño $P(t)$ en cualquier momento, entonces

1 $$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es una constante. La ecuación 1 se llama a veces **ley de crecimiento natural.** Si k es positiva, entonces se incrementa la población; si k es negativa, decrece.

Debido a que es una ecuación diferencial separable se puede resolver por los métodos de la sección 9.3:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

donde A $(= \pm e^C$ o $0)$ es una constante arbitraria. Para ver el significado de la constante A, se observa que

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Por tanto A es el valor inicial de la función.

Los ejemplos y ejercicios de la aplicación de 2 se proporcionan en la sección 3.8.

2 La solución del problema con valor inicial es

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

es

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Otra manera de escribir la ecuación 1 es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

la cual dice que la **rapidez de crecimiento relativo** (rapidez de crecimiento dividida por el tamaño de la población) es constante. Por tanto, (2) dice que una población con crecimiento relativo constante debe crecer de forma exponencial.

Se puede considerar emigración (o "pérdidas") de una población modificando la ecuación 1; si la rapidez de emigración es una constante m, entonces la rapidez de cambio de la población se representa mediante la ecuación diferencial

3 $$\frac{dP}{dt} = kP - m$$

Vea el ejercicio 17 para la solución y las consecuencias de la ecuación 3.

Modelo logístico

Como se explicó en la sección 9.1, una población suele incrementarse de forma exponencial en sus primeras etapas, pero se estabiliza finalmente y tiende a su capacidad de carga debido a los recursos limitados. Si $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, se supone que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{si } P \text{ es pequeña}$$

Esto dice que la rapidez de crecimiento inicial está muy cerca de ser proporcional al tamaño. En otras palabras, la rapidez de crecimiento relativa es casi constante cuando la población es pequeña. Pero también se quiere reflejar el hecho de que la rapidez de crecimiento relativa disminuye cuando se incrementa la población P y se vuelve negativa si P excede alguna vez su **capacidad de carga** M, la población máxima que el ambiente es capaz de sostener a la larga. La expresión más simple para la rapidez de crecimiento relativa que incorpora estas suposiciones es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Al multiplicar por P, se obtiene el modelo para el crecimiento poblacional conocido como **ecuación diferencial logística**

4
$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Observe de la ecuación 4 que si P es pequeña en comparación con M, entonces P/M es cercano a 0 y, por tanto, $dP/dt \approx kP$. Sin embargo, si $P \to M$ (la población se aproxima a su capacidad de carga), entonces $P/M \to 1$, por lo que $dP/dt \to 0$. Se puede deducir información acerca de si las soluciones se incrementan o disminuyen directamente de la ecuación 4. Si la población P está entre 0 y M, entonces el lado derecho de la ecuación es positivo, por lo que $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si la población excede la capacidad de carga ($P > M$), entonces $1 - P/M$ es negativa, por lo que $dP/dt < 0$ y la población decrece.

Inicie el análisis más detallado de la ecuación diferencial logística considerando un campo direccional.

EJEMPLO 1 Dibuje un campo direccional para la ecuación logística con $k = 0.08$ y capacidad de carga $M = 1000$. ¿Qué se puede deducir acerca de las soluciones?

SOLUCIÓN En este caso la ecuación diferencial logística es

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

Un campo direccional para esta ecuación se muestra en la figura 1. Se muestra solo el primer cuadrante porque las poblaciones negativas no son significativas y se tiene interés solo en lo que sucede después de $t = 0$.

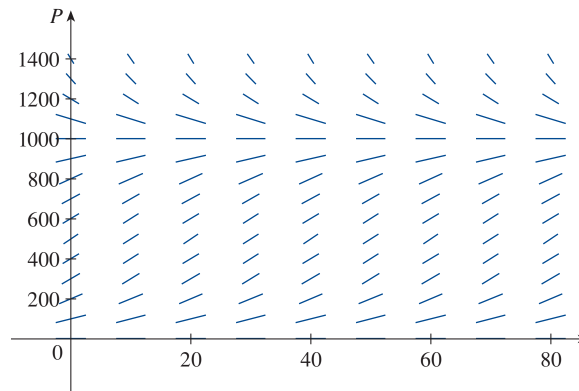


FIGURA 1
Campo direccional para la ecuación logística del ejemplo 1

La ecuación logística es autónoma (dP/dt depende solo de P, no de t), por lo que las pendientes son las mismas a lo largo de cualquier recta horizontal. Como se esperaba, las pendientes son positivas para $0 < P < 1000$ y negativas para $P > 1000$.

Las pendientes son pequeñas cuando P se aproxima a 0 o 1000 (la capacidad de carga). Observe que las soluciones se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = 1000$.

En la figura 2 se usa el campo direccional para trazar curvas solución con poblaciones iniciales $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ y $P(0) = 1300$. Observe que las curvas solución que empiezan abajo de $P = 1000$ son crecientes y las que empiezan arriba de $P = 1000$ son decrecientes. Las pendientes son mayores cuando $P \approx 500$ y, en consecuencia, las curvas solución abajo de $P = 1000$ tienen puntos de inflexión cuando $P \approx 500$. De hecho, se puede probar que las curvas solución que empiezan abajo de $P = 500$ tienen un punto de inflexión cuando P es exactamente 500 (véase el ejercicio 13).

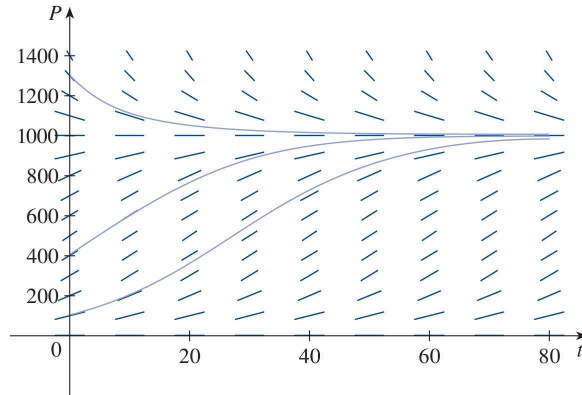


FIGURA 2
Curvas solución para la ecuación logística del ejemplo 1

■

La ecuación logística (4) es separable y, por tanto, se puede resolver de manera explícita con el método de la sección 9.3. Ya que

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

se tiene

5 $$\int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k\, dt$$

Para evaluar la integral del lado izquierdo, escriba

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

Usando fracciones parciales (véase la sección 7.4), obtenga

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$

Esto permite reescribir la ecuación 5:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}\right) dP = \int k\, dt$$

$$\ln|P| - \ln|M - P| = kt + C$$

$$\ln\left|\frac{M-P}{P}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{M-P}{P}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

6
$$\frac{M-P}{P} = Ae^{-kt}$$

donde $A = \pm e^{-C}$. Si la ecuación 6 se resuelve para P, se obtiene

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

por tanto,
$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Se encuentra el valor de A sustituyendo $t = 0$ en la ecuación 6. Si $t = 0$, entonces $P = P_0$ (la población inicial), por tanto,

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Así, la solución para la ecuación logística es

7
$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \qquad \text{donde } A = \frac{M - P_0}{P_0}$$

Al usar la expresión para $P(t)$ en la ecuación 7, se ve que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = M$$

lo cual era de esperarse.

EJEMPLO 2 Escriba la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y utilícela para encontrar los tamaños de población $P(40)$ y $P(80)$. ¿En qué momento la población llega a 900?

SOLUCIÓN La ecuación diferencial es una ecuación logística con $k = 0.08$, capacidad de carga $M = 1000$, y población inicial $P_0 = 100$. Por tanto, la ecuación 7 da la población en el tiempo t cuando

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-0.08t}} \qquad \text{donde } A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$$

Por lo que,
$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

Por consiguiente, los tamaños de población cuando $t = 40$ y 80 son

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-3.2}} \approx 731.6 \qquad P(80) = \frac{1000}{1 + 9e^{-6.4}} \approx 985.3$$

La población llega a 900 cuando

$$\frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900$$

Compare la curva solución en la figura 3 con la curva solución inferior que se trazó a partir del campo direccional en la figura 2.

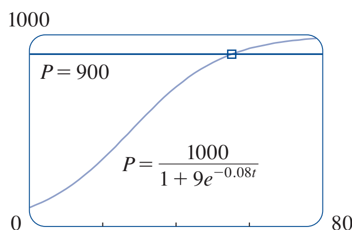


FIGURA 3

Resolviendo esta ecuación para t, se obtiene

$$1 + 9e^{-0.08t} = \tfrac{10}{9}$$

$$e^{-0.08t} = \tfrac{1}{81}$$

$$-0.08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0.08} \approx 54.9$$

Por lo que la población llega a 900 cuando t es aproximadamente 55. Como comprobación del trabajo, se traza la gráfica de la curva de población en la figura 3 y se observa que cruza la recta $P = 900$. El cursor indica que $t \approx 55$. ■

Comparación del crecimiento natural y modelos logísticos

En la década de 1930, el biólogo G. F. Gause realizó un experimento con el protozoario paramecio y empleó una ecuación logística para representar sus datos. En la tabla se da la cuenta diaria de la población de protozoarios. Estimó la rapidez de crecimiento relativo inicial como 0.7944 y la capacidad de carga de 64.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

EJEMPLO 3 Encuentre los modelos exponencial y logístico para los datos de Gause. Compare los valores predichos con los valores observados y comente acerca del ajuste.

SOLUCIÓN Dada la rapidez de crecimiento relativo $k = 0.7944$ y la población inicial $P_0 = 2$, el modelo exponencial es

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0.7944t}$$

Gause empleó el mismo valor de k para su modelo logístico. [Esto es razonable porque $P_0 = 2$ es pequeña comparada con la capacidad de carga ($M = 64$). La ecuación

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

muestra que el valor de k para la ecuación logística es muy cercano al valor para el modelo exponencial.]

Entonces la solución de la ecuación logística en la ecuación 7 da

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0.7944t}}$$

donde $$A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Por consiguiente $$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

Estas ecuaciones se emplean para calcular los valores predichos (redondeados hasta el entero más próximo) y se comparan en la tabla.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	…										

Se observa de la tabla y la gráfica de la figura 4 que para los primeros tres o cuatro días el modelo exponencial da resultados comparables a los del modelo logístico, que es más complejo. Sin embargo, para $t \geqslant 5$, el modelo exponencial es inexacto, pero el modelo logístico ajusta las observaciones razonablemente bien.

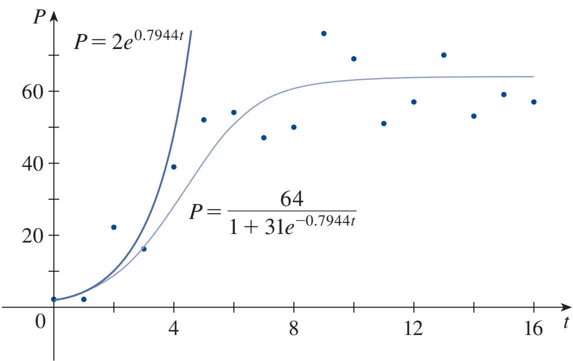


FIGURA 4
Modelos exponencial y logístico para los datos de paramecio

■

Varios países que antes experimentaron crecimiento exponencial ahora están encontrando que su rapidez de crecimiento poblacional está declinando y el modelo logístico proporciona un mejor modelo. La tabla al margen muestra valores semestrales de $B(t)$, la población de Bélgica, en miles, al tiempo t, desde 1980 hasta 2012. La figura 5 muestra estos puntos de información junto con una función logística desplazada que se obtiene de una calculadora con la capacidad de ajustar una función logística a estos puntos mediante regresión. Vea que el modelo logístico proporciona un muy buen ajuste.

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9 847	1998	10 217
1982	9 856	2000	10 264
1984	9 855	2002	10 312
1986	9 862	2004	10 348
1988	9 884	2006	10 379
1990	9 969	2008	10 404
1992	10 046	2010	10 423
1994	10 123	2012	10 438
1996	10 179		

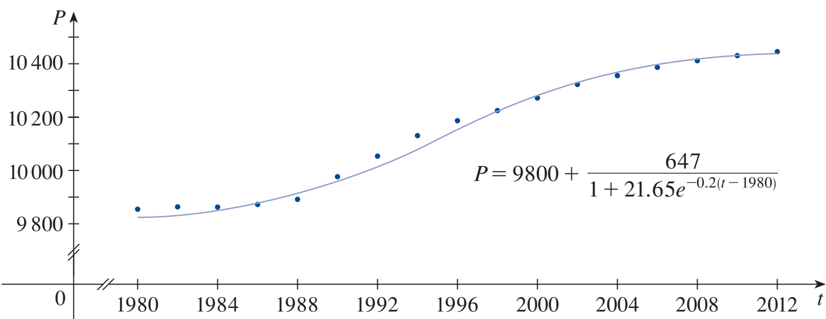


FIGURA 5
Modelo logístico para la población de Bélgica

Otros modelos para el crecimiento poblacional

La ley de crecimiento natural y la ecuación diferencial logística no son las únicas ecuaciones que han sido propuestas para modelar el crecimiento poblacional. En el ejercicio 22 se trabaja con la función de crecimiento de Gompertz y en los ejercicios 23 y 24 se investigan modelos de crecimiento estacionales.

Dos de los otros modelos son modificaciones del modelo logístico. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

se ha empleado para modelar poblaciones que están sujetas a la "pérdida" de un tipo u otro. (Piense en una población de peces capturados en una proporción constante.) Esta ecuación se conoce como ecuación logística con cosecha o con recolección, y se explora en los ejercicios 19 y 20.

Para algunas especies hay un nivel mínimo de población m debajo del cual la especie tiende a extinguirse. (Es posible que los adultos no encuentren parejas adecuadas.) Esta clase de poblaciones ha sido representada mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

donde el factor extra, $1 - m/P$, toma en cuenta las consecuencias de una población escasa (véase el ejercicio 21).

9.4 EJERCICIOS

1-2 Suponga que una población crece de acuerdo con la ecuación logística dada, donde t se mide en semanas.

(a) ¿Cuál es la capacidad de carga? ¿Cuál es el valor de k?
(b) Escriba la solución de la ecuación.
(c) ¿Cuál es la población después de 10 semanas?

1. $\frac{dP}{dt} = 0.04P\left(1 - \frac{P}{1200}\right), \quad P(0) = 60$

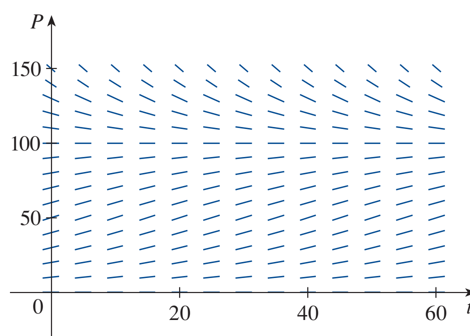
2. $\frac{dP}{dt} = 0.02P - 0.0004P^2, \quad P(0) = 40$

3. Suponga que una población se desarrolla de acuerdo con la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 0.0005P^2$$

donde t se mide en semanas.

(a) ¿Cuál es la capacidad de carga? ¿Cuál es el valor de k?
(b) Se muestra un campo direccional para esta ecuación. ¿Dónde las pendientes son cercanas a 0? ¿Dónde son mayores? ¿Qué soluciones son crecientes? ¿Cuáles soluciones son decrecientes?



(c) Use el campo direccional para trazar las soluciones para poblaciones iniciales de 20, 40, 60, 80, 120 y 140.¿Qué tienen en común estas soluciones? ¿Cómo difieren? ¿Qué soluciones tienen puntos de inflexión? ¿En qué niveles de población se presentan?
(d) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? ¿Cómo se relacionan estas soluciones con las otras?

4. Suponga que una población crece de acuerdo con un modelo logístico con capacidad de carga de 6000 y $k = 0.0015$ por año.

(a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos.

(b) Dibuje un campo direccional (ya sea a mano o con un sistema algebraico computacional). ¿Qué le dice acerca de las curvas solución?
(c) Use el campo direccional para trazar las curvas solución para las poblaciones iniciales de 1000, 2000, 4000 y 8000. ¿Qué se puede decir acerca de la concavidad de estas curvas? ¿Cuál es la importancia de los puntos de inflexión?
(d) Programe una calculadora o computadora para usar el método de Euler con tamaño de paso $h = 1$ para estimar la población después de 50 años si la población inicial es 1000.
(e) Si la población inicial es 1000, escriba una fórmula para la población después de t años. Úsela para determinar la población después de 50 años y compárela con su estimación en el inciso (d).
(f) Trace la gráfica de la solución del inciso (e) y compare con la curva solución que trazó en el inciso (c).

5. La pesca del mero del Pacífico ha sido modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

donde $y(t)$ es la biomasa (la masa total de los integrantes de la población) en kilogramos en el tiempo t (medido en años), la capacidad de carga se estima como $M = 8 \times 10^7$ kg, y $k = 0.71$ por año.
(a) Si $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, calcule la biomasa un año después.
(b) ¿En cuánto tiempo la biomasa alcanza 4×10^7 kg?

6. Suponga una población $P(t)$ que satisface

$$\frac{dP}{dt} = 0.4P - 0.001P^2 \qquad P(0) = 50$$

donde t se mide en años.
(a) ¿Cuál es la capacidad de carga?
(b) ¿Qué es $P'(0)$?
(c) ¿Cuándo alcanzará la población el 50% de su capacidad de carga?

7. Suponga que una población crece de acuerdo con un modelo logístico con población inicial de 1000 y capacidad de carga de 10 000. Si la población crece a 2500 después de un año, ¿cuál será la población después de otros tres años?

8. En la tabla se da el número de células de levadura en un nuevo cultivo de laboratorio.

Tiempo (horas)	Células de levadura	Tiempo (horas)	Células de levadura
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

(a) Trace la gráfica de los datos y use la gráfica para estimar la capacidad de carga para la población de levadura.
(b) Use los datos para estimar la tasa de crecimiento relativo inicial.
(c) Encuentre un modelo exponencial y un modelo logístico para estos datos.
(d) Compare los valores predichos con los valores observados, en una tabla y con gráficas. Comente acerca de qué tan bien ajustan sus modelos los datos.
(e) Use el modelo logístico para estimar el número de células de levadura después de 7 horas.

9. La población del mundo fue cercana a 6.1 miles de millones en 2000. La tasa de nacimientos varió de 35 a 40 millones por año y la frecuencia de mortalidad varió de 15 a 20 millones por año. Suponga que la capacidad de carga para la población mundial es 20 mil millones.
(a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos. (Debido a que la población inicial es pequeña comparada con la capacidad de carga, se puede tomar k como una estimación de la rapidez de crecimiento relativo inicial.)
(b) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en el año 2010, y compare con la población real de 6.9 mil millones.
(c) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en los años 2100 y 2500.

10. (a) Suponga que la capacidad de carga para la población de Estados Unidos es de 800 millones. Utilícela junto con el hecho de que la población fue de 282 millones en 2000, para formular un modelo logístico para la población de Estados Unidos.
(b) Determine el valor de k en su modelo usando el hecho de que la población en el año 2010 fue de 309 millones.
(c) Use su modelo para predecir la población de Estados Unidos en los años 2100 y 2200.
(d) Por medio de su modelo, prediga el año en que la población de Estados Unidos pasará de 500 millones.

11. Un modelo para la difusión de un rumor, es que la rapidez de difusión es proporcional al producto de la fracción y de la población que ha escuchado el rumor y la fracción que no lo ha escuchado.
(a) Escriba una ecuación diferencial que sea satisfecha por y.
(b) Resuelva la ecuación diferencial.
(c) Un pequeño pueblo tiene 1000 habitantes. A las 8 a.m., 80 personas han escuchado un rumor. A mediodía la mitad del pueblo lo ha escuchado. ¿En qué tiempo 90% de la población ha escuchado el rumor?

12. Unos biólogos abastecieron un lago con 400 peces y estimaron la capacidad de carga (la población máxima para los peces de esa especie en ese lago) en 10 000. El número de peces se triplicó en el primer año.
(a) Si se supone que el tamaño de la población de peces satisface la ecuación logística, encuentre una expresión para el tamaño de la población después de t años.
(b) ¿En cuánto tiempo la población se incrementará a 5000?

13. (a) Demuestre que, si P satisface la ecuación logística (4), entonces

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{2P}{M}\right)$$

(b) Deduzca que una población crece más rápido cuando alcanza la mitad de su capacidad de carga.

14. Para un valor fijo de M (por ejemplo $M = 10$), la familia de funciones logísticas dada por la ecuación 7 depende del valor inicial de P_0 y la constante de proporcionalidad k. Trace la gráfica de varios integrantes de esta familia. ¿Cómo cambia la gráfica cuando varía P_0? ¿Cómo cambia cuando varía k?

15. La tabla proporciona la población semestral de Japón, en miles, desde 1960 hasta 2010.

Año	Población	Año	Población
1960	94 092	1990	123 537
1965	98 883	1995	123 327
1970	104 345	2000	126 776
1975	111 573	2005	127 715
1980	116 807	2010	127 579
1985	120 754		

Utilice una calculadora graficadora para ajustar tanto una función exponencial como una función logística de esta información. Trace la gráfica de los puntos de información y ambas funciones, y comente sobre la exactitud de las representaciones. [*Sugerencia*: reste 94 000 de cada una de las cifras de población. A continuación, después de obtener una representación de su calculadora, sume 94 000 para obtener su modelo final. Podría ser útil elegir $t = 0$ para corresponder a 1960 o bien 1980.]

16. La tabla proporciona la población semestral de Noruega, en miles, desde 1960 hasta 2010.

Año	Población	Año	Población
1960	3581	1990	4242
1965	3723	1995	4359
1970	3877	2000	4492
1975	4007	2005	4625
1980	4086	2010	4891
1985	4152		

Utilice una calculadora graficadora para ajustar tanto una función exponencial como una función logística de esta información. Trace la gráfica de los puntos de información y ambas funciones, y comente sobre la exactitud de las representaciones. [*Sugerencia*: reste 3500 de cada una de las cifras de población. Luego, después de obtener un modelo de su calculadora, sume 3500 para obtener su representación final. Podría ser útil elegir $t = 0$ que corresponda a 1960.]

17. Considere una población $P = P(t)$ con rapidez de nacimiento y de mortalidad constante α y β, respectivamente, y una razón m de emigración constante, donde α, β y m son constantes positivas. Suponga que $\alpha > \beta$. Entonces la razón de cambio de la población en el tiempo t se modela mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{donde } k = \alpha - \beta$$

(a) Encontrar la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $P(0) = P_0$.
(b) ¿Qué condición de m conducirá a un crecimiento exponencial de la población?
(c) ¿Qué condición de m dará como resultado una población constante? ¿Una población que decline?
(d) En 1847, la población de Irlanda fue de casi 8 millones y la diferencia entre las tasas de nacimiento relativo y mortalidad fue de 1.6% de la población. Debido a la escasez de papas en las décadas de 1840 y 1850, casi 210 000 habitantes por cada año emigraron de Irlanda. ¿En ese tiempo la población se expandió o declinó?

18. Sea c un número positivo. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

donde k es una constante positiva, se le denomina *ecuación del día del juicio final* ya que el exponente en la expresión ky^{1+c} es más grande que el exponente 1 para el crecimiento natural.
(a) Determine la solución que satisface la condición inicial $y(0) = y_0$.
(b) Demuestre que existe un tiempo finito $t = T$ (del juicio final) tal que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.
(c) Una especie especialmente prolífica de conejos tiene el término de crecimiento $ky^{1.01}$. Si 2 de tal especie de conejos al principio y en la madriguera tienen 16 conejos después de tres meses, entonces ¿cuándo es el día del juicio final?

19. La ecuación diferencial logística del ejemplo 1 se modificará como sigue

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - 15$$

(a) Suponga que $P(t)$ representa una población de peces en el tiempo t, donde t se mide en semanas. Explique el significado del término (-15).
(b) Trace un campo direccional para esta ecuación diferencial.
(c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?
(d) Use el campo direccional para trazar varias curvas solución. Describa lo que sucede a la población de peces para diferentes poblaciones iniciales.
SAC (e) Resuelva esta ecuación diferencial de manera explícita, ya sea por medio de fracciones parciales o con un sistema algebraico computacional. Use las poblaciones iniciales 200 y 300. Trace la gráfica de las soluciones y compare con sus trazos del inciso (d).

SAC **20.** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$

como un modelo para una población de peces, donde t se mide en semanas y c es una constante.
(a) Use un SAC para trazar los campos direccionales para varios valores de c.

(b) De sus campos direccionales del inciso (a), determine los valores de c para los cuales hay por lo menos una solución de equilibrio. ¿Para qué valores de c la población de peces se extingue siempre?

(c) Use la ecuación diferencial para probar lo que descubrió en forma gráfica en el inciso (b).

(d) ¿Qué recomendaría como límite para la captura semanal de esta población de peces?

21. Existe evidencia considerable para apoyar la teoría de que para algunas especies hay una población mínima m tal que las especies se extinguirán si el tamaño de la población cae por debajo de m. Esta condición se puede incorporar en la ecuación logística introduciendo el factor $(1 - m/P)$. Así, el modelo logístico modificado está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

(a) Use la ecuación diferencial para demostrar que cualquier solución es creciente si $m < P < M$ y decreciente si $0 < P < m$.

(b) Para el caso donde $k = 0.08$, $M = 1000$ y $m = 200$, dibuje un campo direccional y utilícelo para trazar varias curvas solución. Describa lo que sucede a la población para varias poblaciones iniciales. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

(c) Resuelva la ecuación diferencial de forma explícita, ya sea por medio de fracciones parciales o con un sistema algebraico computacional. Use la población inicial P_0.

(d) Use la solución del inciso (c) para demostrar que si $P_0 < m$, entonces la especie se extingue. [*Sugerencia*: demuestre que el numerador en su expresión para $P(t)$ es 0 para algún valor de t.]

22. Otro modelo para una función de crecimiento de una población limitada está dado por la **función de Gompertz**, que es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c \ln\left(\frac{M}{P}\right)P$$

donde c es una constante y M es la capacidad de carga.

(a) Resuelva esta ecuación diferencial.

(b) Calcule $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

(c) Trace la gráfica de la función de crecimiento de Gompertz para $M = 1000$, $P_0 = 100$ y $c = 0.05$, y compárela con la función logística del ejemplo 2. ¿Cuáles son las semejanzas? ¿Cuáles son las diferencias?

(d) Se sabe del ejercicio 13 que la función logística crece más rápido cuando $P = M/2$. Use la ecuación diferencial de Gompertz para demostrar que la función de Gompertz crece más rápido cuando $P = M/e$.

23. En un **modelo de crecimiento estacional**, se introduce una función periódica del tiempo para explicar las variaciones estacionales en la tasa de crecimiento. Estas variaciones podrían, por ejemplo, ser causadas por cambios estacionales en la disponibilidad de alimento.

(a) Encuentre la solución del modelo de crecimiento estacional

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

donde k, r y ϕ son constantes positivas.



(b) Trace la gráfica de la solución para diferentes valores de k, r y ϕ, explique cómo afectan a la solución los valores de k, r y ϕ ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

24. Suponga que se modifica la ecuación diferencial del ejercicio 23 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

(a) Resuelva esta ecuación diferencial con la ayuda de una tabla de integrales o un SAC.



(b) Trace la gráfica de la solución para varios valores de k, r y ϕ. ¿Cómo afectan a la solución los valores de k, r y ϕ? ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{t\to\infty} P(t)$ en este caso?

25. Las gráficas de las funciones logísticas (figuras 2 y 3) se ven sospechosamente similares a la gráfica de la función tangente hiperbólica (figura 3.11.3). Explique la semejanza demostrando que la función logística dada por la ecuación 7 se puede escribir como

$$P(t) = \tfrac{1}{2}M\left[1 + \tanh\left(\tfrac{1}{2}k(t - c)\right)\right]$$

donde $c = (\ln A)/k$. Así, la función logística es en realidad una tangente hiperbólica desplazada.

9.5 Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es una que se puede escribir en la forma

1
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas sobre un determinado intervalo. Este tipo de ecuación se presenta con frecuencia en varias ciencias, como se verá.

Un ejemplo de una ecuación lineal es $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, se puede escribir en la forma

2 $$y' + \frac{1}{x} y = 2$$

Observe que esta ecuación diferencial no es separable porque es imposible factorizar la expresión para y' como una función de x por una función de y. Pero aún se puede resolver la ecuación si se observa, por la regla del producto, que

$$xy' + y = (xy)'$$

y, por tanto, la ecuación se puede reescribir como

$$(xy)' = 2x$$

Si ahora se integran ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$xy = x^2 + C \qquad \text{o} \qquad y = x + \frac{C}{x}$$

Si se hubiera tenido la ecuación diferencial en la forma de la ecuación 2, se habría tenido que tomar el paso preliminar de multiplicar cada lado de la ecuación por x.

Resulta que toda ecuación diferencial lineal de primer orden se puede resolver de un modo similar al multiplicar ambos lados de la ecuación 1 por una función adecuada $I(x)$ llamada *factor integrante*. Se intenta encontrar I por lo que el lado izquierdo de la ecuación 1, cuando se multiplique por $I(x)$, se convierta en la derivada del producto $I(x)$y:

3 $$I(x)\big(y' + P(x)y\big) = \big(I(x)y\big)'$$

Si se puede encontrar tal función I, entonces la ecuación 1 se convierte en

$$\big(I(x)y\big)' = I(x)\,Q(x)$$

Al integrar ambos lados, se debe tener

$$I(x)y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

por lo que la solución sería

4 $$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right]$$

Para encontrar tal I, se desarrolla la ecuación 3 y se eliminan los términos:

$$I(x)y' + I(x)\,P(x)y = \big(I(x)y\big)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)\,P(x) = I'(x)$$

Esta es una ecuación diferencial separable para I, que se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

donde $A = \pm e^C$. Se busca un factor integrante particular, no el más general, por lo que se toma $A = 1$ y se usa

5 $$I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Así, la ecuación 4 da una fórmula para la solución general de la ecuación 1, donde I se determina mediante la ecuación 5. Sin embargo, en lugar de memorizar esta fórmula, solo se recuerda la forma del factor integrante.

> Para resolver la ecuación diferencial lineal $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos lados por el **factor integrante** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos lados.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación dada es lineal, ya que tiene la forma de la ecuación 1 con $P(x) = 3x^2$ y $Q(x) = 6x^2$. Un factor integrante es

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

En la figura 1 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones del ejemplo 1. Observe que se aproximan a 2 cuando $x \to \infty$.

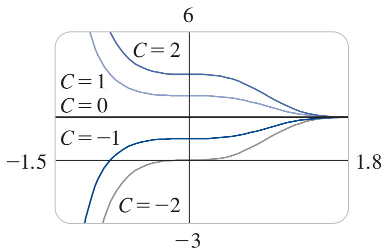


FIGURA 1

Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por e^{x^3}, se obtiene

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

o

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

Al integrar ambos lados se tiene

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre la solución del problema con valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUCIÓN Se deben dividir primero ambos lados entre el coeficiente de y' para escribir la ecuación diferencial en la forma estándar:

6 $$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

El factor integrante es

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

Al multiplicar la ecuación 6 por x, se obtiene

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad \text{o} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

La solución del problema de valor inicial del ejemplo 2 se muestra en la figura 2.

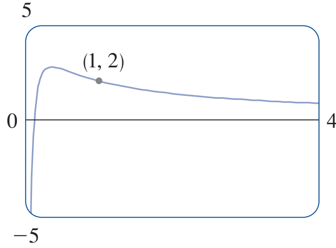


FIGURA 2

Entonces
$$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

y, de este modo,
$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Ya que $y(1) = 2$, se tiene

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

Por tanto la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$ ■

EJEMPLO 3 Resuelva $y' + 2xy = 1$.

SOLUCIÓN La ecuación dada está en la forma estándar para una ecuación lineal. Al multiplicar por el factor integrante

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

se obtiene
$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

o,
$$\left(e^{x^2}y\right)' = e^{x^2}$$

Por tanto
$$e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$$

Aun cuando las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 3 se pueden expresar en términos de una integral, estas se pueden graficar mediante un sistema algebraico computacional (figura 3).

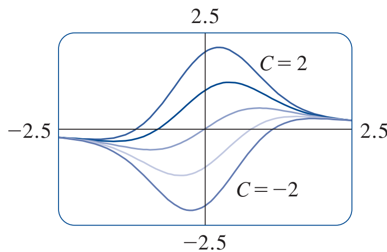


FIGURA 3

Recuerde de la sección 7.5 que $\int e^{x^2}dx$ no se puede expresar en términos de funciones elementales. Sin embargo, es una función perfectamente buena y se puede dejar la respuesta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

Otra forma de escribir la solución es

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^{-x^2}$$

(Se puede elegir cualquier número para el límite de integración inferior.) ■

■ Aplicación a circuitos eléctricos

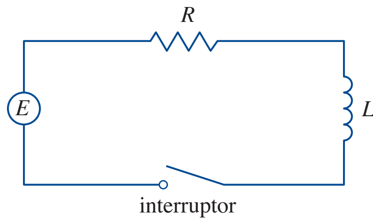


FIGURA 4

En la sección 9.2 se consideró el circuito eléctrico simple que se muestra en la figura 4: una fuerza electromotriz (por lo común, una batería o generador) produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henrys (H).

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L\,(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Así, se tiene

7
$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución da la corriente I en el tiempo t.

EJEMPLO 4 Suponga que en el circuito simple de la figura 4 la resistencia es 12 Ω y la inductancia es 4 H. Si una batería da un voltaje constante de 60 V y el interruptor se cierra cuando $t = 0$ de tal manera que la corriente empieza con $I(0) = 0$, encuentre (a) $I(t)$, (b) la corriente después de 1 segundo y (c) el valor límite de la corriente.

La ecuación diferencial del ejemplo 4 es lineal y separable, por lo que un método alternativo es resolverla como una ecuación separable (ejemplo 9.3.4). Sin embargo, si se reemplaza la batería por un generador, se obtiene una ecuación que es lineal pero no es separable (ejemplo 5).

SOLUCIÓN

(a) Si se sustituye $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$ en la ecuación 7, se obtiene el problema con valores iniciales

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

o

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Al multiplicar por el factor integrante $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, se obtiene

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

En la figura 5 se muestra cómo la corriente del ejemplo 4 se aproxima a su valor límite.

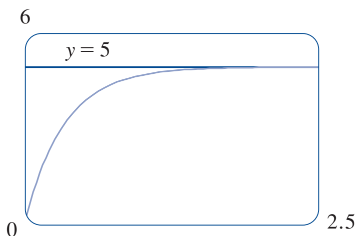


FIGURA 5

Ya que $I(0) = 0$, se tiene $5 + C = 0$, por tanto, $C = -5$ e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

(b) Después de un segundo, la corriente es

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75 \text{ A}$$

(c) El valor límite de la corriente está dado por

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$ ■

En la figura 6 se muestra la gráfica de la corriente cuando se reemplaza la batería por un generador.

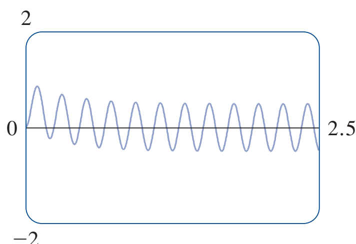


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Suponga que la resistencia y la inductancia permanecen como en el ejemplo 4 pero, en lugar de la batería, se usa un generador que produce un voltaje variable de $E(t) = 60 \text{ sen } 30t$ volts. Encuentre $I(t)$.

SOLUCIÓN Esta vez la ecuación diferencial se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \text{ sen } 30t \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \text{ sen } 30t$$

El mismo factor integrante e^{3t} da

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \text{ sen } 30t$$

Al usar la fórmula 98 de la tabla de integrales, se tiene

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t \, dt = 15 \frac{e^{3t}}{909} (3 \operatorname{sen} 30t - 30 \cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101} (\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + Ce^{-3t}$$

Ya que $I(0) = 0$ se obtiene

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

por tanto,
$$I(t) = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + \tfrac{50}{101} e^{-3t}$$
■

9.5 EJERCICIOS

1-4 Determine si la ecuación diferencial es lineal.

1. $y' + x\sqrt{y} = x^2$

2. $y' - x = y \tan x$

3. $ue^t = t + \sqrt{t} \dfrac{du}{dt}$

4. $\dfrac{dR}{dt} + t \cos R = e^{-t}$

5-14 Resuelva la ecuación diferencial.

5. $xy' - 2y = x^2$

6. $y' = x + 5y$

7. $y' = y - x$

8. $4x^3y + x^4y' = \operatorname{sen}^3 x$

9. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen}(x^2)$

10. $2xy' + y = 2\sqrt{x}$

11. $xy' - 2y = x^2, \quad x > 0$

12. $y' + 2xy = 1$

13. $t^2 \dfrac{dy}{dt} + 3ty = \sqrt{1 + t^2}, \quad t > 0$

14. $x \dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4 e^x$

15-20 Resuelva el problema con valor inicial.

15. $x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(1) = 2$

16. $2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$

17. $t \dfrac{du}{dt} = t^2 + 3u, \quad t > 0, \quad u(2) = 4$

18. $xy' + y = x \ln x, \quad y(1) = 0$

19. $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 0$

20. $(x^2 + 1) \dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

21-22 Resuelva la ecuación diferencial y utilice una calculadora o computadora para trazar la gráfica de varios miembros de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía C?

21. $xy' + 2y = e^x$

22. $xy' = x^2 + 2y$

23. Una **ecuación diferencial de Bernoulli** (en honor a James Bernoulli) es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli es lineal. Para otros valores de n, demuestre que la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

24-25 Use el método del ejercicio 23 para resolver la ecuación diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$

25. $y' + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{y^3}{x^2}$

26. Resuelva la ecuación de segundo orden $xy'' + 2y' = 12x^2$ haciendo la sustitución $u = y'$.

27. En el circuito que se muestra en la figura 4, una batería suministra un voltaje de 40 V, la inductancia es 2 H, la resistencia es 10 Ω e $I(0) = 0$.
(a) Encuentre $I(t)$.
(b) Determine la corriente después de 0.1 segundos.

28. En el circuito que se muestra en la figura 4, un generador suministra un voltaje de $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ volts, la inductancia es 1 H, la resistencia es 20 Ω e $I(0) = 1$ A.
(a) Encuentre $I(t)$.
(b) Determine la corriente después de 0.1 segundos.
(c) Use un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de la función corriente.

29. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con capacitancia C farads (F) y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída

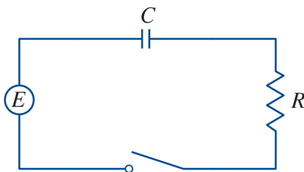
de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs), así que en este caso la ley de Kirchhoff da

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$ (véase el ejemplo 3.7.3), por lo que se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F, una batería de un voltaje constante de 60 V y la carga inicial es $Q(0) = 0$ C. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.



30. En el circuito del ejercicio 29, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.01$ F, $Q(0) = 0$ y $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.

31. Sea $P(t)$ el nivel de desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función de tiempo de entrenamiento t. La gráfica de P se llama *curva de aprendizaje*. En el ejercicio 9.1.15 se propuso la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como un modelo razonable para el aprendizaje, donde k es una constante positiva. Resuélvala como una ecuación diferencial lineal y use su solución para graficar la curva de aprendizaje.

32. Se contrató a dos nuevos trabajadores para una línea de ensamble. Jim procesó 25 unidades durante la primera hora y 45 unidades durante la segunda hora. Mark procesó 35 unidades durante la primera hora y 50 unidades durante la segunda hora. Por medio del modelo del ejercicio 31, y suponiendo que $P(0) = 0$, estime el número máximo de unidades por hora que cada trabajador es capaz de procesar.

33. En la sección 9.3 se examinaron problemas de mezclas en los que el volumen de líquido permaneció constante y se vio que tales problemas dan lugar a ecuaciones separables. (Véase el ejemplo 6 de esa sección.) Si las relaciones de flujo hacia dentro y hacia fuera del sistema son diferentes, entonces el volumen no es constante y la ecuación diferencial resultante es lineal pero no separable.

Un tanque contiene 100 L de agua. Una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/L se agrega en una proporción de 5 L/min. La solución se mantiene mezclada y se drena del tanque a una rapidez de 3 L/min. Si $y(t)$ es la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos, demuestre que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resuelva esta ecuación y determine la concentración después de 20 minutos.

34. Un tanque con una capacidad de 400 L se llena con una mezcla de agua y cloro con una concentración de 0.05 g de cloro por litro. Para reducir la concentración de cloro, se bombea agua nueva hacia el recipiente a razón de 4 L/s. La mezcla se mantiene agitada y se bombea hacia afuera a razón de 10 L/s. Encuentre la cantidad de cloro en el recipiente como una función del tiempo.

35. Un objeto con masa m se deja caer desde el reposo y se supone que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del objeto. Si $s(t)$ es la distancia recorrida después de t segundos, entonces la rapidez es $v = s'(t)$ y la aceleración es $a = v'(t)$. Si g es la aceleración debida a la gravedad, entonces la fuerza hacia abajo sobre el objeto es $mg - cv$, donde c es una constante positiva, y la segunda ley de Newton da

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Resuélvala como una ecuación lineal para demostrar que

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

(b) ¿Cuál es la velocidad límite?

(c) Encuentre la distancia que ha recorrido el objeto después de t segundos.

36. Si se ignora la resistencia del aire, se puede concluir que los objetos más pesados no caen más rápido que los objetos ligeros. Pero si se toma en cuenta la resistencia del aire, la conclusión cambia. Use la expresión para la velocidad de un objeto que cae en el ejercicio 35(a) para encontrar dv/dm y demuestre que los objetos más pesados *caen* más rápido que los más ligeros.

37. (a) Demuestre que la sustitución $z = 1/P$ transforma la ecuación diferencial logística $P' = kP(1 - P/M)$ en la ecuación diferencial lineal

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

(b) Resuelva la ecuación diferencial lineal del inciso (a) para obtener una expresión para $P(t)$. Compárela con la ecuación 9.4.7.

38. Para considerar la variación estacional en la ecuación diferencial logística, tiene que hacer que k y M sean funciones de t:

$$\frac{dP}{dt} = k(t)P\left(1 - \frac{P}{M(t)}\right)$$

(a) Verifique que la sustitución $z = 1/P$ transforma esta ecuación en la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dt} + k(t)z = \frac{k(t)}{M(t)}$$

(b) Escriba una expresión para la solución de la ecuación lineal del inciso *a*) y utilícela para demostrar que si la capacidad de carga M es constante, entonces

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-\int k(t)\,dt}}$$

Deduzca que si $\int_0^\infty k(t)\,dt = \infty$, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$. [Esto es cierto si $k(t) = k_0 + a \cos bt$ con $k_0 > 0$, lo cual describe una tasa de crecimiento intrínseco con una variación estacional periódica.]

(c) Si k es constante pero M varía, demuestre que

$$z(t) = e^{-kt}\int_0^t \frac{ke^{ks}}{M(s)}\,ds + Ce^{-kt}$$

y utilice la regla de L'Hôpital para deducir que si $M(t)$ tiene un límite cuando $t \to \infty$, entonces $P(t)$ tiene el mismo límite.

9.6 Sistemas presa-depredador

Se ha observado una variedad de modelos para el crecimiento de una sola especie que vive sola en un ambiente. En esta sección se consideran modelos más reales que toman en cuenta la interacción de dos especies en el mismo hábitat. Se verá que estos modelos toman la forma de un par de ecuaciones diferenciales vinculadas.

Primero se toma en cuenta la situación en que una especie, llamada *presa*, tiene un suministro amplio de alimento y la segunda especie, llamada *depredador*, se alimenta de la presa. Ejemplos de presas y depredadores incluyen conejos y lobos en un bosque aislado, peces y tiburones, pulgones y mariquitas, y bacterias y amibas. El modelo tendrá dos variables dependientes, y ambas son funciones del tiempo. Sea $R(t)$ el número de presas (usando R para conejos) y $W(t)$ el número de depredadores (con W para lobos) al tiempo t.

En ausencia de depredadores, el suministro amplio de alimento apoyaría el crecimiento exponencial de la presa, es decir,

$$\frac{dR}{dt} = kR \qquad \text{donde } k \text{ es una constante positiva}$$

En ausencia de la presa, se supone que la población de depredadores disminuiría con la mortalidad a una razón proporcional a sí misma, esto es

$$\frac{dW}{dt} = -rW \qquad \text{donde } r \text{ es una constante positiva}$$

Sin embargo, con ambas especies presentes, se supone que la causa principal de muerte entre la presa es ser comida por un depredador y los ritmos de natalidad y supervivencia de los depredadores depende del suministro de alimento disponible, es decir, la presa. Se supone también que las dos especies se encuentran entre sí con una frecuencia que es proporcional a ambas poblaciones y, por tanto, es proporcional al producto RW. (Mientras mayor sea la cantidad de cualquier población, es más probable que haya mayor número de encuentros.) Un sistema de dos ecuaciones diferenciales que incorpora estas suposiciones es como sigue:

W representa el depredador.
R representa la presa.

1 $$\frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

donde k, r, a y b son constantes positivas. Observe que el término $-aRW$ disminuye la rapidez de crecimiento natural de la presa y el término bRW incrementa la rapidez de crecimiento natural de los depredadores.

Las ecuaciones en (1) se conocen como **ecuaciones presa-depredador**, o **ecuaciones de Lotka-Volterra**. Una **solución** de este sistema de ecuaciones es un par de funciones $R(t)$ y $W(t)$ que describe las poblaciones de presa y depredador como funciones del tiempo. Ya que el sistema está acoplado (R y W se presentan en ambas ecuaciones), no se puede resolver una ecuación y luego la otra; se tienen que resolver de forma simultánea. Desafortunadamente, por lo general es imposible encontrar fórmulas explícitas para R y W como funciones de t. Sin embargo, se pueden emplear métodos gráficos para analizar las ecuaciones.

El matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) propuso las ecuaciones de Lotka-Volterra como un modelo para explicar las variaciones en las poblaciones de tiburones y peces en el mar Adriático.



EJEMPLO 1 Suponga que las poblaciones de conejos y lobos se describen mediante las ecuaciones de Lotka-Volterra (1) con $k = 0.08$, $a = 0.001$, $r = 0.02$ y $b = 0.00002$. El tiempo t se mide en meses.

(a) Encuentre las soluciones constantes (llamadas **soluciones de equilibrio**) e interprete la respuesta.

(b) Use el sistema de ecuaciones diferenciales para encontrar una expresión para dW/dR.

(c) Dibuje un campo direccional para la ecuación diferencial resultante en el plano RW. Después use ese campo direccional para encontrar algunas curvas solución.

(d) Suponga que, en algún punto del tiempo, hay 1000 conejos y 40 lobos. Dibuje la curva solución correspondiente y empléela para describir los cambios en ambos niveles de población.

(e) Use el inciso (d) para trazar R y W como funciones de t.

SOLUCIÓN

(a) Con los valores dados de k, a, r y b, las ecuaciones de Lotka-Volterra se convierten en

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

Tanto R como W serán constantes si ambas derivadas son 0, es decir,

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

Una solución está dada por $R = 0$ y $W = 0$. (Esto tiene sentido: si no hay conejos o lobos, las poblaciones no se incrementan.) La otra solución constante es

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80$$

$$R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$$

Por lo que las poblaciones de equilibrio constan de 80 lobos y 1000 conejos. Esto significa que 1000 conejos son suficientes para soportar una población constante de 80 lobos. No hay ni muchos lobos (lo cual daría como resultado menos conejos) ni pocos lobos (lo que produciría más conejos).

(b) Use la regla de la cadena para eliminar t:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR}\frac{dR}{dt}$$

por lo que

$$\frac{dW}{dR} = \frac{\dfrac{dW}{dt}}{\dfrac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

(c) Si se considera a W como una función de R, se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Dibuje el campo direccional para esta ecuación diferencial en la figura 1 y úselo para trazar varias curvas solución en la figura 2. Si se mueve a lo largo de una curva solución, se observa cómo cambia la relación entre R y W conforme pasa el tiempo. Observe que al parecer las curvas son cerradas en el sentido de que, si se viaja a lo largo de una curva, siempre se vuelve al mismo punto. Observe también que el punto (1000, 80) está dentro de todas las curvas solución. Ese punto se llama *punto de equilibrio* porque corresponde a la solución de equilibrio $R = 1000$, $W = 80$.

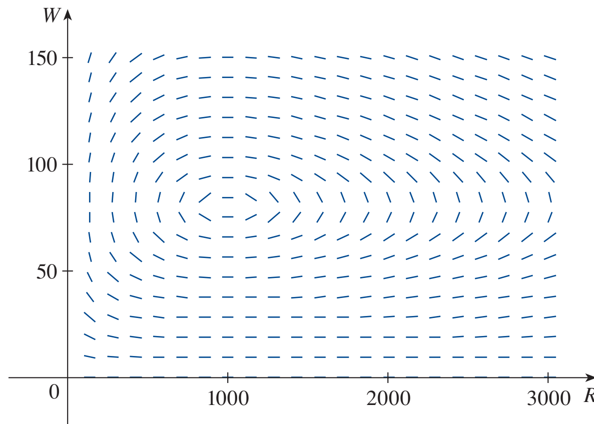


FIGURA 1
Campo direccional para el sistema presa-depredador

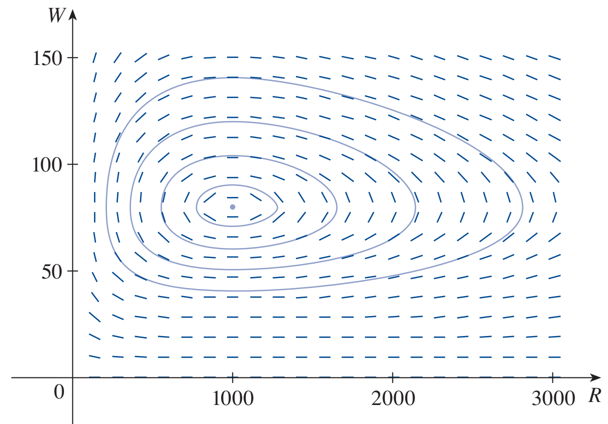


FIGURA 2
Retrato de fase del sistema

Cuando se representan soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales como en la figura 2, se debe referir al plano RW como el **plano fase**, y se debe llamar **trayectorias de fase** a las curvas solución. Así, una trayectoria de fase es una que se traza mediante las soluciones (R, W) conforme pasa el tiempo. Un **retrato de fase** consta de puntos de equilibrio y trayectorias de fase representativas, como se muestra en la figura 2.

(d) Empezar con 1000 conejos y 40 lobos corresponde a trazar la curva solución por el punto $P_0(1000, 40)$. En la figura 3 se muestra esta trayectoria de fase sin el campo direccional.

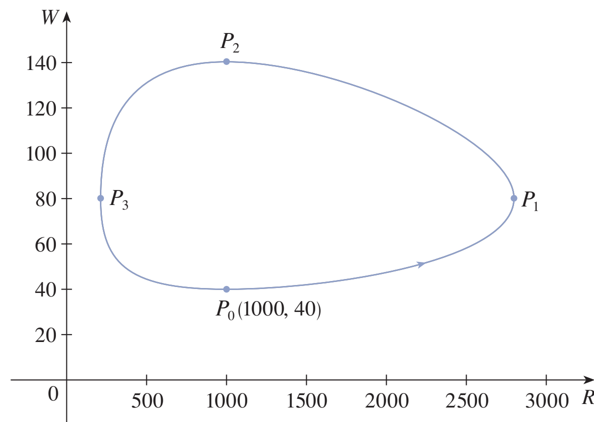


FIGURA 3
Trayectoria de fase que pasa por (1000, 40)

Si se empieza en el punto P_0 en el tiempo $t = 0$ y se incrementa t, ¿se va en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario alrededor de la trayectoria fase? Si se escribe $R = 1000$ y $W = 40$ en la primera ecuación diferencial, se obtiene

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Ya que $dR/dt > 0$, se concluye que R es creciente en P_0 y, por tanto, se va en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria de fase.

Se ve que en P_0 no hay suficientes lobos para mantener un equilibrio entre las poblaciones, por lo que se incrementa la población de conejos. Eso da como resultado más lobos y, en algún momento, hay tantos lobos que los conejos tienen dificultades para evitarlos. Así, el número de conejos comienza a disminuir (en P_1, donde se estima que R llega a su población máxima de casi 2800). Esto significa que en algún tiempo posterior la población de lobos comienza a bajar (en P_2, donde $R = 1000$ y $W \approx 140$). Pero esto beneficia a los conejos, por lo que su población comienza a crecer después (en P_3, donde $W = 80$ y $R \approx 210$). Como consecuencia, la población de lobos finalmente comienza a crecer también. Esto sucede cuando las poblaciones vuelven a sus valores iniciales de $R = 1000$ y $W = 40$, y el ciclo completo comienza de nuevo.

(e) De la descripción del inciso (d) de cómo aumentan y disminuyen las poblaciones de conejos y lobos, se pueden trazar las gráficas de $R(t)$ y $W(t)$. Suponga que los puntos P_1, P_2 y P_3 en la figura 3 se alcanzan en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Entonces se pueden trazar las gráficas de R y W como en la figura 4.

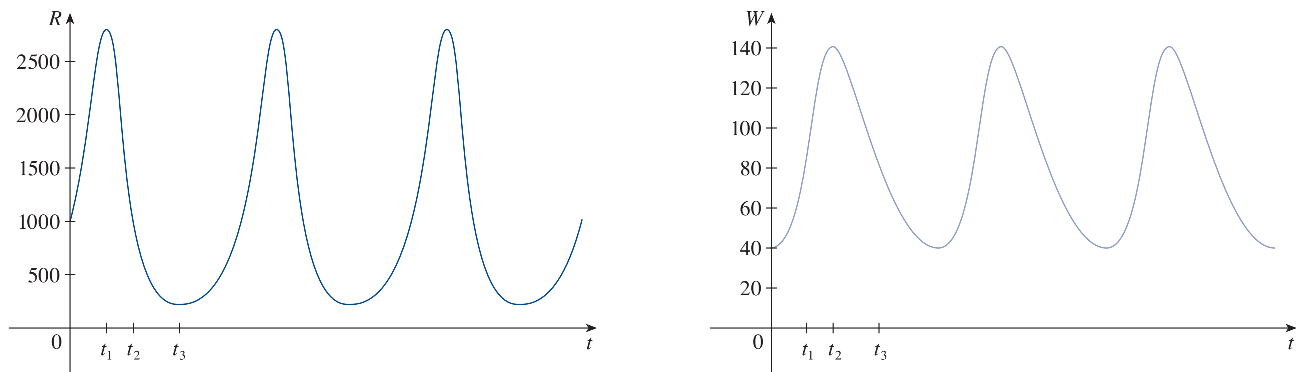


FIGURA 4 Gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo

Para facilitar la comparación de las gráficas, se trazan en los mismos ejes, pero con escalas distintas para R y W, como en la figura 5. Observe que los conejos alcanzan sus poblaciones máximas cerca de un cuarto de ciclo antes que los lobos. ■

Una parte importante del proceso de modelado, como se analizó en la sección 1.2, es interpretar las conclusiones matemáticas como predicciones del mundo real y probar las predicciones contra datos reales. La Hudson's Bay Company, que comenzó a comercializar pieles de animales en Canadá en 1670, ha mantenido registros que datan de la década de 1840. En la figura 6 se muestran las gráficas del número de pieles de la liebre americana y su depredador, el lince de Canadá, comercializadas por la compañía durante un período de 90 años. Se puede ver que las oscilaciones acopladas en las poblaciones de liebres y linces predichas por el modelo de Lotka-Volterra ocurren en realidad, y el período de estos ciclos es aproximadamente de 10 años.

TEC En Module 9.6 se pueden cambiar los coeficientes en las ecuaciones Lotka-Volterra y observar los cambios en la trayectoria de fase y las gráficas de población de conejos y lobos.

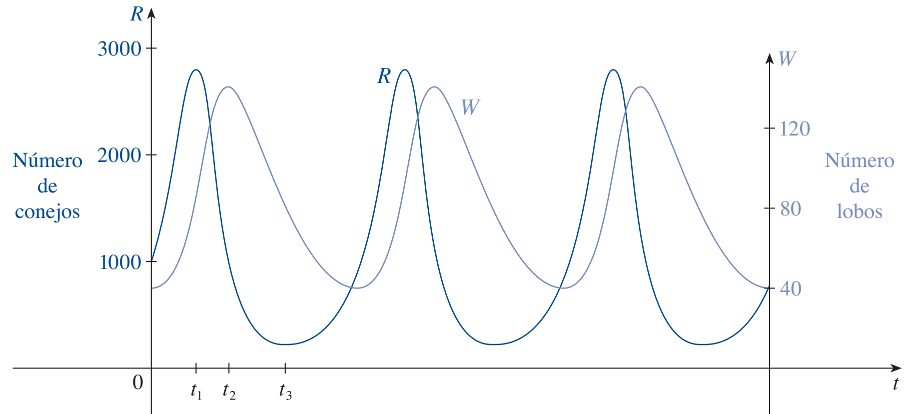


FIGURA 5
Comparación de poblaciones de conejos y lobos

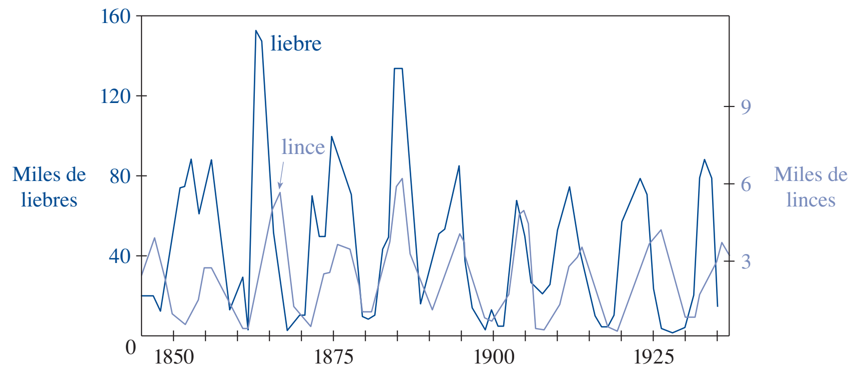


FIGURA 6
Abundancia relativa de liebres y linces de los registros de la Hudson's Bay Company



Aunque el modelo relativamente simple de Lotka-Volterra ha tenido cierto éxito en explicar y predecir poblaciones acopladas, se han propuesto modelos más complejos. Una manera de modificar las ecuaciones de Lotka-Volterra es suponer que, en ausencia de depredadores, la presa crece de acuerdo con un modelo logístico con capacidad de carga M. Después las ecuaciones de Lotka-Volterra (1) se reemplazan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dR}{dt} = kR\left(1 - \frac{R}{M}\right) - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

Este modelo es investigado en los ejercicios 11 y 12.

Se han propuesto modelos para describir y predecir niveles de población de dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para beneficio mutuo. Esta clase de modelos se explora en los ejercicios 2-4.

9.6 EJERCICIOS

1. Para cada sistema presa-depredador, determine cuál de las variables, x o y, representa la población de presas y cuál representa la población de depredadores. ¿El crecimiento de la presa está restringido solo por los depredadores o también por otros factores? ¿Los depredadores se alimentan solo de la presa o tienen fuentes de alimento adicionales? Explique.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = -0.05x + 0.0001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.1y - 0.005xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.2x - 0.0002x^2 - 0.006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = -0.015y + 0.00008xy$

2. Cada sistema de ecuaciones diferenciales se modela para dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para beneficio mutuo (plantas que florecen e insectos polinizadores, por ejemplo). Decida si cada sistema describe

la competencia o la cooperación y explique por qué es un modelo razonable. (Pregúntese qué efecto tiene en una especie un incremento en la rapidez de crecimiento de la otra.)

(a) $\dfrac{dx}{dt} = 0.12x - 0.0006x^2 + 0.00001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.08x + 0.00004xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.15x - 0.0002x^2 - 0.0006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.2y - 0.00008y^2 - 0.0002xy$

3. El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x - 0.004x^2 - 0.001xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.4y - 0.001y^2 - 0.002xy$$

es un modelo para la población de dos especies.

(a) ¿El modelo describe cooperación o competencia, o una relación presa-depredador?

(b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.

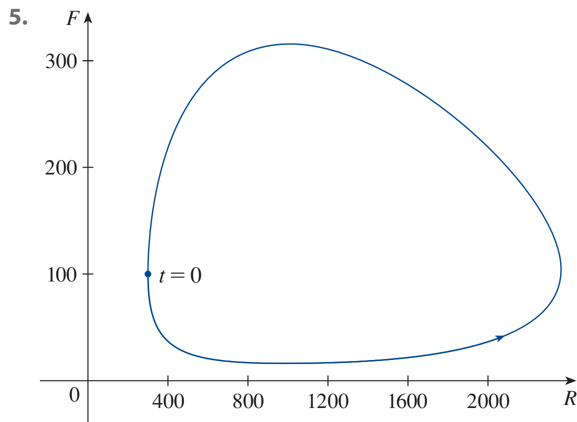
4. El lince come liebres y las liebres americanas comen plantas leñosas como los sauces. Suponga que, en ausencia de las liebres, la población de sauces creciera exponencialmente y la población de linces decayera exponencialmente. En ausencia de linces y de sauces, la población de liebres decaería exponencialmente. Si $L(t)$, $H(t)$ y $W(t)$ representan las poblaciones de estas tres especies en el tiempo t, escriba un sistema de ecuaciones diferenciales como modelo para la dinámica. Si las constantes de la ecuación son todas positivas, explique por qué han usado más o menos signos.

5-6 Se muestra una trayectoria de fase para la población de conejos (R) y zorros (F).

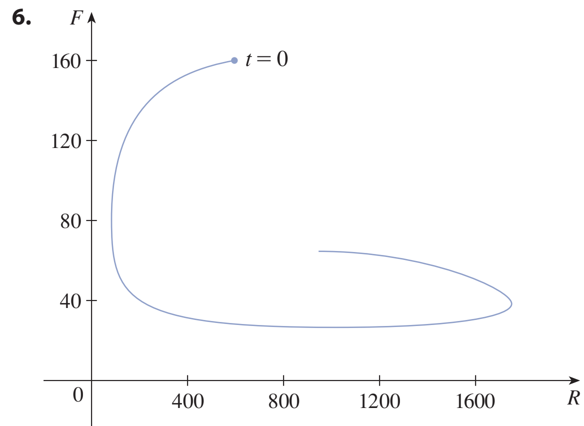
(a) Describa cómo cambia cada población conforme pasa el tiempo.

(b) Use su descripción para dibujar un esquema aproximado de las gráficas de R y F como funciones del tiempo.

5.

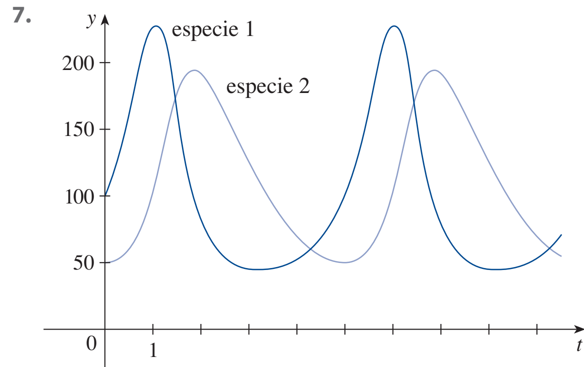


6.

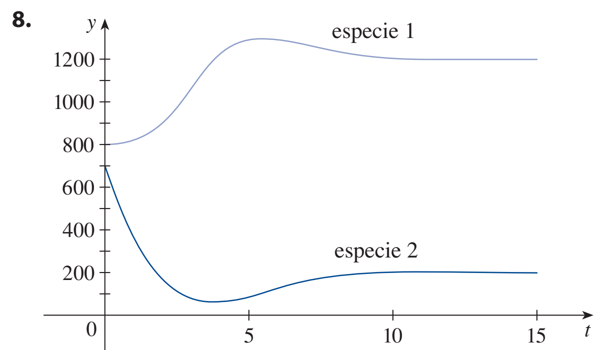


7-8 Se muestran gráficas de población de dos especies. Úselas para trazar la trayectoria de fase correspondiente.

7.



8.



9. En el ejemplo 1(b), se demuestra que las poblaciones de conejos y de lobos satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Resuelva esta ecuación diferencial separable para demostrar que

$$\frac{R^{0.02}W^{0.08}}{e^{0.00002R}e^{0.001W}} = C$$

donde C es una constante.

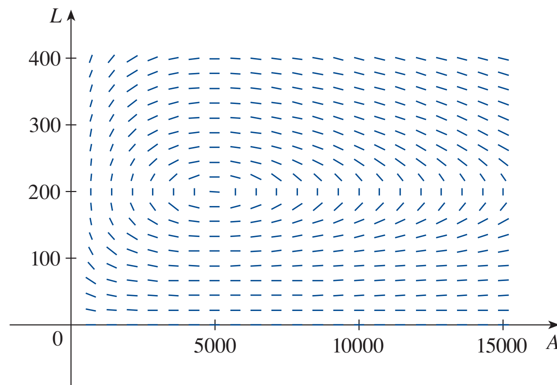
Es imposible resolver esta ecuación para W como función explícita de R (o viceversa). Si cuenta con un sistema algebraico computacional que trace gráficas de curva definidas implícitamente, use esta ecuación y su SAC para dibujar la curva solución que pasa por el punto (1000, 40) y compárela con la figura 3.

10. Las ecuaciones modelan las poblaciones de pulgones y de mariquitas

$$\frac{dA}{dt} = 2A - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

(a) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique sus significados.
(b) Encuentre una expresión para dL/dA.
(c) Se muestra el campo direccional para la ecuación diferencial obtenida en el inciso (b). Úselo para trazar un retrato de fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fase?



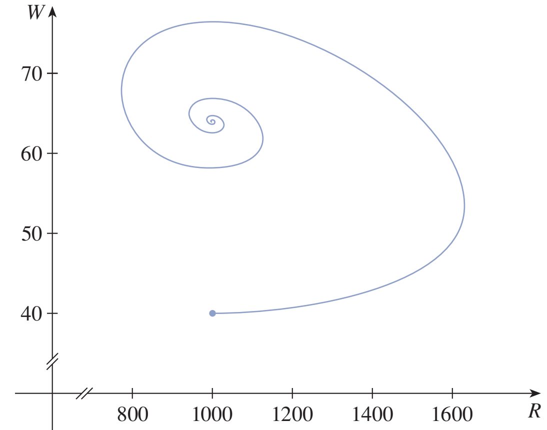
(d) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la trayectoria de fase correspondiente y empléela para describir cómo cambian ambas poblaciones.
(e) Use el inciso (d) para construir trazos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo se relacionan las gráficas entre sí?

11. En el ejemplo 1 se emplearon las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de conejos y lobos. Modifique las ecuaciones como sigue:

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

(a) De acuerdo con estas ecuaciones, ¿qué sucede con la población de conejos en ausencia de lobos?
(b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.
(c) En la figura se muestra la trayectoria de fase que empieza en el punto (1000, 40). Describa qué sucede finalmente con las poblaciones de conejos y lobos.



(d) Trace las gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo.

SAC **12.** En el ejercicio 10 se modelaron poblaciones de pulgones y mariquitas con un sistema de Lotka-Volterra. Suponga que se modifican esas ecuaciones como sigue:

$$\frac{dA}{dt} = 2A(1 - 0.0001A) - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

(a) En ausencia de mariquitas, ¿qué predice el modelo acerca de los pulgones?
(b) Encuentre las soluciones de equilibrio.
(c) Determine una expresión para dL/dA.
(d) Utilice un sistema algebraico computacional para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial del inciso (c). Luego use el campo direccional para trazar el retrato de fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fase?
(e) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la trayectoria de fase correspondiente y utilícela para describir cómo cambian ambas poblaciones.
(f) Use el inciso (e) para construir trazos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo se relacionan entre sí las gráficas?

9 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una ecuación diferencial?
(b) ¿Cuál es el orden de una ecuación diferencial?
(c) ¿Qué es una condición inicial?

2. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ con solo observar la ecuación diferencial?

3. ¿Qué es un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$?

4. Explique cómo funciona el método de Euler.

5. ¿Qué es una ecuación diferencial separable? ¿Cómo se resuelve?

6. ¿Qué es una ecuación diferencial lineal de primer orden? ¿Cómo se resuelve?

7. (a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley natural de crecimiento. ¿Qué dice en términos de la razón de crecimiento relativo?
(b) ¿Bajo qué circunstancias es un modelo apropiado para el crecimiento poblacional?
(c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

8. (a) Escriba la ecuación logística.
(b) ¿Bajo qué circunstancias es un modelo apropiado para el crecimiento poblacional?

9. (a) Escriba las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de peces comestibles (F) y tiburones (S).
(b) ¿Qué dicen estas ecuaciones acerca de cada población en ausencia de la otra?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué, o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = -1 - y^4$ son funciones decrecientes.

2. La función $f(x) = (\ln x)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.

3. La ecuación $y' = x + y$ es separable.

4. La ecuación $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ es separable.

5. La ecuación $e^x y' = y$ es lineal.

6. La ecuación $y' + xy = e^y$ es lineal.

7. Si y es la solución del problema de valor inicial

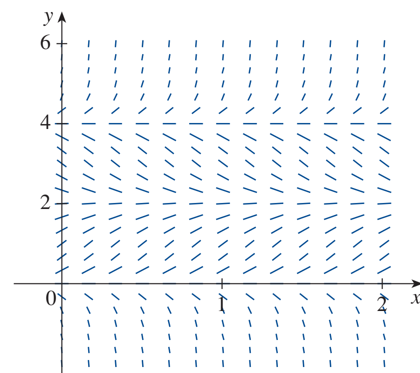
$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

entonces $\lim_{t\to\infty} y = 5$.

EJERCICIOS

1. (a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y(y - 2)(y - 4)$. Trace las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.
(i) $y(0) = -0.3$ (ii) $y(0) = 1$
(iii) $y(0) = 3$ (iv) $y(0) = 4.3$

(b) Si la condición inicial es $y(0) = c$, ¿para qué valores de c es $\lim_{t\to\infty} y(t)$ finito? ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

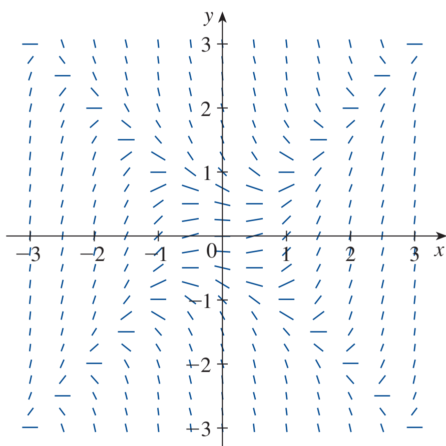


2. (a) Trace un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x/y$. Después empléelo para trazar las cuatro soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$ y $y(-2) = 1$.
(b) Compruebe su trabajo del inciso (a) resolviendo la ecuación diferencial en forma explícita. ¿Qué tipo de curva es cada curva solución?

3. (a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 - y^2$. Trace la solución del problema con valor inicial

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1$$

Use su gráfica para estimar el valor de $y(0.3)$.



(b) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar $y(0.3)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial del inciso (a). Compare con su estimación del inciso (a).
(c) ¿Sobre qué líneas se localizan los centros de los segmentos de recta horizontales del campo direccional del inciso (a)? ¿Qué sucede cuando una curva solución cruza estas líneas?

4. (a) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

(b) Repita el inciso (a) con tamaño de paso 0.1.
(c) Encuentre la solución exacta de la ecuación diferencial y compare el valor en 0.4 con las aproximaciones de los incisos (a) y (b).

5-8 Resuelva la ecuación diferencial.

5. $y' = xe^{-\operatorname{sen} x} - y \cos x$ **6.** $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$

7. $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$ **8.** $x^2y' - y = 2x^3e^{-1/x}$

9-11 Resuelva el problema con valores iniciales.

9. $\dfrac{dr}{dt} + 2tr = r, \quad r(0) = 5$

10. $(1 + \cos x)y' = (1 + e^{-y})\operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0$

11. $xy' - y = x \ln x, \quad y(1) = 2$

12. Resuelva el problema con valores iniciales $y' = 3x^2e^y$, $y(0) = 1$, y trace la gráfica de la solución.

13-14 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas.

13. $y = ke^x$ **14.** $y = e^{kx}$

15. (a) Escriba la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.1P\left(1 - \frac{P}{2000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y utilícela para encontrar la población cuando $t = 20$
(b) ¿Cuándo alcanza la población el valor 1200?

16. (a) La población del mundo era de 6.1 miles de millones en 2000 y 6.9 miles de millones en 2010. Encuentre un modelo exponencial para estos datos y utilícelo para predecir la población mundial del año 2020.
(b) De acuerdo con el modelo del inciso (a), ¿cuándo excederá la población mundial los 10 000 millones?
(c) Use los datos del inciso (a) para encontrar un modelo logístico de la población. Suponga una capacidad de carga de 20 mil millones. Después use el modelo logístico para predecir la población en 2020. Compare con su predicción del modelo exponencial.
(d) De acuerdo con el modelo logístico, ¿cuándo excederá la población mundial los 10 000 millones? Compare con su predicción del inciso (b).

17. El modelo de crecimiento de von Bertalanffy se usa para predecir la longitud $L(t)$ de un pez en un período. Si L_∞ es la mayor longitud para una especie, entonces la hipótesis es que la rapidez de crecimiento de longitud es proporcional a $L_\infty - L$, la longitud por alcanzar.
(a) Formule y resuelva una ecuación diferencial para encontrar una expresión para $L(t)$.
(b) Para la merluza del mar del Norte se ha determinado que $L_\infty = 53$ cm, $L(0) = 10$ cm, y la constante de proporcionalidad es 0.2. ¿En qué se convierte la expresión para $L(t)$ con estos datos?

18. Un tanque contiene 100 L de agua pura. Salmuera que contiene 0.1 kg de sal por litro entra al recipiente a razón de 10 L/min. La solución se mantiene mezclada por completo y sale del tanque a la misma proporción. ¿Cuánta sal hay en el tanque después de 6 minutos?

19. Un modelo para la dispersión de una epidemia es que la rapidez de dispersión es conjuntamente proporcional al

número de personas infectadas y al número de personas no infectadas. En un pueblo aislado con 5000 pobladores, 160 personas tienen una enfermedad al comienzo de la semana y 1200 la tienen al final de la semana. ¿En cuánto tiempo se infecta 80% de la población?

20. La ley de Brentano-Stevens en psicología modela la forma en que un sujeto reacciona a un estímulo. Esta expresa que, si R representa la reacción a una cantidad S de estímulo, entonces las cantidades relativas de incremento son proporcionales:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt}$$

donde k es una constante positiva. Determine R como una función de S.

21. El transporte de una sustancia por una pared capilar en fisiología pulmonar ha sido modelado mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V}\left(\frac{h}{k+h}\right)$$

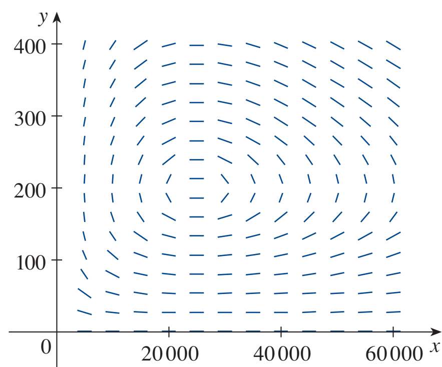
donde h es la concentración de hormonas en el torrente sanguíneo, t es el tiempo, R es la tasa de transporte máximo, V es el volumen del capilar y k es una constante positiva que mide la afinidad entre las hormonas y las enzimas que ayudan al proceso. Resuelva esta ecuación diferencial para encontrar una relación entre h y t.

22. Las poblaciones de aves e insectos se modelan por medio de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x - 0.002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

(a) ¿Cuál de las variables, x o y, representa la población de aves y cuál representa la población de insectos? Explique.
(b) Determine las soluciones de equilibrio y explique su importancia.
(c) Encuentre una expresión para dy/dx.
(d) Se muestra el campo direccional para la ecuación diferencial del inciso (c). Utilícelo para trazar la trayectoria de fase que corresponde a poblaciones iniciales de 100 aves y 40 000 insectos. Después use la trayectoria de fase para describir cómo cambian ambas poblaciones.



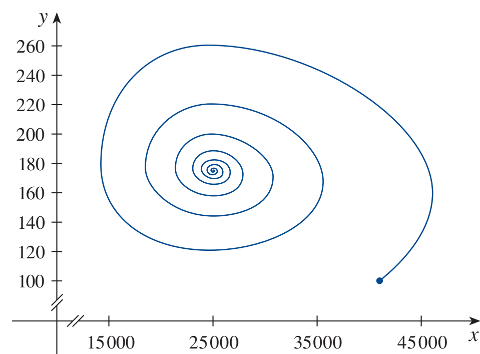
(e) Use el inciso (d) para trazar gráficas aproximadas de las poblaciones de aves e insectos como funciones del tiempo. ¿Cómo se relacionan entre sí estas gráficas?

23. Suponga que el modelo del ejercicio 22 se reemplaza mediante las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x(1 - 0.000005x) - 0.002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

(a) De acuerdo con estas ecuaciones, ¿qué sucede con la población de insectos en ausencia de aves?
(b) Determine las soluciones de equilibrio y explique su significancia.
(c) En la figura se muestra la trayectoria de fase que comienza con 100 aves y 40 000 insectos. Describa lo que finalmente sucede con las poblaciones de aves e insectos.



(d) Trace las gráficas de las poblaciones de aves e insectos como funciones del tiempo.

24. Bárbara pesa 60 kg y está a dieta de 1600 calorías por día, de las cuales 850 son empleadas de forma automática por el metabolismo basal. Ella gasta cerca de 15 cal/kg/día multiplicadas por su peso al hacer ejercicio. Si 1 kg de grasa contiene 10 000 cal y se supone que el almacenaje de calorías en la forma de grasa es 100% eficiente, formule una ecuación diferencial y resuélvala para encontrar el peso de Bárbara como una función del tiempo. ¿En última instancia su peso se aproxima a un peso de equilibrio?

Problemas adicionales

1. Encuentre las funciones f tales que f' es continua y

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}\, dt \qquad \text{para toda } x \text{ real}$$

2. Un alumno olvidó la regla para la derivada del producto y cometió el error de pensar que $(fg)' = f'g'$. Sin embargo, tuvo suerte y obtuvo la respuesta correcta. La función f que usó fue $f(x) = e^{x^2}$ y el dominio de este problema fue el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. ¿Cuál fue la función g?

3. Sea f una función con la propiedad de que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ y $f(a + b) = f(a)f(b)$ para los números reales a y b. Demuestre que $f'(x) = f(x)$ para toda x y deduzca que $f(x) = e^x$.

4. Encuentre todas las funciones f que satisfacen la ecuación

$$\left(\int f(x)\, dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}\, dx\right) = -1$$

5. Encuentre la curva $y = f(x)$ de tal manera que $f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, y el área bajo la gráfica de f de 0 a x es proporcional a la $(n + 1)$-ésima potencia de $f(x)$.

6. Una *subtangente* es una porción del eje x que se encuentra directamente bajo el segmento de una recta tangente desde el punto de contacto hasta el eje x. Encuentre las curvas que pasan a través del punto $(c, 1)$ y cuyas subtangentes todas tienen longitud c.

7. Se saca del horno un pastel de durazno a las 5:00 p.m. En ese momento está muy caliente: 100 °C. A las 5:10 p.m., su temperatura es 80 °C; a las 5:20 p.m. está a 65 °C. ¿Cuál es la temperatura en la habitación?

8. Durante la mañana del 2 de febrero comenzó a caer nieve y continuó de forma ininterrumpida hacia la tarde. A mediodía, una máquina comenzó a retirar la nieve de una carretera con rapidez constante. La máquina viajó 6 km desde el mediodía hasta la 1 p.m. pero solo 3 km de la 1 p.m. a las 2 p.m. ¿Cuándo comenzó a caer la nieve? [*Sugerencia*: para comenzar, sea t el tiempo medido en horas después del mediodía; sea $x(t)$ la distancia que recorre la máquina en el tiempo t; luego la rapidez de la máquina es dx/dt. Sea b el número de horas antes del mediodía en que comenzó a nevar. Determine una expresión para la altura de la nieve en el tiempo t. Luego use la información dada de que la tasa de remoción R (en m^3/h) es constante.]

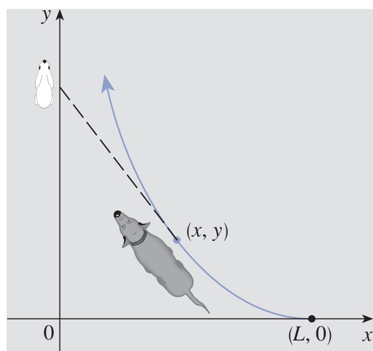


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. Un perro ve un conejo que corre en línea recta en un campo abierto y lo persigue. En un sistema coordenado rectangular (como el que se muestra en la figura), suponga:

(i) El conejo está en el origen y el perro en el punto $(L, 0)$ en el instante en que el perro ve por primera vez al conejo.

(ii) El conejo corre en la dirección positiva del eje y y el perro siempre corre directo hacia el conejo.

(iii) El perro corre con la misma rapidez que el conejo.

(a) Demuestre que la trayectoria del perro es la gráfica de la función $y = f(x)$, donde y satisface la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

(b) Determine la solución de la ecuación del inciso (a) que satisface las condiciones iniciales $y = y' = 0$ cuando $x = L$. [*Sugerencia*: sea $z = dy/dx$ en la ecuación diferencial y resuelva la ecuación de primer orden resultante para encontrar z; después integre z para encontrar y.]

(c) ¿Alguna vez el perro alcanza al conejo?

10. (a) Suponga que el perro del problema 9 corre dos veces más rápido que el conejo. Encuentre la ecuación diferencial para la trayectoria del perro. Después resuélvala para encontrar el punto donde el perro alcanza al conejo.

(b) Suponga que el perro corre a la mitad de la velocidad del conejo. ¿Qué tanto se acerca el perro al conejo? ¿Cuáles son sus posiciones cuando están más próximos?

11. Un ingeniero de planificación para una nueva planta de alumbre debe presentar algunas estimaciones a su compañía considerando la capacidad de un silo diseñado para contener bauxita hasta que se procese en alumbre. El mineral se asemeja al talco rosa y se vacía de un transportador en la parte superior del silo. El silo es un cilindro de 30 m de alto con un radio de 60 m. El transportador lleva $1500\pi\ m^3/h$ y el mineral mantiene una forma cónica cuyo radio es 1.5 veces su altura.

(a) Si, en cierto tiempo t, la pila tiene 20 m de altura, ¿en cuánto tiempo la pila alcanza la parte superior del silo?

(b) La administración quiere saber cuánto espacio quedará en el área de piso del silo cuando la pila sea de 20 m de altura. ¿Qué tan rápido crece el área de piso de la pila a esa altura?

(c) Suponga que un cargador comienza a remover el mineral a razón de $500\pi\ m^3/h$ cuando la altura de la pila alcanza 27 m. Suponga que la pila continúa manteniendo su forma. ¿En cuánto tiempo la pila alcanza la parte superior del silo en estas condiciones?

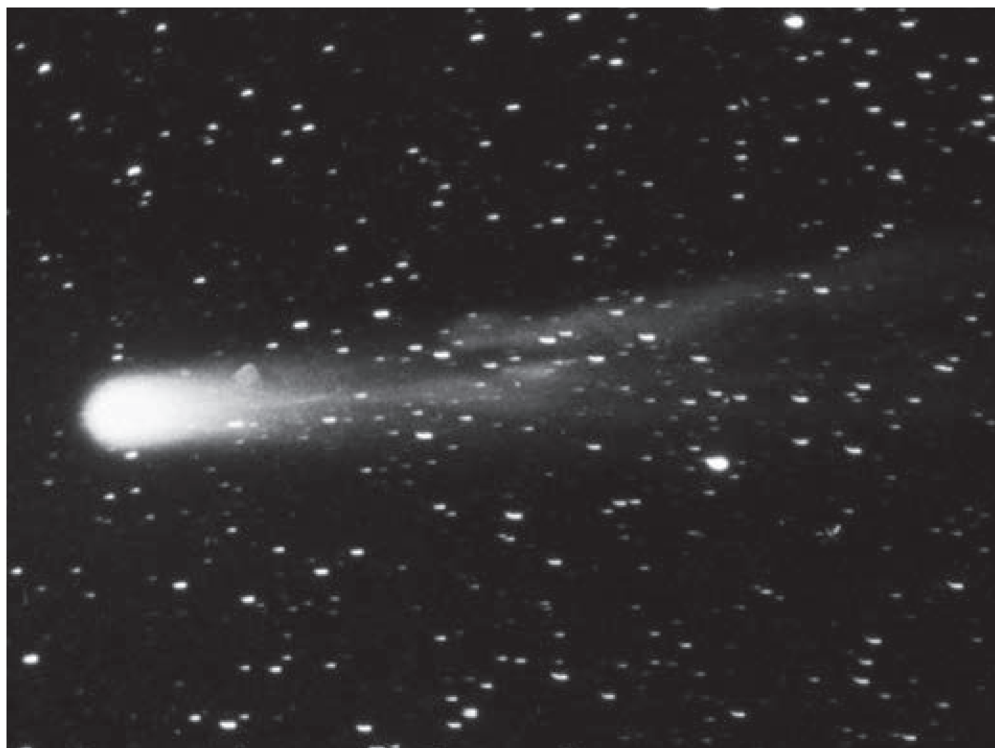
12. Encuentre la curva que pasa por el punto (3, 2) y tiene la propiedad de que, si una recta tangente se dibuja en cualquier punto P de la curva, entonces la parte de la recta tangente que yace en el primer cuadrante se biseca en P.

13. Recuerde que la recta normal a una curva en un punto P sobre la curva es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en P. Determine la curva que pasa por el punto (3, 2) y tiene la propiedad de que, si la recta normal se dibuja en cualquier punto sobre la curva, entonces la intersección y de la recta normal es siempre 6.

14. Encuentre las curvas con la propiedad de que, si la recta normal se dibuja en cualquier punto P sobre la curva, entonces la parte de la recta normal entre P y el eje x es bisecada por el eje y.

15. Encuentre todas las curvas con la propiedad de que, si una recta es trazada desde el origen a cualquier punto (x, y) sobre la curva, y después se traza la recta tangente a la curva en ese punto extendiéndola hasta cruzar el eje x, el resultado es un triángulo isósceles cuyos lados iguales se intersecan en (x, y).

10 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares



La fotografía muestra el cometa Halley cuando pasó por la Tierra en 1986. Regresará en 2061. Fue nombrado en honor de Edmond Halley (1656–1742), el científico inglés que primero reconoció su periodicidad. En la sección 10.6 verá cómo las coordenadas polares proporcionan una ecuación conveniente para la trayectoria elíptica de su órbita.

HASTA AHORA SE HAN DESCRITO las curvas planas expresando a y como una función de x $[y = f(x)]$ o a x como una función de y $[x = g(y)]$, o al dar una relación entre x y y que define a y implícitamente como una función de x $[f(x, y) = 0]$. En este capítulo se estudiarán dos métodos nuevos para describir curvas.

Algunas curvas, como la cicloide, se manejan mejor cuando x y y están dadas en términos de una tercera variable t llamada un parámetro $[x = f(t), y = g(t)]$. Otras curvas, tales como la cardioide, tienen una descripción más conveniente cuando se usa un nuevo sistema de coordenadas, llamado sistema de coordenadas polares.

10.1 Curvas definidas por ecuaciones paramétricas

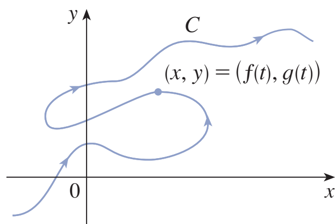


FIGURA 1

Imagine que una partícula se mueve a lo largo de la curva C que se muestra en la figura 1. Es imposible describir a C con una ecuación de la forma $y = f(x)$ porque C no pasa la prueba de la recta vertical. Pero las coordenadas x y y de la partícula son funciones del tiempo t y, por tanto, se puede escribir por medio de $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Este par de ecuaciones suele ser una forma más conveniente de describir una curva y da lugar a la siguiente definición.

Suponga que x y y se dan como funciones de una tercera variable t (llamada **parámetro**) mediante las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(llamadas **ecuaciones paramétricas**). Cada valor de t determina un punto (x, y), que se puede representar en un plano coordenado. Cuando t varía, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varía y traza una curva C, llamada **curva paramétrica**. El parámetro t no necesariamente representa el tiempo y, de hecho, se podría usar una letra distinta a t para el parámetro. Pero en muchas aplicaciones de curvas paramétricas, t denota el tiempo y, por tanto, se puede interpretar a $(x, y) = (f(t), g(t))$ como la posición de una partícula en el tiempo t.

EJEMPLO 1 Trace e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUCIÓN Cada valor de t da un punto sobre la curva, como se muestra en la tabla. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$, $y = 1$ y el punto correspondiente es $(0, 1)$. En la figura 2 se grafican los puntos (x, y) determinados por varios valores del parámetro y se unen para producir una curva.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

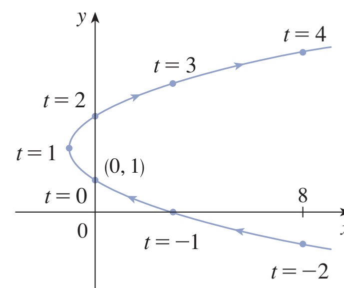


FIGURA 2

Una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas, se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas a medida que t aumenta. Observe que los puntos consecutivos marcados en la curva aparecen en intervalos de tiempo iguales, pero no a distancias iguales. Esto es porque la partícula desacelera y después acelera cuando aumenta t.

Parece, de la figura 2, que la curva trazada por la partícula es una parábola. Esto se puede confirmar al eliminar el parámetro t como sigue. De la segunda ecuación se obtiene $t = y - 1$ y se sustituye en la primera ecuación. Esto da

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

y por tanto la curva representada por las ecuaciones paramétricas dadas es la parábola $x = y^2 - 4y + 3$. ■

Esta ecuación en x y y describe *dónde* ha estado la partícula, pero no dice *cuándo* ha estado la partícula en un punto particular. Las ecuaciones paramétricas tienen una ventaja, dicen *cuándo* estuvo la partícula en un punto y la *dirección* de su movimiento.

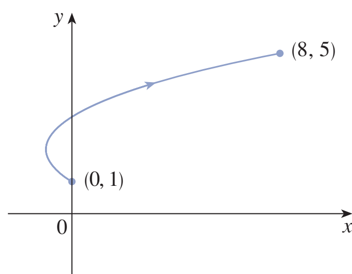


FIGURA 3

En el ejemplo 1 no hay restricciones para el parámetro t, así que suponga que t puede ser cualquier número real. Pero algunas veces se restringirá a t a un intervalo finito. Por ejemplo, la curva paramétrica

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

que se ve en la figura 3 es la parte de la parábola del ejemplo 1 que empieza en el punto (0, 1) y termina en el punto (8, 5). La punta de la flecha indica la dirección en que se ha trazado la curva cuando t crece de 0 a 4.

En general, la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tiene un **punto inicial** $(f(a), g(a))$ y un **punto terminal** $(f(b), g(b))$.

EJEMPLO 2 ¿Qué curva representan las siguientes ecuaciones paramétricas?

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

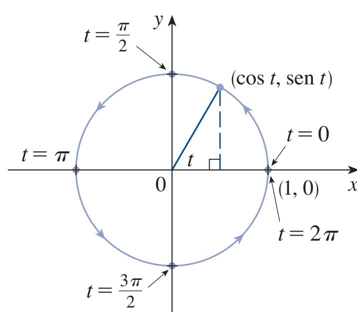


FIGURA 4

SOLUCIÓN Si se grafican algunos puntos, parece que la curva es una circunferencia, lo que se puede confirmar al eliminar t. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Por lo que el punto (x, y) se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Observe que en este ejemplo, el parámetro t puede interpretarse como el ángulo (en radianes) que se ve en la figura 4. Cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se mueve una vez alrededor de la circunferencia en dirección contraria a las manecillas del reloj a partir del punto (1, 0). ■

EJEMPLO 3 ¿Qué curva representan las ecuaciones paramétricas dadas?

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

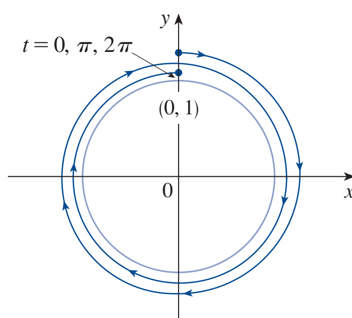


FIGURA 5

SOLUCIÓN Otra vez se tiene

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

así que nuevamente las ecuaciones paramétricas representan la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Pero cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ empieza en (0, 1) y se mueve *dos veces* alrededor de la circunferencia en dirección de las manecillas del reloj, como se indica en la figura 5. ■

Los ejemplos 2 y 3 muestran que diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden representar la misma curva. Por lo que se distingue entre una *curva*, como un conjunto de puntos, y una *curva paramétrica*, en la que los puntos están trazados de un modo particular.

EJEMPLO 4 Encuentre las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

SOLUCIÓN Si se toman las ecuaciones de la circunferencia unitaria del ejemplo 2 y se multiplican las expresiones para x y y por r, se obtiene $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$. Es posible verificar que estas ecuaciones representan una circunferencia con radio r y centro en el origen trazado en dirección contraria a las manecillas del reloj. Ahora

desplace h unidades en la dirección x y k unidades en la dirección y, para obtener las ecuaciones paramétricas de la circunferencia (figura 6) con centro (h, k) y radio r:

$$x = h + r\cos t \qquad y = k + r \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

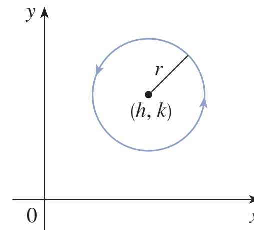


FIGURA 6
$x = h + r\cos t,\ y = k + r \operatorname{sen} t$

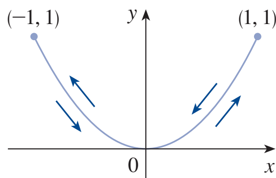


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Trace la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$.

SOLUCIÓN Observe que $y = (\operatorname{sen} t)^2 = x^2$ y por tanto el punto (x, y) se mueve sobre la parábola $y = x^2$. Pero también observe que, como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$, se tiene $-1 \leqslant x \leqslant 1$, por lo que las ecuaciones paramétricas representan solo la parte de la parábola para la cual $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Como sen t es periódica, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ se mueve infinitamente en vaivén a lo largo de la parábola de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$. (Véase la figura 7.)

TEC En Module 10.1A se presenta una animación de la relación entre el movimiento a lo largo de la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ y el movimiento a lo largo de las gráficas de f y g como funciones de t. Al hacer clic en TRIG se presenta a la familia de curvas paramétricas

$$x = a\cos bt \qquad y = c \operatorname{sen} dt$$

Si elige $a = b = c = d = 1$ y hace clic en **animate**, verá cómo las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ se relacionan con la circunferencia en el ejemplo 2. Si elige $a = b = c = 1$, $d = 2$, verá gráficas como las de la figura 8. Al hacer clic en **animate** o moviendo t a la derecha, podrá ver del código de color cómo se mueve con la trayectoria de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} 2t$ que corresponden al movimiento a lo largo de la curva paramétrica, llamada **figura de Lissajous.**

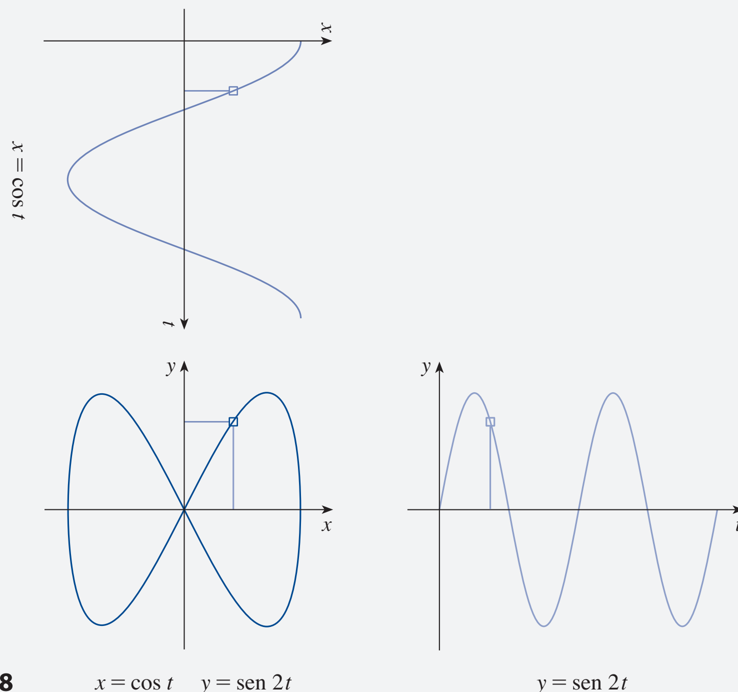


FIGURA 8 $x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} 2t$ $\qquad$ $y = \operatorname{sen} 2t$

Dispositivos de graficación

La mayor parte de las calculadoras y los programas de graficación se pueden usar para trazar la gráfica de curvas descritas por ecuaciones paramétricas. De hecho, es instructivo observar una curva paramétrica dibujada con una calculadora, porque los puntos se ubican en orden conforme se incrementan los valores del parámetro correspondiente.

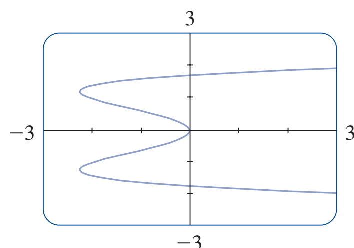


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Utilice un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de la curva $x = y^4 - 3y^2$.

SOLUCIÓN Sea $t = y$ el parámetro, entonces se tienen las ecuaciones

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Usando estas ecuaciones paramétricas para trazar la gráfica de la curva, se obtiene la figura 9. Se podría resolver la ecuación dada ($x = y^4 - 3y^2$) para y como cuatro funciones de x y graficarlas individualmente, pero las ecuaciones paramétricas proporcionan un método mucho más fácil. ■

En general, si se necesita trazar la gráfica de una ecuación de la forma $x = g(y)$, se pueden usar las ecuaciones paramétricas

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Observe también que las curvas con ecuaciones $y = f(x)$ (aquellas con las que se está familiarizado; gráficas de funciones) también se pueden considerar como curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = f(t)$$

Los dispositivos de graficación son particularmente útiles para trazar curvas complicadas. Por ejemplo, las curvas que se muestran en las figuras 10, 11 y 12 serían virtualmente imposibles de hacer a mano.

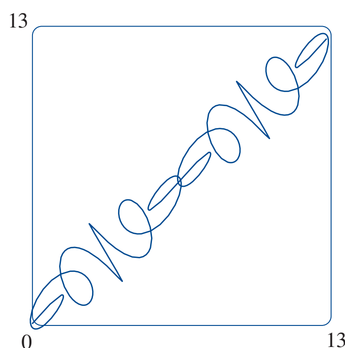


FIGURA 10
$x = t + \operatorname{sen} 5t$
$y = t + \operatorname{sen} 6t$

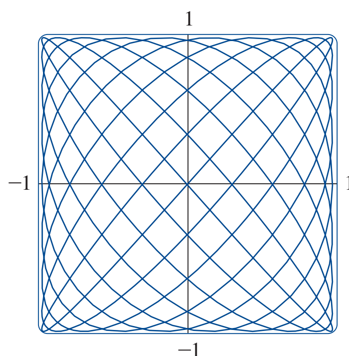


FIGURA 11
$x = \operatorname{sen} 9t$
$y = \operatorname{sen} 10t$

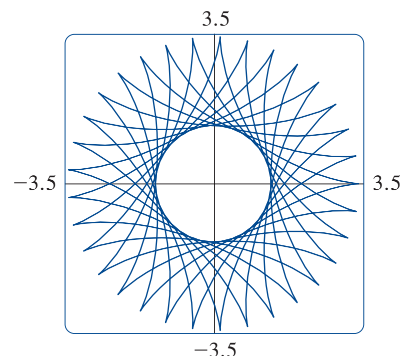


FIGURA 12
$x = 2.3 \cos 10t + \cos 23t$
$y = 2.3 \operatorname{sen} 10t - \operatorname{sen} 23t$

Uno de los más importantes usos de las curvas paramétricas es el diseño asistido por computadora (CAD). En el proyecto de laboratorio después de la sección 10.2 se investigarán curvas paramétricas especiales, llamadas **curvas de Bézier**, que son ampliamente utilizadas en manufactura, especialmente en la industria automotriz. Estas curvas también se emplean en formas especiales de letras y otros símbolos de impresión en láser.

La cicloide

TEC En Module 10.1B se muestra una animación de cómo se forma una cicloide a partir del movimiento de un círculo.

EJEMPLO 7 La curva trazada por un punto P sobre la circunferencia de un círculo cuando este rueda a lo largo de una recta se llama **cicloide** (véase la figura 13). Si el círculo tiene radio r y rueda a lo largo del eje x, y si una posición de P está en el origen, determine las ecuaciones paramétricas para la cicloide.

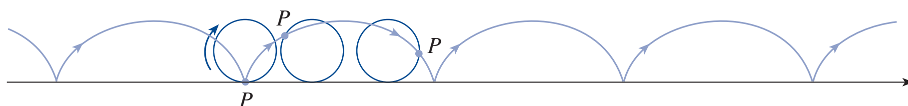


FIGURA 13

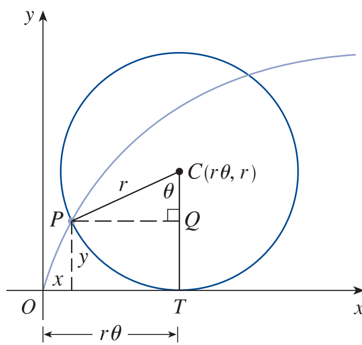


FIGURA 14

SOLUCIÓN Se elige como parámetro al ángulo de rotación θ del círculo ($\theta = 0$ cuando P está en el origen). Suponga que el círculo ha girado θ radianes. Debido a que el círculo ha estado en contacto con la recta, se ve de la figura 14, que la distancia que ha rodado desde el origen es

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

Por tanto, el centro del círculo es $C(r\theta, r)$. Sean (x, y) las coordenadas de P. Entonces, de la figura 14 se ve que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

Así que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

1 $$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Un arco de la cicloide viene de una rotación del círculo y, por tanto, se describe mediante $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Aunque las ecuaciones 1 se obtuvieron de la figura 14, que ilustra el caso donde $0 < \theta < \pi/2$, se puede ver que son válidas para otros valores de θ (véase el ejercicio 39).

Aunque es posible eliminar el parámetro θ de las ecuaciones 1, la ecuación cartesiana resultante en x y y es muy complicada y no es tan conveniente para trabajar como con las ecuaciones paramétricas. ■

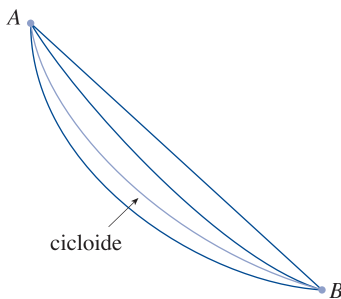


FIGURA 15

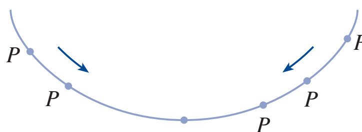


FIGURA 16

Una de las primeras personas en estudiar la cicloide fue Galileo, quien propuso que los puentes se construyeran en forma de cicloides, y quien trató de encontrar el área bajo un arco de una cicloide. Después esta curva surgió en conexión con el **problema de la braquistócrona**: encuentre la curva a lo largo de la cual se desliza una partícula en el tiempo más corto (bajo la influencia de la gravedad) de un punto A a un punto B más bajo pero no directamente debajo de A. El matemático suizo John Bernoulli, quien planteó este problema en 1696, demostró que entre las curvas posibles que unen A con B, como en la figura 15, la partícula tomará el menor tiempo de deslizamiento de A a B si la curva es parte de un arco invertido de una cicloide.

El físico holandés Huygens demostró que la cicloide es también la solución al **problema de la tautócrona**; es decir, sin importar dónde se coloque una partícula P en una cicloide invertida, le toma el mismo tiempo deslizarse hasta el fondo (véase la figura 16). Huygens propuso que los relojes de péndulo (que él inventó) oscilaran en arcos cicloidales, porque en tal caso el péndulo tarda el mismo tiempo en completar una oscilación si oscila por un arco amplio o pequeño.

■ Familias de curvas paramétricas

EJEMPLO 8 Investigue la familia de curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = a + \cos t \qquad\qquad y = a \tan t + \operatorname{sen} t$$

¿Qué tienen estas curvas en común? ¿Cómo cambia su forma cuando a crece?

SOLUCIÓN Se emplea un dispositivo de graficación para producir las gráficas para los casos $a = -2, -1, -0.5, -0.2, 0, 0.5, 1$ y 2 que se muestran en la figura 17. Observe que todas estas curvas (excepto el caso $a = 0$) tienen dos ramas, y ambas se aproximan a la asíntota vertical $x = a$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o por la derecha.

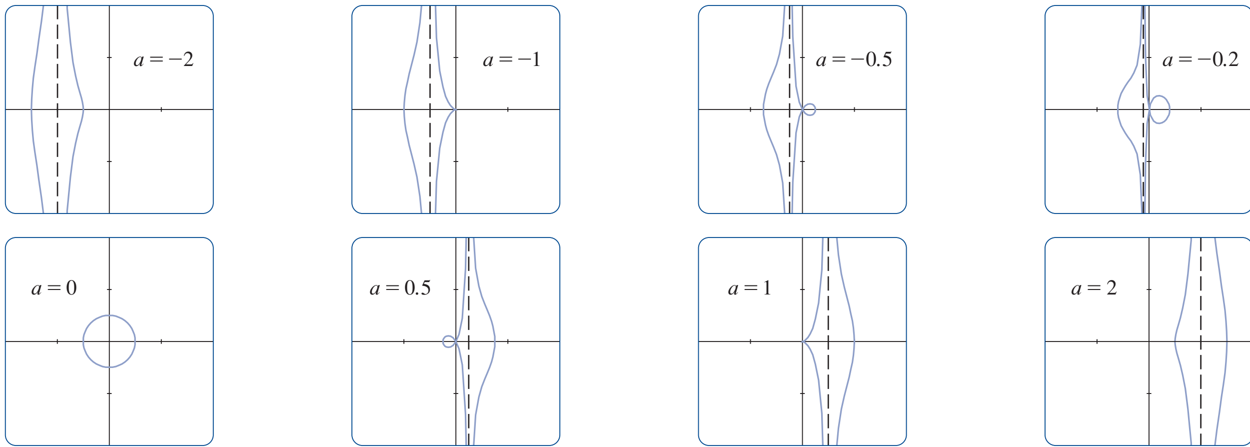


FIGURA 17
Miembros de la familia $x = a + \cos t$, $y = a \tan t + \operatorname{sen} t$, todas graficadas en el rectángulo de vista $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Cuando $a < -1$, ambas ramas son suaves, pero cuando a llega a -1, la rama derecha adquiere un punto agudo llamado *cúspide*. Para a entre -1 y 0 la cúspide se convierte en un lazo, que se vuelve más grande conforme a se aproxima a 0. Cuando $a = 0$, ambas ramas se juntan y forman una circunferencia (véase el ejemplo 2). Para a entre 0 y 1, la rama izquierda tiene un lazo, que se contrae para volverse una cúspide cuando $a = 1$. Para $a > 1$, las ramas se suavizan de nuevo y cuando a crece más, se curvan menos. Observe que las curvas con a positiva son reflexiones respecto al eje y de las curvas correspondientes con a negativa.

Estas curvas se llaman **concoides de Nicomedes** en honor del erudito de la antigua Grecia, Nicomedes. Las llamó concoides porque la forma de sus ramas externas se asemeja a la concha de un caracol o de un mejillón. ■

10.1 EJERCICIOS

1-4 Trace la curva utilizando las ecuaciones paramétricas para ubicar distintos puntos de esta. Indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

1. $x = 1 - t^2, \quad y = 2t - t^2, \quad -1 \leqslant t \leqslant 2$

2. $x = t^3 + t, \quad y = t^2 + 2, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

3. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$

4. $x = 2\cos t, \quad y = t - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

5-10
(a) Trace la curva usando las ecuaciones paramétricas para ubicar puntos. Indique con una flecha la dirección en la cual se traza la curva cuando t aumenta.
(b) Elimine el parámetro para encontrar la ecuación cartesiana de la curva.

5. $x = 2t - 1, \quad y = \frac{1}{2}t + 1$

6. $x = 3t + 2, \quad y = 2t + 3$

7. $x = t^2 - 3, \quad y = t + 2, \quad -3 \leqslant t \leqslant 3$

8. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

9. $x = 1 - t^2, \quad y = t - 2, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

10. $x = t - 1, \quad y = t^3 + 1, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

11-18
(a) Elimine el parámetro para encontrar una ecuación cartesiana de la curva.
(b) Trace la curva e indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando crece el parámetro.

11. $x = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta, \quad y = \cos \frac{1}{2}\theta, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $x = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad y = 2\operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

13. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi/2$

14. $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

15. $x = t^2, \quad y = \ln t$

16. $x = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t - 1}$

17. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1$

18. $x = \tan^2\theta, \quad y = \sec\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

19-22 Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado.

19. $x = 5 + 2\cos \pi t, \quad y = 3 + 2 \operatorname{sen} \pi t, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

20. $x = 2 + \operatorname{sen} t, \quad y = 1 + 3\cos t, \quad \pi/2 \leqslant t \leqslant 2\pi$

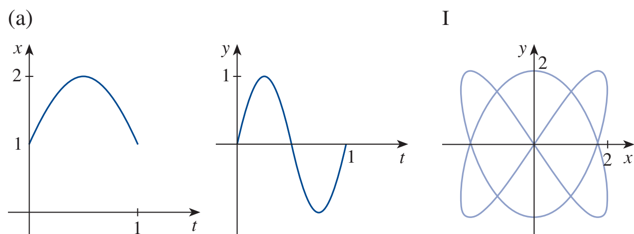
21. $x = 5 \operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

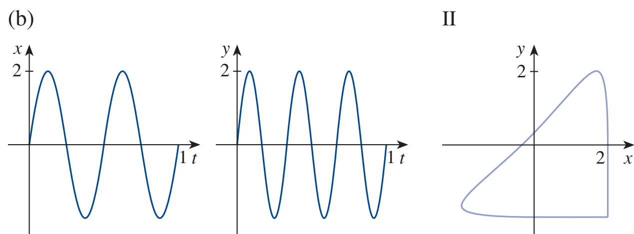
22. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

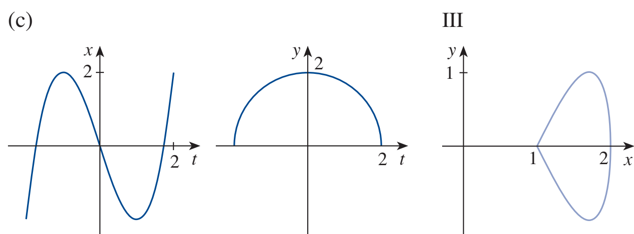
---

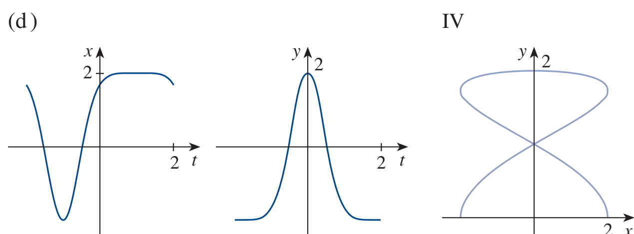
23. Suponga que una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde el rango de f es $[1, 4]$ y el rango de g es $[2, 3]$. ¿Qué se puede decir acerca de la curva?

24. Relacione las gráficas de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en (a)–(d) con las curvas paramétricas etiquetadas I-IV. Argumente sus elecciones.



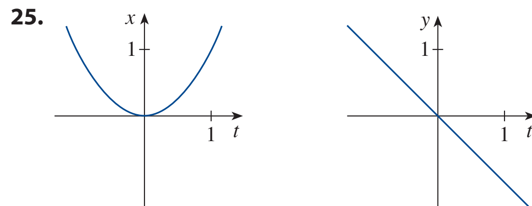




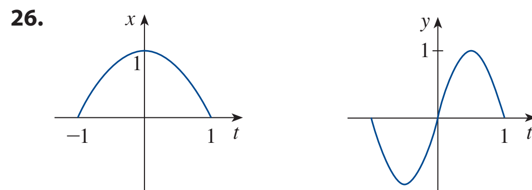


25-27 Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para trazar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

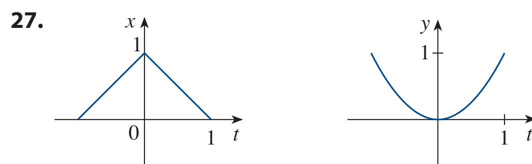
25.



26.



27.



---

28. Relacione las curvas paramétricas con las curvas etiquetadas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No utilice dispositivos de graficación.)

(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

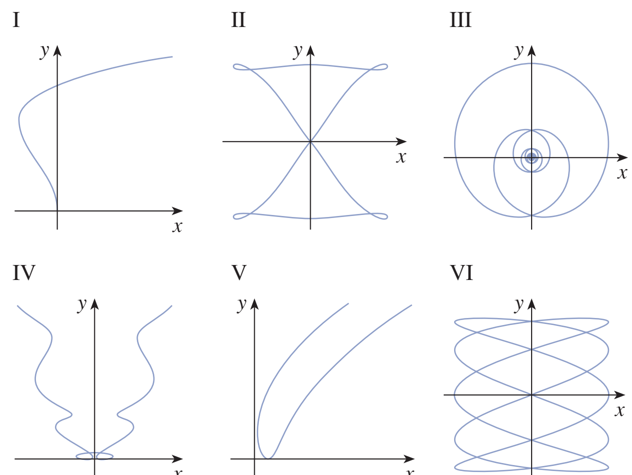
(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

(c) $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 2t)$

(d) $x = \cos 5t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

(e) $x = t + \operatorname{sen} 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

(f) $x = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$



29. Trace la gráfica de la curva $x = y - 2 \operatorname{sen} \pi y$.

30. Trace la gráfica de las curvas $y = x^3 - 4x$ y $x = y^3 - 4y$, y encuentre sus puntos de intersección con una aproximación de un decimal.

31. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, describen el segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Encuentre las ecuaciones paramétricas para representar el segmento de recta de $(-2, 7)$ a $(3, -1)$.

32. Utilice un dispositivo de graficación y el resultado del ejercicio 31(a) para dibujar el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(1, 5)$.

33. Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve a lo largo de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ de la manera descrita.

(a) Una vuelta en dirección de las manecillas del reloj, empezando en (2, 1).

(b) Tres vueltas en dirección contraria a las manecillas del reloj, empezando en (2, 1).

(c) Media vuelta en dirección contraria a las manecillas del reloj, empezando en (0, 3).

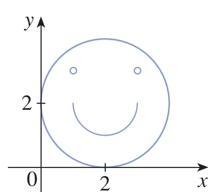
34. (a) Encuentre ecuaciones paramétricas para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugerencia*: modifique las ecuaciones de la circunferencia del ejemplo 2.]

(b) Utilice estas ecuaciones paramétricas para trazar la gráfica en la elipse cuando $a = 3$ y $b = 1, 2, 4$ y 8.

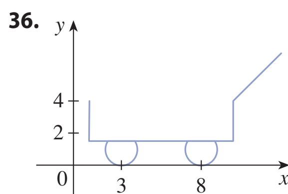
(c) ¿Cómo cambia la forma de la elipse cuando b varía?

35-36 Utilice una calculadora graficadora o computadora para reproducir el dibujo.

35.



36.



37-38 Compare las curvas representadas por las ecuaciones paramétricas. ¿Cómo difieren?

37. (a) $x = t^3, \quad y = t^2$ (b) $x = t^6, \quad y = t^4$

(c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

38. (a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$

(c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

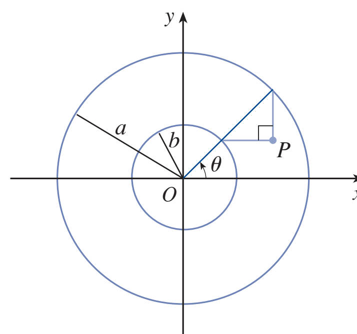
39. Deduzca las ecuaciones 1 para el caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Sea P un punto a una distancia d del centro de una circunferencia de radio r. La curva trazada por P cuando el círculo rueda a lo largo de una línea recta se llama **trocoide**. (Piense en el movimiento de un punto sobre el rayo de una rueda de bicicleta.) La cicloide es el caso especial de una trocoide con $d = r$. Utilizando el mismo parámetro θ como para la cicloide y, suponiendo que la recta es el eje de las x y $\theta = 0$ cuando P es uno de sus puntos mínimos, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

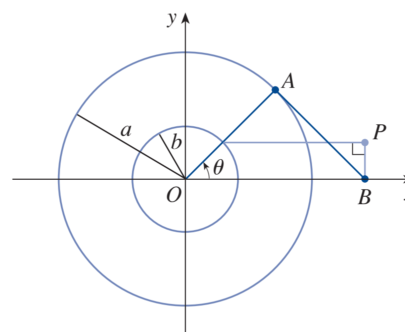
$$x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Trace la trocoide para los casos $d < r$ y $d > r$.

41. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas para la curva que consiste de todas las posibles posiciones del punto P en la figura, utilizando el ángulo θ como parámetro. Después elimine el parámetro e identifique la curva.



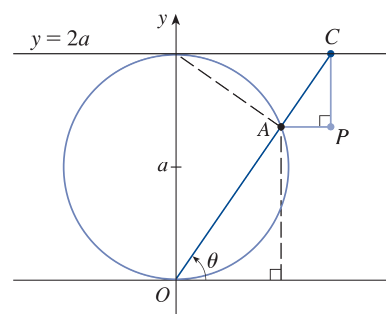
42. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva que consiste de todas las posiciones posibles del punto P en la figura, usando el ángulo θ como parámetro. El segmento de recta AB es tangente a la circunferencia más grande.



43. Una curva, llamada **bruja de María Agnesi**, consiste de todas las posibles posiciones del punto P en la figura. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva pueden expresarse como

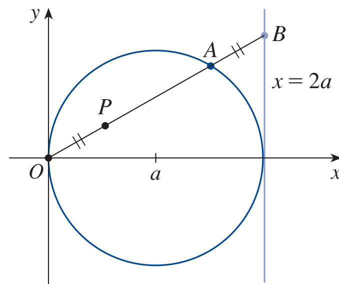
$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$

Trace la curva.



44. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para el conjunto de todos los puntos P como los que se muestran en la figura, tales que $|OP| = |AB|$. (Esta curva se llama **cisoide de Diocles** en honor del sabio griego Diocles, quien introdujo la cisoide como un método gráfico para construir el lado de un cubo cuyo volumen es dos veces el de un cubo dado.)

(b) Utilice la descripción geométrica para dibujar a mano un trazo de la curva. Verifique su trabajo utilizando las ecuaciones paramétricas para trazar la gráfica de la curva.



45. Suponga que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

y la posición de una segunda partícula está dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(a) Trace la gráfica de las trayectorias de ambas partículas. ¿Cuántos puntos de intersección hay?

(b) ¿Algunos de estos puntos de intersección son *puntos de colisión*? En otras palabras ¿las partículas están en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, encuentre los puntos de colisión.

(c) Describa qué pasa si la trayectoria de la segunda partícula está dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

46. Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo a un ángulo α por encima de la horizontal y se supone que la resistencia del aire es insignifcante, entonces su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 m/s²).

(a) Si un arma es disparada con $\alpha = 30°$ y $v_0 = 500$ m/s, ¿cuándo caerá la bala al suelo? ¿A qué distancia del arma llegará al suelo? ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la bala?

(b) Utilice un dispositivo de graficación para verificar sus respuestas al inciso (a). Después trace la gráfica de la trayectoria del proyectil para otros valores del ángulo α para ver dónde pegará en el suelo. Resuma sus hallazgos.

(c) Demuestre que la trayectoria es parabólica al eliminar el parámetro.

47. Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando c crece? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

48. Las **curvas catastróficas cola de golondrina** están definidas por las ecuaciones paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Trace la gráfica de varias de estas curvas. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Cómo cambian cuando c crece?

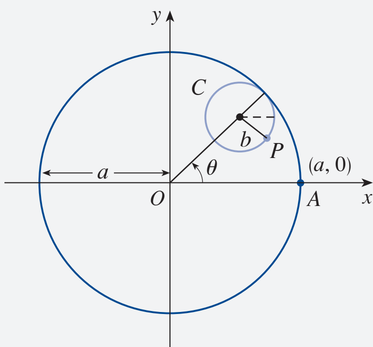
49. Trace la gráfica de varios miembros de la familia de curvas con ecuaciones paramétricas $x = t + a \cos t$, $y = t + a \operatorname{sen} t$, donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando a crece? ¿Para cuáles valores de a la curva tiene un lazo?

50. Trace la gráfica de varios miembros de la familia de curvas $x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} nt$, $y = \cos t + \cos nt$ donde n es un entero positivo. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Qué pasa cuando n crece?

51. Las curvas con ecuaciones $x = a \operatorname{sen} nt$, $y = b \cos t$ se llaman **figuras de Lissajous**. Investigue cómo varían estas curvas cuando varían a, b y n. (Tome n como un entero positivo.)

52. Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} ct$, donde $c > 0$. Empiece por hacer c entero positivo y vea qué pasa con la forma cuando c crece. Después explore algunas de las posibilidades que ocurren cuando c es una fracción.

PROYECTO DE LABORATORIO  CIRCUNFERENCIAS QUE CORREN ALREDEDOR DE CIRCUNFERENCIAS



En este proyecto se investigan familias de curvas, llamadas *hipocicloides* y *epicicloides*, que son generadas por el movimiento de un punto sobre una circunferencia que rueda dentro o fuera de otra circunferencia.

1. Una **hipocicloide** es una curva trazada por un punto fijo P sobre la circunferencia C de radio b cuando C rueda sobre el interior de la circunferencia con centro en O y radio a. Demuestre que si la posición inicial de P es $(a, 0)$ y el parámetro θ se elige como en la figura, entonces las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right) \qquad y = (a - b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right)$$

TEC Recurra a Module 10.1B para ver cómo se forman las hipocicloides y epicicloides por el movimiento de círculos rodando.

2. Utilice un dispositivo de graficación (o el graficador interactivo en TEC Module 10.1B) para trazar las gráficas de hipocicloides con a entero positivo y $b = 1$. ¿Cómo afecta el valor de a a la gráfica? Demuestre que si se toma $a = 4$, entonces las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide se reducen a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\,\text{sen}^3\theta$$

Esta curva se llama **hipocicloide de cuatro cúspides**, o un **astroide**.

3. Ahora intente $b = 1$ y $a = n/d$, una fracción donde n y d no tienen factores comunes. Primero haga $n = 1$ e intente determinar gráficamente el efecto del denominador d sobre la forma de la gráfica. Después haga que n varíe mientras d permanece constante. ¿Qué pasa cuando $n = d + 1$?

4. ¿Qué pasa si $b = 1$ y a es irracional? Experimente con un número irracional como $\sqrt{2}$ o $e - 2$. Tome valores cada vez más grandes para θ y especule sobre qué pasaría si se graficara la hipocicloide para todos los valores reales de θ.

5. Si el círculo C rueda sobre el *exterior* de la circunferencia fija, la curva trazada por P se llama **epicicloide**. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la epicicloide.

6. Investigue las posibles formas para las epicicloides. Use métodos semejantes a los problemas 2-4.

10.2 Cálculo con curvas paramétricas

Una vez que se ha visto cómo representar ecuaciones paramétricas, se aplicarán los métodos de cálculo a las curvas paramétricas. En particular, se resolverán problemas que implican tangentes, áreas, longitudes de arco y áreas de superficies.

Tangentes

Suponga que f y g son funciones derivables y se quiere encontrar la recta tangente en un punto sobre la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde y es también una función derivable de x. Entonces la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Si $dx/dt \neq 0$, se puede resolver para dy/dx:

Si se piensa la curva como trazada por el movimiento de una partícula, entonces dy/dt y dx/dt son las velocidades verticales y horizontales de la partícula y la fórmula 1 dice que la pendiente de la recta tangente es el cociente de estas velocidades.

1
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

La ecuación 1 (que puede usted pensar como si se eliminaran las dt) le posibilita para encontrar la pendiente dy/dx de la recta tangente a una curva paramétrica, sin tener que eliminar el parámetro t. En (1) se ve que la curva tiene una tangente horizontal cuando $dy/dt = 0$ (siempre que $dx/dt \neq 0$) y tiene una recta tangente vertical cuando $dx/dt = 0$ (siempre que $dy/dt \neq 0$). Esta información es útil para trazar curvas paramétricas.

Como se sabe del capítulo 4, también es útil considerar d^2y/dx^2. Esto se puede encontrar reemplazando y por dy/dx en la ecuación 1:

Note que $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

EJEMPLO 1 Una curva C está definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.
(a) Demuestre que C tiene dos rectas tangentes en el punto (3, 0) y encuentre sus ecuaciones.
(b) Encuentre el punto sobre C donde la recta tangente es horizontal o vertical.
(c) Determine dónde la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
(d) Trace la curva.

SOLUCIÓN
(a) Observe que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ cuando $t = 0$ o $t = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, el punto (3, 0) sobre la curva C viene de dos valores del parámetro, $t = \sqrt{3}$ y $t = -\sqrt{3}$. Esto indica que C se cruza a sí misma en (3, 0). Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

la pendiente de la recta tangente cuando $t = \pm\sqrt{3}$ es $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$, por lo que las ecuaciones de las rectas tangentes en (3, 0) son

$$y = \sqrt{3}\,(x - 3) \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$$

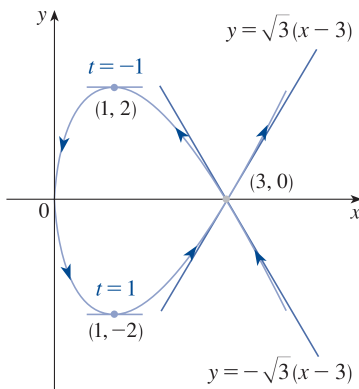


FIGURA 1

(b) C tiene una recta tangente horizontal cuando $dy/dx = 0$; esto es, cuando $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$. Puesto que $dy/dt = 3t^2 - 3$, esto sucede cuando $t^2 = 1$, es decir, $t = \pm 1$. Los puntos correspondientes sobre C son $(1, -2)$ y $(1, 2)$. C tiene una recta tangente vertical cuando $dx/dt = 2t = 0$, es decir, $t = 0$. (Observe que ahí $dy/dt \neq 0$.) El punto correspondiente sobre C es (0, 0).

(c) Para determinar concavidades se calculan segundas derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

Por lo que la curva es cóncava hacia arriba cuando $t > 0$ y cóncava hacia abajo cuando $t < 0$.

(d) Utilizando la información de los incisos (b) y (c), trace C en la figura 1. ■

EJEMPLO 2
(a) Encuentre la recta tangente a la cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ en el punto donde $\theta = \pi/3$. (Véase el ejemplo 10.1.7.)
(b) ¿En qué puntos la recta tangente es horizontal? ¿Cuándo es vertical?

SOLUCIÓN
(a) La pendiente de la recta tangente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r(1 - \cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se tiene

$$x = r\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{2}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es $\sqrt{3}$ y su ecuación es

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{o} \qquad \sqrt{3}\,x - y = r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

La recta tangente se traza en la figura 2.

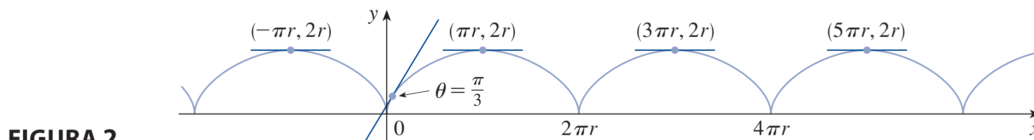


FIGURA 2

(b) La recta tangente es horizontal cuando $dy/dx = 0$, lo cual ocurre cuando sen $\theta = 0$ y $1 - \cos\theta \neq 0$, es decir, $\theta = (2n - 1)\pi$, con n un entero. El punto correspondiente sobre la cicloide es $((2n - 1)\pi r, 2r)$.

Cuando $\theta = 2n\pi$, tanto $dx/d\theta$ como $dy/d\theta$ son cero. De la gráfica, parece que hay rectas tangentes verticales en esos puntos. Esto es verificable por medio de la regla de L'Hôpital como sigue:

$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \infty$$

Un cálculo semejante muestra que $dy/dx \to -\infty$ cuando $\theta \to 2n\pi^-$, así que finalmente existen rectas tangentes verticales cuando $\theta = 2n\pi$, esto es, cuando $x = 2n\pi r$. ■

Áreas

Se sabe que el área bajo una curva $y = F(x)$ de a a b es $A = \int_a^b F(x)\,dx$, donde $F(x) \geqslant 0$. Si la curva se traza por medio de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, entonces se puede calcular una fórmula para el área utilizando la regla de la sustitución para integrales definidas como sigue:

Los límites de integración para t se encuentran como de costumbre con la regla de sustitución. Cuando $x = a$, t es α o β. Cuando $x = b$, t es el valor restante.

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \qquad \left[\text{o} \quad \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right]$$

EJEMPLO 3 Encuentre el área bajo uno de los arcos de la cicloide

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

(Véase la figura 3.)

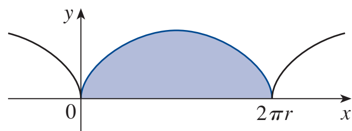


FIGURA 3

SOLUCIÓN Un arco de la cicloide está dado por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Utilizando la regla de sustitución con $y = r(1 - \cos\theta)$ y $dx = r(1 - \cos\theta)\,d\theta$, se tiene

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)\,r(1 - \cos\theta)\,d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta \\ &= r^2 \left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= r^2\left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2 \end{aligned}$$ ■

El resultado del ejemplo 3 dice que el área bajo un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que al rodar genera la cicloide (ejemplo 10.1.7). Galileo intuyó este resultado pero fue demostrado por el matemático francés Roberval y el matemático italiano Torricelli.

Longitud de arco

Ya se sabe cómo encontrar la longitud L de una curva C dada en la forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. La fórmula 8.1.3 dice que, si F' es continua, entonces

2 $$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Suponga que C también se puede describir mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde $dx/dt = f'(t) > 0$. Esto significa que C es recorrida una vez, de izquierda a derecha, cuando t se incrementa de α a β y $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$. Al sustituir la fórmula 1 en la fórmula 2 con la regla de sustitución, se obtiene

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

Como $dx/dt > 0$, se tiene

3 $$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

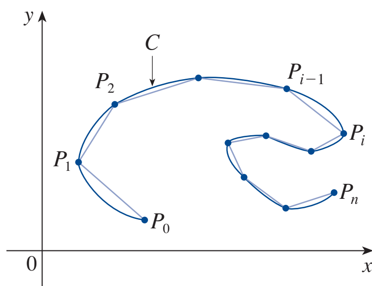


FIGURA 4

Incluso si C no se puede expresar en la forma $y = F(x)$, la fórmula aún es válida pero se obtiene por aproximaciones poligonales. Se divide el intervalo de parámetro $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos de igual ancho Δt. Si $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ son los puntos finales de estos subintervalos, entonces $x_i = f(t_i)$ y $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de los puntos $P_i(x_i, y_i)$ que están sobre C y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ se aproxima a C. (Véase la figura 4.)

Como en la sección 8.1, se define la longitud L de C como el límite de las longitudes de estos polígonos de aproximación cuando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Cuando se aplica el teorema del valor medio a f sobre el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, da un número t_i^* en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Si se hace $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, esta ecuación se convierte en

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\, \Delta t$$

Del mismo modo, cuando se aplica a g, el teorema del valor medio da un número t_i^{**} en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\, \Delta t$$

Por tanto

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\Delta t]^2}$$
$$= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t$$

y así

4 $$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\, \Delta t$$

La suma en (4) se parece a una suma de Riemann para la función $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$ pero no es exactamente una suma de Riemann porque, en general, $t_i^* \neq t_i^{**}$. Sin embargo, si f' y g' son continuas, se puede demostrar que el límite en (4) es el mismo como si t_i^* y t_i^{**} fueran iguales, es decir

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Por lo que con la notación de Leibniz, se tiene el siguiente resultado, el cual tiene la misma forma que la fórmula 3.

5 Teorema Si una curva C se describe mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde f' y g' son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y C es recorrida una sola vez cuando t aumenta de α a β, entonces la longitud de C es

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que la fórmula del teorema 5 es consistente con las fórmulas generales $L = \int ds$ y $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ de la sección 8.1.

EJEMPLO 4 Si se usa la representación de la circunferencia unitaria dada en el ejemplo 10.1.2,

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

entonces $dx/dt = -\operatorname{sen} t$ y $dy/dt = \cos t$, de modo que el teorema 5 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

como se esperaba. Si, por otro lado, se usa la representación dada en el ejemplo 10.1.3,

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

entonces $dx/dt = 2 \cos 2t$, $dy/dt = -2 \operatorname{sen} 2t$, y la integral del teorema 5 da

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 2t}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$$

Observe que la integral da dos veces la longitud de arco de la circunferencia porque cuando t crece de 0 a 2π, el punto $(\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ recorre la circunferencia dos veces. En general, cuando se encuentra la longitud de una curva C a partir de una representación paramétrica, se debe asegurar que C sea recorrida una sola vez cuando t crece de α a β. ■

EJEMPLO 5 Encuentre la longitud de un arco de la cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 3, se ve que un arco se describe por el intervalo del parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Como

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r \operatorname{sen}\theta$$

se tiene

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta$$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

El resultado del ejemplo 5 dice que la longitud de un arco de una cicloide es ocho veces el radio del círculo generador (véase la figura 5). El primero en demostrar esto fue Sir Christopher Wren, en 1658, quien posteriormente fue el arquitecto de la catedral de Saint Paul, en Londres.

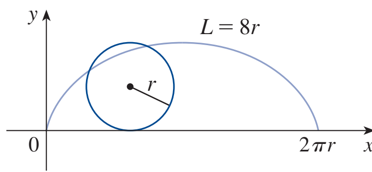


FIGURA 5

Para evaluar esta integral se utiliza la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ con $\theta = 2x$, la cual da $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$. Como $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, se tiene $0 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi$ y entonces $\operatorname{sen}(\theta/2) \geqslant 0$. Por tanto

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)} = 2\left|\operatorname{sen}(\theta/2)\right| = 2\operatorname{sen}(\theta/2)$$

y así

$$L = 2r\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta/2)\, d\theta = 2r\Big[-2\cos(\theta/2)\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2r[2 + 2] = 8r$$ ■

Área de una superficie

En la misma forma que para la longitud de arco, se puede adaptar la fórmula 8.2.5 para obtener una fórmula para el área de una superficie. Suponga que la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde f', g' son continuas y $g(t) \geqslant 0$, se hace rotar en torno al eje x. Si C se recorre exactamente una vez cuando t se incrementa de α a β, entonces el área de la superficie resultante está dada por

6
$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Las fórmulas simbólicas generales $S = \int 2\pi y\, ds$ y $S = \int 2\pi x\, ds$ (fórmulas 8.2.7 y 8.2.8) aún son válidas, pero para curvas paramétricas se usa

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

EJEMPLO 6 Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

SOLUCIÓN La esfera es obtenida al rotar el semicírculo

$$x = r\cos t \qquad y = r\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

en torno al eje x. Por tanto, de la fórmula 6, se obtiene

$$S = \int_0^\pi 2\pi r\operatorname{sen} t\sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi\int_0^\pi r\operatorname{sen} t\sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi\int_0^\pi r\operatorname{sen} t \cdot r\, dt$$

$$= 2\pi r^2\int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)\Big]_0^\pi = 4\pi r^2$$ ■

10.2 EJERCICIOS

1-2 Encuentre dy/dx.

1. $x = \dfrac{t}{1+t}, \quad y = \sqrt{1+t}$

2. $x = te^t, \quad y = t + \text{sen}\, t$

3-6 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor del parámetro dado.

3. $x = t^3 + 1, \quad y = t^4 + t; \quad t = -1$

4. $x = \sqrt{t}, \quad y = t^2 - 2t; \quad t = 4$

5. $x = t^4 + 1, \quad y = t^3 + t; \quad t = -1$

6. $x = e^t \,\text{sen}\, \pi t, \quad y = e^{2t}; \quad t = 0$

7-8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado por dos métodos: (a) sin eliminar el parámetro y (b) eliminando primero el parámetro.

7. $x = 1 + \ln t, \quad y = t^2 + 2; \quad (1, 3)$

8. $x = 1 + \sqrt{t}, \quad y = e^{t^2}; \quad (2, e)$

9-10 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado. Después trace la gráfica de la curva y la recta tangente.

9. $x = t^2 - t, \quad y = t^2 + t + 1; \quad (0, 3)$

10. $x = \text{sen}\, \pi t, \quad y = t^2 + t; \quad (0, 2)$

11-16 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2. ¿Para cuáles valores de t la curva es cóncava hacia arriba?

11. $x = t^2 + 1, \quad y = t^2 + t$ **12.** $x = t^3 - 12t, \quad y = t^2 - 1$

13. $x = 2\,\text{sen}\, t, \quad y = 3\cos t, \quad 0 < t < 2\pi$

14. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$

15. $x = t - \ln t, \quad y = t + \ln t$

16. $x = \cos t, \quad y = \text{sen}\, 2t, \quad 0 < t < \pi$

17-20 Encuentre los puntos sobre la curva donde la recta tangente es horizontal o vertical. Si dispone de un dispositivo de graficación, trace la gráfica de la curva para verificar su trabajo.

17. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^2 - 3$

18. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^3 - 3t^2$

19. $x = \cos \theta, \quad y = \cos 3\theta$ **20.** $x = e^{\text{sen}\,\theta}, \quad y = e^{\cos\theta}$

21. Utilice una gráfica para estimar las coordenadas del punto extremo derecho sobre la curva $x = t - t^6$, $y = e^t$. Después utilice cálculo para encontrar las coordenadas exactas.

22. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto más bajo y el de la extrema izquierda sobre la curva $x = t^4 - 2t$, $y = t + t^4$. Después encuentre las coordenadas exactas.

23-24 Trace la gráfica de la curva en un rectángulo de vista que muestre los aspectos más importantes de la curva.

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

25. Demuestre que la curva $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t \cos t$ tiene dos rectas tangentes en (0, 0) y encuentre sus ecuaciones. Trace la curva.

26. Trace la gráfica de la curva $x = -2\cos t$, $y = \text{sen}\, t + \text{sen}\, 2t$ para descubrir dónde se intercepta consigo misma. Después encuentre ecuaciones para ambas rectas tangentes en ese punto.

27. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la trocoide $x = r\theta - d\,\text{sen}\,\theta$, $y = r - d\cos\theta$ en términos de θ. (Véase el ejercicio 10.1.40.)
(b) Demuestre que si $d < r$, entonces el trocoide no tiene una recta tangente vertical.

28. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente al astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$ en términos de θ. (Los astroides se exploran en el proyecto de laboratorio de la página 649.)
(b) ¿En qué puntos la recta tangente es horizontal o vertical?
(c) ¿En qué puntos la recta tangente tiene pendiente 1 o -1?

29. ¿En qué puntos sobre la curva $x = 3t^2 + 1$, $y = t^3 - 1$ la recta tangente tiene pendiente $\frac{1}{2}$?

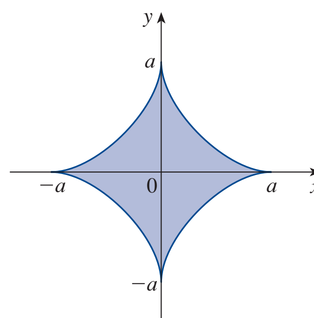
30. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que pasen por el punto (4, 3).

31. Use las ecuaciones paramétricas de una elipse $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ para encontrar el área que encierra.

32. Encuentre el área encerrada por la curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ y el eje y.

33. Encuentre el área encerrada por el eje x y la curva $x = t^3 + 1$, $y = 2t - t^2$.

34. Encuentre el área de la región encerrada por el astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$. (Los astroides son explorados en el proyecto de laboratorio de la página 649.)



35. Encuentre el área bajo un arco del trocoide del ejercicio 10.1.40 para el caso $d < r$.

36. Sea $\mathcal{R}$ la región encerrada por el lazo de la curva en el ejemplo 1.
(a) Encuentre el área de $\mathcal{R}$.
(b) Si $\mathcal{R}$ gira en torno al eje x, encuentre el volumen del sólido resultante.
(c) Encuentre el centroide de $\mathcal{R}$.

37-40 Plantee una integral que represente la longitud de la curva. Luego utilice su calculadora para encontrar la longitud con una aproximación de cuatro decimales.

37. $x = t + e^{-t}, \quad y = t - e^{-t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = t^2 - t, \quad y = t^4, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

39. $x = t - 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - 2\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

40. $x = t + \sqrt{t}, \quad y = t - \sqrt{t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

41-44 Encuentre la longitud exacta de la curva.

41. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

42. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

43. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

44. $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

45-46 Trace la gráfica de la curva y encuentre su longitud exacta.

45. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

46. $x = \cos t + \ln\left(\tan \frac{1}{2}t\right), \quad y = \operatorname{sen} t, \quad \pi/4 \leqslant t \leqslant 3\pi/4$

47. Trace la gráfica de la curva $x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 1.5t$, $y = \cos t$ y encuentre su longitud redondeada a cuatro decimales.

48. Encuentre la longitud del lazo de la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

49. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud de la curva $x = t - e^t$, $y = t + e^t$, $-6 \leqslant t \leqslant 6$.

50. En el ejercicio 10.1.43 se le pidió deducir las ecuaciones paramétricas $x = 2a \cot\theta$, $y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$ de la curva llamada bruja de María Agnesi. Use la regla de Simpson con $n = 4$ para estimar la longitud del arco de esta curva dada por $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

51-52 Encuentre la distancia recorrida por la partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado. Compárela con la longitud de la curva.

51. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi$

52. $x = \cos^2 t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

53. Demuestre que la longitud total de la elipse $x = a \operatorname{sen}\theta$, $y = b\cos\theta$, $a > b > 0$, es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\; d\theta$$

donde e es la excentricidad de la elipse ($e = c/a$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

54. Encuentre la longitud total del astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$, donde $a > 0$.

SAC **55.** (a) Trace la gráfica de la **epitrocoide** con ecuaciones

$$x = 11\cos t - 4\cos(11t/2)$$
$$y = 11 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}(11t/2)$$

¿Qué intervalo del parámetro da la curva completa?
(b) Use su SAC para encontrar la longitud aproximada de esta curva.

SAC **56.** Una curva llamada **espiral de Cornu** se define por las ecuaciones paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\, du$$

$$y = S(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\pi u^2/2)\, du$$

donde C y S son las ecuaciones de Fresnel que se introdujeron en el capítulo 5.
(a) Trace la gráfica de esta curva. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$?
(b) Encuentre la longitud de la espiral de Cornu desde el origen al punto con valor de parámetro t.

57-60 Plantee una integral que represente el área de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x. Después utilice su calculadora para encontrar el área de la superficie redondeada a cuatro decimales.

57. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

58. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

59. $x = t + e^t, \quad y = e^{-t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

60. $x = 1 + te^t, \quad y = (t^2 + 1)e^t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

61-63 Encuentre el área exacta de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x.

61. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

62. $x = 2t^2 + 1/t, \quad y = 8\sqrt{t}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 3$

63. $x = a\cos^3\theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

64. Trace la gráfica de la curva

$$x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \qquad y = 2 \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta$$

Si esta curva rota en torno al eje x, encuentre el área de la superficie resultante. (Use la gráfica para ayudarse a encontrar el intervalo correcto para el parámetro.)

65-66 Encuentre el área de la superficie generada al rotar la curva dada en torno al eje y.

65. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

66. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

---

67. Si f' es continua y $f'(t) \neq 0$ para $a \leqslant t \leqslant b$, demuestre que la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, puede expresarse en la forma $y = F(x)$. [*Sugerencia*: demuestre que f^{-1} existe.]

68. Use la fórmula 1 para deducir la fórmula 6 de la fórmula 8.2.5 para el caso en el que la curva puede representarse en la forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

69. La **curvatura** en un punto P de una curva está definida como

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

donde ϕ es el ángulo de inclinación de la recta tangente en P, como se ve en la figura. Por lo que la curvatura es el valor absoluto de la razón de cambio de ϕ con respecto a la longitud de arco. Esto puede considerarse como una medida de la rapidez de cambio de la dirección de la curva en P y se estudiará con mucho detalle en el capítulo 13.

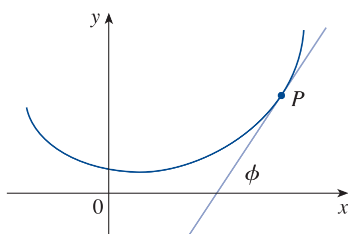
(a) Para una curva paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, deduzca la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a t, de manera que $\dot{x} = (dx/dt)$. [*Sugerencia*: use $\phi = \tan^{-1}(dy/dx)$ y la fórmula 2 para encontrar $d\phi/dt$. Después use la regla de la cadena para encontrar $d\phi/ds$.]

(b) Considerando la curva $y = f(x)$ como la curva paramétrica $x = x$, $y = f(x)$, con parámetro x, demuestre que la fórmula del inciso (a) resulta

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$



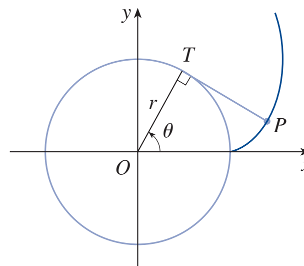
70. (a) Use la fórmula del ejercicio 69(b) para encontrar la curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.
(b) ¿En qué punto esta parábola tiene curvatura máxima?

71. Use la fórmula del ejercicio 69(a) para encontrar la curvatura de la cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ en la parte superior de uno de los arcos.

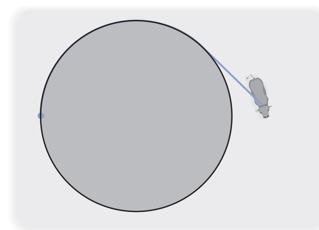
72. (a) Demuestre que la curvatura de cada punto de la línea recta es $\kappa = 0$.
(b) Demuestre que la curvatura en cada punto de una circunferencia de radio r es $\kappa = 1/r$.

73. Una cuerda se enrolla alrededor de un círculo y después se desenrolla manteniéndose tensa. La curva trazada por el punto P en el extremo de la cuerda se llama **involuta** del círculo. Si el círculo tiene radio r y centro O y la posición inicial de P es $(r, 0)$, y si el parámetro θ se elige como en la figura, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la involuta son

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



74. Una vaca está atada a un silo con radio r por una cuerda lo suficientemente larga para alcanzar el lado opuesto del silo. Encuentre el área disponible para el apacentamiento de la vaca.



PROYECTO DE LABORATORIO CURVAS DE BÉZIER

Las **curvas de Bézier** se emplean en el diseño auxiliado por computadora y se nombran así en honor del matemático francés Pierre Bézier (1910-1999), quien trabajó en la industria automotriz. Una curva cúbica de Bézier está determinada mediante cuatro *puntos de control*, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, y se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0(1 - t)^3 + 3x_1t(1 - t)^2 + 3x_2t^2(1 - t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1 - t)^3 + 3y_1t(1 - t)^2 + 3y_2t^2(1 - t) + y_3t^3$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$. Observe que cuando $t = 0$, se tiene $(x, y) = (x_0, y_0)$ y cuando $t = 1$ se tiene $(x, y) = (x_3, y_3)$, así que la curva empieza en P_0 y termina en P_3.

1. Trace la gráfica de la curva de Bézier con puntos de control $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ y $P_3(40, 5)$. Enseguida, en la misma pantalla, trace la gráfica de segmentos de recta P_0P_1, P_1P_2 y P_2P_3. (El ejercicio 10.1.31 muestra cómo hacer esto.) Observe que los puntos de control medios P_1 y P_2 no están sobre la curva; la curva empieza en P_0, se dirige hacia P_1 y P_2 sin alcanzarlos y termina en P_3.
2. En la gráfica del problema 1 parece que la recta tangente en P_0 pasa por P_1 y la recta tangente en P_3 pasa por P_2. Demuéstrelo.
3. Intente producir una curva de Bézier con un lazo cambiando el segundo punto de control en el problema 1.
4. Algunas impresoras láser usan las curvas de Bézier para representar letras y otros símbolos. Experimente con puntos de control hasta que encuentre una curva de Bézier que dé una representación razonable de la letra C.
5. Se pueden representar formas más complicadas juntando dos o más curvas de Bézier. Suponga que la primera curva de Bézier tiene puntos de control P_0, P_1, P_2, P_3 y la segunda tiene puntos de control P_3, P_4, P_5, P_6. Si se desea unir estos dos trozos de manera suave, entonces las rectas tangentes en P_3 deben corresponderse y, por tanto, los puntos P_2, P_3 y P_4 tienen que estar sobre esta recta tangente común. Con este principio, determine los puntos de control para un par de curvas de Bézier que representen la letra S.

10.3 Coordenadas polares

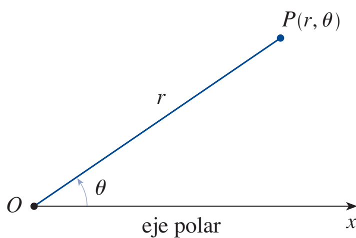


FIGURA 1

Un sistema coordenado representa un punto en el plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas. Por lo general se usan coordenadas cartesianas, que son las distancias dirigidas desde dos ejes perpendiculares. Aquí se describe un sistema coordenado introducido por Newton, llamado **sistema coordenado polar**, que es más conveniente para muchos propósitos.

Se elige un punto en el plano que se llama **polo** (u origen) y se identifica con O. Luego se dibuja un rayo (semirrecta) que empieza en O llamado **eje polar**. Usualmente, este eje se traza horizontalmente a la derecha, y corresponde al eje x positivo en coordenadas cartesianas.

Si P es cualquier otro punto en el plano, sea r la distancia de O a P y sea θ el ángulo (usualmente medido en radianes) entre el eje polar y la recta OP como en la figura 1. Entonces el punto P se representa mediante el par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman **coordenadas polares** de P. Se usa la convención de que un ángulo es positivo si se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje polar, y negativo si se mide en el sentido de las manecillas del reloj. Si $P = 0$, entonces $r = 0$ y se está de acuerdo en que $(0, \theta)$ representa el polo para cualquier valor de θ.

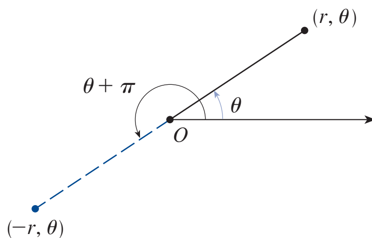


FIGURA 2

Se extiende el significado de las coordenadas polares (r, θ) al caso en que r es negativa estando de acuerdo en que, como en la figura 2, los puntos $(-r, \theta)$ y (r, θ) están sobre la misma recta que pasa por O y a la misma distancia $|r|$ desde O, pero en lados opuestos de O. Si $r > 0$, el punto (r, θ) está en el mismo cuadrante que θ; si $r < 0$, está en el cuadrante sobre el lado opuesto del polo. Observe que $(-r, \theta)$ representa el mismo punto que $(r, \theta + \pi)$.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de los puntos cuyas coordenadas polares están dadas.
(a) $(1, 5\pi/4)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $(2, -2\pi/3)$ (d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUCIÓN Los puntos se grafican en la figura 3. En el inciso (d) el punto $(-3, 3\pi/4)$ se localiza a tres unidades del polo en el cuarto cuadrante porque el ángulo $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante y $r = -3$ es negativa.

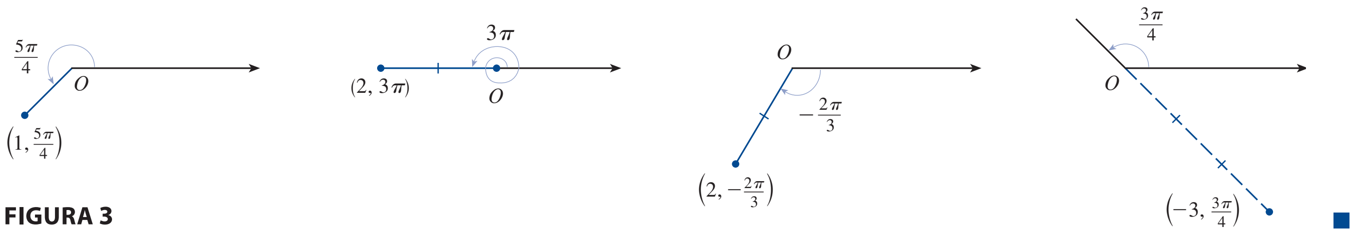


FIGURA 3

En el sistema coordenado cartesiano cada punto tiene una sola representación, pero en el sistema polar cartesiano todo punto tiene muchas representaciones. Por ejemplo, el punto $(1, 5\pi/4)$ en el ejemplo 1(a) se podría escribir como $(1, -3\pi/4)$ o $(1, 13\pi/4)$ o $(-1, \pi/4)$. (Véase la figura 4.)

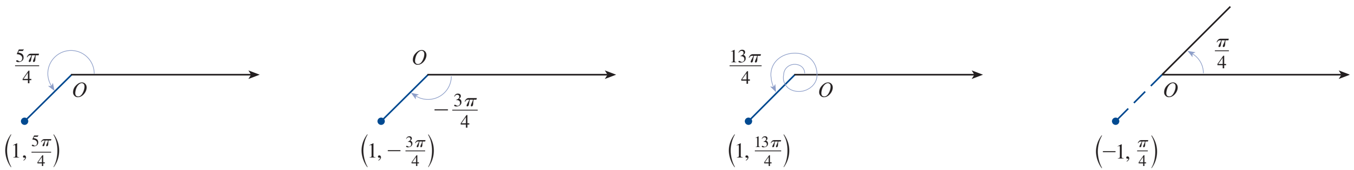


FIGURA 4

De hecho, puesto que una vuelta completa en sentido contrario a las manecillas del reloj está dada por un ángulo 2π, el punto representado por coordenadas polares (r, θ) se representa también por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero.

La conexión entre coordenadas polares y cartesianas se puede ver en la figura 5, en la cual el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje x positivo. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), entonces, de la figura, se tiene

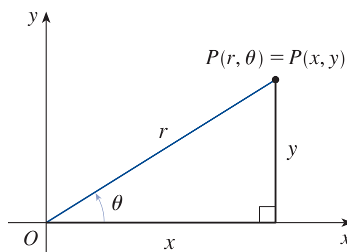


FIGURA 5

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \text{sen } \theta = \frac{y}{r}$$

y por tanto

1 $$x = r \cos \theta \qquad y = r \text{ sen } \theta$$

Aunque las ecuaciones 1 se dedujeron de la figura 5, que ilustra el caso donde $r > 0$ y $0 < \theta < \pi/2$, estas ecuaciones son válidas para todos los valores de r y θ. (Véase la definición general de sen θ y cos θ en el apéndice D.)

Las ecuaciones 1 permiten determinar las coordenadas cartesianas de un punto cuando se conocen las coordenadas polares. Para determinar r y θ cuando se conocen x y y, se usan las ecuaciones

2
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

que pueden deducirse de las ecuaciones 1 o simplemente leyendo la figura 5.

EJEMPLO 2 Convierta el punto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares a cartesianas.

SOLUCIÓN Como $r = 2$ y $\theta = \pi/3$, las ecuaciones 1 dan

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Por tanto, el punto en coordenadas cartesianas es $(1, \sqrt{3})$. ■

EJEMPLO 3 Represente el punto con coordenadas cartesianas $(1, -1)$ en términos de coordenadas polares.

SOLUCIÓN Si se elige r como positiva, entonces la ecuación 2 da

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como el punto $(1, -1)$ está en el cuarto cuadrante, se puede elegir $\theta = -\pi/4$ o $\theta = 7\pi/4$. Por lo que una de las posibles respuestas es $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; otra es $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$. ■

NOTA Las ecuaciones 2 no determinan de manera única a θ cuando se dan x y y, porque cuando θ crece en el intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$ cada valor de $\tan\theta$ ocurre dos veces. Por tanto, al convertir de coordenadas cartesianas a polares, no es suficiente encontrar r y θ para satisfacer las ecuaciones 2. Como en el ejemplo 3, se debe elegir θ de modo que el punto (r, θ) esté en el cuadrante correcto.

■ Curvas polares

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$, o de manera más general $F(r, \theta) = 0$, consiste de todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

EJEMPLO 4 ¿Qué curva está representada por la ecuación polar $r = 2$?

SOLUCIÓN La curva consiste de todos los puntos (r, θ) con $r = 2$. Puesto que r representa la distancia del punto al polo, la curva $r = 2$ representa la circunferencia con centro O y radio 2. En general, la ecuación $r = a$ representa una circunferencia con centro O y radio $|a|$. (Véase la figura 6.) ■

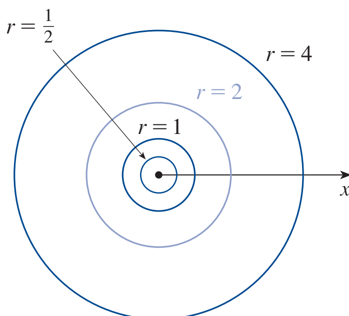


FIGURA 6

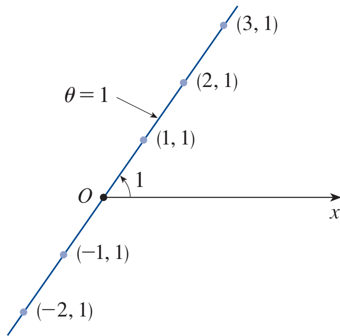


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Trace la curva polar $\theta = 1$.

SOLUCIÓN Esta curva consiste de todos los puntos (r, θ) tales que el ángulo polar θ es de 1 radián. Corresponde a la recta que pasa por O y forma un ángulo de 1 radián con el eje polar (véase la figura 7). Observe que los puntos $(r, 1)$ sobre la recta con $r > 0$ están en el primer cuadrante, mientras aquellos con $r < 0$ están en el tercer cuadrante. ■

EJEMPLO 6

(a) Trace la curva con ecuación polar $r = 2 \cos \theta$.

(b) Encuentre una ecuación cartesiana para esta curva.

SOLUCIÓN

(a) En la figura 8 se encuentran los valores de r para algunos valores convenientes de θ y se grafican los puntos correspondientes (r, θ). Después se unen estos puntos para trazar la curva, que parece ser una circunferencia. Se han usado solo valores de θ entre 0 y π, porque si se hace que θ se incremente más allá de π, se obtiene de nuevo los mismos puntos.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

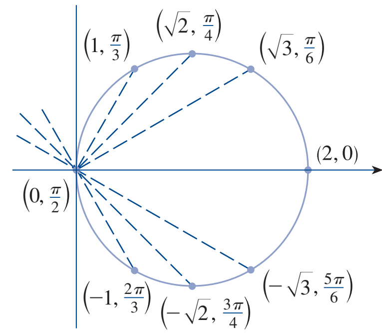


FIGURA 8
Tabla de valores y gráfica de $r = 2\cos\theta$

(b) Para convertir la ecuación dada en una ecuación cartesiana se usan las ecuaciones 1 y 2. De $x = r\cos\theta$ se tiene $\cos\theta = x/r$, de modo que la ecuación $r = 2\cos\theta$ se convierte en $r = 2x/r$, lo cual da

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando el cuadrado se obtiene

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que es la ecuación de una circunferencia con centro en $(1, 0)$ y radio 1. ■

En la figura 9 se muestra una ilustración geométrica de que la circunferencia del ejemplo 6 tiene la ecuación $r = 2\cos\theta$. El ángulo OPQ es un ángulo recto (¿por qué?), así que $r/2 = \cos\theta$.

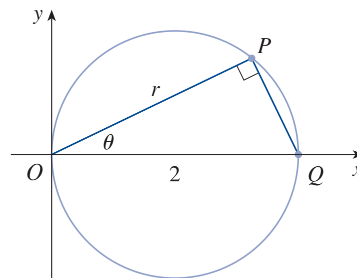


FIGURA 9

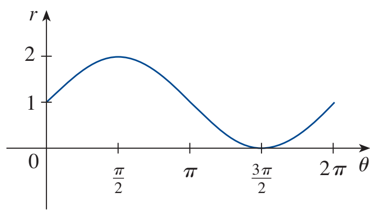


FIGURA 10
$r = 1 + \text{sen}\,\theta$ en coordenadas cartesianas, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

EJEMPLO 7 Trace la curva $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

SOLUCIÓN En lugar de trazar puntos como en el ejemplo 6, primero haga el boceto de la gráfica de $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ en coordenadas *cartesianas* en la figura 10, desplazando la curva seno hacia arriba una unidad. Esto permite leer de un vistazo los valores de r que corresponden a valores crecientes de θ. Por ejemplo, se ve que cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/2$, r (la distancia desde O) se incrementa de 1 a 2, de modo que se traza la parte correspondiente de la curva polar de la figura 11(a). Cuando θ se incrementa de $\pi/2$ a π, la figura 10 muestra que r decrece de 2 a 1, así que se traza la parte siguiente de la curva como en la figura 11(b). Cuando θ se incrementa de π a $3\pi/2$, r decrece de 1 a 0, como se muestra en el inciso (c). Por último, cuando θ se incrementa de $3\pi/2$ a 2π, r se incrementa de 0 a 1 como se muestra en el inciso (d). Si hace que θ se incremente más allá de 2π o decrezca más allá de 0, se podría simplemente volver a trazar la trayectoria. Uniendo las partes de la curva de la figura 11(a)-(d), se traza la curva completa del inciso (e). Esta curva se llama **cardioide** porque tiene forma de corazón.

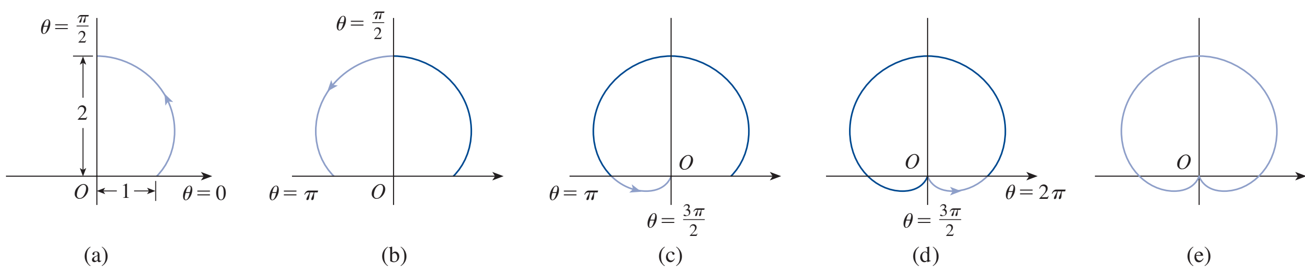


FIGURA 11 Etapas del trazo de la cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ ■

EJEMPLO 8 Trace la curva $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 7, primero se traza $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), en coordenadas cartesianas en la figura 12. Cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/4$, se observa en la figura 12 que r decrece de 1 a 0 y, de este modo, se dibuja la parte correspondiente a la curva polar de la figura 13 (indicada por ①. Cuando θ se incrementa de $\pi/4$ a $\pi/2$, r va de 0 a -1. Esto significa que la distancia desde O se incrementa de 0 a 1, pero en lugar de estar en el primer cuadrante esta parte de la curva polar (indicada por ②) se ubica en el lado opuesto del polo en el tercer cuadrante. El resto de la curva se traza en forma similar, con flechas y números indicando el orden en el cual se trazan las porciones. La curva resultante tiene cuatro rizos y se llama **rosa de cuatro hojas**.

TEC Module 10.3 ayuda a ver cómo se trazan las curvas polares por medio de animaciones similares a las figuras 10-13.

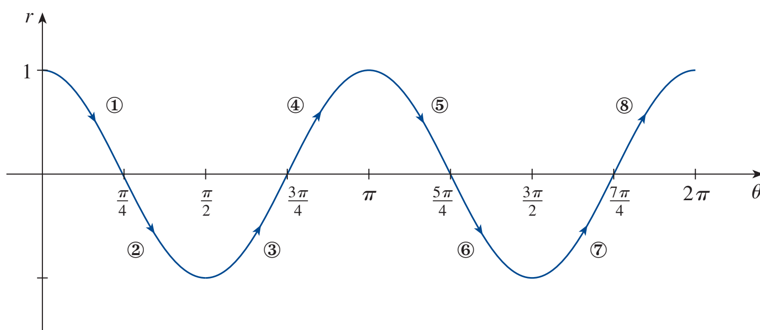


FIGURA 12
$r = \cos 2\theta$ en coordenadas cartesianas

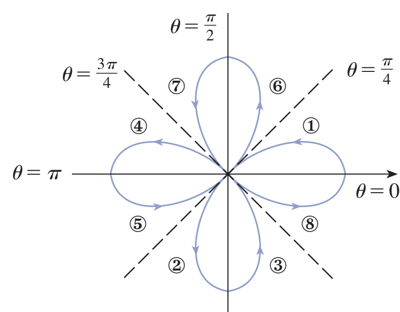


FIGURA 13
Rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$ ■

Simetría

Cuando se trazan curvas polares, a veces es útil aprovechar la simetría. Las tres reglas siguientes se explican mediante la figura 14.

(a) Si una ecuación polar permanece sin cambio cuando θ se reemplaza por $-\theta$, la curva es simétrica respecto al eje polar.

(b) Si la ecuación no cambia cuando r se reemplaza por $-r$, o cuando θ se sustituye por $\theta + \pi$ la curva es simétrica respecto al polo. (Esto significa que la curva permanece sin cambio si se rota 180° respecto al origen.)

(c) Si la ecuación no cambia cuando θ se reemplaza por $\pi - \theta$, la curva es simétrica respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$.

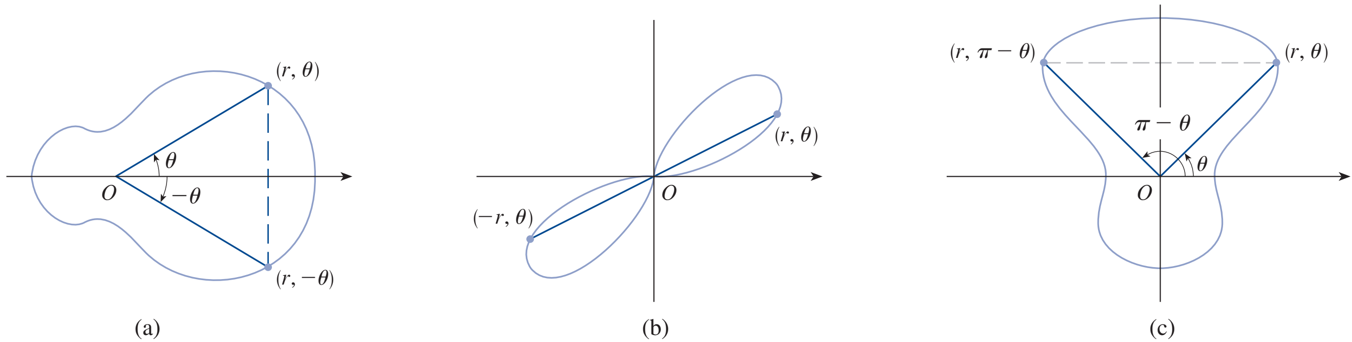


FIGURA 14

Las curvas trazadas en los ejemplos 6 y 8 son simétricas respecto al eje polar, porque $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Las curvas de los ejemplos 7 y 8 son simétricas respecto a $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. La rosa de cuatro hojas también es simétrica respecto al polo. Estas propiedades de simetría se podrían haber usado para trazar las curvas. En el caso del ejemplo 6, solo se requiere hacer la gráfica de los puntos para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y después reflejar a través del eje polar para obtener la circunferencia completa.

Tangentes a curvas polares

Para encontrar una recta tangente a una curva polar $r = f(\theta)$, se considera θ como un parámetro y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Después, con el método para encontrar pendientes de curvas paramétricas (ecuación 10.2.1) y la regla del producto, se tiene

3
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Las rectas tangentes horizontales se localizan al determinar los puntos donde $dy/d\theta = 0$ (siempre que $dx/d\theta \neq 0$). Del mismo modo, se localizan rectas tangentes verticales en los puntos donde $dx/d\theta = 0$ (siempre que $dy/d\theta \neq 0$).

Observe que si se están buscando rectas tangentes en el polo, entonces $r = 0$ y la ecuación 3 se simplifica a

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \text{si } \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

En el ejemplo 8 se encuentra que $r = \cos 2\theta = 0$ cuando $\theta = \pi/4$ o $3\pi/4$. Esto significa que las rectas $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ (o $y = x$ y $y = -x$) son rectas tangentes a $r = \cos 2\theta$ en el origen.

EJEMPLO 9

(a) Para la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ del ejemplo 7, encuentre la pendiente de la recta tangente cuando $\theta = \pi/3$.
(b) Encuentre los puntos sobre la cardioide donde la recta tangente es horizontal o vertical.

SOLUCIÓN Al utilizar la ecuación 3 con $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta + (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\ \cos\theta - (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta)}$$

(a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \pi/3$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\operatorname{sen}(\pi/3))}{(1 + \operatorname{sen}(\pi/3))(1 - 2\operatorname{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}/2)(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \quad \text{cuando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Debido a que, hay rectas tangentes horizontales en los puntos $(2, \pi/2)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$ y las rectas tangentes verticales en $(\frac{3}{2}, \pi/6)$ y $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$. Cuando $\theta = 3\pi/2$, tanto $dy/d\theta$ como $dx/d\theta$ son 0, por lo que se debe tener cuidado. Usando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1 + 2\operatorname{sen}\theta}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \infty$$

Por simetría, $$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+}\frac{dy}{dx} = -\infty$$

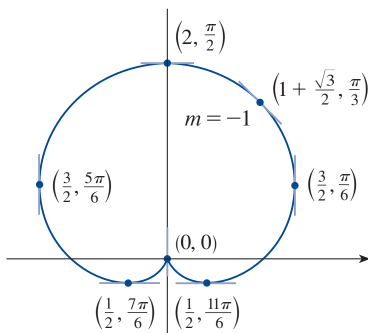


FIGURA 15
Rectas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

Por lo que hay una recta tangente vertical en el polo (véase la figura 15). ■

NOTA En lugar de tener que recordar la ecuación 3, se podría usar el método empleado para deducirla. En el caso del ejemplo 9 se puede escribir

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Entonces se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta}$$

que es equivalente a nuestra expresión previa.

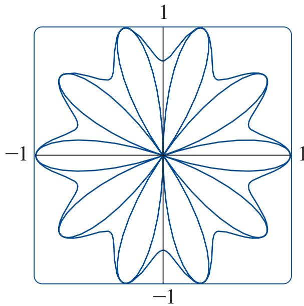


FIGURA 16
$r = \operatorname{sen}^3(2.5\theta) + \cos^3(2.5\theta)$

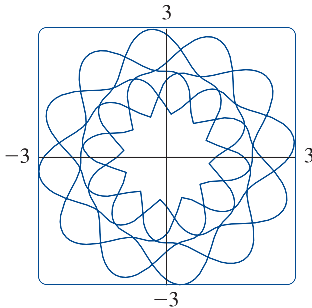


FIGURA 17
$r = 2 + \operatorname{sen}^3(2.4\theta)$

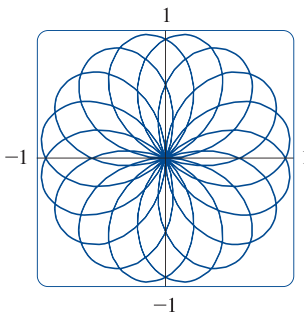


FIGURA 18
$r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

Trazo de gráficas de curvas polares con dispositivos de graficación

Aunque es útil poder trazar a mano curvas polares simples, se necesita usar una calculadora o computadora cuando hay ante usted una curva tan complicada como las que se muestran en las figuras 16 y 17.

Algunos dispositivos de graficación tienen comandos que permiten trazar la gráfica de curvas polares directamente. Con otras máquinas se requiere convertir primero a ecuaciones paramétricas. En este caso se toma la ecuación polar $r = f(\theta)$ y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Algunas máquinas requieren que el parámetro se llame t en vez de θ.

EJEMPLO 10 Trace la gráfica de la curva $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$.

SOLUCIÓN Suponga que el dispositivo de graficación no tiene una instrucción de graficación polar integrado. En este caso se necesita trabajar con las correspondientes ecuaciones paramétricas

$$x = r\cos\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\operatorname{sen}\theta$$

En cualquier caso, se necesita determinar el dominio para θ, así que se hace la pregunta: ¿cuántas rotaciones completas se requieren hasta que la curva comience a repetirse por sí misma? Si la respuesta es n, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

y, por tanto, se requiere que $16n\pi/5$ sea un múltiplo par de π. Esto ocurrirá primero cuando $n = 5$. Por tanto, grafique la curva completa si se especifica que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Al cambiar de θ a t, se tienen las ecuaciones

$$x = \operatorname{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \operatorname{sen}(8t/5)\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

cuya curva resultante se muestra en la figura 18. Observe que esta rosa tiene 16 lazos. ■

EJEMPLO 11 Investigue la familia de curvas polares dada por $r = 1 + c\operatorname{sen}\theta$. ¿Cómo cambia la forma cuando c cambia? (Estas curvas se llaman ***limaçones***, palabra francesa para los caracoles, debido a la forma de las curvas para ciertos valores de c.)

SOLUCIÓN En la figura 19 en la página 666 se muestran gráficas dibujadas por computadora para diferentes valores de c. Para $c > 1$ hay un lazo que decrece en tamaño cuando c decrece. Cuando $c = 1$ el lazo desaparece y la curva se convierte en la cardioide que se trazó en el ejemplo 7. Para c entre 1 y $\frac{1}{2}$ la cúspide de la cardioide desaparece y se convierte en un "hoyuelo". Cuando c decrece de $\frac{1}{2}$ a 0, la *limaçon* tiene forma

En el ejercicio 53, se le pide demostrar en forma analítica lo que se ha descubierto a partir de las gráficas de la figura 19.

de óvalo. Este óvalo se vuelve más circular cuando $c \to 0$, y cuando $c = 0$ la curva es justo la circunferencia con $r = 1$.

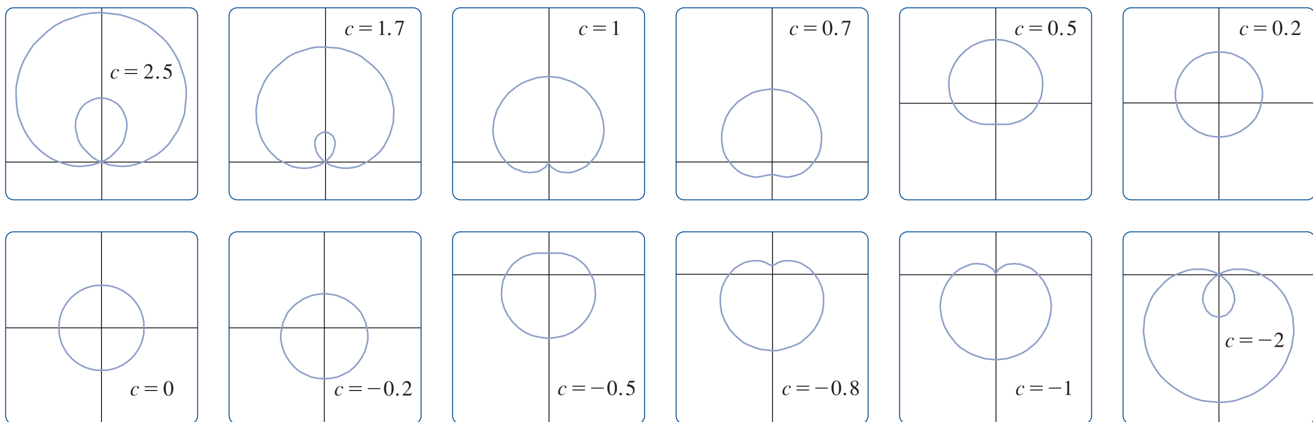


FIGURA 19
Miembros de la familia de *limaçons* $r = 1 + c \text{ sen } \theta$

Las partes restantes de la figura 19 muestran que cuando c se vuelve negativa, las formas cambian en orden inverso. De hecho, estas curvas son reflexiones respecto al eje horizontal de las curvas correspondientes con c positiva. ■

Las *limaçons* son muy útiles en el estudio del movimiento planetario. En particular, la trayectoria de Marte vista desde el planeta Tierra ha sido modelada con una *limaçon* de un lazo, como en los incisos de la figura 19 con $|c| > 1$.

10.3 EJERCICIOS

1-2 Trace la gráfica de los puntos cuyas coordenadas polares están dadas. Después encuentre otros dos pares de coordenadas polares de este punto, uno con $r > 0$ y otro con $r < 0$.

1. (a) $(1, \pi/4)$ (b) $(-2, 3\pi/2)$ (c) $(3, -\pi/3)$

2. (a) $(2, 5\pi/6)$ (b) $(1, -2\pi/3)$ (c) $(-1, 5\pi/4)$

3-4 Trace la gráfica del punto cuyas coordenadas polares están dadas. Luego, determine las coordenadas cartesianas del punto.

3. (a) $(2, 3\pi/2)$ (b) $(\sqrt{2}, \pi/4)$ (c) $(-1, -\pi/6)$

4. (a) $(4, 4\pi/3)$ (b) $(-2, 3\pi/4)$ (c) $(-3, -\pi/3)$

5-6 Se dan las coordenadas cartesianas de un punto.
(i) Encuentre las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r > 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.
(ii) Determine las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r < 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

5. (a) $(-4, 4)$ (b) $(3, 3\sqrt{3})$

6. (a) $(\sqrt{3}, -1)$ (b) $(-6, 0)$

7-12 Trace la región en el plano que consiste de todos los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas.

7. $r \geqslant 1$

8. $0 \leqslant r < 2, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

9. $1 \leqslant r \leqslant 2$

10. $1 \leqslant r \leqslant 3, \quad \pi/6 < \theta < 5\pi/6$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13. Encuentre la distancia entre los puntos con coordenadas polares $(4, 4\pi/3)$ y $(6, 5\pi/3)$.

14. Encuentre una fórmula para la distancia entre los puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2).

15-20 Identifique la curva encontrando una ecuación cartesiana para la curva.

15. $r = 2$

16. $r \cos\theta = 1$

17. $r = 5 \cos\theta$

18. $r = \tan\theta \sec\theta$

19. $r = 2 \cos\theta$

20. $r^2 \text{ sen } 2\theta = 1$

21-26 Encuentre una ecuación polar para la curva representada por las ecuaciones cartesianas dadas.

21. $y = 2$

22. $y = x$

23. $y = 1 + 3x$

24. $xy = 4$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$

26. $x^2 - y^2 = 4$

27-28 Para cada una de las curvas descritas, decida con qué ecuación se expresaría más fácilmente, con una polar o una cartesiana. Después escriba una ecuación para la curva.

27. (a) Una recta que pasa por el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo.
(b) Una recta vertical que pasa por el punto (3, 3).

28. (a) Una circunferencia con radio 5 y centro (2, 3).
(b) Una circunferencia centrada en el origen con radio 4.

29-46 Trace la curva con la ecuación polar dada, al trazar primero la gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas.

29. $r = -2 \operatorname{sen} \theta$

30. $r = 1 - \cos\theta$

31. $r = 2(1 + \cos\theta)$

32. $r = \ln\theta, \quad \theta \geqslant 1$

33. $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

34. $r = \theta^2, \quad -2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

35. $r = 3\cos 3\theta$

36. $r = -\operatorname{sen} 5\theta$

37. $r = \cos 5\theta$

38. $r = 2 \operatorname{sen} 6\theta$

39. $r = 1 + 3\cos\theta$

40. $r = 1 + 5 \operatorname{sen}\theta$

41. $r = 1 - 2 \operatorname{sen}\theta$

42. $r^2 = \cos 4\theta$

43. $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$

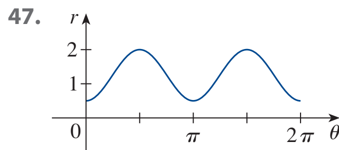
44. $r = 3 + 4\cos\theta$

45. $r = \operatorname{sen}(\theta/2)$

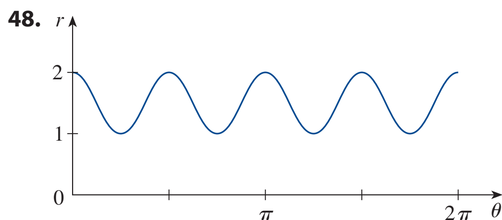
46. $r = \cos(\theta/3)$

47-48 La figura muestra una gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas. Utilícela para trazar la correspondiente curva polar.

47.



48.



---

49. Demuestre que la curva polar $r = 4 + 2 \sec\theta$ (llamada una **concoide**) tiene la recta $x = 2$ como asíntota vertical demostrando que $\lim_{r\to\pm\infty} x = 2$. Utilice este hecho para ayudarse a trazar la concoide.

50. Demuestre que la curva $r = 2 - \csc\theta$ (también una concoide) tiene la recta $y = -1$ como una asíntota horizontal demostrando que $\lim_{r\to\pm\infty} y = -1$. Utilice este hecho para ayudarse a trazar la concoide.

51. Demuestre que la curva $r = \operatorname{sen}\theta \tan\theta$ (llamada **cisoide de Diocles**) tiene la recta $x = 1$ como una asíntota vertical. Demuestre también que toda la curva está dentro de la banda vertical $0 \leqslant x < 1$. Utilice estos hechos para ayudarse a trazar la cisoide.

52. Trace la curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

53. (a) En el ejemplo 11, la gráfica sugiere que la *limaçon* $r = 1 + c \operatorname{sen}\theta$ tiene un lazo interior cuando $|c| > 1$. Demuestre que esto es cierto y encuentre los valores de θ que corresponden a este lazo interior.
(b) En la figura 19 parece que la *limaçon* pierde su hoyuelo cuando $c = \frac{1}{2}$. Demuéstrelo.

54. Relacione las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No utilice dispositivos de graficación.)

(a) $r = \ln\theta, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant 6\pi$

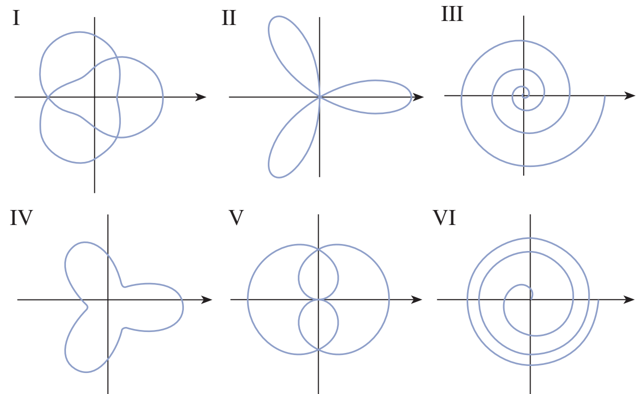
(b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 8\pi$

(c) $r = \cos 3\theta$

(d) $r = 2 + \cos 3\theta$

(e) $r = \cos(\theta/2)$

(f) $r = 2 + \cos(3\theta/2)$



55-60 Encuentre la pendiente de la recta tangente para la curva polar dada en el punto especificado por el valor de θ.

55. $r = 2\cos\theta, \quad \theta = \pi/3$

56. $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta, \quad \theta = \pi/4$

57. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$

58. $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

59. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$

60. $r = 1 + 2\cos\theta, \quad \theta = \pi/3$

61-64 Encuentre los puntos sobre la curva dada donde la recta tangente es horizontal o vertical.

61. $r = 3\cos\theta$

62. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

63. $r = 1 + \cos\theta$

64. $r = e^{\theta}$

65. Demuestre que la ecuación polar $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$, donde $ab \neq 0$, representa una circunferencia y encuentre su centro y radio.

66. Demuestre que las curvas $r = a \operatorname{sen} \theta$ y $r = a \cos \theta$ se cortan en ángulos rectos.

67-72 Utilice un dispositivo de graficación para trazar la curva polar. Elija el intervalo para el parámetro para asegurarse que se trace toda la curva.

67. $r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

68. $r = \sqrt{1 - 0.8 \operatorname{sen}^2 \theta}$ (hipopede)

69. $r = e^{\operatorname{sen} \theta} - 2 \cos(4\theta)$ (curva mariposa)

70. $r = |\tan \theta|^{|\cot \theta|}$ (curva valentina)

71. $r = 1 + \cos^{999} \theta$ (curva Pac-Man)

72. $r = 2 + \cos(9\theta/4)$

---

73. ¿Cómo se relacionan las gráficas de $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$? En general, ¿cómo se relaciona la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

74. Utilice una gráfica para estimar la coordenada y de los puntos superiores sobre la curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. Después utilice su calculadora para encontrar el valor exacto.

75. Investigue la familia de curvas con ecuaciones polares $r = 1 + c \cos \theta$, donde c es un número real. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando c cambia?

76. Investigue la familia de curvas polares

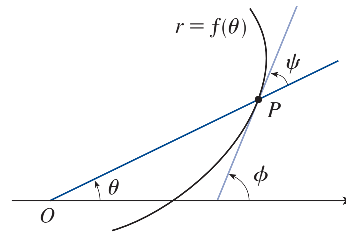
$$r = 1 + \cos^n \theta$$

donde n es un entero positivo. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando n crece? ¿Qué pasa cuando n es muy grande? Explique la forma para n muy grande considerando la gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas.

77. Sea P un número cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es el ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, demuestre que

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Sugerencia*: observe que $\psi = \phi - \theta$ en la figura.]



78. (a) Utilice el ejercicio 77 para demostrar que el ángulo entre la recta tangente y la recta radial es $\psi = \pi/4$ en todo punto sobre la curva $r = e^\theta$.

(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y la recta tangente en los puntos donde $\theta = 0$ y $\pi/2$.

(c) Demuestre que cualquier curva polar $r = f(\theta)$, con la propiedad de que el ángulo ψ entre la recta radial y la recta tangente es una constante, debe tener la forma $r = Ce^{k\theta}$, donde C y k son constantes.

PROYECTO DE LABORATORIO FAMILIAS DE CURVAS POLARES

En este proyecto descubrirá lo interesante y bello que pueden ser las formas de las familias de curvas polares. También verá cómo cambia la forma de las curvas cuando varían las constantes.

1. (a) Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo. ¿Cómo se relaciona n con el número de lazos?

(b) ¿Qué pasa si la ecuación del inciso (a) se reemplaza por $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

2. Una familia de curvas está dada por las ecuaciones $r = 1 + c \operatorname{sen} n\theta$, donde c es un número real y n es un entero positivo. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando n crece? ¿Cómo cambia cuando c cambia? Ilustre graficando suficientes miembros de la familia para apoyar sus conclusiones.

3. Una familia de curvas tiene las ecuaciones polares

$$r = \frac{1 - a \cos \theta}{1 + a \cos \theta}$$

Investigue cómo cambian las gráficas cuando el número a cambia. En particular, debe identificar la transición de los valores de a para los cuales la forma básica de la curva cambia.

4. El astrónomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudió la familia de curvas con ecuaciones polares

$$r^4 - 2c^2r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

donde a y c son números reales positivos. Estas curvas se llaman **óvalos de Cassini** aunque tienen la forma de óvalo solo para ciertos valores de a y c. (Cassini pensó que estas curvas podían representar órbitas planetarias mejor que las elipses de Kepler.) Investigue la variedad de formas que estas curvas pueden tener. En particular, ¿cómo se relacionan a y c entre sí cuando la curva se divide en dos partes?

10.4 Áreas y longitudes en coordenadas polares

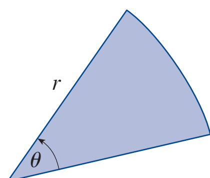


FIGURA 1

En esta sección se desarrolla la fórmula para el área de una región cuya frontera está dada por una ecuación polar. Se necesita utilizar la fórmula para el área de un sector de un círculo:

1 $$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta$$

donde, como se ve en la figura 1, r es el radio y θ es la medida en radianes del ángulo central. La fórmula 1 se sigue del hecho de que el área de un sector es proporcional a su ángulo central: $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. (Véase también el ejercicio 7.3.35.)

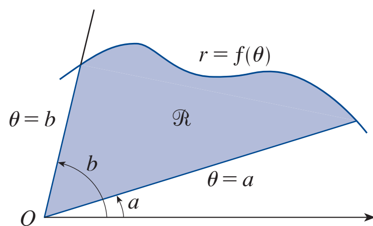


FIGURA 2

Sea $\mathcal{R}$ la región, ilustrada en la figura 2, acotada por la curva polar $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$, donde f es una función positiva continua y donde $0 < b - a \leqslant 2\pi$. Se divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos con puntos extremos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ e igual ancho $\Delta\theta$. Entonces los rayos $\theta = \theta_i$ dividen a $\mathcal{R}$ en n pequeñas regiones con ángulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Si se elige θ_i^* en el i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, entonces el área ΔA_i de la i-ésima región está aproximada por el área del sector de un círculo con ángulo central $\Delta\theta$ y radio $f(\theta_i^*)$. (Véase la figura 3.)

Por lo que de la fórmula 1 se tiene

$$\Delta A_i \approx \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

y así una aproximación al área total A de $\mathcal{R}$ es

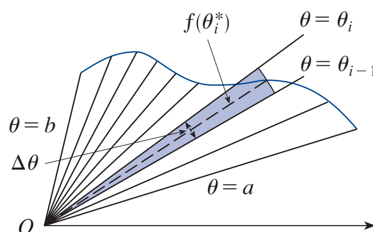


FIGURA 3

2 $$A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

En la figura 3 parece que la aproximación en (2) mejora cuando $n \to \infty$. Pero las sumas en (2) son sumas de Riemann para la función $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

Por eso parece razonable (y de hecho puede demostrarse) que la fórmula para el área A de la región polar $\mathcal{R}$ sea

3 $$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta$$

Usualmente, la fórmula 3 se escribe como

4 $$A = \int_a^b \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta$$

con el entendido de que $r = f(\theta)$. Observe la semejanza entre las fórmulas 1 y 4.

Cuando se aplica la fórmula 3 o 4 es útil pensar que el área es barrida por un rayo que gira alrededor de O empezando con un ángulo a y terminando en un ángulo b.

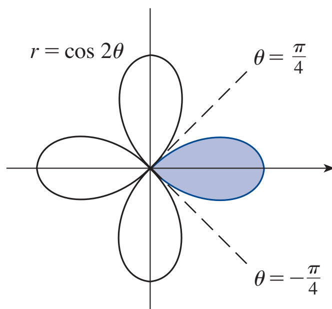


FIGURA 4

EJEMPLO 1 Encuentre el área encerrada por un lazo de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN La curva $r = \cos 2\theta$ se trazó en el ejemplo 10.3.8. Observe de la figura 4 que la región encerrada por el lazo de la derecha es barrida por un rayo que gira de $\theta = -\pi/4$ a $\theta = \pi/4$. Por tanto, la fórmula 4 da

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$ ■

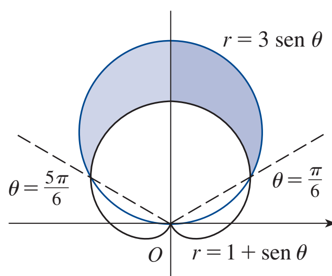


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Encuentre el área de la región que está dentro de la circunferencia $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y fuera del cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN El cardioide (véase ejemplo 10.3.7) y la circunferencia están trazadas en la figura 5 y la región deseada está sombreada. Los valores de a y b en la fórmula 4 se determinan encontrando los puntos de intersección de las dos curvas. La intersección de estas se da cuando $3 \operatorname{sen} \theta = 1 + \operatorname{sen} \theta$, lo que da $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$, por lo que $\theta = \pi/6$, $5\pi/6$. El área deseada puede encontrarse restando el área dentro del cardioide entre $\theta = \pi/6$ y $\theta = 5\pi/6$ del área dentro de la circunferencia de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Así

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \operatorname{sen} \theta)^2\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \operatorname{sen} \theta)^2\, d\theta$$

Como la región es simétrica respecto al eje vertical $\theta = \pi/2$, se puede escribir

$$A = 2\left[\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta\right]$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8 \operatorname{sen}^2\theta - 1 - 2 \operatorname{sen} \theta)\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4 \cos 2\theta - 2 \operatorname{sen} \theta)\, d\theta \qquad \left[\text{ya que } \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\right]$$

$$= 3\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta + 2 \cos \theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi$$ ■

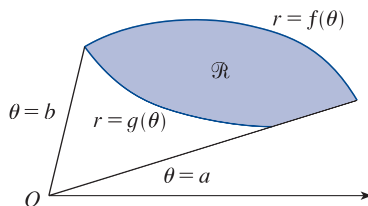


FIGURA 6

En el ejemplo 2 se ilustra el procedimiento para encontrar el área de la región acotada por dos curvas polares. En general, dada $\mathcal{R}$ una región, como la que se ilustra en la figura 6, que está acotada por curvas con ecuaciones polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$, donde $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ y $0 < b - a \leqslant 2\pi$. El área A de $\mathcal{R}$ se encuentra restando el área bajo $r = g(\theta)$ del área bajo $r = f(\theta)$, de modo que al utilizar la fórmula 3 se tiene

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_a^b \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right)d\theta$$

PRECAUCIÓN El hecho de que un solo punto tenga muchas representaciones en coordenadas polares, dificulta a veces encontrar todos los puntos de intersección de dos curvas polares. Por ejemplo, es obvio de la figura 5 que la circunferencia y la cardioide tienen tres puntos de intersección; sin embargo, en el ejemplo 2 se resolvieron las ecuaciones $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y se encontraron solo dos puntos $\left(\tfrac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\tfrac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. El origen también es un punto de intersección, pero no se puede determinar resolviendo las ecuaciones de las curvas porque el origen no tiene representación única en coordenadas polares que satisfaga ambas ecuaciones. Observe que, cuando se representa como $(0, 0)$ o $(0, \pi)$, el origen satisface $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y, por tanto, está dentro de la circunferencia; cuando se representa como $(0, 3\pi/2)$, satisface $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y, por lo tanto, está sobre la cardioide. Considere dos puntos que se mueven a lo largo de las curvas cuando el valor de parámetro θ se incrementa de 0 a 2π. Sobre una curva se alcanza el origen en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; sobre la otra curva se alcanza en $\theta = 3\pi/2$. Los puntos no chocan en el origen porque llegan en diferentes tiempos, no obstante, allí se cortan las curvas.

Por lo que, para encontrar *todos* los puntos de intersección de dos curvas polares, se recomienda dibujar las gráficas de ambas curvas. Es especialmente conveniente usar una calculadora graficadora o computadora como medio auxiliar para esta tarea.

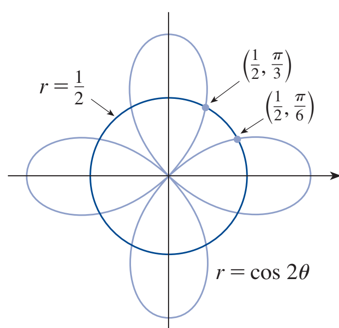


FIGURA 7

EJEMPLO 3 Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = \cos 2\theta$ y $r = \tfrac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Si se resuelven las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \tfrac{1}{2}$, se obtiene $\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}$ y, por tanto, $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Por lo que los valores de θ entre 0 y 2π que satisfacen ambas ecuaciones son $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Se encontraron cuatro puntos de intersección: $\left(\tfrac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 7\pi/6\right)$ y $\left(\tfrac{1}{2}, 11\pi/6\right)$.

Sin embargo, se puede ver de la figura 7 que las curvas tienen otros cuatro puntos de intersección, a saber, $\left(\tfrac{1}{2}, \pi/3\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\tfrac{1}{2}, 4\pi/3\right)$ y $\left(\tfrac{1}{2}, 5\pi/3\right)$. Estos puntos se pueden encontrar utilizando la simetría o advirtiendo que la otra ecuación de la circunferencia es $r = -\tfrac{1}{2}$ y después resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\tfrac{1}{2}$. ■

Longitud de arco

Para determinar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, se considera θ como un parámetro y se escriben las ecuaciones paramétricas de la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Usando la regla del producto y derivando con respecto a θ se obtiene

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$$

por lo que utilizando $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, se tiene

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$+ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\ \cos\theta + r^2\cos^2\theta$$
$$= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

Suponiendo que f' es continua, se puede utilizar el teorema 10.2.5 para expresar la longitud de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Por tanto, la longitud de una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, es

5 $$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

EJEMPLO 4 Encuentre la longitud de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN La cardioide se muestra en la figura 8. (Trazada en el ejemplo 10.3.7.) Su longitud total está dada por el intervalo del parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), por lo que la fórmula 5 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

Se podría haber evaluado esta integral multiplicando y dividiendo el integrando por $\sqrt{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$, o se podría utilizar la computadora. En cualquier caso, se ve que la longitud de la cardioide es $L = 8$. ■

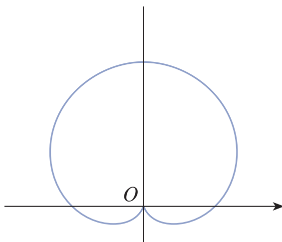


FIGURA 8
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

10.4 EJERCICIOS

1-4 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas y que están en el sector especificado.

1. $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$

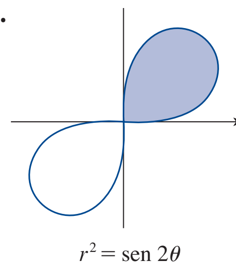
2. $r = e^{\theta/2}$, $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

3. $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

4. $r = 1/\theta$, $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

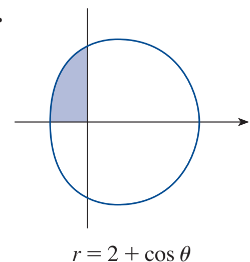
5-8 Encuentre el área de la región sombreada.

5.



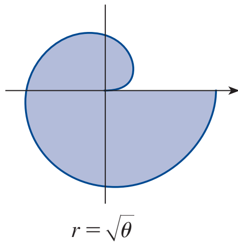
$r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

6.

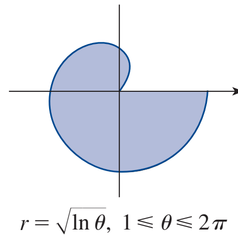


$r = 2 + \cos\theta$

7.



8.



9-12 Trace la curva y encuentre el área que encierra.

9. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

10. $r = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$

11. $r = 3 + 2 \cos \theta$

12. $r = 2 - \cos \theta$

13-16 Trace la gráfica de la curva y encuentre el área que encierra.

13. $r = 2 + \operatorname{sen} 4\theta$

14. $r = 3 - 2 \cos 4\theta$

15. $r = \sqrt{1 + \cos^2(5\theta)}$

16. $r = 1 + 5 \operatorname{sen} 6\theta$

17-21 Encuentre el área de la región encerrada por uno de los lazos de la curva.

17. $r = 4 \cos 3\theta$

18. $r^2 = 4 \cos 2\theta$

19. $r = \operatorname{sen} 4\theta$

20. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

21. $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ (lazo interno)

22. Encuentre el área encerrada por el lazo de la **estrofoide** $r = 2 \cos \theta - \sec \theta$.

23-28 Encuentre el área de la región que está dentro de la primera curva y fuera de la segunda curva.

23. $r = 4 \operatorname{sen} \theta, \quad r = 2$

24. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta, \quad r = 1$

25. $r = 2 \cos \theta, \quad r = 1$

26. $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 2 - \cos \theta$

27. $r = 3 \cos \theta, \quad r = 1 + \cos \theta$

28. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta, \quad r = 3 \operatorname{sen} \theta$

29-34 Encuentre el área de la región que está dentro de ambas curvas.

29. $r = 3 \operatorname{sen} \theta, \quad r = 3 \cos \theta$

30. $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 1 - \cos \theta$

31. $r = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$

32. $r = 3 + 2 \cos \theta, \quad r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$

33. $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = 1$

34. $r = a \operatorname{sen} \theta, \quad r = b \cos \theta, \quad a > 0, \ b > 0$

35. Encuentre el área dentro del lazo más grande y fuera del lazo más pequeño de la *limaçon* $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$.

36. Encuentre el área entre el lazo más grande y el lazo pequeño encerrado dentro de la curva $r = 1 + 2 \cos 3\theta$.

37-42 Encuentre todos los puntos de intersección de las curvas dadas.

37. $r = \operatorname{sen} \theta, \quad r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

38. $r = 1 + \cos \theta, \quad r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

39. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta, \quad r = 3 \operatorname{sen} \theta$

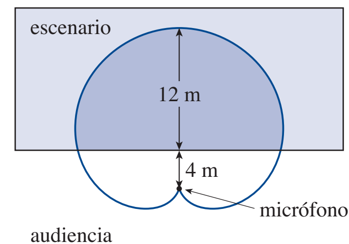
40. $r = \cos 3\theta, \quad r = \operatorname{sen} 3\theta$

41. $r = \operatorname{sen} \theta, \quad r = \operatorname{sen} 2\theta$

42. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

43. Los puntos de intersección de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y el lazo en espiral $r = 2\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, no se pueden encontrar exactamente. Utilice un dispositivo de graficación para aproximar los valores de θ en los que se intersecan. Después use estos valores para estimar el área que está dentro de ambas curvas.

44. Cuando se graban programas en vivo, es frecuente que los ingenieros de sonido utilicen un micrófono con un fonocaptor en forma de cardioide porque suprime el ruido de la audiencia. Suponga que el micrófono se coloca a 4 m del frente del escenario (como en la figura) y la frontera de la región de captación óptima está dada por la cardioide $r = 8 + 8 \operatorname{sen} \theta$, donde r se mide en metros y el micrófono está en el polo. Los músicos quieren conocer el área que tendrán en el escenario dentro del campo óptimo de captación del micrófono. Conteste esta pregunta.



45-48 Encuentre la longitud exacta de la curva polar.

45. $r = 2 \cos \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

46. $r = 5^\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

47. $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

48. $r = 2(1 + \cos \theta)$

49-50 Encuentre la longitud exacta de la curva. Utilice una gráfica para determinar el intervalo del parámetro.

49. $r = \cos^4(\theta/4)$

50. $r = \cos^2(\theta/2)$

51-54 Utilice una calculadora para encontrar la longitud de la curva redondeada a cuatro decimales. Si es necesario, trace la gráfica de la curva para determinar el intervalo del parámetro.

51. Un lazo de la curva $r = \cos 2\theta$

52. $r = \tan\theta, \quad \pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

53. $r = \operatorname{sen}(6 \operatorname{sen}\theta)$

54. $r = \operatorname{sen}(\theta/4)$

---

55. (a) Utilice la fórmula 10.2.6 para demostrar que el área de la superficie generada al rotar la curva polar

$$r = f(\theta) \qquad a \leqslant \theta \leqslant b$$

(donde f' es continua y $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$) en torno al eje polar es

$$S = \int_a^b 2\pi r \operatorname{sen}\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

(b) Utilice la fórmula del inciso (a) para encontrar el área de la superficie generada al girar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ en torno al eje polar.

56. (a) Encuentre una fórmula para el área de la superficie generada al rotar la curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$ (donde f' es continua y $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$), en torno a la recta $\theta = \pi/2$.

(b) Encuentre el área de la superficie generada al hacer rotar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ en torno a la recta $\theta = \pi/2$.

10.5 Secciones cónicas

En esta sección se darán definiciones geométricas de las parábolas, elipses e hipérbolas, y se deducirán sus ecuaciones estándar. Se llaman **secciones cónicas**, o **cónicas**, porque resultan de cortar un cono con un plano, como se muestra en la figura 1.

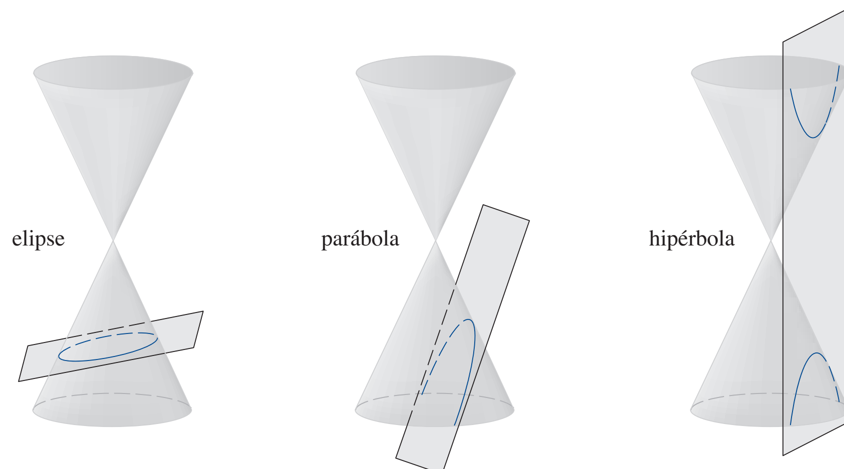


FIGURA 1
Cónicas

Parábolas

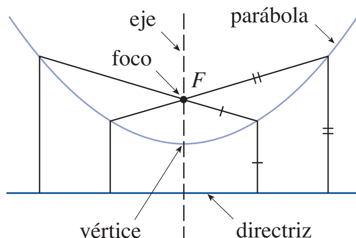


FIGURA 2

Una **parábola** es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija (llamada **directriz**). Esta definición se ilustra en la figura 2. Observe que el punto a la mitad entre el foco y la directriz está sobre la parábola y se llama **vértice**. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se llama **eje** de la parábola.

En el siglo XVI Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil disparado al aire con un ángulo respecto al suelo, es una parábola. Desde entonces, las formas parabólicas se han usado en el diseño de los faros de automóviles, telescopios reflectores y puentes suspendidos. (Véase en el problema 22 de la página 273 para la propiedad de reflexión de parábolas que las hace tan útiles.)

Se obtiene una ecuación particularmente simple para una parábola si se coloca su vértice en el origen O y su directriz paralela al eje x como en la figura 3. Si el foco está

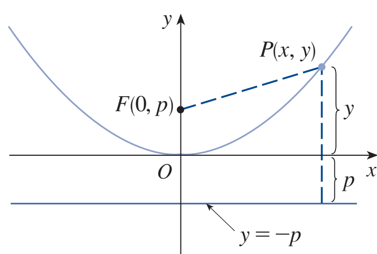


FIGURA 3

en el punto $(0, p)$, entonces la directriz tiene la ecuación $y = -p$. Si $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la parábola, entonces la distancia de P al foco es

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y la distancia de P a la directriz es $|y + p|$. (La figura 3 ilustra el caso donde $p > 0$.) La propiedad que define a una parábola es que estas distancias son iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Una ecuación equivalente se obtiene elevando al cuadrado y simplificando:

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2$$

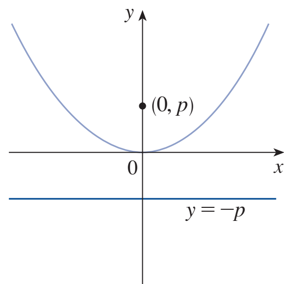
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

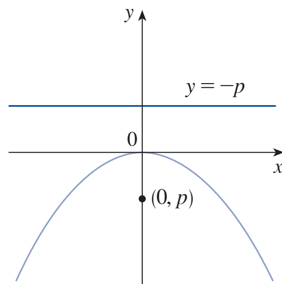
1 La ecuación de la parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$ es

$$x^2 = 4py$$

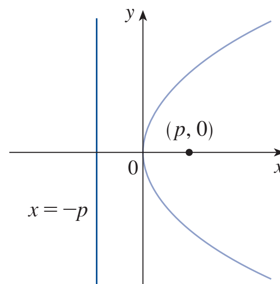
Si se escribe $a = 1/(4p)$, entonces la ecuación estándar de una parábola (1) se convierte en $y = ax^2$. Abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$ [véase la figura 4, incisos (a) y (b)]. La gráfica es simétrica con respecto al eje y porque (1) permanece sin cambio cuando x se sustituye por $-x$.



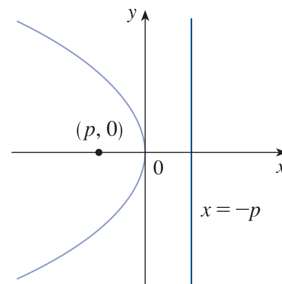
(a) $x^2 = 4py,\ p > 0$



(b) $x^2 = 4py,\ p < 0$



(c) $y^2 = 4px,\ p > 0$



(d) $y^2 = 4px,\ p < 0$

FIGURA 4

Si se intercambian x y y en (1), se obtiene

2 $$y^2 = 4px$$

que es una ecuación de la parábola con foco en $(p, 0)$ y directriz $x = -p$. (Intercambiar x y y equivale a reflejar a través de la recta $y = x$.) La parábola abre hacia la derecha si $p > 0$ y hacia la izquierda si $p < 0$ [véase la figura 4, incisos (c) y (d)]. En ambos casos, la gráfica es simétrica respecto al eje x, que es el eje de la parábola.

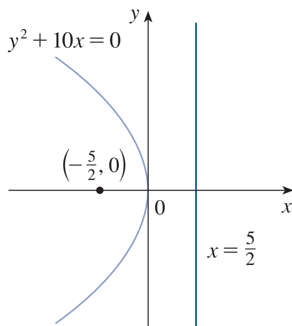


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 10x = 0$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Si se escribe la ecuación como $y^2 = -10x$ y se compara con la ecuación 2, se ve que $4p = -10$, de modo que $p = -\frac{5}{2}$. Por lo que el foco es $(p, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{5}{2}$. El trazo se muestra en la figura 5. ■

Elipses

Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante (véase la figura 6). Estos dos puntos fijos se llaman **focos** (plural del lugar geométrico **foco**). Una de las leyes de Kepler es que las órbitas de los planetas en el sistema solar son elipses con el Sol en un foco.

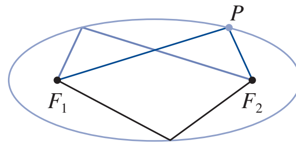


FIGURA 6

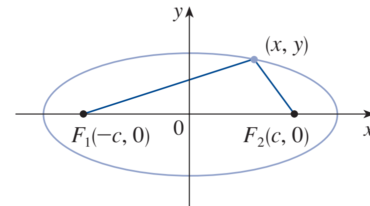


FIGURA 7

Con el fin de obtener la ecuación más simple para una elipse, se coloca los focos en el eje x en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ como en la figura 7, de modo que el origen esté a la mitad entre los focos. Sea $2a > 0$ la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos. Entonces $P(x, y)$ es un punto sobre la elipse cuando

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

es decir, $$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o $$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados, se tiene

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

que se puede simplificar como $a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$

Elevando al cuadrado otra vez:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

lo que resulta $$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Del triángulo F_1F_2P de la figura 7 se ve que $2c < 2a$, por lo que $c < a$, y por tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniencia, sea $b^2 = a^2 - c^2$. Entonces la ecuación de la elipse se convierte en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ o, si ambos lados se dividen entre a^2b^2.

3 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

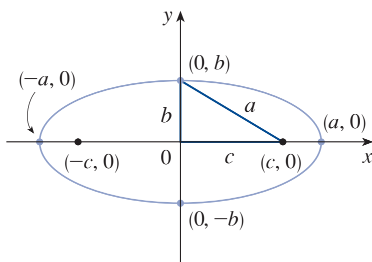


FIGURA 8
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geqslant b$

Puesto que $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. Las intersecciones con el eje x se encuentran al hacer $y = 0$. Entonces $x^2/a^2 = 1$, o bien $x^2 = a^2$, de modo que $x = \pm a$. Los puntos correspondientes $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llaman **vértices** de la elipse y el segmento de recta que une los vértices se llama **eje mayor**. Para encontrar las intersecciones con el eje y se hace $x = 0$ y se obtiene $y^2 = b^2$, por lo que $y = \pm b$. El segmento de recta que une $(0, b)$ y $(0, -b)$ es el **eje menor**. La ecuación 3 no cambia si x se sustituye por $-x$ o y se reemplaza por $-y$, por lo que la elipse es simétrica respecto a ambos ejes. Observe que si los focos coinciden, entonces $c = 0$, de modo que $a = b$ y la elipse se convierte en una circunferencia con radio $r = a = b$.

Se resume esta discusión como se muestra enseguida (véase la figura 8).

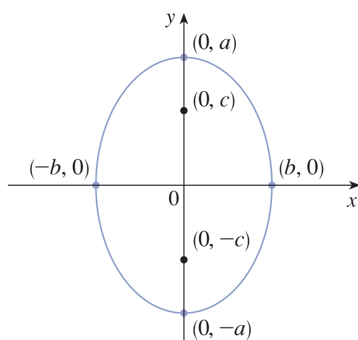


FIGURA 9
$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1,\ a \geqslant b$

4 La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(\pm a, 0)$.

Si los focos de una elipse se localizan en el eje y en $(0, \pm c)$, entonces se puede encontrar su ecuación al intercambiar x y y en (4). (Véase la figura 9.)

5 La elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$

tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(0, \pm a)$.

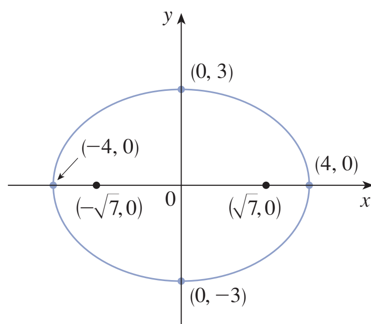


FIGURA 10
$9x^2 + 16y^2 = 144$

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ y localice los focos.

SOLUCIÓN Se dividen ambos lados de la ecuación entre 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación está ahora en la forma estándar para una elipse, así que se tiene $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ y $b = 3$. Las intersecciones con el eje x son ± 4 y las intersecciones con el eje y son ± 3. También, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, por lo que $c = \sqrt{7}$ y los focos son $(\pm\sqrt{7}, 0)$. La gráfica se traza en la figura 10. ■

EJEMPLO 3 Obtenga la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 2)$ y vértices $(0, \pm 3)$.

SOLUCIÓN Al usar la notación de (5), se tiene $c = 2$ y $a = 3$. Entonces se obtiene $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$, por lo que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Otra forma de escribir la ecuación es $9x^2 + 5y^2 = 45$. ■

Al igual que las parábolas, las elipses tienen una propiedad de reflexión interesante que tiene consecuencias prácticas. Si se coloca una fuente de luz o sonido en un foco con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz o sonido se refleja de la superficie al otro foco (véase el ejercicio 65). Este principio se usa en *litotripsia*, un tratamiento para cálculos renales. Un reflector con sección transversal elíptica se coloca de tal manera que el cálculo está en un foco. Ondas sonoras de alta intensidad generadas en el otro foco, se reflejan hacia el cálculo y lo destruyen sin dañar el tejido circundante. Se ahorra al paciente el traumatismo de la cirugía y se recupera en pocos días.

Hipérbolas

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (los **focos**) es una constante. Esta definición se ilustra en la figura 11.

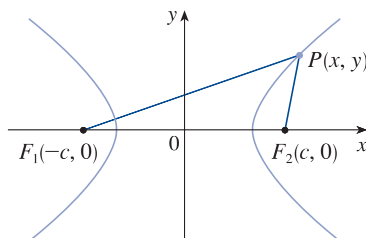


FIGURA 11
P está sobre la hipérbola cuando $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$.

Las hipérbolas aparecen con frecuencia como gráficas de ecuaciones en química, física, biología y economía (ley de Boyle, ley de Ohm, curvas de oferta y demanda). Una aplicación particularmente importante de las hipérbolas se encuentra en los sistemas de navegación desarrollados en la I y la II guerras mundiales (véase el ejercicio 51).

Observe que la definición de una hipérbola es similar a la de una elipse; el único cambio es que la suma de las distancias se convirtió en una diferencia de distancias. De hecho, la deducción de la ecuación de una hipérbola es también similar a la que se dio antes para una elipse. Se deja demostrar en el ejercicio 52 que cuando los focos están sobre el eje x en $(\pm c, 0)$ y la diferencia de distancias es $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, entonces la ecuación de la hipérbola es

6
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$. Observe que las intersecciones con el eje x son de nuevo $\pm a$ y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. Pero si se hace $x = 0$ en la ecuación 6 se obtiene $y^2 = -b^2$, que es imposible, así que no hay intersección con el eje y. La hipérbola es simétrica respecto a ambos ejes.

Para analizar más la hipérbola, de la ecuación 6 se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

Esto demuestra que $x^2 \geqslant a^2$, de modo que $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Por consiguiente, se tiene que $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola consta de dos partes, llamadas *ramas*.

Cuando se dibuja una hipérbola, es útil dibujar primero sus **asíntotas**, que son las rectas discontinuas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ que se muestran en la figura 12. Ambas ramas de la hipérbola se aproximan a las asíntotas; es decir, se acercan de manera arbitraria a las asíntotas. (Véase el ejercicio 4.5.73, donde estas rectas se muestran como asíntotas inclinadas.)

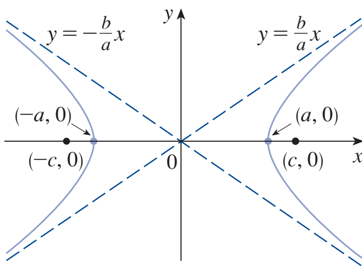


FIGURA 12
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

> **7** La hipérbola
> $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
> tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$ y asíntotas $y = \pm(b/a)x$.

Si los focos de una hipérbola están en el eje y, entonces al invertir los roles de x y y se obtiene la siguiente información, que se ilustra en la figura 13.

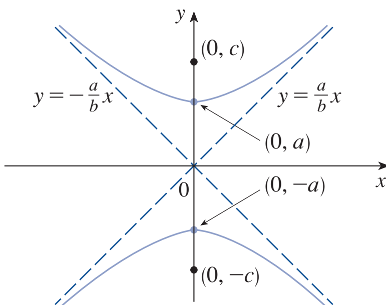


FIGURA 13
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

> **8** La hipérbola
> $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
> tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$ y asíntotas $y = \pm(a/b)x$.

EJEMPLO 4 Encuentre los focos y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ y trace su gráfica.

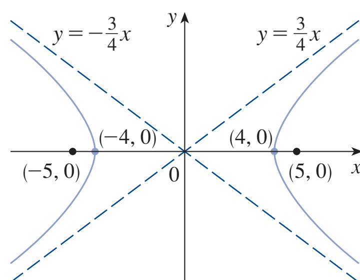


FIGURA 14
$9x^2 - 16y^2 = 144$

SOLUCIÓN Si se dividen ambos lados de la ecuación entre 144, resulta

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

lo cual es de la forma dada en (7) con $a = 4$ y $b = 3$. Como $c^2 = 16 + 9 = 25$, los focos son $(\pm 5, 0)$. Las asíntotas son las rectas $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$. La gráfica se muestra en la figura 14. ■

EJEMPLO 5 Encuentre los focos y la ecuación de la hipérbola con vértices $(0, \pm 1)$ y asíntota $y = 2x$.

SOLUCIÓN De (8) y la información dada, se ve que $a = 1$ y $a/b = 2$. Por lo que $b = a/2 = \frac{1}{2}$ y $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Los focos son $(0, \pm\sqrt{5}/2)$ y la ecuación de la hipérbola es

$$y^2 - 4x^2 = 1$$ ■

Cónicas desplazadas

Como se discute en el apéndice C, las cónicas se desplazan tomando las ecuaciones estándar (1), (2), (4), (5), (7) y (8) y se reemplazan x y y por $x - h$ y $y - k$.

EJEMPLO 6 Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(2, -2)$, $(4, -2)$ y vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$.

SOLUCIÓN El eje mayor es el segmento de recta que une los vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$ y tiene longitud 4, de manera que $a = 2$. La distancia entre los focos es 2, así que $c = 1$. Por lo que $b^2 = a^2 - c^2 = 3$. Como el centro de la elipse es $(3, -2)$, se reemplazan x y y en (4) por $x - 3$ y $y + 2$ para obtener

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

como la ecuación de la elipse. ■

EJEMPLO 7 Trace la cónica $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$ y encuentre sus focos.

SOLUCIÓN Complete los cuadrados como sigue:

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 - 8x) = 176$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 8x + 16) = 176 + 4 - 144$$

$$4(y-1)^2 - 9(x-4)^2 = 36$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

Esta es de la forma (8) excepto que x y y son reemplazadas por $x - 4$ y $y - 1$. Por lo que $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ y $c^2 = 13$. La hipérbola es desplazada cuatro unidades a la derecha y una unidad hacia arriba. Los focos son $(4, 1 + \sqrt{13})$ y $(4, 1 - \sqrt{13})$ y los vértices son $(4, 4)$ y $(4, -2)$. Las asíntotas son $y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 4)$. El trazo de la hipérbola se da en la figura 15. ■

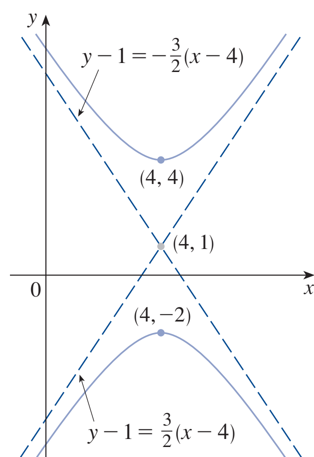


FIGURA 15
$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

10.5 EJERCICIOS

1-8 Encuentre el vértice, focos y directriz de la parábola y trace su gráfica.

1. $x^2 = 6y$

2. $2y^2 = 5x$

3. $2x = -y^2$

4. $x - 1 = (y + 5)^2$

5. $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$

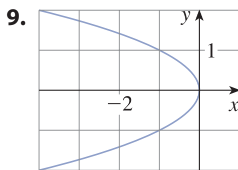
6. $(y - 2)^2 = 2x + 1$

7. $y^2 + 6y + 2x + 1 = 0$

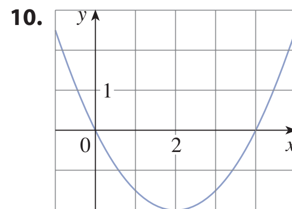
8. $2x^2 - 16x - 3y + 38 = 0$

9-10 Encuentre la ecuación de la parábola. Después determine el foco y la directriz.

9.



10.



11-16 Encuentre los vértices y focos de la elipse y trace su gráfica.

11. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

12. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

13. $x^2 + 9y^2 = 9$

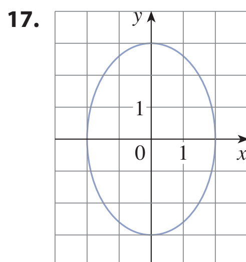
14. $100x^2 + 36y^2 = 225$

15. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$

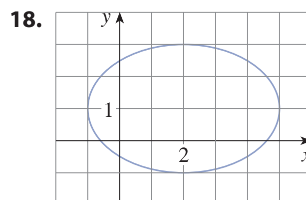
16. $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$

17-18 Determine una ecuación de la elipse. Luego encuentre sus focos.

17.



18.



19-24 Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.

19. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

20. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

21. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0$

22. $y^2 - 4x^2 - 2y + 16x = 31$

23. $x^2 - y^2 + 2y = 2$

24. $9y^2 - 4x^2 - 36y - 8x = 4$

25-30 Identifique el tipo de sección cónica cuya ecuación se da y determine los vértices y focos.

25. $4x^2 = y^2 + 4$

26. $4x^2 = y + 4$

27. $x^2 = 4y - 2y^2$

28. $y^2 - 2 = x^2 - 2x$

29. $3x^2 - 6x - 2y = 1$

30. $x^2 - 2x + 2y^2 - 8y + 7 = 0$

31-48 Determine una ecuación para la cónica que satisface las condiciones dadas.

31. Parábola, vértice $(0, 0)$, foco $(1, 0)$

32. Parábola, foco $(0, 0)$, directriz $y = 6$

33. Parábola, foco $(-4, 0)$, directriz $x = 2$

34. Parábola, foco $(2, -1)$, vértice $(2, 3)$

35. Parábola, vértice $(3, -1)$, eje horizontal que pasa por $(-15, 2)$

36. Parábola, eje vertical, que pasa por $(0, 4)$, $(1, 3)$ y $(-2, -6)$

37. Elipse, focos $(\pm 2, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

38. Elipse, focos $(0, \pm\sqrt{2})$, vértices $(0, \pm 2)$

39. Elipse, focos $(0, 2)$, $(0, 6)$, vértices $(0, 0)$, $(0, 8)$

40. Elipse, focos $(0, \pm 5)$, vértice $(0, \pm 13)$

41. Elipse, centro $(-1, 4)$, vértice $(-1, 0)$, foco $(-1, 6)$

42. Elipse, focos $(\pm 4, 0)$, que pasa por $(-4, 1.8)$

43. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, focos $(\pm 5, 0)$

44. Hipérbola, vértices $(0, \pm 2)$, focos $(0, \pm 5)$

45. Hipérbola, vértices $(-3, -4)$, $(-3, 6)$, focos $(-3, -7)$, $(-3, 9)$

46. Hipérbola, vértices $(-1, 2)$, $(7, 2)$, focos $(-2, 2)$, $(8, 2)$

47. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

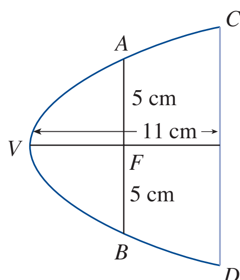
48. Hipérbola, focos $(2, 0)$, $(2, 8)$, asíntotas $y = 3 + \frac{1}{2}x$ y $y = 5 - \frac{1}{2}x$

49. El punto en una órbita lunar próxima a la superficie de la Luna se llama *perilunio*, y el punto más alejado de la superficie se llama *apolunio*. La nave espacial *Apolo 11* se colocó en una órbita lunar elíptica con altitud de perilunio de 110 km y altitud de apolunio de 314 km (arriba de la Luna). Encuentre una ecuación para esta elipse si el radio de la Luna es de 1728 km y su centro está en uno de los focos.

50. En la figura se muestra una sección transversal de un reflector parabólico. El bulbo se localiza en el foco y la abertura en el foco es de 10 cm.

(a) Encuentre una ecuación de la parábola.

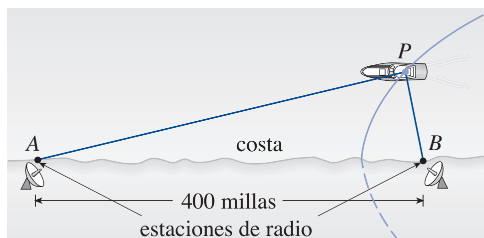
(b) Determine el diámetro de la abertura $|CD|$, a 11 cm del vértice.



51. El sistema de navegación por radio loran (LOng RAnge Navigation) era ampliamente utilizado hasta la década de 1990 cuando fue reemplazado por el sistema GPS. En el sistema loran, dos estaciones de radio, localizadas en A y B, transmiten en forma simultánea señales a un barco o un avión localizado en P. La computadora de a bordo convierte la diferencia de tiempo de recibir estas señales en una diferencia de distancia $|PA| - |PB|$, y esto, de acuerdo con la definición de una hipérbola, localice al barco o avión en una rama de una hipérbola (véase la figura). Suponga que la estación B se localiza a 400 millas al este de la estación A sobre la costa. Un barco recibe la señal de B 1200 microsegundos (μs) antes de recibir la señal de A.

(a) Si se supone que la señal de radio viaja a una rapidez de 980 pies/μs, encuentre la ecuación de la hipérbola sobre la que se localiza el barco.

(b) Si el barco se dirige al norte de B, ¿qué tan lejos de la costa está el barco?



52. Use la definición de hipérbola para deducir la ecuación 6 para una hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

53. Demuestre que la función definida por la rama superior de la hipérbola $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ es cóncava hacia arriba.

54. Encuentre la ecuación para la elipse con focos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ y eje principal de longitud 4.

55. Determine el tipo de curva representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k - 16} = 1$$

en cada uno de los siguientes casos:

(a) $k > 16$ (b) $0 < k < 16$ (c) $k < 0$

(d) Demuestre que todas las curvas en los incisos (a) y (b) tienen los mismos focos, sin importar el valor de k.

56. (a) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0) se puede expresar como

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

(b) ¿Cuál es la intersección de esta recta tangente con el eje x? Use este hecho para dibujar la recta tangente.

57. Demuestre que las rectas tangentes a la parábola $x^2 = 4py$ trazadas desde cualquier punto sobre la directriz son perpendiculares.

58. Demuestre que, si una elipse y una hipérbola tienen los mismos focos, entonces sus rectas tangentes en cada punto de intersección son perpendiculares.

59. Use ecuaciones paramétricas y la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar la circunferencia de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

60. El planeta enano Plutón viaja en una órbita elíptica alrededor del Sol (en un foco). La longitud del eje mayor es 1.18×10^{10} km y la longitud del eje menor es 1.14×10^{10} km. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la distancia que viaja el planeta durante una órbita completa alrededor del Sol.

61. Encuentre el área de la región encerrada por la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y la recta vertical que pasa por un foco.

62. (a) Si una elipse gira alrededor de su eje mayor, encuentre el volumen del sólido resultante.

(b) Si gira alrededor de su eje menor, encuentre el volumen resultante.

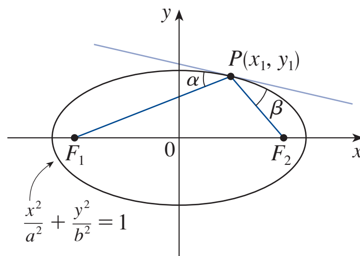
63. Encuentre el centroide de la región encerrada por el eje x y la mitad superior de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

64. (a) Calcule el área de la superficie del elipsoide generado al girar una elipse en torno a su eje mayor.

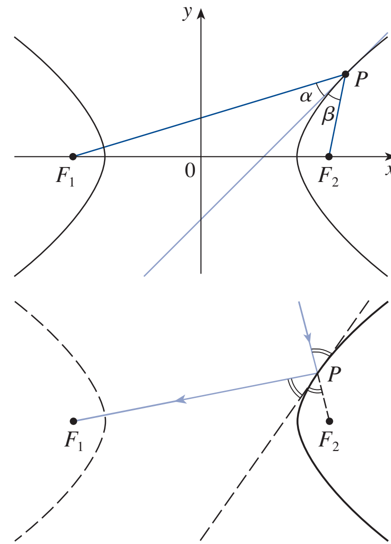
(b) ¿Cuál es el área de la superficie si la elipse gira en torno de su eje menor?

65. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las rectas PF_1, PF_2 y la elipse como se muestra en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. Esto explica cómo funcionan las cúpulas susurrantes y la litotripsia. El sonido que viene de un foco se refleja y pasa

por el otro foco. [*Sugerencia*: use la fórmula del problema 21 de la página 273 para demostrar que $\tan \alpha = \tan \beta$.]



66. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las rectas PF_1, PF_2 y la hipérbola como se muestra en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (Esta es la propiedad de reflexión de la hipérbola. Demuestra que la luz dirigida a un foco F_2 de un espejo hiperbólico, se refleja hacia el otro foco F_1.)



10.6 Secciones cónicas en coordenadas polares

En la sección precedente se definió la parábola en términos de un foco y una directriz, pero se definieron la elipse y la hipérbola en términos de dos focos. En esta sección se da un tratamiento más unificado de los tres tipos de secciones cónicas en términos de un foco y la directriz. Además, si se coloca el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar simple, la cual es una descripción cómoda del movimiento de planetas, satélites y cometas.

1 Teorema Sea F un punto fijo (llamado foco) y l una recta fija (llamada directriz) en un plano. Sea e un número positivo fijo (llamado excentricidad). El conjunto de todos los puntos P en el plano, tales que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(esto es, el cociente de la distancia desde F entre la distancia desde l es la constante e) es una sección cónica. La cónica es

(a) una elipse si $e < 1$
(b) una parábola si $e = 1$
(c) una hipérbola si $e > 1$

COMPROBACIÓN Observe que si la excentricidad es $e = 1$, entonces $|PF| = |Pl|$, por lo cual la condición dada simplemente se convierte en la definición de una parábola como se da en la sección 10.5.

Se coloca el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha. Por lo que la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el

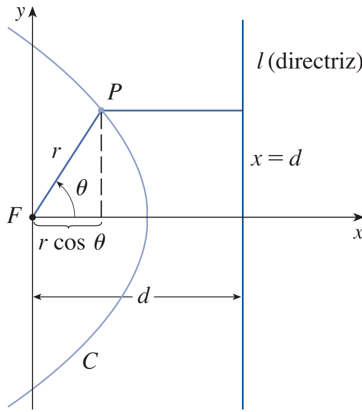


FIGURA 1

punto P tiene coordenadas polares (r, θ), se ve de la figura 1 que

$$|PF| = r \qquad |Pl| = d - r\cos\theta$$

Por lo que la condición $|PF| / |Pl| = e$ o $|PF| = e|Pl|$, resulta

2 $$r = e(d - r\cos\theta)$$

Si se elevan al cuadrado ambas partes de esta ecuación polar y se convierten a coordenadas rectangulares, se obtiene

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

o $$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

Después de completar los cuadrados, se tiene

3 $$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Si $e < 1$, se reconoce a la ecuación 3 como la ecuación de una elipse. De hecho, es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

4 $$h = -\frac{e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

En la sección 10.5 se ve que los focos de una elipse están a una distancia c del centro, donde

5 $$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Esto demuestra que $$c = \frac{e^2d}{1 - e^2} = -h$$

y confirma que el foco como se definió en el teorema 1 significa lo mismo que el foco definido en la sección 10.5. Se deduce también de las ecuaciones 4 y 5 que la excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Si $e > 1$, entonces $1 - e^2 < 0$ y se tiene que la ecuación 3 representa una hipérbola. Tal y como se hizo antes, se podría reescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y se ve que

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{donde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$ ■

Al resolver la ecuación 2 para r, se ve que la ecuación polar de la cónica que se muestra en la figura 1 se puede expresar como

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Si se elige que la directriz esté a la izquierda del foco como $x = -d$, o si se elige la directriz paralela al eje polar como $y = \pm d$, entonces la ecuación polar de la cónica está dada por el siguiente teorema, que se ilustra mediante la figura 2. (Véanse los ejercicios 21-23.)

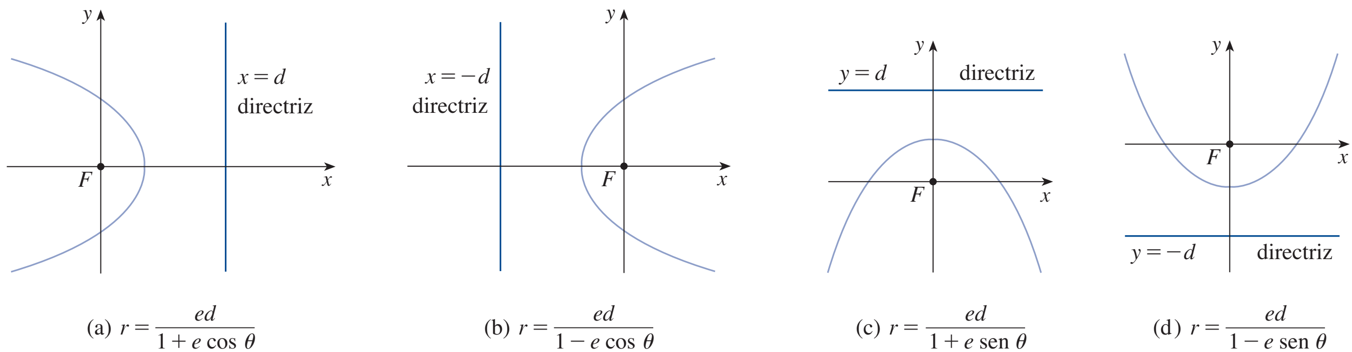


FIGURA 2
Ecuación polar de la cónica

6 Teorema Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

representa una sección cónica con excentricidad e. La cónica es una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación polar para una parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la recta $y = -6$.

SOLUCIÓN Al usar el teorema 6 con $e = 1$ y $d = 6$, y emplear el inciso (d) de la figura 2, se ve que la ecuación de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \mathrm{sen}\,\theta}$$

■

EJEMPLO 2 Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

Encuentre la excentricidad, identifique la cónica, localice la directriz y trace la cónica.

SOLUCIÓN Al dividir numerador y denominador entre 3, se escribe la ecuación como

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

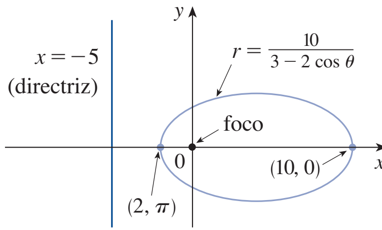


FIGURA 3

Del teorema 6 se ve que esta ecuación representa una elipse con $e = \frac{2}{3}$. Puesto que $ed = \frac{10}{3}$, se tiene

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{e} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5$$

por lo que la directriz tiene la ecuación cartesiana $x = -5$. Cuando $\theta = 0$, $r = 10$; cuando $\theta = \pi$, $r = 2$. Por lo que los vértices tienen coordenadas polares (10, 0) y $(2, \pi)$. La elipse se traza en la figura 3. ■

EJEMPLO 3 Trace la cónica $r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en la forma

$$r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

se ve que la excentricidad es $e = 2$ y, por tanto, la ecuación representa una hipérbola. Puesto que $ed = 6$, $d = 3$ y la directriz tiene ecuación $y = 3$. Los vértices ocurren cuando $\theta = \pi/2$ y $3\pi/2$, por lo que son $(2, \pi/2)$ y $(-6, 3\pi/2) = (6, \pi/2)$. También es útil trazar la gráfica de las intersecciones con el eje x. Estas ocurren cuando $\theta = 0, \pi$; en ambos casos $r = 6$. Para más exactitud, se podrían dibujar las asíntotas. Observe que $r \to \pm\infty$ cuando $1 + 2 \operatorname{sen} \theta \to 0^+$ o 0^- y $1 + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$ cuando $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$. Por lo que las asíntotas son paralelas a los rayos $\theta = 7\pi/6$ y $\theta = 11\pi/6$. La hipérbola se traza en la figura 4.

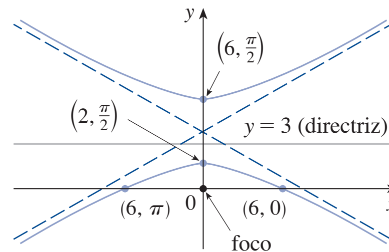


FIGURA 4
$r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$

■

Al hacer girar secciones cónicas, es mucho más conveniente usar ecuaciones polares que cartesianas. Se usa el hecho (véase el ejercicio 10.3.73) de que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ girada en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen por un ángulo α.

EJEMPLO 4 Si la elipse del ejemplo 2 se hace girar por un ángulo $\pi/4$ en torno al origen, determine una ecuación polar y trace la gráfica de la elipse resultante.

SOLUCIÓN La ecuación de la elipse rotada se obtiene reemplazando θ con $\theta - \pi/4$ en la ecuación dada en el ejemplo 2. Por lo que la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

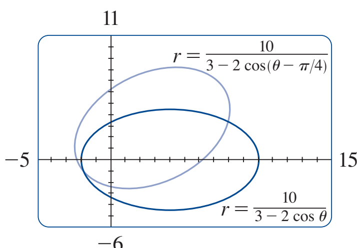


FIGURA 5

Se usa esta ecuación para trazar la gráfica de la elipse girada en la figura 5. Observe que la elipse ha sido girada en torno a su foco izquierdo. ■

En la figura 6 se utiliza una computadora para trazar varias cónicas para mostrar el efecto de variar la excentricidad e. Observe que cuando e es cercana a 0 la elipse es casi circular, mientras que se vuelve más alargada cuando $e \to 1^-$. Cuando $e = 1$, por supuesto, la cónica es una parábola.

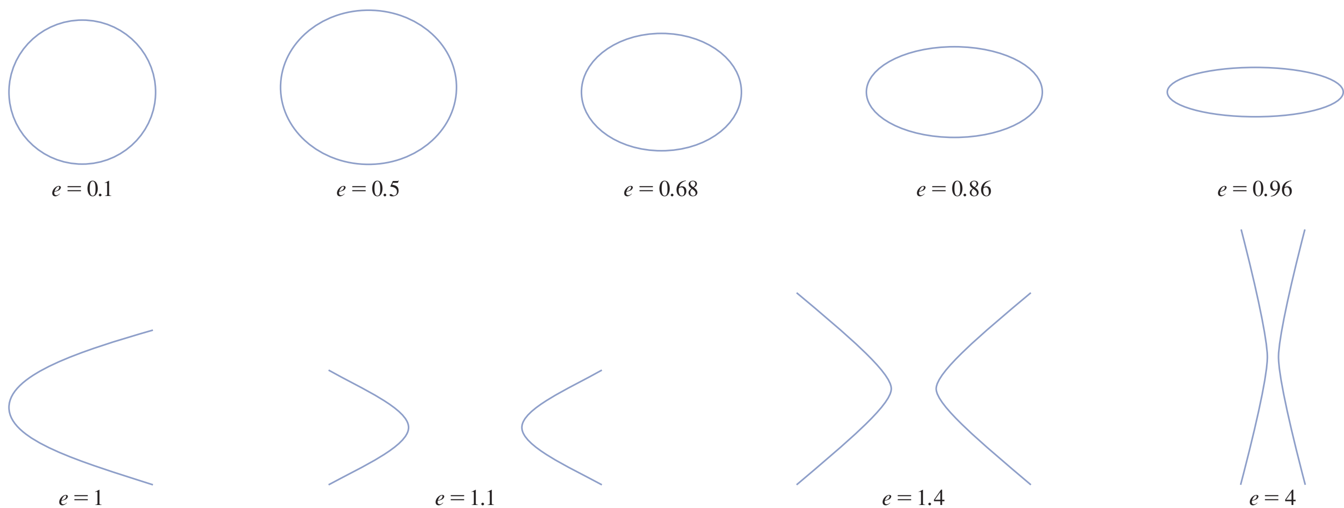


FIGURA 6

Leyes de Kepler

En 1609 el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler, con base en enormes cantidades de datos astronómicos, publicó las tres leyes del movimiento planetario siguientes.

Leyes de Kepler

1. Un planeta gira alrededor del Sol en órbita elíptica con el Sol en uno de los focos.
2. La recta que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Aun cuando Kepler formuló sus leyes en términos del movimiento de planetas alrededor del Sol, se aplican igualmente bien al movimiento de lunas, cometas, satélites y otros cuerpos que giran sujetos a una sola fuerza gravitacional. En la sección 13.4 se demuestra cómo deducir las leyes de Kepler a partir de las leyes de Newton. Aquí se emplea la primera ley de Kepler, junto con la ecuación polar de una elipse, para calcular cantidades de interés en astronomía.

Para fines de cálculos astronómicos, es útil expresar la ecuación de una elipse en términos de su excentricidad e y su semieje mayor a. Se puede expresar la distancia d del foco a la directriz en términos de a si se usa (4):

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{e^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

Entonces $ed = a(1 - e^2)$. Si la directriz es $x = d$, entonces la ecuación polar es

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

> **7** La ecuación polar de una elipse con foco en el origen, semieje mayor a, excentricidad e y directriz $x = d$ se puede expresar en la forma
>
> $$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

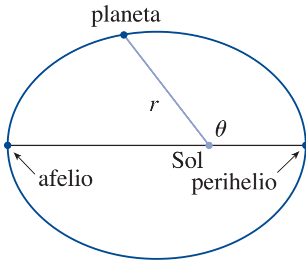


FIGURA 7

Las posiciones de un planeta que sean más cercanas al Sol, y más lejanas a este, se denominan **perihelio** y **afelio**, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse (véase la figura 7). Las distancias del Sol al perihelio y afelio reciben el nombre de distancia al perihelio y distancia al afelio, respectivamente. En la figura 1 de la página 683 el Sol está en el foco F, por lo que en el perihelio se tiene $\theta = 0$ y, de la ecuación 7,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos 0} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e)$$

Del mismo modo, en el afelio $\theta = \pi$ y $r = a(1 + e)$.

> **8** La distancia al perihelio de un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia al afelio es $a(1 + e)$.

EJEMPLO 5

(a) Encuentre una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco), dado que la excentricidad es alrededor de 0.017 y la longitud del eje mayor es aproximadamente 2.99×10^8 km.
(b) Encuentre la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio.

SOLUCIÓN

(a) La longitud del eje mayor es $2a = 2.99 \times 10^8$, por lo que $a = 1.495 \times 10^8$. Un dato es que $e = 0.017$ y, por tanto, de la ecuación 7, una ecuación de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{(1.495 \times 10^8)[1 - (0.017)^2]}{1 + 0.017 \cos \theta}$$

o, aproximadamente,

$$r = \frac{1.49 \times 10^8}{1 + 0.017 \cos \theta}$$

(b) De (8), la distancia al perihelio de la Tierra al Sol es

$$a(1 - e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 - 0.017) \approx 1.47 \times 10^8 \text{ km}$$

y la distancia al afelio es

$$a(1 + e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 + 0.017) \approx 1.52 \times 10^8 \text{ km}$$

■

10.6 EJERCICIOS

1-8 Escriba una ecuación polar de una cónica con el foco en el origen y los datos dados.

1. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $x = 4$
2. Parábola, directriz $x = -3$
3. Hipérbola, excentricidad 1.5, directriz $y = 2$
4. Elipse, excentricidad 0.8, vértice $(1, \pi/2)$
5. Elipse, excentricidad $\frac{2}{3}$, vértice $(2, \pi)$
6. Elipse, excentricidad 0.6, directriz $r = 4 \csc \theta$
7. Parábola, vértice $(3, \pi/2)$
8. Hipérbola, excentricidad 2, directriz $r = -2 \sec \theta$

9-16 (a) Encuentre la excentricidad, (b) identifique la cónica, (c) dé una ecuación de la directriz y (d) trace la cónica.

9. $r = \dfrac{12}{3 - 10 \cos \theta}$
10. $r = \dfrac{1}{2 + \operatorname{sen} \theta}$
11. $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$
12. $r = \dfrac{5}{2 - 4 \cos \theta}$
13. $r = \dfrac{9}{6 + 2 \cos \theta}$
14. $r = \dfrac{1}{3 - 3 \operatorname{sen} \theta}$
15. $r = \dfrac{10}{5 - 6 \operatorname{sen} \theta}$
16. $r = \dfrac{4}{2 + 3 \cos \theta}$

17. (a) Encuentre la excentricidad y la directriz de la cónica $r = 1/(1 - 2 \operatorname{sen} \theta)$ y trace la gráfica de la cónica y su directriz.
    (b) Si esta cónica se hace girar en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen con un ángulo $3\pi/4$, escriba la ecuación resultante y trace la gráfica de su curva.

18. Trace la gráfica de la cónica $r = 4/(5 + 6 \cos \theta)$ y su directriz. También grafique la cónica obtenida al girar esta curva en torno al origen con un ángulo $\pi/3$.

19. Trace la gráfica de las cónicas $r = e/(1 - e \cos \theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 en una pantalla común. ¿Cómo afecta el valor de e la forma de la curva?

20. (a) Trace la gráfica de las cónicas $r = ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$ para $e = 1$ y varios valores de d. ¿Cómo afecta el valor de d la forma de la cónica?
    (b) Trace la gráfica de estas cónicas para $d = 1$ y varios valores de e. ¿Cómo afecta el valor de e la forma de la cónica?

21. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $x = -d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

22. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

23. Demuestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = -d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

24. Demuestre que las parábolas $r = c/(1 + \cos \theta)$ y $r = d/(1 - \cos \theta)$ se cortan en ángulos rectos.

25. La órbita de Marte alrededor del Sol es una elipse con excentricidad 0.093 y semieje mayor de 2.28×10^8 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.

26. La órbita de Júpiter tiene excentricidad de 0.048 y la longitud del eje mayor es 1.56×10^9 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.

27. La órbita del cometa Halley, visto por última vez en 1986 y que debe volver en 2061, es una elipse con excentricidad 0.97 y un foco en el Sol. La longitud de su eje principal es 36.18 UA. [Una unidad astronómica (UA) es la distancia media entre la Tierra y el Sol, aproximadamente 150 millones de kilómetros.] Encuentre una ecuación polar para la órbita del cometa Halley. ¿Cuál es la distancia máxima desde el cometa al Sol?

28. El cometa Hale-Bopp, descubierto en 1995, tiene una órbita elíptica con excentricidad 0.9951 y la longitud del eje mayor es 356.5 UA. Encuentre una ecuación polar para la órbita de este cometa. ¿Qué tan cerca del Sol llega?



© Dean Ketelsen

29. El planeta Mercurio viaja en una órbita elíptica con excentricidad 0.206. Su distancia mínima del Sol es 4.6×10^7 km. Determine su distancia máxima del Sol.

30. La distancia desde el planeta enano Plutón al Sol es de 4.43×10^9 km en el perihelio y 7.37×10^9 km en el afelio. Determine la excentricidad de la órbita de Plutón.

31. Con los datos del ejercicio 29, calcule la distancia que recorre el planeta Mercurio durante una órbita completa alrededor del Sol. (Si su calculadora o sistema algebraico computacional evalúa integrales definidas, utilícelo. De lo contrario, use la regla de Simpson.)

10 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una curva paramétrica?
   (b) ¿Cómo se traza una curva paramétrica?
2. (a) ¿Cómo se encuentra la pendiente de una recta tangente a una curva paramétrica?
   (b) Determine el área debajo de una curva paramétrica.
3. Escriba una expresión para cada una de las siguientes descripciones:
   (a) La longitud de una curva paramétrica.
   (b) El área de la superficie obtenida al hacer girar una curva paramétrica en torno al eje x.
4. (a) Use un diagrama para explicar el significado de las coordenadas polares (r, θ) de un punto.
   (b) Escriba ecuaciones que expresen las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto en términos de las coordenadas polares.
   (c) ¿Qué ecuaciones usaría para obtener las coordenadas polares de un punto si conociera las coordenadas cartesianas?
5. (a) ¿Cómo se determina la pendiente de una recta tangente a una curva polar?
   (b) ¿Cómo se calcula el área de una región acotada por una curva polar?
   (c) ¿Cómo se determina la longitud de una curva polar?
6. (a) Dé una definición geométrica de una parábola.
   (b) Escriba una ecuación de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$. ¿Qué pasa si el foco es $(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$?
7. (a) Dé una definición de una elipse en términos de los focos.
   (b) Escriba una ecuación para la elipse con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.
8. (a) Dé una definición de una hipérbola en términos de los focos.
   (b) Escriba una ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.
   (c) Escriba ecuaciones para las asíntotas de la hipérbola del inciso (b).
9. (a) ¿Cuál es la excentricidad de una sección cónica?
   (b) ¿Qué se puede decir acerca de la excentricidad si la sección cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?
   (c) Escriba una ecuación polar para una sección cónica con excentricidad e y directriz $x = d$. ¿Qué pasa si la directriz es $x = -d$? ¿$y = d$? ¿$y = -d$?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ satisface $g'(1) = 0$, entonces tiene una recta tangente horizontal cuando $t = 1$.
2. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son derivables dos veces, entonces
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$
3. La longitud de la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$.
4. Si un punto se representa por (x, y) en coordenadas cartesianas (donde $x \neq 0$) y (r, θ) en coordenadas polares, entonces $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.
5. Las curvas polares
$$r = 1 - \operatorname{sen} 2\theta \qquad r = \operatorname{sen} 2\theta - 1$$
tienen la misma gráfica.
6. Las ecuaciones $r = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ y $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 2 \cos 3t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ tienen la misma gráfica.
7. Las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^4$ tienen la misma gráfica que $x = t^3$, $y = t^6$.
8. La gráfica de $y^2 = 2y + 3x$ es una parábola.
9. Una recta tangente a una parábola corta la parábola solo una vez.
10. Una hipérbola nunca corta su directriz.

EJERCICIOS

1-4 Trace la curva paramétrica y elimine el parámetro para encontrar la ecuación cartesiana de la curva.

1. $x = t^2 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad -4 \leqslant t \leqslant 1$

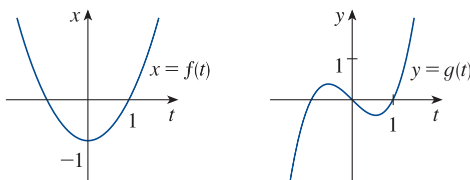
2. $x = 1 + e^{2t}, \quad y = e^t$

3. $x = \cos\theta, \quad y = \sec\theta, \quad 0 \leqslant \theta < \pi/2$

4. $x = 2\cos\theta, \quad y = 1 + \operatorname{sen}\theta$

5. Escriba tres diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas para la curva $y = \sqrt{x}$.

6. Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para trazar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en la que se traza la curva cuando se t crece.



7. (a) Ubique el punto con coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$. A continuación, encuentre sus coordenadas cartesianas.
(b) Las coordenadas cartesianas de un punto son $(-3, 3)$. Encuentre dos conjuntos de coordenadas polares para el punto.

8. Trace la región formada de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen $1 \leqslant r < 2$ y $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/6$.

9-16 Trace la curva polar.

9. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

10. $r = 1 - \cos\theta$

11. $r = \cos 3\theta$

12. $r = 3 + \cos 3\theta$

13. $r = 1 + \cos 2\theta$

14. $r = 2\cos(\theta/2)$

15. $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$

17-18 Encuentre la ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

17. $x + y = 2$

18. $x^2 + y^2 = 2$

19. La curva con ecuación polar $r = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ se llama **cocleoide**. Use una gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas para trazar la cocleoide a mano. Después trace la gráfica con una máquina para comprobar su trazo.

20. Trace la gráfica de la elipse $r = 2/(4 - 3\cos\theta)$ y su directriz. Trace la gráfica también de la elipse obtenida por rotación en torno al origen por un ángulo de $2\pi/3$.

21-24 Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor especificado del parámetro.

21. $x = \ln t, \ y = 1 + t^2; \quad t = 1$

22. $x = t^3 + 6t + 1, \quad y = 2t - t^2; \quad t = -1$

23. $r = e^{-\theta}; \quad \theta = \pi$

24. $r = 3 + \cos 3\theta; \quad \theta = \pi/2$

25-26 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2.

25. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$

26. $x = 1 + t^2, \quad y = t - t^3$

27. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto mínimo sobre la curva $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 + t + 1$. Después use el cálculo para determinar las coordenadas exactas.

28. Encuentre el área encerrada por el lazo de la curva del ejercicio 27.

29. ¿En qué puntos la curva

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t \qquad y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t$$

tiene rectas tangentes verticales u horizontales? Use esta información para ayudarse a trazar la curva.

30. Determine el área encerrada por la curva del ejercicio 29.

31. Obtenga el área encerrada por la curva $r^2 = 9\cos 5\theta$.

32. Encuentre el área encerrada por el lazo interior de la curva $r = 1 - 3\operatorname{sen}\theta$.

33. Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = 2$ y $r = 4\cos\theta$.

34. Obtenga los puntos de intersección de las curvas $r = \cot\theta$ y $r = 2\cos\theta$.

35. Determine el área de la región que está dentro de ambas circunferencias $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

36. Encuentre el área de la región que está dentro de la curva $r = 2 + \cos 2\theta$ pero fuera de la curva $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

37-40 Encuentre la longitud de la curva.

37. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

39. $r = 1/\theta, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

40. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

41-42 Calcule el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada en torno al eje x.

41. $x = 4\sqrt{t}, \quad y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{2t^2}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

42. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

---

43. Las curvas definidas por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$

se llaman **estrofoides** (de una palabra griega que significa “voltear o torcer”). Investigue cómo varían estas curvas cuando varía c.

44. Una familia de curvas tiene ecuaciones polares $r^a = |\operatorname{sen} 2\theta|$ donde a es un número positivo. Investigue cómo cambian estas curvas cuando cambia a.

45-48 Encuentre los focos y vértices, trace la gráfica.

45. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

46. $4x^2 - y^2 = 16$

47. $6y^2 + x - 36y + 55 = 0$

48. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$

---

49. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(\pm 4, 0)$ y vértices $(\pm 5, 0)$.

50. Encuentre una ecuación de la parábola con focos $(2, 1)$ y directriz $x = -4$.

51. Encuentre una ecuación de la hipérbola con focos $(0, \pm 4)$ y asíntotas $y = \pm 3x$.

52. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(3, \pm 2)$ y un eje con longitud 8.

53. Obtenga una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y que tiene su otro foco en el origen.

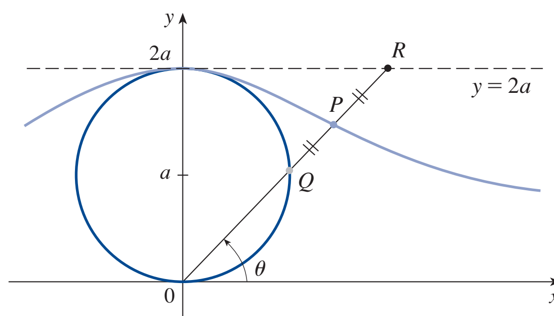
54. Demuestre que si m es cualquier número real, entonces hay exactamente dos rectas de pendiente m que son tangentes a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y sus ecuaciones son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

55. Encuentre una ecuación polar para la elipse con foco en el origen, excentricidad $\frac{1}{3}$ y directriz con ecuación $r = 4 \sec \theta$.

56. Demuestre que los ángulos entre el eje polar y las asíntotas de la hipérbola $r = ed/(1 - e \cos \theta)$, $e > 1$, están dados por $\cos^{-1}(\pm 1/e)$.

57. En la figura el círculo de radio está fijo y para toda θ, el punto P es el punto medio del segmento QR. La curva trazada que pasa por P para $0 < \theta < \pi$, la curva se llama **curva de arco largo**. Encuentre las ecuaciones paramétricas de esta curva.



58. La curva llamada **folium de Descartes** está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

(a) Demuestre que si (a, b) está sobre la curva, entonces (b, a) también lo está; es decir, la curva es simétrica respecto a la recta $y = x$. ¿En dónde se interseca la curva con esta recta?

(b) Encuentre los puntos sobre la curva donde las rectas tangentes son horizontales o verticales.

(c) Demuestre que la recta $y = -x - 1$ es una asíntota oblicua.

(d) Trace la curva.

(e) Demuestre que una ecuación cartesiana de esta curva es $x^3 + y^3 = 3xy$.

(f) Demuestre que la ecuación polar puede expresarse en la forma

$$r = \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta}$$

(g) Encuentre el área encerrada por el lazo de esta curva.

SAC (h) Demuestre que el área del lazo es la misma que el área que está entre la asíntota y las ramas infinitas de la curva. (Utilice un sistema algebraico computacional para evaluar la integral.)

Problemas adicionales

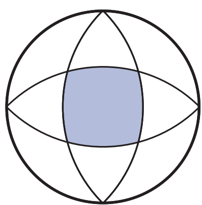


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

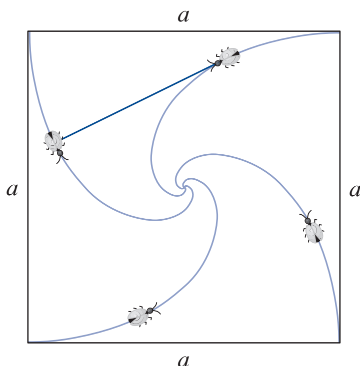


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

1. El círculo exterior en la figura tiene radio 1 y los centros de los arcos circulares interiores se encuentren en el círculo externo. Encuentre el área de la región sombreada.

2. (a) Encuentre los puntos máximo y mínimo de la curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

(b) Trace la curva. (Observe que es simétrica con respecto a ambos ejes y a ambas rectas $y = \pm x$, de modo que es suficiente considerar inicialmente $y \geqslant x \geqslant 0$.)

SAC (c) Utilice coordenadas polares y un sistema algebraico computacional para encontrar el área encerrada por la curva.



3. ¿Cuál es el rectángulo de vista más pequeño que contiene a cada miembro de la familia de curvas polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$, donde $0 \leqslant c \leqslant 1$? Ilustre su respuesta trazando varios miembros de la familia en este rectángulo de vista.

4. Se colocan cuatro insectos en cuatro esquinas de un cuadrado con longitud a. Los insectos avanzan en sentido contrario a las manecillas del reloj a la misma rapidez, y cada uno avanza directamente hacia el siguiente insecto todo el tiempo. Se aproximan al centro del cuadrado a lo largo de trayectorias espirales.

(a) Obtenga la ecuación polar de la trayectoria de un insecto al suponer que el polo está en el centro del cuadrado. (Use el hecho de que la recta que une a un insecto con el siguiente es tangente a la trayectoria del insecto.)

(b) Encuentre la distancia recorrida por un insecto hasta el momento que se encuentra con los otros insectos en el centro.

5. Demuestre que cualquier recta tangente a una hipérbola toca la hipérbola a la mitad del camino entre los puntos de intersección de la recta tangente y las asíntotas.

6. Una circunferencia C de radio $2r$ tiene su centro en el origen. Un círculo de radio r rueda sin resbalar en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj alrededor de C. Un punto P está situado en un radio fijo del círculo giratorio a una distancia b de su centro, $0 < b < r$. [Véase las partes (i) e (ii) de la figura.] Sea L la recta desde el centro de C al centro del círculo que rueda y sea θ el ángulo que L forma con el eje x positivo.

(a) Usando θ como un parámetro, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada que pasa por P son

$$x = b \cos 3\theta + 3r \cos \theta \qquad y = b \operatorname{sen} 3\theta + 3r \operatorname{sen} \theta$$

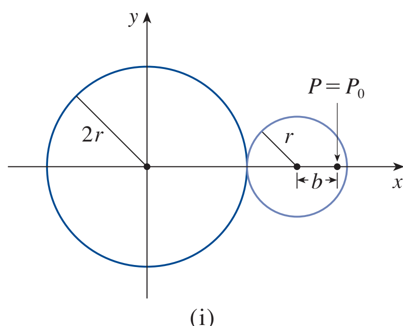
Nota: si $b = 0$, la trayectoria es una circunferencia de radio $3r$; si $b = r$, la trayectoria es una *epicicloide*. La trayectoria trazada por P para $0 < b < r$ se llama *epitrocoide*.

(b) Trace la gráfica de la curva para varios valores de b entre 0 y r.

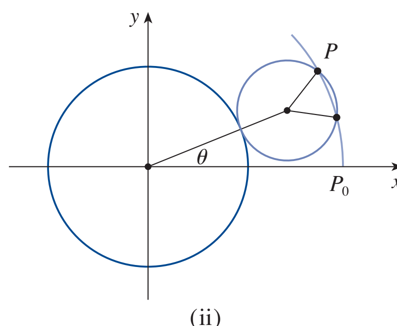
(c) Demuestre que un triángulo equilátero puede inscribirse en el epitrocoide y que su centroide está sobre la circunferencia de radio b con centro en el origen.

Nota: este es el principio del motor rotatorio Wankel. Cuando el triángulo equilátero gira con sus vértices en el epitrocoide, su centroide recorre una circunferencia cuyo centro está en el centro de la curva.

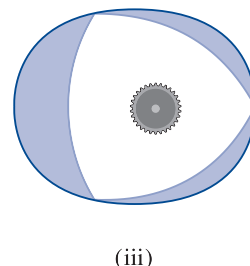
(d) En casi todos los motores rotatorios, los lados de los triángulos equiláteros son sustituidos por arcos de circunferencia con centro en los vértices opuestos como en el inciso (iii) de la figura. (Entonces el diámetro del rotor es constante.) Demuestre que el rotor se ajusta en el epitrocoide si $b \leqslant \frac{3}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)r$.



(i)



(ii)



(iii)

11 Sucesiones y series infinitas



Betelgeuse es una estrella supergigante roja, una de las más grande y más brillante de las estrellas observables. En el proyecto de la página 783 le piden comparar la radiación emitida por Betelgeuse con la de otras estrellas.

LAS SUCESIONES Y SERIES INFINITAS se introdujeron brevemente en *Un adelanto del cálculo*, en relación con las paradojas de Zenón y la representación decimal de números. Su importancia en el cálculo proviene de la idea de Newton de representar funciones como sumas de sucesiones infinitas. Por ejemplo, para encontrar áreas, con frecuencia integraba una función expresándola primero como una serie y después integrando cada uno de sus términos. En la sección 11.10 se tratará de seguir esta idea para integrar funciones como e^{-x^2}. (Hay que recordar que antes no era posible enfrentar esto.) Muchas de las funciones que aparecen en física matemática y química, como las funciones de Bessel, están definidas como sumas de series, así que es muy importante familiarizarse con los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y series infinitas.

Los físicos también usan las series en otro modo, tal como se verá en la sección 11.11. En el estudio de fenómenos tan diversos como la óptica, la relatividad especial y el electromagnetismo, los físicos analizan los fenómenos reemplazándolos primero por unos cuantos términos de las series que los representan.

11.1 Sucesiones

Una **sucesión** se puede pensar como una lista de números escritos en un orden definido:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

El número a_1 recibe el nombre de *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Aquí se tratará exclusivamente con sucesiones infinitas, por lo que cada término a_n tiene un sucesor a_{n+1}.

Observe que para todo entero positivo n hay un número correspondiente a_n, por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Pero es usual escribir a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

NOTACIÓN La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ también se denota mediante

$$\{a_n\} \qquad \text{o} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLO 1 Algunas sucesiones se pueden definir dando una fórmula para el n-ésimo término. En los ejemplos siguientes se ofrecen tres descripciones de la sucesión: una en la que se aplica la notación anterior, en otra en la que se usa una fórmula definida y una tercera en la que se escriben los términos de la sucesión. Observe que n no tiene que empezar en 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots, \dfrac{n}{n+1}, \dots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \dots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \dots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\qquad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n-3}, \dots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\qquad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \dots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \dots\right\}$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \dots\right\}$$

y suponga que el patrón de los primeros términos continúa.

SOLUCIÓN Se sabe que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Observe que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y aumentan una unidad al pasar al término siguiente. El segundo término tiene numerador 4, el numerador siguiente es 5; en general, el n-ésimo término tendrá como numerador $n + 2$. Los denominadores son las potencias de 5, por lo que a_n tiene por denominador 5^n. Los signos de

los términos son alternadamente positivo y negativo, por lo que es necesario multiplicar por una potencia de -1. En el ejemplo 1(b) el factor $(-1)^n$ significa que empieza con un término negativo. Como aquí se busca iniciar con un término positivo, se usa $(-1)^{n-1}$ o $(-1)^{n+1}$. Por tanto

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$ ■

EJEMPLO 3 En este caso hay algunas sucesiones que no tienen una ecuación que las defina en forma sencilla.

(a) La sucesión $\{p_n\}$, donde p_n es la población mundial el 1 de enero del año n.

(b) Sea a_n el n-ésimo dígito en el desarrollo decimal del número e, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión bien definida cuyos primeros términos son

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) Las condiciones siguientes definen en forma recursiva la **sucesión de Fibonacci** $\{f_n\}$

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada uno de los términos es la suma de los dos anteriores. Los primeros términos son

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Esta sucesión surgió cuando el matemático italiano del siglo XIII, a quien se conoce como Fibonacci, resolvió un problema que se relacionaba con la cría de conejos (véase ejercicio 83). ■

Una sucesión como la del ejemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$ se puede representar trazando sus términos en una recta numérica como en la figura 1, o trazando la gráfica como en la figura 2. Observe que, como una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, su gráfica consta de puntos aislados con coordenadas

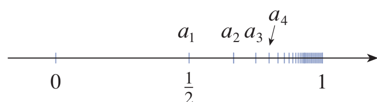


FIGURA 1

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

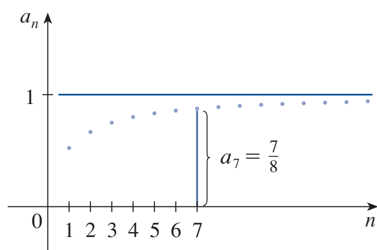


FIGURA 2

En las figuras 1 o 2 parece que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n es suficientemente grande. De hecho, la diferencia

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera al hacer a n lo suficientemente grande. Lo anterior se indica al escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

En general, la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

significa que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L cuando se hace n suficientemente grande. Observe que la definición siguiente del límite de una sucesión es muy parecida a la definición de límite de una función en el infinito dada en la sección 2.6.

1 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y se escribe como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si se hace que los términos a_n se aproximen a L tanto como se quiera tomando n lo suficientemente grande. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, se dice que la sucesión **converge** (o que es **convergente**). De lo contrario, se dice que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

En la figura 3 se ilustra la definición 1 mostrando las gráficas de dos sucesiones que tienen como límite L.

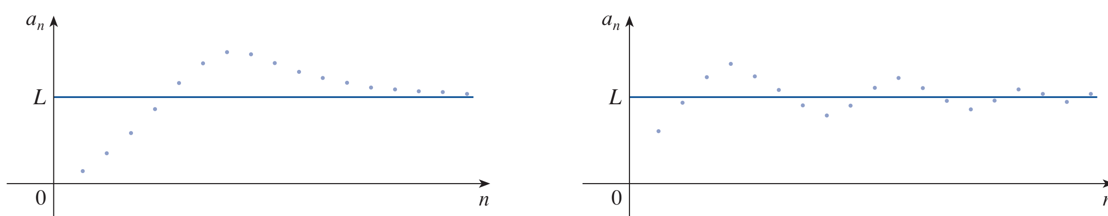


FIGURA 3
Gráficas de dos sucesiones con $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Una versión más precisa de la definición 1 es como sigue.

Compare esta definición con la definición 2.6.7.

2 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y se escribe como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

La definición 2 se ilustra en la figura 4, en la cual los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se trazan sobre una recta numérica. No importa qué tan pequeño se elija un intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ existe una N tal que todos los términos de la sucesión desde a_{N+1} en adelante deben estar en ese intervalo.

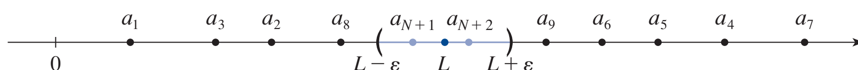


FIGURA 4

Otra ilustración de la definición 2 es la figura 5. Los puntos sobre la gráfica de $\{a_n\}$ deben estar entre las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ si $n > N$. Esta imagen debe ser válida sin importar qué tan pequeño se haya escogido ε, pero usualmente se requiere un valor de ε mucho muy pequeño y un valor de N mucho muy grande.

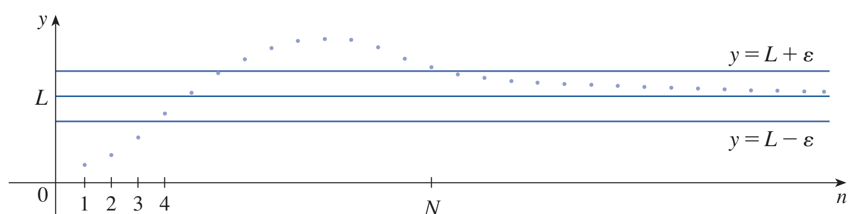


FIGURA 5

Si se compara la definición 2 con la definición 2.6.7 se verá que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea un entero. En este sentido se tiene el teorema siguiente, ilustrado en la figura 6.

3 Teorema Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

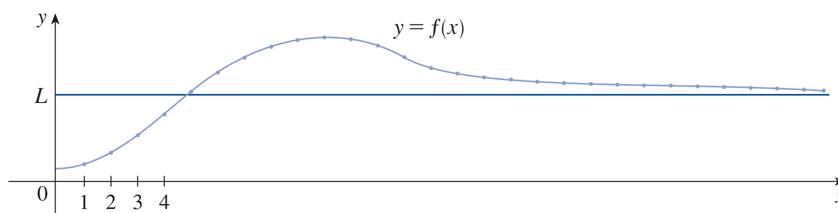


FIGURA 6

En particular, ya que se sabe que $\lim_{x\to\infty} (1/x^r) = 0$ cuando $r > 0$ (teorema 2.6.5), se tiene

4 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{si } r > 0$$

Si a_n es muy grande cuando n es muy grande, se usa la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. La definición precisa siguiente es parecida a la definición 2.6.9.

5 Definición $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M existe un entero N tal que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{entonces} \quad a_n > M$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es divergente pero de una manera especial. Se dice que $\{a_n\}$ diverge a ∞.

Las leyes de los límites dadas en la sección 2.3 también se cumplen para los límites de sucesiones y sus demostraciones son similares.

Leyes de límites para sucesiones

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{si } p > 0 \text{ y } a_n > 0$$

El teorema de la compresión también se puede adaptar a las sucesiones como sigue (véase figura 7).

Teorema de compresión para sucesiones

> Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

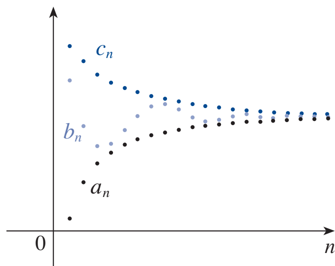


FIGURA 7
La sucesión $\{b_n\}$ está comprimida entre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$

Otro hecho útil con respecto a los límites de sucesiones se evidencia en el teorema siguiente, cuya demostración se deja para el ejercicio 87.

> **6 Teorema** Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 4 Determine $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es similar al que se usa en la sección 2.6: dividir tanto el numerador como el denominador entre la potencia más alta de n del denominador y luego aplicar las leyes de los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Esto demuestra que la inferencia que se hizo antes a partir de las figuras 1 y 2 era correcta.

Aquí se usa la ecuación 4 con $r = 1$. ■

EJEMPLO 5 La sucesión $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$ ¿es convergente o divergente?

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 4, se divide el numerador y el denominador entre n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{10}{n^2} + \dfrac{1}{n}}} = \infty$$

porque el numerador es una constante y el denominador se aproxima a 0, así que $\{a_n\}$ es divergente. ■

EJEMPLO 6 Determine $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUCIÓN Observe que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito cuando $n \to \infty$. No se puede aplicar directamente la regla de L'Hôpital porque no se aplica a sucesiones, sino a funciones de una variable real. Sin embargo, se puede aplicar la regla de L'Hôpital a la función relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$ ■

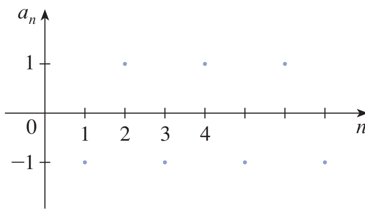


FIGURA 8

EJEMPLO 7 Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Si se escriben algunos términos de la sucesión se obtiene

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 8. Como los términos oscilan entre 1 y -1 en forma infinita, a_n no se aproxima a ningún número. Por tanto, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe; la sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente. ■

La gráfica de la sucesión del ejemplo 8 se muestra en la figura 9 y apoya la respuesta.

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ si este existe.

SOLUCIÓN Primero se calcula el límite del valor absoluto:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$$ ■

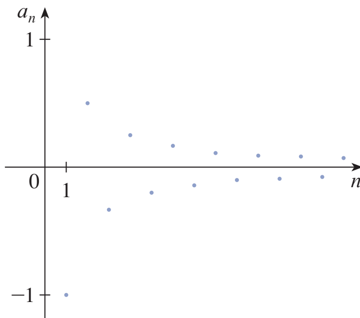


FIGURA 9

El teorema siguiente dice que, si se acopla una función continua a los términos de una sucesión convergente, el resultado también es convergente. La demostración se deja para el ejercicio 88.

> **7** **Teorema** Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\pi/n)$

SOLUCIÓN Como la función seno es continua en 0, el teorema 7 permite escribir

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty}(\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$ ■

Creando gráficas de sucesiones
Algunos sistemas algebraicos computacionales contienen comandos especiales que permiten crear sucesiones y dibujarlas directamente. Sin embargo, con la mayoría de las calculadoras para trazar gráficas se pueden dibujar sucesiones usando ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la sucesión del ejemplo 10 se puede dibujar al introducir las ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

y dibujar en el modo punto, iniciando con $t = 1$; se establece el t-ésimo paso igual a 1. El resultado se muestra en la figura 10.

EJEMPLO 10 Analice la convergencia de la sucesión $a_n = n!/n^n$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUCIÓN Tanto numerador como denominador se aproximan al infinito cuando $n \to \infty$, pero no cabe utilizar la regla de L'Hôpital ($x!$ no está definida cuando x no es un número entero). Se escribirán algunos términos para ver si es posible intuir qué pasa con a_n cuando n es muy grande:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

8 $$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

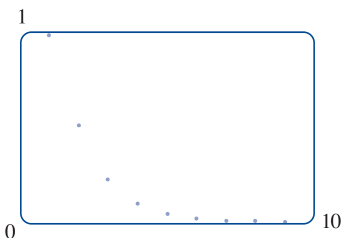


FIGURA 10

Esta expresión y la gráfica de la figura 10 sugieren que los términos están decreciendo y parecen aproximarse a 0. Para confirmar esto, observe de la ecuación 8 que

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Observe que la expresión entre paréntesis es a lo más 1 porque el numerador es menor que (o igual a) el denominador. Por lo que

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Se sabe que $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ por el teorema de la compresión. ■

EJEMPLO 11 ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

SOLUCIÓN Se sabe, por la sección 2.6 y las gráficas de las funciones exponenciales de la sección 1.4, que $\text{lím}_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ y $\text{lím}_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Por tanto, si se hace $a = r$ y se usa el teorema 3 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

Es obvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Si $-1 < r < 0$, entonces $0 < |r| < 1$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

y, por tanto, $\text{lím}_{x\to\infty} r^n = 0$ de acuerdo con el teorema 6. Si $r \leqslant -1$, entonces $\{r^n\}$ diverge como en el ejemplo 7. En la figura 11 se ilustran las gráficas de varios valores de r. (El caso $r = -1$ se muestra en la figura 8.)

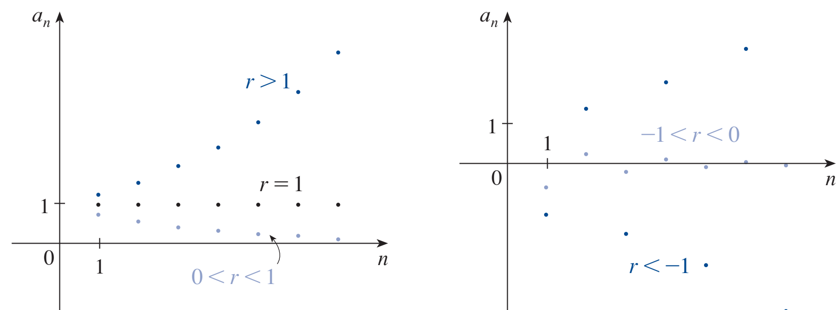


FIGURA 11
La sucesión $a_n = r^n$ ■

Los resultados del ejemplo 11 se resumen para uso futuro como sigue.

9 La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leqslant 1$ y divergente para todos los otros valores de r

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

10 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ se llama **creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Se denomina **decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

EJEMPLO 12 La sucesión $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ es decreciente porque

El lado derecho es menor porque tiene un denominador mayor.

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

y, por tanto, $a_n > a_{n+1}$, para toda $n \geqslant 1$. ■

EJEMPLO 13 Demuestre que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 1 Se debe demostrar que $a_{n+1} < a_n$, es decir,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Esta desigualdad es equivalente a la obtenida por multiplicación cruzada:

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \quad &\Longleftrightarrow \quad (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \\ &\Longleftrightarrow \quad n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 < n^2+n\end{aligned}$$

Ya que $n \geqslant 1$, se sabe que la desigualdad $n^2+n > 1$ es verdadera. Por tanto, $a_{n+1} < a_n$ y también que $\{a_n\}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 2 Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{siempre que } x^2 > 1$$

Por lo que f es decreciente sobre $(1, \infty)$ así que $f(n) > f(n+1)$, por tanto $\{a_n\}$ es decreciente. ■

11 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si existe un número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Está **acotada por abajo** si existe un número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, entonces $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ está acotada por abajo ($a_n > 0$), pero no por arriba. La sucesión $a_n = n/(n+1)$ está acotada porque $0 < a_n < 1$ para toda n.

Se sabe que no toda sucesión acotada es convergente [por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ satisface $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, pero es divergente del ejemplo 7] y no toda sucesión monótona es convergente ($a_n = n \to \infty$). Pero si una sucesión es tanto acotada como

monótona, entonces tiene que ser convergente. Este hecho se demuestra en la forma del teorema 12, pero intuitivamente se entiende por qué es cierto viendo la figura 12. Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \leqslant M$ para toda n, entonces los términos están forzados a juntarse y aproximarse a un número L.

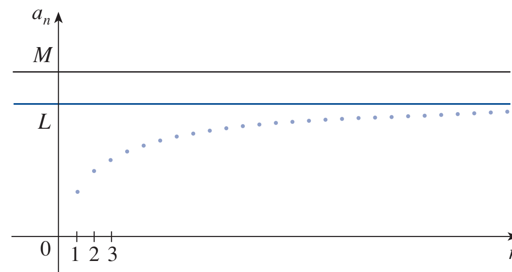


FIGURA 12

La demostración del teorema 12 se apoya en el **axioma de completez** para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que dice que si S es un conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior M ($x \leqslant M$ para toda x en S), entonces S tiene una **mínima cota superior** b. (Esto significa que b es una cota superior para S, pero si M es cualquier otra cota superior, entonces $b \leqslant M$.) El axioma de completez expresa el hecho de que la recta de los números reales no tiene brechas o agujeros.

12 Teorema de la sucesión monótona Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. Ya que $\{a_n\}$ está acotada, el conjunto $S = \{a_n \mid n \geqslant 1\}$ tiene una cota superior. De acuerdo con el axioma de completez, tiene una mínima cota superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ *no* es una cota superior para S (ya que L es la *mínima* cota superior). Por tanto,

$$a_N > L - \varepsilon \text{ para algún entero } N$$

Pero la sucesión es creciente por lo que $a_n \geqslant a_N$ para toda $n > N$. Por lo que si $n > N$, se tiene

$$a_n > L - \varepsilon$$

de manera que
$$0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$$

ya que $a_n \leqslant L$. Por lo que,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{siempre que } n > N$$

así que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Una demostración similar (aplicando la máxima cota inferior) funciona si $\{a_n\}$ es decreciente. ■

La demostración del teorema 12 demuestra que una sucesión creciente y acotada por arriba es convergente. (De igual manera, una sucesión decreciente que está acotada por abajo es convergente.) Este hecho se aplica muchas veces al trabajar con series infinitas.

EJEMPLO 14 Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida por la *relación recursiva*

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUCIÓN Para empezar se calculan los primeros términos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5.5 \qquad a_5 = 5.75 \qquad a_6 = 5.875$$

$$a_7 = 5.9375 \qquad a_8 = 5.96875 \qquad a_9 = 5.984375$$

Con frecuencia, la inducción matemática se aplica cuando se trabaja con sucesiones recursivas. Véase la página 72 donde se encuentra un análisis del principio de inducción matemática.

Estos términos iniciales hacen pensar que la sucesión es creciente y que los términos se aproximan a 6. Para confirmar que la sucesión es creciente, se utiliza inducción matemática para demostrar que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geqslant 1$. Esto es cierto para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Si se supone que se cumple para $n = k$, entonces se tiene

$$a_{k+1} > a_k$$

$$\text{por lo que} \qquad a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

$$\text{y} \qquad \tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

$$\text{Así} \qquad a_{k+2} > a_{k+1}$$

Ya se dedujo que $a_{n+1} > a_n$ es cierta para $n = k + 1$. Por tanto, la desigualdad se cumple para toda n por inducción.

Luego se verifica que $\{a_n\}$ está acotada demostrando que $a_n < 6$ para toda n. (Ya que la sucesión es creciente, se sabe que tiene una cota inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para toda n.) Se sabe que $a_1 < 6$, por lo que la aseveración es cierta para $n = 1$. Si se supone que se cumple para $n = k$. Entonces

$$a_k < 6$$

$$\text{por lo que} \qquad a_k + 6 < 12$$

$$\text{y} \qquad \tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

$$\text{Así} \qquad a_{k+1} < 6$$

Esto demuestra, por inducción matemática, que $a_n < 6$ para toda n.

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, el teorema 12 garantiza que tiene un límite. El teorema no dice cuál es el valor del límite, pero ahora que se sabe que $L = \lim_{n \to \infty} a_n$ existe, por lo que se puede aplicar la relación recursiva para escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

En el ejercicio 70 se pide una demostración de este hecho.

Como $a_n \to L$, también se deduce que $a_{n+1} \to L$ (también cuando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$). De este modo se tiene

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Al resolver esta ecuación para L, se determina que $L = 6$, tal como se había predicho. ■

11.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión?
(b) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión convergente? Dé dos ejemplos.
(b) ¿Qué es una sucesión divergente? Dé dos ejemplos.

3-12 Liste los primeros cinco términos de la sucesión.

3. $a_n = \dfrac{2^n}{2n + 1}$

4. $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

5. $a_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$

6. $a_n = \dfrac{3^n}{1 + 2^n}$

7. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

8. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

9. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 3$

10. $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

11. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

13-18 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que se mantenga el patrón de los primeros términos.

13. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\right\}$

14. $\left\{4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right\}$

15. $\left\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\right.$

16. $\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$

17. $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\right\}$

18. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

19-22 Calcule, con una aproximación de cuatro decimales, los primeros diez términos de la sucesión y úselos para trazar la gráfica a mano de la sucesión. ¿Parece tener límite la sucesión? Si es así, calcúlelo. Si no, explique por qué.

19. $a_n = \dfrac{3n}{1 + 6n}$

20. $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

21. $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

22. $a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$

23-56 Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, encuentre el límite.

23. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

24. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{1 + n}$

25. $a_n = \dfrac{n^4}{n^3 - 2n}$

26. $a_n = 2 + (0.86)^n$

27. $a_n = 3^n 7^{-n}$

28. $a_n = \dfrac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2}$

29. $a_n = e^{-1/\sqrt{n}}$

30. $a_n = \dfrac{4^n}{1 + 9^n}$

31. $a_n = \sqrt{\dfrac{1 + 4n^2}{1 + n^2}}$

32. $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{n + 1}\right)$

33. $a_n = \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

34. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

35. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2 + 1}$

36. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

37. $\left\{\dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}\right\}$

38. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

39. $\{\operatorname{sen} n\}$

40. $a_n = \dfrac{\tan^{-1} n}{n}$

41. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

42. $a_n = \ln(n + 1) - \ln n$

43. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

44. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

45. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

46. $a_n = 2^{-n} \cos n\pi$

47. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

48. $a_n = \sqrt[n]{n}$

49. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

50. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

51. $a_n = \arctan(\ln n)$

52. $a_n = n - \sqrt{n + 1}\sqrt{n + 3}$

53. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

54. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right.$

55. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

56. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

57-63 Con la ayuda de una gráfica de la sucesión, establezca si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, infiera el valor del límite a partir de la gráfica y luego demuestre su conjetura. (Veáse la nota al margen de la página 699 relacionada con la advertencia sobre las gráficas de sucesiones.)

57. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

58. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

59. $a_n = \arctan\left(\dfrac{n^2}{n^2+4}\right)$

60. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

61. $a_n = \sqrt{\dfrac{3+2n^2}{8n^2+n}}$

62. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$

63. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$

64. (a) Determine si la sucesión definida como sigue es convergente o divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) ¿Qué ocurre si el primer término es $a_1 = 2$?

65. Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés compuesto anualmente, entonces n años después la inversión tiene un valor de $a_n = 1000(1.06)^n$ dólares.
(a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión $\{a_n\}$.
(b) ¿La sucesión es convergente o divergente? Explique.

66. Si se depositan 100 dólares al final de cada mes en una cuenta que paga 3% de interés al año capitalizado mensualmente, la cantidad de interés acumulado después de n meses está dada por la sucesión

$$I_n = 100\left(\frac{1.0025^n - 1}{0.0025} - n\right)$$

(a) Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.
(b) ¿Cuánto interés habrá obtenido después de dos años?

67. En una granja piscícola se tienen 5000 bagres en un estanque de crías. El número de bagres aumenta en 8% al mes y el productor cosecha 300 bagres al mes.
(a) Demuestre que la población P_n de bagres después de n meses está dada recursivamente por

$$P_n = 1.08P_{n-1} - 300 \qquad P_0 = 5000$$

(b) ¿Cuántos bagres hay en el estanque después de seis meses?

68. Determine los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número par} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo si $a_1 = 25$. Infiera con respecto al tipo de sucesión.

69. ¿Para qué valores de r converge la sucesión $\{nr^n\}$?

70. (a) Si $\{a_n\}$ es convergente, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(b) Una sucesión $\{a_n\}$ se define por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Si se supone que $\{a_n\}$ es convergente, calcule su límite.

71. Suponga que se sabe que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y que todos sus términos están entre los números 5 y 8. Explique por qué la sucesión tiene un límite. ¿Qué puede decir respecto al valor del límite?

72-78 Determine si la sucesión es creciente, decreciente o es no monótona. ¿Está acotada la sucesión?

72. $a_n = \cos n$

73. $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$

74. $a_n = \dfrac{1-n}{2+n}$

75. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

76. $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

77. $a_n = 3 - 2ne^{-n}$

78. $a_n = n^3 - 3n + 3$

79. Encuentre el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

80. Una sucesión $\{a_n\}$ está dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
(a) Mediante inducción u otro método, demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y que su cota superior es 3. Aplique el teorema de sucesión monótona para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
(b) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

81. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

es creciente y $a_n < 3$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y encuentre su límite.

82. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisface $0 < a_n \leqslant 2$ y es decreciente. Deduzca que la sucesión es convergente y encuentre su límite.

83. (a) Fibonacci planteó el problema siguiente: suponga que los conejos viven toda la vida, que cada mes todas las parejas tienen un nuevo par de conejitos, los cuales empiezan a ser productivos a la edad de dos meses. Si empieza con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendrá en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es f_n, donde $\{f_n\}$ es la sucesión de Fibonacci que se define en el ejemplo 3(c).

(b) Sea $a_n = f_{n+1}/f_n$ demuestre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Suponiendo que $\{a_n\}$ es convergente, determine su límite.

84. (a) Sea $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \ldots, a_{n+1} = f(a_n)$, donde f es una función continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $f(L) = L$.

(b) Ilustre el inciso (a) haciendo $f(x) = \cos x$, $a = 1$, y estimando el valor de L con una aproximación de cinco cifras decimales.


85. (a) Mediante una gráfica, deduzca el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Con una gráfica de la sucesión del inciso (a) calcule los valores más pequeños de N que corresponden a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.001$ en la definición 2.

86. Aplique directamente la definición 2 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$.

87. Demuestre el teorema 6.
[*Sugerencia*: utilice la definición 2 o el teorema de la compresión.]

88. Demuestre el teorema 7.

89. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

90. Sea $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(a) Demuestre que si $0 \leqslant a < b$, entonces

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduzca que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.

(c) Utilice $a = 1 + 1/(n + 1)$ y $b = 1 + 1/n$ del inciso (b) para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente.

(d) Use $a = 1$ y $b = 1 + 1/(2n)$ en el inciso (b) para demostrar que $a_{2n} < 4$.

(e) Mediante los incisos (c) y (d) demuestre que $a_n < 4$ para toda n.

(f) Utilice el teorema 12 para demostrar que $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ existe. (El límite es e. Véase la ecuación 3.6.6.)

91. Sean a y b números positivos con $a > b$. Sea a_1 la media aritmética y b_1 la media geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita el proceso tal que, en general

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Mediante la inducción matemática demuestre que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduzca que tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ son convergentes.

(c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss llamó al valor común de estos límites la **media aritmética-geométrica** de los números a y b.

92. (a) Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$ entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(b) Si $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

calcule los primeros ocho términos de la sucesión $\{a_n\}$. Luego use el inciso (a) para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ Esto da el **desarrollo en fracción continua**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

93. El tamaño de una población inalterada de peces se ha modelado mediante la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

donde p_n es la población de peces después de n años, y a y b son constantes positivas que dependen de las especies y su medio ambiente. Suponga que la población en el año 0 es $p_0 > 0$.

(a) Demuestre que si $\{p_n\}$ es convergente, entonces los únicos valores posibles de este límite son 0 y $b - a$.

(b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.

(c) Mediante el inciso (b) demuestre que si $a > b$, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; en otras palabras, la población muere.

(d) Ahora suponga que $a < b$. Demuestre que si $p_0 < b - a$, entonces $\{p_n\}$ es creciente y $0 < p_n < b - a$. Demuestre que si $p_0 > b - a$, entonces $\{p_n\}$ es decreciente y $p_n > b - a$. Deduzca que si $a < b$, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROYECTO DE LABORATORIO SAC SUCESIONES LOGÍSTICAS

Una sucesión que surge en ecología como un modelo para el crecimiento poblacional se define por medio de la **ecuación logística en diferencias**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n mide el tamaño de la población de la n-ésima generación de una sola especie. Para mantener manejables los números, p_n es una fracción del tamaño máximo de la población, por lo que $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Observe que la forma de la ecuación es similar a la ecuación diferencial logística de la sección 9.4. El modelo discreto, con sucesiones en lugar de funciones continuas, es preferible para modelar las poblaciones de insectos, en las cuales el apareamiento y la muerte ocurren de un modo periódico.

Un ecologista se interesa en predecir el tamaño de la población a medida que el tiempo avanza, y plantea estas preguntas: ¿se estabilizará en un valor límite?, ¿cambiará de manera cíclica? o ¿mostrará un comportamiento aleatorio?

Escriba un programa para calcular los n primeros términos de esta sucesión con una población inicial p_0, donde $0 < p_0 < 1$. Con este programa efectúe lo siguiente:

1. Calcule 20 o 30 términos de la sucesión para $p_0 = \frac{1}{2}$ y para dos valores de k tales que $1 < k < 3$. Grafique cada sucesión. ¿Parecen converger? Repita para un valor distinto de p_0 entre 0 y 1. ¿El límite depende del valor elegido de p_0? ¿Depende del valor elegido de k?

2. Calcule términos de la sucesión para un valor de k entre 3 y 3.4 y dibújelos. ¿Qué observa con respecto al comportamiento de los términos?

3. Experimente con valores de k entre 3.4 y 3.5. ¿Qué sucede con los términos?

4. Para valores de k entre 3.6 y 4, calcule y dibuje por lo menos 100 términos y comente el comportamiento de la sucesión. ¿Qué sucede si cambia p_0 por 0.001? Este tipo de comportamiento se llama *caótico* y lo muestran poblaciones de insectos bajo ciertas condiciones.

11.2 Series

El récord actual para calcular una aproximación decimal de π lo obtuvieron Shigeru Kondo y Alexander Yee en 2011 y contiene más de 10 billones de decimales.

¿A qué se refiere cuando se expresa un número con una cantidad infinita de decimales? Por ejemplo, qué significa escribir

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \ldots$$

La convención que hay detrás de la notación decimal es que cualquier número con una cantidad infinita de decimales se puede escribir como una suma infinita. Aquí, el significado es que

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

donde los puntos suspensivos (…) indican que la suma continúa por siempre y que cuantos más términos se agreguen, se estará más cerca del valor verdadero de π.

En general, si se trata de sumar los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se obtiene una expresión de la forma

1 $$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que se denomina **serie infinita** (o solo **serie**) y se denota con el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Pero ¿tiene sentido hablar de suma de una infinidad de términos?

Sería imposible encontrar la suma finita de la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque si se suman los términos, se obtienen sumas acumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, … y después del n-ésimo término, se llega a $n(n + 1)/2$, lo cual resulta muy grande cuando n se incrementa.

n	Suma de los primeros n términos
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

Sin embargo, si se empieza por sumar los términos de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

se obtiene $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$ En la tabla se puede ver que cuando se suman más y más términos, estas *sumas parciales* se vuelven más y más cercanas a 1. (Véase también la figura 11 en *Un adelanto del cálculo* en la página 6.) De hecho, al sumar suficientes términos de la serie es posible hacer que las sumas parciales sean tan cercanas a 1 como se quiera. Así que es razonable decir que la suma de esta serie infinita es igual a 1 y escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Se usará una idea similar para determinar si una serie infinita (1) tiene o no tiene suma. Se consideran las **sumas parciales**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{s_n\}$, la cual puede tener o no tener un límite. Si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe (como un número finito), entonces, como en el ejemplo anterior, recibe el nombre de suma de la serie infinita Σa_n.

2 Definición Dada una serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, sea s_n la n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe como un número real, entonces la serie Σa_n se dice **convergente** y se escribe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se llama **suma** de la serie. Si la sucesión $\{s_n\}$ es divergente, entonces la serie es **divergente**.

Compare con la integral impropia

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx$$

Para determinar esa integral se integra de 1 a t y después se hace que $t \to \infty$. En el caso de series, se suma desde 1 hasta n y después se hace que $n \to \infty$.

Por lo que la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Así que cuando se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, quiere decir que al sumar suficientes términos de la serie, se puede llegar tan cerca como se quiera al número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

EJEMPLO 1 Suponga que se sabe que la suma de los primeros n términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n+5}$$

Entonces la suma de la serie es el límite de la sucesión $\{s_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+\dfrac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$ ■

En el ejemplo 1 se da una expresión para la suma de los primeros n términos, pero usualmente no es fácil *encontrar* tal expresión. Sin embargo, en el ejemplo 2, se tiene una famosa serie para la cual se *puede* encontrar una fórmula explícita para s_n.

EJEMPLO 2 Un importante ejemplo de una serie infinita es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada término se obtiene a partir del término precedente multiplicándolo por la **razón común** r. (Ya se ha considerado el caso especial cuando $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ en la página 708.)

Si $r = 1$, entonces $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Ya que $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe, la serie geométrica diverge en este caso.

Si $r \neq 1$, se tiene

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rs_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Al restar estas ecuaciones se obtiene

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

3
$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Si $-1 < r < 1$, se sabe de (11.1.9) que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1-r}$$

Por lo que, cuando $|r| < 1$, la serie geométrica es convergente y su suma es $a/(1 - r)$.

Si $r \leq -1$ o, $r > 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente de acuerdo con (11.1.9) y, de ese modo, conforme la ecuación 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe. Por tanto, la serie geométrica diverge en esos casos. ■

La figura 1 proporciona una demostración geométrica del resultado del ejemplo 2. Si los triángulos se construyen como se indica y s es la suma de la serie, entonces, por triángulos semejantes

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{por lo que} \quad s = \frac{a}{1-r}$$

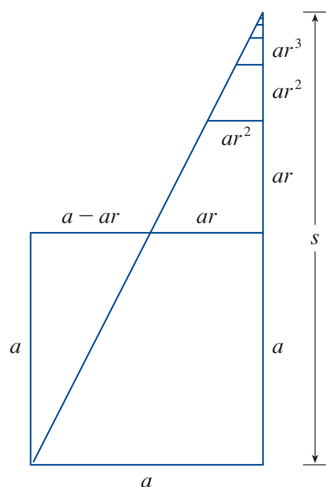


FIGURA 1

Los resultados del ejemplo 2 se resumen como sigue.

4 La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Si $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica es divergente.

En palabras: la suma de una serie geométrica convergente es

$$\frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón común}}$$

EJEMPLO 3 Calcule la suma de la serie geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUCIÓN El primer término es $a = 5$ y la razón común es $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente por (4) y su suma es

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3 \qquad \blacksquare$$

¿Qué se quiere realmente decir cuando se afirma que la suma de la serie del ejemplo 3 es 3? Por supuesto, no se puede sumar una infinidad de términos de uno en uno. Pero, de acuerdo con la definición 2, la suma total es el límite de la sucesión de sumas parciales. De este modo, al efectuar la suma de suficientes términos, se acerca tanto como se quiera al número 3. La tabla muestra las primeras diez sumas parciales s_n y en la gráfica de la figura 2 se ilustra cómo la sucesión de las sumas parciales se aproxima a 3.

n	S_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975

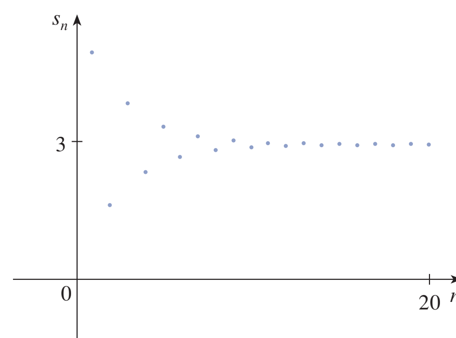


FIGURA 2

EJEMPLO 4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$, ¿es convergente o divergente?

SOLUCIÓN Escriba el n-ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Otra manera de identificar a y r es escribir los primeros términos.

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

Se identifica esta serie como una serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, la serie diverge, de acuerdo con (4). $\blacksquare$

EJEMPLO 5 Se administra un fármaco a un paciente a la misma hora todos los días. Suponga que la concentración del fármaco es C_n (medido en mg/mL) después de la inyección en el n-ésimo día. Antes de la inyección del día siguiente, solo 30% del fármaco permanece en el torrente sanguíneo y la dosis diaria aumenta la concentración en 0.2 mg/mL.

(a) Encuentre la concentración después de tres días.

(b) ¿Cuál es la concentración después de la n-ésima dosis?
(c) ¿Cuál es la concentración límite?

SOLUCIÓN
(a) Justo antes de que se administre la dosis diaria del medicamento, la concentración se reduce a 30% de la concentración del día anterior; es decir, $0.3C_n$. Con la nueva dosis se incrementa la concentración en 0.2 mg/mL y así

$$C_{n+1} = 0.2 + 0.3C_n$$

Comenzando con $C_0 = 0$ y sustituyendo $n = 0, 1, 2$ en esta ecuación, se obtiene

$$C_1 = 0.2 + 0.3C_0 = 0.2$$

$$C_2 = 0.2 + 0.3C_1 = 0.2 + 0.2(0.3) = 0.26$$

$$C_3 = 0.2 + 0.3C_2 = 0.2 + 0.2(0.3) + 0.2(0.3)^2 = 0.278$$

La concentración después de tres días es 0.278 mg/mL.
(b) Después de la n-ésima dosis la concentración es

$$C_n = 0.2 + 0.2(0.3) + 0.2(0.3)^2 + \cdots + 0.2(0.3)^{n-1}$$

Esta es una serie geométrica finita con $a = 0.2$ y $r = 0.3$, por la fórmula 3 se tiene

$$C_n = \frac{0.2[1 - (0.3)^n]}{1 - 0.3} = \frac{2}{7}[1 - (0.3)^n] \text{ mg/mL}$$

(c) Debido a que $0.3 < 1$, se sabe que $\text{lím}_{n\to\infty} (0.3)^n = 0$. Por tanto, la concentración límite es

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{7}[1 - (0.3)^n] = \frac{2}{7}(1 - 0) = \frac{2}{7} \text{ mg/mL}$$ ■

EJEMPLO 6 Escriba el número $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ como una razón de enteros.

SOLUCIÓN

$$2.3171717\ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Después del primer término se tiene una serie geométrica con $a = 17/10^3$ y $r = 1/10^2$. Por tanto

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$ ■

EJEMPLO 7 Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, donde $|x| < 1$.

SOLUCIÓN Observe que esta serie inicia con $n = 0$ y por eso el primer término $x^0 = 1$. (En las series, se adopta la convención de que $x^0 = 1$ aun cuando $x = 0$.)

TEC En Module 11.2 se explora una serie que depende de un ángulo θ en un triángulo y permite ver qué tan rápido converge la serie cuando varía θ.

Por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Esta es una serie geométrica finita con $a = 1$ y $r = x$. Ya que $|r| = |x| < 1$, esta converge y (4) da

$$\boxed{5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$ ■

EJEMPLO 8 Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, y determine su suma.

SOLUCIÓN Esta no es una serie geométrica, por lo que se vuelve a la definición de una serie convergente y se calcula la suma parcial.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Se puede simplificar esta expresión si se utiliza la descomposición de la fracción parcial

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(véase sección 7.4). Por tanto, se tiene

Observe que los términos se eliminan en pares. Este es un ejemplo de una **suma telescópica**: debido a todas las eliminaciones, la suma se colapsa (como el telescopio de un pirata) en solo dos términos.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

y así
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Por tanto, la serie es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ ■

En la figura 3 se ilustra el ejemplo 8 y se muestra la gráfica de la sucesión de términos $a_n = 1/[n(n+1)]$ y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Observe que $a_n \to 0$ y $s_n \to 1$. Véanse los ejercicios 78 y 79 donde se tratan dos interpretaciones geométricas del ejemplo 8.

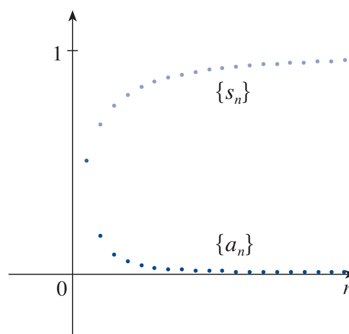


FIGURA 3

EJEMPLO 9 Demuestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente.

SOLUCIÓN Para esta serie particular es conveniente considerar las sumas parciales s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32},... y demostrar que se hacen muy grandes.

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

El método usado en el ejemplo 9 para demostrar que la serie armónica diverge es original del francés Nicole Oresme (1323-1382).

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

En forma similar, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, y, en general

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Esto demuestra que $s_{2^n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por eso $\{s_n\}$ es divergente. Debido a eso, la serie armónica diverge. ■

6 Teorema Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Entonces $a_n = s_n - s_{n-1}$. Ya que Σa_n es convergente, la sucesión $\{s_n\}$ es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, también se tiene $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$ ■

NOTA 1 Con cualquier *serie* Σa_n se asocian dos *sucesiones*: la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales y la sucesión $\{a_n\}$ de sus términos. Si Σa_n es convergente, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}$ es s (la suma de la serie) y, como establece el teorema 6, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 0.

NOTA 2 En general, el inverso del teorema 6 no se cumple. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, se puede concluir que Σa_n es convergente. Observe que para la serie armónica $\Sigma 1/n$ se tiene $a_n = 1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero ya se demostró en el ejemplo 9 que $\Sigma 1/n$ es divergente.

7 La prueba de la divergencia Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

La prueba de la divergencia se deduce del teorema 6 porque si la serie no es divergente, entonces es convergente y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 10 Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ es divergente.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Por lo que la serie diverge de acuerdo con la prueba de la divergencia. ■

NOTA 3 Si se encuentra que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, se sabe que Σa_n es divergente. Si se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *nada* se sabe con respecto a la convergencia o la divergencia de Σa_n. Recuerde la advertencia de la nota 2: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie Σa_n podría ser convergente o divergente.

8 Teorema Si Σa_n y Σb_n son series convergentes, entonces también lo son las series Σca_n (donde c es una constante), $\Sigma(a_n + b_n)$ y $\Sigma(a_n - b_n)$, y

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Estas propiedades de las series convergentes se infieren de las leyes de los límites correspondientes a las sucesiones de la sección 11.1. Por ejemplo, aquí se demuestra la parte (ii) del teorema 8:

sea

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

La n-ésima suma parcial de la serie $\Sigma(a_n + b_n)$ es

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

y, usando la ecuación 5.2.10, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t$$

Por tanto, $\Sigma(a_n + b_n)$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ ■

EJEMPLO 11 Determine la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$.

SOLUCIÓN La serie $\Sigma 1/2^n$ es una serie geométrica con $a=\frac{1}{2}$ y $r=\frac{1}{2}$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

En el ejemplo 8 se encuentra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

Por lo que por el teorema 8, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$
$$=3\cdot 1+1=4$$

NOTA 4 Una cantidad finita de términos no afecta la convergencia o divergencia de una serie. Por ejemplo, suponga que se es capaz de demostrar que la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

es convergente. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$$

se deduce que toda la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, n/(n^3+1)$ es convergente. Asimismo, si se sabe que la serie $\Sigma_{n=N+1}^{\infty}\, a_n$ es convergente, entonces toda la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{N}a_n+\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$$

es también convergente.

11.2 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
(b) ¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?

2. Explique qué significa decir que $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, a_n=5$.

3-4 Calcule la suma de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, a_n$ cuyas sumas parciales están dadas.

3. $s_n=2-3(0.8)^n$

4. $s_n=\dfrac{n^2-1}{4n^2+1}$

5-8 Calcule los primeros ocho términos de la sucesión de sumas parciales con una aproximación de cuatro decimales. ¿Las series parecen que convergen o divergen?

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen} n$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$

9-14 Encuentre por lo menos 10 sumas parciales de las series. Trace la gráfica tanto de la sucesión de los términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. ¿Cómo parece ser la serie, convergente o divergente? Si es convergente, determine la suma. Si es divergente, explique por qué.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(-5)^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n+1} \right)$

15. Sea $a_n = \frac{2n}{3n+1}$.

(a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.

(b) Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

16. (a) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

(b) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

17-26 Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si es convergente, calcule la suma.

17. $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$ **18.** $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

19. $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

20. $1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} 12(0.73)^{n-1}$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\pi^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$ **24.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{6^{n-1}}$ **26.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 2^{2n-1}}{3^n}$

27-42 Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

27. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \cdots$

28. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{2}{81} + \frac{1}{243} + \frac{2}{729} + \cdots$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1-2n}$ **30.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-2k+5}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}4^{-n}$ **32.** $\sum_{n=1}^{\infty} [(-0.2)^n + (0.6)^{n-1}]$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+e^{-n}}$ **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{e^n}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sen} 100)^k$ **36.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

37. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3} \right)^k$ **38.** $\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{-k}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ **40.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n} \right)$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ **42.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

43-48 Determine si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como suma telescópica (como en el ejemplo 8). Si es convergente, encuentre su suma.

43. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ **44.** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$ **46.** $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)} \right)$ **48.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

49. Sea $x = 0.99999\ldots$

(a) ¿Qué piensa usted, que $x < 1$ o que $x = 1$?

(b) Sume una serie geométrica para determinar el valor de x.

(c) ¿Cuántas representaciones decimales tiene el 1?

(d) ¿Cuáles números tienen más de una representación decimal?

50. Una sucesión de términos está definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_n = (5-n)a_{n-1}$$

Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

51-56 Exprese el número como un cociente de enteros.

51. $0.\overline{8} = 0.8888\ldots$ **52.** $0.\overline{46} = 0.46464646\ldots$

53. $1.53\overline{42}$ **54.** $7.\overline{12345}$

55. $1.234\overline{567}$ **56.** $5.\overline{71358}$

57-63 Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x.

57. $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^n x^n$ **58.** $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$

59. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$ **60.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (x-5)^n$

61. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$ **62.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n x}{3^n}$

63. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

64. Se ha visto que una serie armónica es una serie divergente cuyos términos se aproximan a 0. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

es otra serie con esta propiedad.

SAC **65-66** Utilice la instrucción de las fracciones parciales en su sistema algebraico computacional para encontrar una expresión conveniente para la suma parcial, y luego use esta expresión para encontrar la suma de la serie. Compruebe su respuesta usando directamente el SAC a la suma de la serie.

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$ **66.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^5 - 5n^3 + 4n}$

---

67. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n - 1}{n + 1}$$

determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

68. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = 3 - n2^{-n}$, determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

69. Un médico receta 100 mg de tabletas de antibiótico para tomar cada ocho horas. Justo antes de cada toma, 20% del medicamento permanece en el cuerpo.

(a) ¿Cuánto del medicamento está en el cuerpo justo después de que se toma la segunda tableta? ¿Después de la tercera tableta?

(b) Si Q_n es la cantidad de antibiótico en el cuerpo justo después de la n-ésima tableta, encuentre una ecuación que expresa Q_{n+1} en términos de cantidad de Q_n.

(c) ¿Qué cantidad de antibiótico permanece en el cuerpo a largo plazo?

70. A un paciente se le inyecta un medicamento cada 12 horas. Inmediatamente antes de cada inyección, la concentración del fármaco se ha reducido 90% y la nueva dosis aumenta la concentración por 1.5 mg/L.

(a) ¿Cuál es la concentración luego de tres dosis?

(b) Si C_n es la concentración luego de la n-ésima dosis, encuentre una fórmula para C_n como una función de C_n.

(c) ¿Cuál es el valor límite de la concentración?

71. Un paciente toma 150 mg de una medicina a la misma hora cada día. Justo antes de tomar cada tableta, 5% del medicamento permanece en el cuerpo.

(a) ¿Qué cantidad de medicina está en el cuerpo después de la tercera tableta? ¿Después de la n-ésima tableta?

(b) ¿Qué cantidad de medicina queda en el cuerpo a largo plazo?

72. Después de inyectar una dosis D de insulina, la concentración de insulina en el sistema del paciente decae de manera exponencial, así que puede expresarse como De^{-at}, donde t representa el tiempo en horas y a es una constante positiva.

(a) Si la dosis D se inyecta cada T horas, escriba una expresión para la suma de la concentración residual justo antes de la $(n + 1)$-ésima inyección.

(b) Determine la concentración límite antes de inyectar.

(c) Si la concentración de insulina debe siempre permanecer en o por encima de un valor crítico C, determine la dosis mínima de D en términos de C, a y T.

73. Cuando el dinero se gasta en bienes y servicios, quienes lo reciben también gastan un poco de él. Las personas que reciben algo del dinero gastado dos veces, gastarán algo de dicho dinero, y así sucesivamente. Los economistas llaman a esta reacción en cadena *efecto multiplicador*. En un hipotético pueblo aislado, el gobierno local inicia el proceso gastando D dólares. Suponga que cada persona que recibe dinero gasta $100c$% y ahorra $100s$% del dinero. Los valores c y s se denominan *propensión marginal al consumo* y *propensión marginal al ahorro* y, por supuesto, $c + s = 1$.

(a) Sea S_n el total de lo gastado que ha sido generado después de n transacciones. Determine una ecuación para S_n.

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, donde $k = 1/s$. La cantidad k se llama *multiplicador*. ¿Cuál es el multiplicador si la propensión marginal al consumo es 80%?

Nota: el gobierno federal de Estados Unidos usa este principio para justificar el gasto que muestra déficit. Los bancos utilizan este principio para justificar los préstamos de un gran porcentaje del dinero que reciben como depósito.

74. Una pelota tiene la propiedad de que, cada vez que cae desde una altura h sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rh, donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota cae desde una altura inicial de H metros.

(a) Suponiendo que la pelota continúa rebotando de manera indefinida, calcule la distancia total que recorre.

(b) Calcule el tiempo total que la pelota viaja. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos.)

(c) Suponga que cada vez que la pelota golpea la superficie con velocidad v rebota con velocidad $-kv$, donde $0 < k < 1$. ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al reposo?

75. Encuentre el valor de c si

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 + c)^{-n} = 2$$

76. Encuentre el valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

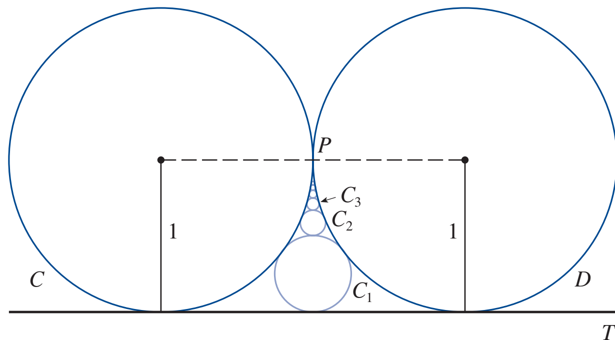
77. En el ejemplo 9 se demostró que la serie armónica es divergente. Aquí se bosqueja otro método, haciendo uso del hecho de que $e^x > 1 + x$ para cualquier $x > 0$. (Véase el ejercicio 4.3.84.)

Si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, demuestre que $e^{s_n} > n + 1$. ¿Por qué esto implica que la serie armónica es divergente?

78. Grafique las curvas $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sobre una misma pantalla. Determinando las áreas entre las curvas sucesivas, dé una demostración geométrica del hecho, mostrado en el ejemplo 8, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 1)} = 1$$

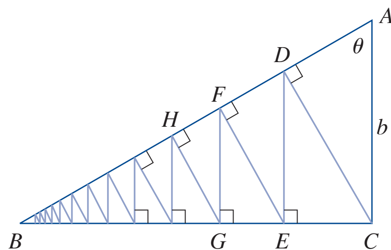
79. En la figura se muestran dos circunferencias C y D de radio 1 que se tocan en P. T es una tangente común; C_1 es la circunferencia que toca C, D y T; C_2 es la circunferencia que toca C, D y C_1; C_3 es la circunferencia que toca C, D y C_2. Este procedimiento puede continuar en forma indefinida y produce una sucesión infinita de circunferencias $\{C_n\}$. Encuentre una expresión para el diámetro de C_n y, de ese modo, proporcione otra demostración geométrica del ejemplo 8.



80. Un triángulo rectángulo ABC está definido con $\angle A = \theta$ y $|AC| = b$. CD se traza perpendicular a AB, DE se traza en forma perpendicular a BC, $EF \perp AB$, y este proceso continúa en forma indefinida como se ilustra en la figura. Determine la longitud total de todas las perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

en términos de b y θ.



81. ¿Qué está mal en el cálculo siguiente?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldus pensaba que esto demostraba la existencia de Dios, porque "se había creado algo de la nada".)

82. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \neq 0)$ se sabe que es una serie convergente. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es una serie divergente.

83. Demuestre el inciso (i) del teorema 8.

84. Si Σa_n es divergente y $c \neq 0$, demuestre que Σca_n es divergente.

85. Si Σa_n es convergente y Σb_n es divergente, demuestre que la serie $\Sigma(a_n + b_n)$ es divergente. [*Sugerencia*: argumente por contradicción.]

86. Si Σa_n y Σb_n son divergentes, ¿necesariamente $\Sigma(a_n + b_n)$ es divergente?

87. Suponga que una serie Σa_n consta de términos positivos y sus sumas parciales s_n cumplen con la desigualdad $s_n \leqslant 1000$ para toda n. Explique por qué Σa_n debe ser convergente.

88. La sucesión de Fibonacci se define en la sección 11.1 mediante las ecuaciones

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Demuestre que cada uno de los enunciados siguientes es cierto.

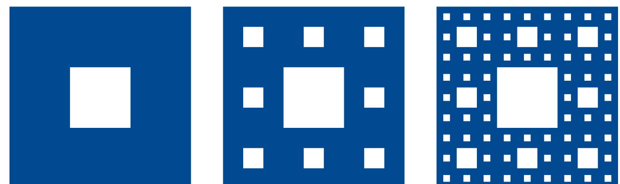
(a) $\dfrac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1} f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$

89. El **conjunto de Cantor**, nombrado así en honor al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), se construye como se señala a continuación. Empiece con el intervalo cerrado [0, 1] y retire el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Esto deja los dos intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y luego elimine el intervalo abierto constituido por el tercio medio de cada uno. De este modo quedan cuatro intervalos y de nuevo elimine el tercio medio de cada uno de ellos. Continúe este procedimiento de manera indefinida eliminando en cada paso el tercio medio de cada intervalo que queda del paso anterior. El conjunto de Cantor consiste en los números que quedan en [0, 1] después de que todos esos intervalos se han eliminado.

(a) Demuestre que la longitud total de todos los intervalos que se eliminan es 1. A pesar de eso, el conjunto de Cantor contiene un infinito de números. Proporcione ejemplos de algunos números del conjunto de Cantor.

(b) La **alfombra de Sierpinski** es un equivalente en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Se construye eliminando el noveno central de un cuadrado de lado 1, y luego se elimina el centro de cada uno de los ocho cuadrados restantes, y así sucesivamente. (En la figura se ilustran los primeros tres pasos de la construcción.) Demuestre que la suma de las áreas de los cuadrados eliminados es 1. Esto significa que el área de la alfombra de Sierpinski es 0.



90. (a) Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante la ecuación $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, donde a_1 y a_2 son números reales. Experimente con varios valores de a_1 y a_2 y con la ayuda de su calculadora infiera el límite de la sucesión.

(b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$ en términos de a_1 y a_2 expresando $a_{n+1} - a_n$ en función de $a_2 - a_1$ y sume una serie.

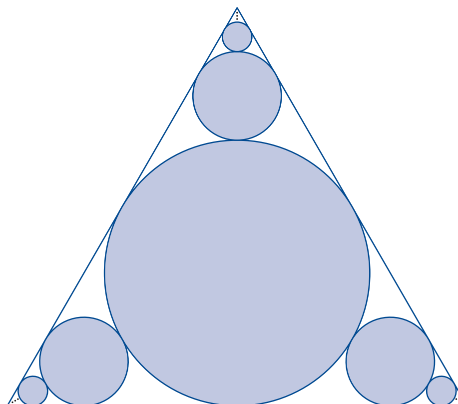
91. Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)!$

(a) Calcule las sumas parciales s_1, s_2, s_3 y s_4. ¿Reconoce los denominadores? Use el patrón para inferir una fórmula para s_n.

(b) Aplique inducción matemática para demostrar su inferencia.

(c) Demuestre que la serie infinita dada es convergente y calcule su suma.

92. En la figura hay un infinito de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo toca otros círculos y los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados que miden una unidad de longitud, calcule el área total que ocupan los círculos.



11.3 La prueba de la integral y estimaciones de sumas

En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie. Se puede lograr en el caso de series geométricas y series $\Sigma 1/[n(n+1)]$ porque en cada uno de estos casos es posible encontrar una fórmula simple para la n-ésima suma parcial s_n. Pero por lo regular no es fácil descubrir tal fórmula. Por tanto, en las secciones siguientes se tratan varias pruebas que permiten determinar si una serie es convergente o divergente sin que se tenga que encontrar en forma explícita su suma. (En algunos casos, los métodos permiten determinar unas buenas estimaciones de la suma.) La primera prueba utiliza integrales impropias.

Se debe empezar por investigar las series cuyos términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1.4636
10	1.5498
50	1.6251
100	1.6350
500	1.6429
1000	1.6439
5000	1.6447

No hay una fórmula sencilla para la suma s_n de los primeros n términos, pero la tabla generada al calcular los valores, dados en el margen, sugiere que las sumas parciales se aproximan a un número cercano a 1.64 cuando $n \to \infty$ y de este modo parece como si la serie fuera convergente.

Se puede confirmar esta impresión con un razonamiento geométrico. En la figura 1 se ilustra la curva $y = 1/x^2$ y algunos rectángulos que se encuentran abajo de la curva. La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud igual a 1; la altura es igual al valor de la función $y = 1/x^2$ en el punto final derecho del intervalo.

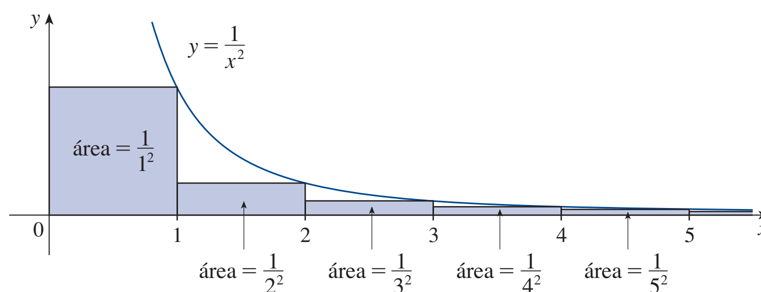


FIGURA 1

Por lo que la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Si se excluye el primer rectángulo, el área total de los rectángulos restantes es menor que el área bajo la curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que es el valor de la integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. En la sección 7.8 se descubrió que esta integral impropia es convergente y que tiene un valor de 1. Por lo que la figura muestra que todas las sumas parciales son menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

Por lo que las sumas parciales están acotadas. También se sabe que las sumas parciales son crecientes porque todos los términos son positivos. Por tanto, las sumas parciales convergen, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona, de manera que la serie es convergente. La suma de la serie (el límite de las sumas parciales) es también menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

[El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) calculó que la suma exacta de esta serie es $\pi^2/6$, pero la demostración de esto es muy difícil. (Véase el problema 6 en los Problemas adicionales después del capítulo 15.)]

Ahora veáse la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.2317
10	5.0210
50	12.7524
100	18.5896
500	43.2834
1000	61.8010
5000	139.9681

La tabla de valores de s_n sugiere que las sumas parciales no se aproximan a un número finito, por lo que se sospecha que la serie dada podría ser divergente. Otra vez se usa una figura para confirmarlo. En la figura 2 se muestra la curva $y = 1/\sqrt{x}$, pero esta vez se usan rectángulos cuya parte superior queda *arriba* de la curva.

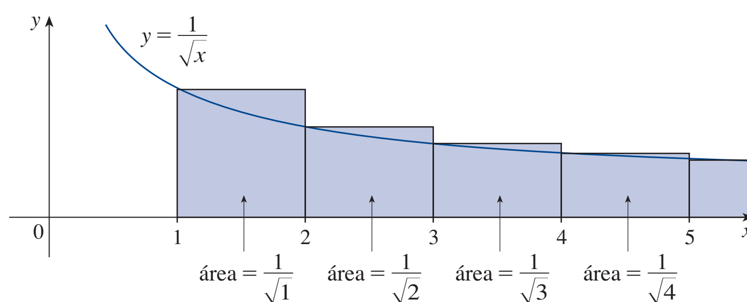


FIGURA 2

La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud 1. La altura es igual al valor de la función $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto final *izquierdo* del intervalo. Así que la suma de las áreas de todos los rectángulos es

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esta área total es mayor que el área bajo la curva para $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geqslant 1$, que es igual a la integral $\int_1^\infty (1/\sqrt{x})\,dx$. Pero se sabe por la sección 7.8 que esta integral impropia es

divergente. En otras palabras, el área bajo la curva es infinita. Así que la suma de la serie debe ser infinita; es decir, la serie es divergente.

El mismo tipo de razonamiento geométrico aplicado para estas dos series se puede hacer para demostrar la prueba siguiente. (La demostración se encuentra al final de esta sección.)

Prueba de la integral Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. En otras palabras:

(i) Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(ii) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

NOTA Cuando use la prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Por ejemplo, al probar la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{se usa} \qquad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Asimismo, no es necesario que f sea *siempre* decreciente. Lo importante es que f sea decreciente *en los extremos*, es decir, decreciente para x más grande que algún número N. Entonces $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente de acuerdo con la nota 4 de la sección 11.2.

Para usar la prueba de la integral es necesario evaluar $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ y, por tanto, se tiene que encontrar una antiderivada de f. Es frecuente que esto sea difícil o imposible, por lo que también se necesitan otras pruebas para convergencia.

EJEMPLO 1 Pruebe la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ es continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ por lo que se aplica la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, $\int_1^{\infty} 1/(x^2+1)\,dx$ es una integral convergente y por lo tanto, de acuerdo con la prueba de la integral, la serie $\sum 1/(n^2+1)$ es convergente. ■

EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de p la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente?

SOLUCIÓN Si $p < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Si $p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. En cualquier caso $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) \neq 0$, por lo que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia (11.2.7).

Si $p > 0$, entonces la función $f(x) = 1/x^p$ es evidentemente continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$. En el capítulo 7 [véase (7.8.2)] se encontró que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leqslant 1$$

De la prueba de la integral se infiere que la serie $\Sigma 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$. (En el caso de $p = 1$, esta serie es la serie armónica estudiada en el ejemplo 11.2.9) ■

La serie del ejemplo 2 se llama **serie *p***. Esto es importante en el resto de este capítulo, por lo que se resumen los resultados del ejemplo 2 para referencia futura como se indica a continuación.

1 La serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

EJEMPLO 3

(a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

es convergente porque es una serie p con $p = 3 > 1$.
(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

es divergente porque es una serie p con $p = \frac{1}{3} < 1$. ■

NOTA *No* se debe inferir que, de acuerdo con la prueba de la integral, la suma de la serie es igual al valor de la integral. De hecho,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{mientras que} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Por tanto, en general

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\ln x)/x$ es positiva y continua para $x > 1$ porque la función logaritmo es continua. Pero no es obvio si f es decreciente o no lo es, por lo que al calcular su derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Entonces, $f'(x) < 0$ cuando $\ln x > 1$, es decir, $x >$ e. Se sigue que f es decreciente cuando $x > e$, de manera que se puede aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Ya que esta integral impropia es divergente, la serie $\Sigma (\ln n)/n$ también es divergente de acuerdo con la prueba de la integral. ■

Estimación de la suma de una serie

Suponga que se pudo aplicar la prueba de la integral para demostrar que una serie Σa_n es convergente y que se quiere encontrar una aproximación a la suma s de la serie. Por supuesto, cualquier suma parcial s_n es una aproximación a s porque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Pero, ¿qué tan buena es esa aproximación? Para saberlo se necesita estimar el tamaño del **residuo**.

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

El residuo R_n es el error que se comete cuando s_n, la suma de los primeros n términos, se usa como una aproximación a la suma total.

Se usa la misma notación y las ideas que en la prueba de la integral, suponiendo que f es decreciente sobre $[n, \infty)$. Al comparar las áreas de los rectángulos con el área bajo $y = f(x)$ para $x > n$ en la figura 3, se ve que

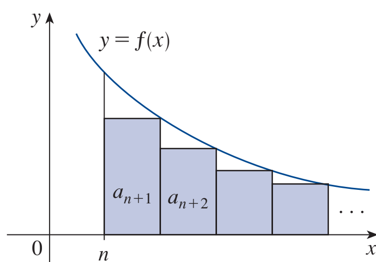


FIGURA 3

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

Asimismo, en la figura 4 se ve que

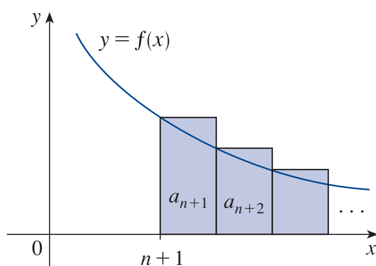


FIGURA 4

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx$$

De este modo se ha demostrado la siguiente estimación de error.

2 Estimación del residuo para la prueba de la integral Suponga que $f(k) = a_k$, donde f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant n$ y Σa_n es convergente. Si $R_n = s - s_n$, entonces

$$\int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

EJEMPLO 5

(a) Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\Sigma 1/n^3$ usando la suma de los primeros 10 términos. Estime el error implicado en esta aproximación.

(b) ¿Cuántos términos se requieren para asegurar que el residuo no exceda 0.0005?

SOLUCIÓN En los incisos (a) y (b) se necesita conocer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Con $f(x) = 1/x^3$, que satisface las condiciones de la prueba integral, se tiene

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

(a) Aproximando la suma de la serie por la 10-ésima suma parcial, se tiene

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.1975$$

De acuerdo con el residuo estimado en (2), se tiene

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Por lo que el tamaño del error es cuanto más de 0.005.

(b) La precisión de 0.0005 quiere decir que se debe encontrar un valor de n tal que $R_n \leqslant 0.0005$. Ya que

$$R_n \leqslant \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

se quiere que

$$\frac{1}{2n^2} < 0.0005$$

Al resolver esta desigualdad, se obtiene

$$n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000 \qquad \text{o} \qquad n > \sqrt{1000} \approx 31.6$$

Se necesita 32 términos para garantizar una precisión dentro de 0.0005. ■

Si se suma s_n a cada miembro de las desigualdades en (2), se obtiene

3
$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_n^{\infty} f(x)\, dx$$

porque $s_n + R_n = s$. Las desigualdades en (3) dan una cota inferior y una cota superior para s. Estas cotas proporcionan una aproximación más certera a la suma de la serie que la suma parcial s_n.

Aunque Euler calculó la suma exacta de las series p para $p = 2$, no se ha encontrado la suma para $p = 3$. Sin embargo, en el ejemplo 6 se muestra cómo *estimar* esta suma.

EJEMPLO 6 Use (3) con $n = 10$ para estimar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

SOLUCIÓN Las desigualdades en (3) resultan

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Del ejemplo 5 se sabe que

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

por lo que

$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Si se usa $s_{10} \approx 1.197532$, se obtiene

$$1.201664 \leqslant s \leqslant 1.202532$$

Si se aproxima s por el punto medio de este intervalo, entonces el error es a lo más la mitad de la longitud del intervalo. Por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021 \qquad \text{con error} \qquad < 0.0005$$ ■

Si se compara el ejemplo 6 con el ejemplo 5, se observa que la estimación mejorada en (3) es mucho mejor que la estimación $s \approx s_n$. Para que el error sea menor que 0.0005 se tiene que usar 32 términos en el ejemplo 5, pero solo 10 términos en el ejemplo 6.

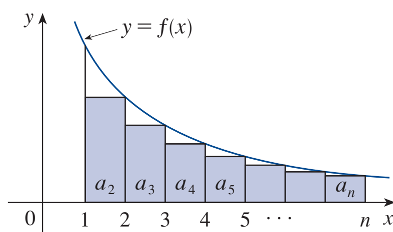


FIGURA 5

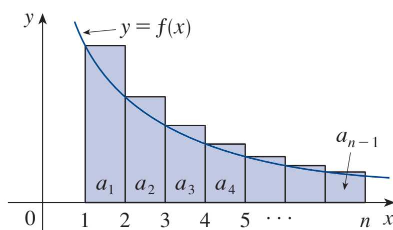


FIGURA 6

Demostración de la prueba de la integral

Ya se ha visto la idea básica en que se apoya la demostración de la prueba de la integral en las figuras 1 y 2 para las series $\Sigma 1/n^2$ y $\Sigma\, 1/\sqrt{n}$. En el caso de la serie general Σa_n, véanse las figuras 5 y 6. El área del primer rectángulo sombreado de la figura 5 es el valor de f en el punto final derecho de [1, 2], es decir, $f(2) = a_2$. Así, al comparar las áreas de los rectángulos sombreados con el área bajo $y = f(x)$ de 1 a n, se ve que

4
$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

(Observe que esta desigualdad depende del hecho de que f es decreciente.) De manera similar, en la figura 6 se muestra que

5
$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

(i) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces (4) da

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

ya que $f(x) \geqslant 0$. Por tanto

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx = M$$

Como $s_n \leqslant M$ para toda n, la sucesión $\{s_n\}$ está acotada por arriba. También

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

como $a_{n+1} = f(n+1) \geqslant 0$. En estos términos $\{s_n\}$ es una sucesión acotada creciente y, de este modo, es convergente de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona (11.1.12). Esto significa que Σa_n es convergente.

(ii) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ cuando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Pero con (5) se obtiene

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

y por tanto $s_{n-1} \to \infty$. Esto implica que $s_n \to \infty$, luego Σa_n diverge. ■

11.3 EJERCICIOS

1. Dibuje una gráfica para demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1.3}}\,dx$$

¿Qué puede concluir con respecto a la serie?

2. Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant 1$ y $a_n = f(n)$. En una gráfica acomode las tres cantidades siguientes en orden creciente.

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3-8 Mediante la prueba de la integral determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0.3}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n-1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^4}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$

9-26 Determine si la serie es convergente o divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1.4} + 3n^{-1.2})$

11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

12. $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$

13. $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{19} + \cdots$

14. $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 4}{n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + n^{3/2}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 2}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 + 4}$

20. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$

24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^3}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$

27-28 Explique por qué no es posible utilizar la prueba de la integral para determinar si la serie es convergente.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{1 + n^2}$

29-32 Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente.

29. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

30. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\,[\ln(\ln n)]^p}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

33. La función zeta de Riemann ζ se define como

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

y se usa en teoría de números para estudiar la distribución de los números primos. ¿Cuál es el dominio de ζ?

34. Leonhard Euler calculó la suma exacta de la serie para $p = 2$:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(Veáse página 720.) Use este hecho para encontrar la suma de cada serie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

35. Euler también encontró la suma para la serie p con $p = 4$:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Utilice el resultado de Euler para encontrar la suma de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^4$

(b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-2)^4}$

36. (a) Calcule la suma parcial s_{10} de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime el error al usar s_{10} como aproximación a la suma de la serie.
(b) Use (3) con $n = 10$ para conseguir una estimación mejorada de la suma.
(c) Compare su estimación en el inciso (b) con el valor exacto dado en el ejercicio 35.
(d) Calcule un valor de n tal que s_n no difiera más de 0.00001 del valor de la suma.

37. (a) Mediante la suma de los primeros 10 términos, estime la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. ¿Qué tan buena es la estimación?
(b) Mejore esta estimación usando (3) con $n = 10$.
(c) Compare su resultado en el inciso (b) con el valor exacto dado en el ejercicio 34.
(d) Encuentre un valor de n que dé la certeza de que el error en la aproximación $s \approx s_n$ es menor que 0.001.

38. Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n}$ correcta a cuatro decimales.

39. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)^{-6}$ correcta a cinco decimales.

40. ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ se necesitarían sumar para calcular la suma que no difiera de 0.01?

41. Demuestre que si se quiere aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1.001}$ tal que el error sea menor de 5 en la novena cifra decimal, luego ¡es necesario sumar más de $10^{11\,301}$ términos!

SAC **42.** (a) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ es convergente.
(b) Encuentre un límite superior para el error en la aproximación $s \approx s_n$.
(c) ¿Cuál es el valor más pequeño de n tal que este límite superior sea menor que 0.05?
(d) Encuentre s_n para este valor de n.

43. (a) Utilice (4) para demostrar que si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, entonces

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) La serie armónica diverge, pero muy lentamente. Con ayuda del inciso (a) demuestre que la suma del primer millón de términos es menor que 15 y que la suma de los primeros mil millones de términos es menor que 22.

44. Siga los pasos siguientes para demostrar que la sucesión

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tiene un límite. (El valor del límite se denota con γ y se denomina constante de Euler.)

(a) Dibuje un diagrama como la figura 6 con $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como un área [o use (5)] para demostrar que $t_n > 0$ para toda n.

(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n + 1) - \ln n] - \frac{1}{n + 1}$$

como una diferencia de áreas para demostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Por tanto, $\{t_n\}$ es una sucesión decreciente.

(c) Use el teorema de la sucesión monótona para demostrar que $\{t_n\}$ es convergente.

45. Determine todos los valores positivos de b para los cuales la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

46. Encuentre todos los valores de c para los que converge la serie siguiente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)$$

11.4 Pruebas por comparación

En las pruebas por comparación, la idea es comparar una serie dada con una serie que ya se sabe que es convergente o divergente. Por ejemplo, la serie

1 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

recuerda la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, por lo que es convergente. Como la serie (1) es similar a la serie convergente, se presiente que también debe ser convergente. De hecho, así es. La desigualdad

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

demuestra que la serie dada (1) tiene términos menores que los de la serie geométrica y, por tanto, todas las sumas parciales son también más pequeñas que 1 (la suma de la serie geométrica). Esto quiere decir que las sumas parciales forman una sucesión creciente acotada, que es convergente. Asimismo, se infiere que la suma de la serie es menor que la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Un razonamiento similar se puede usar para demostrar la prueba siguiente, la cual se aplica solo a series cuyos términos son positivos. La primera parte dice que si se tiene una serie cuyos términos son *menores* que los de una serie *convergente* conocida, entonces esa serie también es convergente. La segunda parte establece que si se empieza con una serie cuyos términos son *mayores* que los de una serie divergente conocida, entonces también es *divergente*.

Prueba por comparación Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos.

(i) Si Σb_n es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para toda n, entonces Σa_n también es convergente.

(ii) Si Σb_n es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para toda n, entonces Σa_n también es divergente.

Es importante considerar la distinción entre sucesión y serie. Una sucesión es un listado de números y una serie es una suma. Con cada serie Σa_n hay dos sucesiones asociadas: La sucesión $\{a_n\}$ de términos y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

DEMOSTRACIÓN

(i) Sea $$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Ya que ambas series tienen términos positivos, las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son crecientes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Asimismo, $t_n \to t$, por lo que $t_n \leqslant t$ para toda n. Como $a_i \leqslant b_i$ se tiene $s_n \leqslant t_n$. Por lo que, $s_n \leqslant t$ para toda n. Esto significa que $\{s_n\}$ es creciente y está acotada superiormente y, por tanto, converge por el teorema de sucesiones monótonas. Por lo que Σa_n es convergente.

(ii) Si Σb_n es divergente, entonces $t_n \to \infty$ (ya que $\{t_n\}$ es creciente). Pero $a_i \geqslant b_i$, por lo que $s_n \geqslant t_n$. Por lo que $s_n \to \infty$. Por tanto, Σa_n diverge. ■

Por supuesto, al usar la prueba por comparación es necesario tener alguna serie conocida Σb_n para la comparación. La mayoría de las veces se usa una de estas series:

Serie estándar usada con la prueba por comparación

- Una serie p [$\Sigma 1/n^p$ que converge si $p > 1$ y diverge si $p \leqslant 1$; véase (11.3.1)].
- Una serie geométrica [Σar^{n-1} es convergente si $|r| < 1$ y es divergente si $|r| \geqslant 1$; véase (11.2.4)].

EJEMPLO 1 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN En el caso de n grande el término dominante en el denominador es $2n^2$, por lo que si se compara la serie dada con la serie $\Sigma 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

porque el lado izquierdo tiene un denominador más grande. (En la notación de la prueba por comparación, a_n está en el lado izquierdo y b_n en el lado derecho.) Ya se sabe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente porque es una constante por una serie p con $p = 2 > 1$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

es convergente de acuerdo con el inciso (i) de la prueba por comparación. ■

NOTA 1 Aunque la condición $a_n \leqslant b_n$ o $a_n \geqslant b_n$ en la prueba por comparación es para toda n, es necesario verificar solo que se cumple para $n \geqslant N$, donde N es algún entero establecido, porque la convergencia de una serie no está afectada por un número finito de términos. Esto se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Se usa la prueba de la integral para investigar esta serie en el ejemplo 11.3.4, pero también es posible probarla por comparación con la serie armónica. Observe que $\ln k > 1$ para $k \geqslant 3$ y así

$$\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k} \qquad k \geqslant 3$$

Se sabe que $\Sigma 1/k$ es divergente (serie p con $p = 1$). Por lo que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba por comparación. ■

NOTA 2 Los términos de la serie que se están probando deben ser menores que los de una serie convergente, o mayores que los de una serie divergente. Si los términos son más grandes que los términos de una serie convergente, o bien, menores que los de una serie divergente, entonces la prueba por comparación no aplica. Por ejemplo, considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

La desigualdad

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

es inútil en cuanto a la prueba por comparación porque $\Sigma\, b_n = \Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y $a_n > b_n$. Sin embargo, la impresión es que $\Sigma 1/(2^n - 1)$ tiene que ser convergente porque es muy parecida a la serie geométrica convergente $\Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En tales casos se puede aplicar la prueba siguiente.

Los ejercicios 40 y 41 tratan los casos $c = 0$ y $c = \infty$.

Prueba por comparación del límite Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un número finito y $c > 0$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

DEMOSTRACIÓN Sean m y M números positivos tales que $m < c < M$. Como a_n/b_n está cercano a c para n grande, existe un entero N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{cuando } n > N$$

y por tanto

$$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{cuando } n > N$$

Si Σb_n es convergente, también lo es ΣMb_n. Así Σa_n es convergente de acuerdo con el inciso (i) por la prueba por comparación. Si Σb_n diverge también Σmb_n es divergente y por el inciso (ii) de la prueba por comparación Σa_n diverge. ■

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Se usa la prueba por comparación del límite con

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

y se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Ya que existe este límite y $\Sigma 1/2^n$ es una serie geométrica convergente, la serie dada converge de acuerdo con la prueba por comparación del límite. ■

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La parte dominante del numerador es $2n^2$ y la parte dominante del denominador es $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Esto sugiere tomar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Ya que $\Sigma b_n = 2\,\Sigma 1/n^{1/2}$ es divergente (es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$), la serie dada diverge de acuerdo con la prueba por comparación del límite. ■

Observe que al probar muchas series se encuentra una serie de comparación adecuada Σb_n conservando solo las potencias más altas en el numerador y en el denominador.

Estimación de sumas

Si se ha usado la prueba por comparación para demostrar que una serie Σa_n es convergente por comparación con una serie Σb_n, entonces se puede hacer una estimación de la suma Σa_n al comparar los residuos. Como en la sección 11.3, se considera el residuo

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

En cuanto a la serie de comparación Σb_n se considera el residuo correspondiente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Ya que $a_n \leqslant b_n$ para toda n, se tiene $R_n \leqslant T_n$. Si Σb_n es una serie p, se puede estimar su residuo T_n como en la sección 11.3. Si Σb_n es una serie geométrica, entonces T_n es la suma de una serie geométrica y se puede sumar exactamente (véanse los ejercicios 35 y 36). En cualquier caso, se sabe que R_n es menor que T_n.

EJEMPLO 5 Con la suma de los primeros 100 términos aproxime la suma de la serie $\Sigma 1/(n^3 + 1)$. Estime el error implicado en esta aproximación.

SOLUCIÓN Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba por comparación. El residuo T_n para la serie de comparación $\Sigma 1/n^3$ ya se ha estimado en el ejemplo 11.3.5 por medio de la estimación del residuo por la prueba de la integral. Allí encuentra que

$$T_n \leqslant \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

Por tanto, el residuo R_n de la serie dada cumple con

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Con $n = 100$ se tiene

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0.00005$$

Con una calculadora programable o una computadora, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0.6864538$$

con un error menor que 0.00005. ■

11.4 EJERCICIOS

1. Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que se sabe que Σb_n es convergente.
(a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?
(b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?

2. Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que se sabe que Σb_n es divergente.
(a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir de Σa_n? ¿Por qué?
(b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?

3-32 Determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 8}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^3 + 1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n - 1}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2 k}{1 + k^3}$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3 + 4k + 3}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{e^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n - 1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.2}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n} + 2}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^3 + n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 + n^2}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + n}}{2 + n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4^n}{n + 6^n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 2}}{2n^2 + n + 1}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 3^n}{n + 2^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + 1}{ne^n + 1}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 1}}{n^3 + n^2}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33-36 Utilice la suma de los primeros 10 términos, para obtener un valor aproximado de la suma de la serie. Estime el error.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 + n^5}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^4}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \cos^2 n$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

37. El significado de la representación decimal de un número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (donde el dígito d_i es uno de los números 0, 1, 2,…, 9) es tal que

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Demuestre que esta serie siempre es convergente.

38. ¿Para qué valores de p la serie $\Sigma_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ es convergente?

39. Demuestre que si $a_n \geqslant 0$ y Σa_n converge, entonces también $\Sigma\, a_n^2$ converge.

40. (a) Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que Σb_n es convergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

entonces Σa_n también es convergente.

(b) Utilice el inciso (a) para demostrar que la serie converge.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

41. (a) Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que Σb_n es divergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

entonces Σa_n también es divergente.

(b) Use el inciso (a) para demostrar que la serie es divergente.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Proporcione un ejemplo de un par de series Σa_n y Σb_n con términos positivos donde $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ y Σb_n diverge, pero Σa_n converge. (Compare con el ejercicio 40.)

43. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, entonces Σa_n es divergente.

44. Demuestre que si $a_n > 0$ y Σa_n es convergente, entonces $\Sigma \ln(1 + a_n)$ es convergente.

45. Si Σa_n es una serie convergente con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma \operatorname{sen}(a_n)$ también es convergente?

46. Si Σa_n y Σb_n son series convergentes con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma a_n b_n$ también es convergente?

11.5 Series alternantes

Las pruebas de convergencia que se han examinado hasta ahora se aplican solo a series con términos positivos. En esta sección y en la siguiente, se estudia cómo tratar con series cuyos términos no son necesariamente positivos. De particular importancia son las *series alternantes*, cuyos términos alternan signo.

Una **serie alternante** es una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. Aquí hay dos ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

De acuerdo con estos ejemplos, el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{o} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

donde b_n es un número positivo. (De hecho, $b_n = |a_n|$.)

La prueba siguiente establece que, si los términos de una serie alternante decrecen hacia 0 en valor absoluto, entonces la serie converge.

Prueba de la serie alternante Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

cumple con

(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para toda n

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

entonces la serie es convergente.

Antes de proporcionar la demostración veáse la figura 1, la cual es una representación de la idea en que se basa la demostración. Primero se dibuja $s_1 = b_1$ sobre una recta numérica. Para determinar s_2 se resta b_2, por lo que s_2 está a la izquierda de s_1. Luego, para determinar s_3 se suma b_3, por lo que s_3 está a la derecha de s_2. Pero como $b_3 < b_2$, s_3 está a la izquierda de s_1. Al continuar de esta manera, se observa que las sumas parciales oscilan hacia atrás y hacia adelante. Ya que $b_n \to 0$, los pasos sucesivos se vuelven más y más pequeños. Las sumas parciales pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ se incrementan, y decrecen las sumas parciales impares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ Por lo que parece razonable que ambas converjan en el mismo número s, que es la suma de la serie. Por tanto, en la demostración siguiente se consideran por separado las sumas parciales pares e impares.

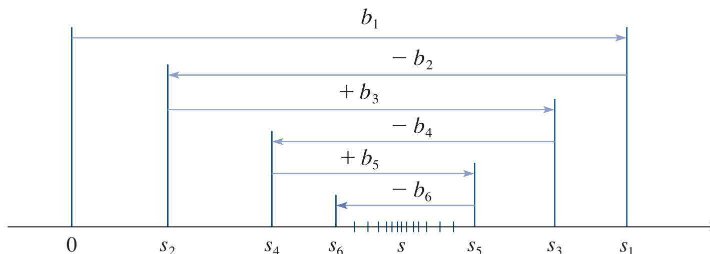


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN DE LA PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Primero se consideran las sumas parciales pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{ya que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{ya que } b_4 \leqslant b_3$$

En general $s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2}$ ya que $b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$

Por esto $$0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$$

Pero también se puede escribir

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

Todos los términos entre paréntesis son positivos, por lo que $s_{2n} \leqslant b_1$ para toda n. Por tanto, la sucesión $\{s_{2n}\}$ de las sumas parciales pares es creciente y está acotada por arriba. Debido a eso, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona, es convergente. Se llama s a su límite, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Ahora se calcula el límite de las sumas parciales impares:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} \\
&= s + 0 \qquad \text{[por la condición (ii)]} \\
&= s
\end{aligned}$$

Ya que tanto la suma parcial par como la suma parcial impar convergen a s, se tiene $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ [véase el ejercicio 11.1.92(a)], por lo que la serie es convergente. ■

En la figura 2 se ilustra el ejemplo 1; se muestran las gráficas de los términos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ y las sumas parciales s_n. Observe cómo los valores de s_n oscilan alrededor del límite, el cual, al parecer está alrededor de 0.7. De hecho, la suma exacta de la serie es $\ln 2 \approx 0.693$ (véase el ejercicio 36).

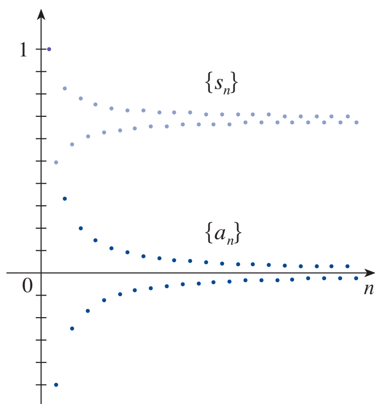


FIGURA 2

EJEMPLO 1 La serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisface

$$\text{(i)}\quad b_{n+1} < b_n \qquad \text{porque} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

por lo que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. ■

EJEMPLO 2 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ es alternante, pero

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

por lo que la condición (ii) no se cumple. En cambio, vea el límite del n-ésimo término de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

Este límite no existe, por lo que la serie es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. ■

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie dada es alternante, por lo que se tratará de comprobar las condiciones (i) y (ii) de la prueba de la serie alternante.

A diferencia de la situación en el ejemplo 1, no es obvio que la sucesión dada por $b_n = n^2/(n^3+1)$ sea decreciente. Sin embargo, si se considera la función relacionada $f(x) = x^2/(x^3+1)$, se encuentra que

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

En lugar de verificar la condición (i) de la prueba de la serie alternante calculando una derivada, puede comprobar que $b_{n+1} < b_n$ directamente usando la técnica de la solución 1 del ejemplo 11.1.13.

Ya que se consideran solo x positivas, $f'(x) < 0$ si $2 - x^3 < 0$, es decir, $x > \sqrt[3]{2}$. Por lo que f es decreciente sobre el intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Esto significa que $f(n+1) < f(n)$ y, por tanto, $b_{n+1} < b_n$ cuando $n \geqslant 2$. (La desigualdad $b_2 < b_1$ se puede comprobar de manera directa, pero lo que realmente importa es que la sucesión $\{b_n\}$ decrece con el tiempo.)

La condición (ii) se comprueba rápido:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^3}} = 0$$

Por lo que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. ■

Estimación de sumas

Una suma parcial s_n de cualquier serie convergente se puede usar como una aproximación a una suma total s, pero no es de mucha utilidad, a menos que se estime la exactitud de la aproximación. El error implicado al usar $s \approx s_n$ es el residuo $R_n = s - s_n$. El teorema siguiente establece que para las series que cumplen con la condición de la prueba de la serie alternante, el tamaño del error es menor que b_{n+1}, lo cual es el valor absoluto del primer término ignorado.

Se puede ver por geometría por qué el teorema de estimación para series alternantes es verdadero al examinar la figura 1 (en la página 733). Observe que $s - s_4 < b_5$, $|s - s_5| < b_6$ y así sucesivamente. Note también que s queda entre dos sumas parciales consecutivas.

Teorema de estimación para series alternantes Si $s = \Sigma(-1)^{n-1}b_n$, donde $b_n > 0$, es la suma de una serie alternante que satisface

$$\text{(i)}\quad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

entonces
$$|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$$

DEMOSTRACIÓN Se sabe por la demostración para la prueba de series alternantes que s queda entre dos sumas parciales consecutivas s_n y s_{n+1}. (Ya se demostró que s es mayor que todas las sumas parciales pares. Un argumento similar demuestra que s es menor que todas las sumas impares.) Se deduce que

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$

■

EJEMPLO 4 Determine la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ correcta a tres decimales.

Por definición, $0! = 1$.

SOLUCIÓN Primero observe que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante porque

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii)}\quad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{n!} \to 0 \ \text{ a medida que } n \to \infty$$

Para obtener cuántos términos se necesitan usar en la aproximación, se escriben los primeros términos de la serie:

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

Observe que
$$b_7 = \tfrac{1}{5040} < \tfrac{1}{5000} = 0.0002$$

y
$$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0.368056$$

En la sección 11.10 se demuestra que $e^x = \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para toda x, por lo que el resultado del ejemplo 4 es en realidad una aproximación al número e^{-1}.

De acuerdo con el teorema de la estimación de la serie alternante, se sabe que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0.0002$$

Este error de menos de 0.0002 no afecta la tercera cifra decimal, por lo que se tiene que $s \approx 0.368$ es correcta hasta la tercera cifra decimal. ■

NOTA La regla de que el error (al usar s_n para aproximarse a s) es menor que el primer término ignorado es, en general, válida solo para series alternantes que cumplen con las condiciones del teorema de la estimación de la serie alternante. La regla no se aplica a otro tipo de series.

11.5 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una serie alternante?
(b) ¿En qué condiciones una serie alternante converge?
(c) Si estas condiciones se cumplen, ¿qué puede decir con respecto al residuo después de n términos?

2-20 Pruebe las series para ver si son convergentes o divergentes.

2. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \cdots$

3. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$

4. $\dfrac{1}{\ln 3} - \dfrac{1}{\ln 4} + \dfrac{1}{\ln 5} - \dfrac{1}{\ln 6} + \dfrac{1}{\ln 7} - \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3 + 5n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+n+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

21-22 Trace la gráfica de las sucesiones de términos y la sucesión de sumas parciales en la misma pantalla. Utilice la gráfica para hacer una estimación de la suma de las series. Después utilice el teorema de la estimación de las series alternantes para estimar la suma con una aproximación de cuatro decimales.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0.8)^n}{n!}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{8^n}$

23-26 Demuestre que la serie es convergente. ¿Cuántos términos de la serie se necesitan sumar para determinar la suma con la exactitud indicada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6} \quad (|\text{error}| < 0.00005)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{n} \quad (|\text{error}| < 0.0005)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 2^n} \quad (|\text{error}| < 0.0005)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^n \quad (|\text{error}| < 0.00005)$

27-30 Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie correcta a cuatro cifras decimales.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-2n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,4^n}$

31. ¿Es la 50.ª suma parcial s_{50} de la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ una sobreestimación o una subestimación de la suma total? Explique.

32-34 ¿Para qué valores de p es convergente cada serie?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Demuestre que la serie $\Sigma(-1)^{n-1}b_n$, donde $b_n = 1/n$ si n es impar y $b_n = 1/n^2$ si n es par, es divergente. ¿Por qué no aplica la prueba de la serie alternante?

36. Siga los pasos siguientes para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sean h_n y s_n las sumas parciales de las series armónica y armónica alternante.

(a) Demuestre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) De acuerdo con el ejercicio 11.3.44 se tiene

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

y, por tanto,

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Apoyándose en estos hechos y el inciso (a), demuestre que $s_{2n} \to \ln 2$ cuando $n \to \infty$.

11.6 Convergencia absoluta y las pruebas de la razón y la raíz

Dada una serie Σa_n, se puede considerar la serie correspondiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

Hay pruebas de convergencia para series con términos positivos y series alternantes. Pero ¿y si los signos de los términos cambian de manera irregular? En el ejemplo 3 se observa que la idea de la convergencia absoluta ayuda algunas veces en tales casos.

1 Definición Una serie Σa_n es llamada **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\Sigma|a_n|$ es convergente.

Observe que, si Σa_n es una serie con términos positivos, entonces $|a_n| = a_n$ y por tanto, la convergencia absoluta es lo mismo que la convergencia en este caso.

EJEMPLO 1 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es una serie p convergente ($p = 2$). ■

EJEMPLO 2 Ya se sabe que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es convergente (véase ejemplo 11.5.1), pero no es absolutamente convergente porque la serie correspondiente de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que es la serie armónica (serie p con $p = 1$) y, por tanto, es divergente. ■

2 Definición Una serie Σa_n se llama **condicionalmente convergente** si es convergente pero no absolutamente convergente.

En el ejemplo 2 se muestra que la serie armónica alternante es condicionalmente convergente. Por lo que es posible que una serie sea convergente, pero no absolutamente convergente. Sin embargo, el teorema siguiente muestra que la convergencia absoluta implica convergencia.

3 Teorema Si una serie Σa_n es absolutamente convergente, entonces es convergente.

DEMOSTRACIÓN Observe que la desigualdad

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

es cierta porque $|a_n|$ es a_n o $-a_n$. Si Σa_n es absolutamente convergente, entonces $\Sigma|a_n|$ es convergente, así que $\Sigma 2|a_n|$ es convergente. Por tanto, por la prueba de la comparación, $\Sigma(a_n + |a_n|)$ es convergente. Entonces

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

es la diferencia de dos series convergentes y, por tanto, convergente. ■

EJEMPLO 3 Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Esta serie tiene términos tanto positivos como negativos, pero no es alternante. (El primer término es positivo, los tres siguientes son negativos, y los otros tres que siguen son positivos: los signos no siguen un patrón regular.) Se puede aplicar la prueba de comparación a la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Ya que $|\cos n| \leqslant 1$ para toda n, se tiene

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Se sabe que $\Sigma 1/n^2$ es convergente (serie p con $p = 2$) y, por tanto, $\Sigma|\cos n|/n^2$ es convergente por la prueba por comparación. De esta manera, la serie dada $\Sigma(\cos n)/n^2$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente de acuerdo con el teorema 3. ■

En la figura 1 se ilustran las gráficas de los términos a_n y las sumas parciales s_n de la serie del ejemplo 3. Observe que la serie no es alternante, pero tiene términos positivos y negativos.

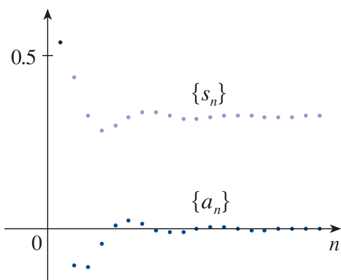


FIGURA 1

La prueba siguiente es muy útil para determinar si una cierta serie es absolutamente convergente.

Prueba de la razón

(i) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, la prueba de la razón no es concluyente; es decir, no se puede sacar conclusión alguna con respecto a la convergencia o a la divergencia de Σa_n.

DEMOSTRACIÓN

(i) La idea es comparar la serie dada con una serie geométrica convergente. Ya que $L < 1$, se puede elegir un número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad \text{y} \qquad L < r$$

el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será menor que r; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{siempre que } n \geqslant N$$

o equivalentemente

4 $$|a_{n+1}| < |a_n| r \qquad \text{siempre que } n \geqslant N$$

Al hacer n sucesivamente igual a N, $N + 1$, $N + 2$,… en (4), se obtiene

$$|a_{N+1}| < |a_N| r$$
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}| r < |a_N| r^2$$
$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}| r < |a_N| r^3$$

y, en general,

5 $$|a_{N+k}| < |a_N| r^k \qquad \text{para toda } k \geqslant 1$$

Ahora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

es convergente porque es una serie geométrica con $0 < r < 1$. Por lo que la desigualdad (5) junto con la prueba de la comparación demuestra que la serie

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

también es convergente. Se infiere que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. (Recuerde que una cantidad finita de términos no afecta la convergencia.) Por tanto, Σa_n es absolutamente convergente.

(ii) Si $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$ o $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, entonces la razón $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será mayor que 1; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{mientras que } n \geqslant N$$

Esto significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ siempre que $n \geqslant N$ y de este modo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Por lo tanto, Σa_n es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. ■

NOTA El inciso (iii) de la prueba de la razón establece que si $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = 1$, la prueba no proporciona información. Por ejemplo, en cuanto a la serie convergente $\Sigma 1/n^2$ se tiene

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

mientras que para la serie divergente $\Sigma 1/n$ se tiene

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

La prueba de la razón por lo general no es concluyente si el n-ésimo término de la serie contiene una exponencial o factorial, como se verá en los ejemplos 4 y 5.

Por tanto, si $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$, la serie Σa_n podría ser convergente o divergente. En este caso, la prueba de la razón no funciona, por lo que se debe aplicar otra prueba.

EJEMPLO 4 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ es absolutamente convergente.

SOLUCIÓN Aplique la prueba de la razón con $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Por lo que, por la prueba de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y, en consecuencia, convergente. ■

Estimación de sumas

En las tres últimas secciones se usaron varios métodos para estimar la suma de una serie, y el método depende de cuál prueba se usaba para demostrar la convergencia. ¿Qué sucede con las series para las cuales sí funciona la prueba de la razón? Hay dos posibilidades: si la serie es alternante, como en el ejemplo 4, entonces es mejor aplicar los métodos de la sección 11.5. Si todos los términos son positivos, entonces se aplican los métodos especiales que se explican en el ejercicio 46.

EJEMPLO 5 Pruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

SOLUCIÓN Ya que los términos $a_n = n^n/n!$ son positivos, no se necesitan los signos del valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

(Véase ecuación 3.6.6.) Ya que $e > 1$, la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la razón. ■

NOTA Aunque la prueba de la razón funciona en el ejemplo 5, un método más fácil es usar la prueba de la divergencia. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

se deduce que a_n no tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia.

Es conveniente aplicar la prueba siguiente cuando hay potencias n-ésimas. Su demostración es similar a la de la prueba de la razón y se deja para el ejercicio 49.

Prueba de la raíz

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces el inciso (iii) de la prueba de la raíz establece que la prueba no proporciona información. La serie Σa_n podría ser convergente o divergente. (Si $L = 1$ en la prueba de la razón, no intente con la prueba de la raíz porque L será otra vez 1. Y si $L = 1$ en la prueba de la raíz, no intente la prueba de la razón porque también fallará.)

EJEMPLO 6 Pruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUCIÓN

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{3 + \dfrac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Por lo que la serie dada converge de acuerdo con la prueba de la raíz. ■

Reordenamientos

La pregunta de si una serie dada que es convergente es absolutamente convergente o condicionalmente convergente, tiene relación con la pregunta de si las sumas infinitas se comportan como las sumas finitas.

Por supuesto, si se reordenan los términos en una suma finita, entonces el valor de la suma no cambia. Pero esto no siempre sucede en las series infinitas. El **reordenamiento** de una serie infinita Σa_n significa una serie obtenida simplemente al cambiar el orden de los términos. Por ejemplo, un reordenamiento de Σa_n podría empezar como sigue:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Resulta que

si Σa_n es una serie absolutamente convergente con suma s, entonces cualquier reordenamiento de Σa_n tiene la misma suma s.

Sin embargo, cualquier serie condicionalmente convergente se puede reordenar para dar una suma distinta. Para ilustrar este hecho considere la serie armónica alternante

6 $$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Véase ejercicio 11.5.36.) Si se multiplica la serie por $\tfrac{1}{2}$, se obtiene

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Si se insertan ceros entre los términos de esta serie, se tiene

7 $$0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Sumar ceros no afecta la suma de la serie; cada uno de los términos de la sucesión de sumas parciales se repite, pero el límite es el mismo.

Ahora se suma la serie de las ecuaciones 6 y 7 usando el teorema 11.2.8:

8 $$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Observe que la serie en (8) consta de los mismos términos que en (6), pero reordenados para que haya un término negativo después de cada par de términos positivos. Pero las sumas de estas series son diferentes. De hecho, Riemann demostró que

si Σa_n es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, entonces hay un reordenamiento de Σa_n que tiene una suma igual a r.

Una demostración de este hecho se plantea en el ejercicio 52.

11.6 EJERCICIOS

1. ¿Qué puede decir acerca de la serie Σa_n en cada uno de los casos siguientes?

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.8$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2-6 Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

7-24 Utilice la prueba de la razón para determinar si la serie es convergente o divergente.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n n^3}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi^n}{(-3)^{n-1}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

21. $\displaystyle 1 - \frac{2!}{1\cdot 3} + \frac{3!}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{4!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)} + \cdots$

22. $\displaystyle \frac{2}{3} + \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \cdots$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

25-30 Utilice la prueba de la raíz para determinar si la serie es convergente o divergente.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\arctan n)^n$

31-38 Utilice cualquier prueba para determinar si la serie es convergente o divergente.

31. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{2+3n}\right)^n$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n10^{n+1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^{2n}}{10^{n+1}}$

35. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/6)}{1+n\sqrt{n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

38. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

39. Los términos de una serie se definen en forma recursiva con las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n$$

Determine si Σa_n es convergente o divergente.

40. Una serie Σa_n está definida por las ecuaciones

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}a_n$$

Determine si Σa_n converge o diverge.

41-42 Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números positivos que converge a $\frac{1}{2}$. Determine si la serie dada es absolutamente convergente.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^n \cos n\pi}{n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n b_1 b_2 b_3 \cdots b_n}$

43. ¿Para cuáles de las series siguientes la prueba de la razón no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definitiva)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

44. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

45. (a) Demuestre que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para toda x.
(b) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x.

46. Sea Σa_n una serie con términos positivos y sea $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, por lo que Σa_n es convergente de acuerdo con la prueba de la razón. Como es lo usual, sea R_n el residuo después de n términos, es decir,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Si $\{r_n\}$ es una sucesión decreciente y $r_{n+1} < 1$, demuestre con la suma de una serie geométrica que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-r_{n+1}}$$

(b) Si $\{r_n\}$ es una sucesión creciente, demuestre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-L}$$

47. (a) Calcule la suma parcial s_5 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n2^n)$. Con ayuda del ejercicio 46 estime el error al usar s_5 como una aproximación a la suma de la serie.
(b) Determine un valor de n de tal modo que s_n difiera menos que 0.00005 de la suma real. Use este valor de n para obtener un valor aproximado de la suma de la serie.

48. Use la suma de los primeros 10 términos para obtener un valor aproximado de la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Utilice el ejercicio 46 para estimar el error.

49. Demuestre la prueba de la raíz. [*Sugerencia para inciso (i)*: tome cualquier número r tal que $L < r < 1$ y utilice el hecho de que hay un entero N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ siempre que $n \geqslant N$.]

50. Hacia 1910, Srinivasa Ramanujan, matemático de India, descubrió la fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper utilizó esta serie en 1985 para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π.
(a) Verifique que la serie es convergente.
(b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π obtiene el lector si usa solo el primer término de la serie? ¿Qué pasa si usa dos términos?

51. Dada cualquier serie Σa_n, se define una serie Σa_n^+ cuyos términos son todos los positivos de Σa_n y una serie Σa_n^- cuyos términos son todos los negativos de Σa_n. Para ser específicos, sea

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que si $a_n > 0$, entonces $a_n^+ = a_n$ y $a_n^- = 0$, mientras que si $a_n < 0$, entonces $a_n^- = a_n$ y $a_n^+ = 0$.
(a) Si Σa_n es absolutamente convergente, demuestre que tanto la serie Σa_n^+ como la serie Σa_n^- son convergentes.
(b) Si Σa_n es condicionalmente convergente, demuestre que tanto la serie Σa_n^+ como la serie Σa_n^- son divergentes.

52. Demuestre que si Σa_n es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, entonces hay un reordenamiento de Σa_n cuya suma es r. [*Sugerencia*: utilice la notación del ejercicio 51. Tome solo suficientes términos positivos a_n^+ para que su suma sea mayor que r. Luego sume solo suficientes términos negativos a_n^- para que la suma acumulativa sea menor que r. Continúe así y aplique el teorema 11.2.6.]

53. Suponga que la serie Σa_n es condicionalmente convergente.
(a) Demuestre que la serie $\Sigma n^2 a_n$ es divergente.
(b) La convergencia condicional de Σa_n no es suficiente para determinar si $\Sigma n a_n$ es convergente. Demuestre esto con un ejemplo de una serie condicionalmente convergente tal que $\Sigma n a_n$ converge y un ejemplo donde $\Sigma n a_n$ diverge.

11.7 Estrategia para probar series

Ya se tienen varias maneras de probar la convergencia o divergencia de una serie; ahora el problema es decidir cuál prueba aplicar en cada serie. En este aspecto, probar series es parecido a integrar funciones. No hay reglas rígidas y rápidas con respecto a qué prueba aplicar a una serie dada, pero puede seguir las recomendaciones siguientes, que pueden ser útiles.

No es prudente aplicar una lista de pruebas en un orden específico hasta que una funcione. Eso sería un desperdicio de tiempo y esfuerzo. En lugar de eso, al igual que en la integración, la estrategia principal es clasificar las series de acuerdo con su *forma*.

1. Si la serie es de la forma $\Sigma 1/n^p$, es una serie p, lo cual significa que es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.
2. Si la serie es de la forma Σar^{n-1} o Σar^n, es una serie geométrica que converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geqslant 1$. Se podrían requerir algunas operaciones algebraicas para hacer que la serie adquiera esta forma.
3. Si la serie tiene una forma similar a la de una serie p o a una serie geométrica, entonces se debe considerar una de las pruebas por comparación. En particular, si a_n es una función racional o una función algebraica de n (es decir, que contiene raíces de polinomiales), entonces la serie se debe comparar contra una serie p. Observe que la mayoría de las series de los ejercicios 11.4 tienen esta forma. (El valor de p se debe escoger como en la sección 11.4, y conservar solo las potencias más altas de n en el numerador y en el denominador.) Las pruebas por comparación se aplican solo en series con términos positivos, pero si Σa_n tiene algunos términos negativos, entonces se puede aplicar la prueba por comparación a $\Sigma |a_n|$ y probar si hay convergencia absoluta.

4. Si es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces se debe aplicar la prueba de la divergencia.
5. Si la serie es de la forma $\Sigma(-1)^{n-1}b_n$ o $\Sigma(-1)^n b_n$, entonces una posibilidad obvia es la prueba de la serie alternante.
6. Las series que contienen factoriales u otros productos (incluso una constante elevada a una potencia n-ésima) se prueban en forma aceptable usando la prueba de la razón. Siempre piense que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$ para todas las series p y, por tanto, todas las funciones racionales o algebraicas de n. Así la prueba de la raíz no se debe aplicar para dichas series.
7. Si a_n es de la forma $(b_n)^n$, entonces la prueba de la raíz podría ser útil.
8. Si $a_n = f(n)$, donde $\int_1^\infty f(x)\,dx$ se puede evaluar con facilidad, entonces la prueba de la integral es efectiva (suponiendo que la hipótesis de esta prueba se cumple).

En los ejemplos siguientes no se presenta todo el desarrollo, sino que simplemente se indica qué prueba se debe usar.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Ya que $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ cuando $n \to \infty$, se debe usar la prueba de la divergencia. ■

EJEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n es una función algebraica de n, compare la serie dada con la serie p. La serie de comparación para la prueba de comparación en el límite es Σb_n, donde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$ ■

EJEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Ya que la integral $\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$ se evalúa con facilidad, use la prueba de la integral. La prueba de la razón también funciona. ■

EJEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como la serie es alternante, aplique la prueba de la serie alternante. ■

EJEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como la serie contiene $k!$, se aplica la prueba de la razón. ■

EJEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

La serie está estrechamente relacionada con la serie geométrica $\Sigma 1/3^n$, por lo que se usa la prueba por comparación. ■

11.7 EJERCICIOS

1-38 Pruebe si las series son convergentes o divergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^3+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1+n)^{3n}}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{4^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{3^n}\right)$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1+2^n}$

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}3^{k+1}}{k^k}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}-1}{k(\sqrt{k}+1)}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n^2)$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\cos^2 n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

11.8 Series de potencias

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

1 $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y las c_n son constantes llamados **coeficientes** de la serie. Para cada x fija, la serie (1) es una serie de constantes que se puede probar para ver si es convergente o divergente. Una serie de potencias podría ser convergente para algunos valores de x y ser divergente para otros. La suma de la serie es una función

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cuyo dominio es el conjunto de todas las x para las cuales la serie converge. Observe que f es parecida a un polinomio. La única diferencia es que f tiene un infinito de términos.

Por ejemplo, si toma $c_n = 1$ para toda n, la serie de potencias se transforma en una serie geométrica

2 $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que es convergente cuando $-1 < x < 1$ y es divergente cuando $|x| \geqslant 1$. (Véase la ecuación 11.2.5.)

Series trigonométricas
Una serie de potencias es una en la cual cada uno de los términos es una función potencia. Una **serie trigonométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es una serie cuyos términos son funciones trigonométricas. Este tipo de serie se analiza en el sitio web

www.stewartcalculus.com

Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Fourier Series*.

De hecho, si se sustituye $x = \frac{1}{2}$ en la serie geométrica (2) se obtiene la serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

pero si se sustituye $x = 2$ en (2) se obtiene la serie divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

Más general, una serie de la forma

3 $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias** en $(x - a)$ o una **serie de potencias centrada en** a o una **serie de potencias en torno a** a. Observe que al escribir el término correspondiente a $n = 0$ en las ecuaciones 1 y 3 se ha adoptado la convención de que $(x - a)^0 = 1$ aun cuando $x = a$. También observe que cuando $x = a$ todos los términos son 0 para $n \geqslant 1$ y de este modo la serie de potencias (3) siempre es convergente cuando $x = a$.

EJEMPLO 1 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ es convergente?

SOLUCIÓN Se utiliza la prueba de la razón. Sea a_n, como se acostumbra, el n-ésimo término de la serie, entonces $a_n = n!\,x^n$. Si $x \neq 0$, se tiene

Observe que
$(n+1)! = (n+1)n(n-1)\cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= (n+1)n!$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

Por la prueba de la razón, la serie es divergente cuando $x \neq 0$. Por lo que la serie dada converge solo cuando $x = 0$. ■

EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ es convergente?

SOLUCIÓN Sea $a_n = (x-3)^n/n$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

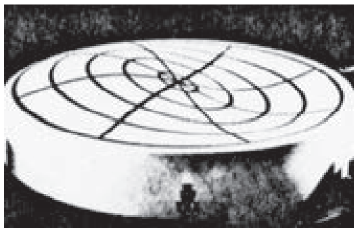
$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \quad \text{cuando } n \to \infty$$

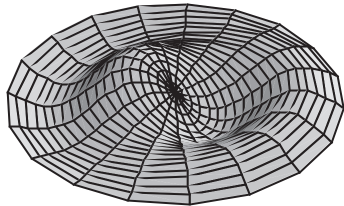
De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y, por tanto, convergente cuando $|x - 3| < 1$ y divergente cuando $|x - 3| > 1$. Ahora

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

por lo que la serie converge cuando $2 < x < 4$ y diverge cuando $x < 2$ o $x > 4$.

La prueba de la razón no proporciona información cuando $|x - 3| = 1$ por lo que se debe considerar $x = 2$ y $x = 4$ por separado. Si se sustituye $x = 4$ en la serie, resulta $\Sigma 1/n$, la serie armónica, que es divergente. Si $x = 2$, la serie es $\Sigma(-1)^n/n$, que es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por tanto, la serie de potencias dada converge para $2 \leqslant x < 4$. ■





Observe cómo la aproximación del modelo generado por computadora (el cual utiliza funciones de Bessel y de cosenos) coincide con la fotografía de una membrana vibratoria de hule.

Se verá que el uso principal de las series de potencias es proporcionar una manera de representar algunas de las funciones más importantes que surgen en matemáticas, física y química. En particular, la suma de la serie de potencias del ejemplo siguiente se llama **función de Bessel**, en honor al astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784-1846), y la función dada en el ejercicio 35 es otro ejemplo de la función de Bessel. En efecto, estas surgieron primero cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento de los planetas. Desde esa época, estas funciones se aplican en diversas situaciones físicas, entre ellas la distribución de temperaturas en una lámina circular y las vibraciones de la membrana de un tambor.

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función de Bessel de orden 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{para toda } x$$

De este modo, de acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge para todos los valores de x. En otras palabras, el dominio de la función de Bessel J_0 es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. ■

Recuerde que la suma de una serie es igual al límite de la sucesión de las sumas parciales. De esa manera, cuando se define la función de Bessel del ejemplo 3 como la suma de una serie significa que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{donde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

Las primeras sumas parciales son

$$s_0(x) = 1$$

$$s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304}$$

$$s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147{,}456}$$

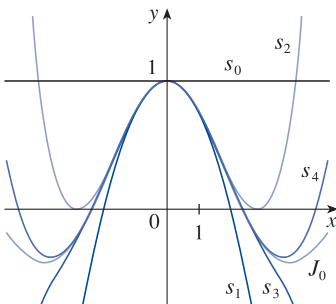


FIGURA 1
Sumas parciales de la función de Bessel J_0

En la figura 1 se muestran las gráficas de estas sumas parciales, las cuales son funciones polinomiales. Todas son aproximaciones de la función J_0, pero observe que la aproximación es mejor cuando se incluyen más términos. En la figura 2 se ilustra una gráfica más completa de la función de Bessel.

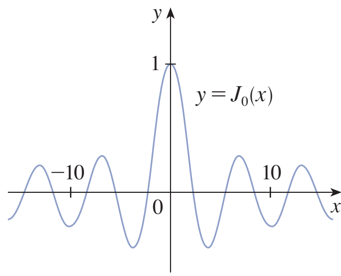


FIGURA 2

Para las series de potencias examinadas hasta el momento, el conjunto de valores de x para los cuales las series convergen ha resultado ser siempre un intervalo [un intervalo finito de la serie geométrica y la serie del ejemplo 2, el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ del ejemplo 3, y un intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ del ejemplo 1]. El teorema siguiente, que se demuestra en el apéndice F, establece que esto es válido en general.

4 Teorema Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ hay solo tres posibilidades:

(i) La serie converge solo cuando $x = a$.

(ii) La serie converge para toda x.

(iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$.

El número R en el caso (iii) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso (i) y $R = \infty$ en el caso (ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el intervalo que consiste en todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso (i) el intervalo consta de un solo punto a. En el caso (ii) el intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que en el caso (iii) la desigualdad $|x - a| < R$ se puede escribir de nuevo como $a - R < x < a + R$. Cuando x es un *punto final* del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede suceder: la serie podría ser convergente en uno o en ambos extremos, o podría ser divergente en ambos extremos. Por tanto, en el caso (iii) hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia:

$$(a - R, a + R) \qquad (a - R, a + R] \qquad [a - R, a + R) \qquad [a - R, a + R]$$

La situación se ilustra en la figura 3.

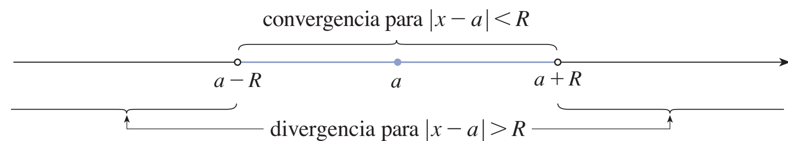


FIGURA 3

Aquí se resume el radio y el intervalo de convergencia para cada uno de los ejemplos considerados en esta sección.

	Series	Radio de convergencia	Intervalo de convergencia
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1,1)$
Ejemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Ejemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2,4)$
Ejemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

En general, la prueba de la razón (o a veces, la prueba de la raíz) se debe usar para determinar el radio de convergencia R. Las pruebas de la razón y la raíz siempre fracasan cuando x es un extremo del intervalo de convergencia, por lo que es necesario verificar los puntos finales por medio de alguna otra prueba.

EJEMPLO 4 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-3)^n x^n/\sqrt{n+1}$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}\,|x| \;\to\; 3|x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge si $3|x| < 1$ y es divergente si $3|x| > 1$. Por lo que es convergente si $|x| < \frac{1}{3}$ y divergente si $|x| > \frac{1}{3}$. Esto significa que el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$.

Se sabe que la serie converge en el intervalo $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, pero ahora es necesario probar si hay convergencia en los extremos de este intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

que es divergente. (Utilice la prueba de la integral o simplemente observe que es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$.) Si $x = \frac{1}{3}$ la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que converge de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por tanto, la serie de potencias dada converge cuando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$ por lo que el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. ■

EJEMPLO 5 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUCIÓN Si $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Al usar la prueba de la razón se ve que la serie es convergente si $|x+2|/3 < 1$ y que es divergente si $|x+2|/3 > 1$. Por lo que es convergente si $|x+2| < 3$ y divergente si $|x+2| > 3$. Así que, el radio de convergencia es $R = 3$.

La desigualdad $|x+2|<3$ se puede escribir como $-5<x<1$, así que se prueba la serie en los puntos finales -5 y 1. Cuando $x=-5$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

que es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia [$(-1)^n n$ no converge a 0]. Cuando $x=1$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(3)^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}n$$

que también es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. Por esto, la serie converge solo cuando $-5<x<1$, por lo que el intervalo de convergencia es $(-5, 1)$. ■

11.8 EJERCICIOS

1. ¿Qué es una serie de potencias?

2. (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencia? ¿Cómo se determina?
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se calcula?

3-28 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{n^3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^4 4^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n n^2 x^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{\sqrt{n}}x^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n5^n}x^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n^2+1)}x^n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)2^n}(x-1)^n$

17. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\ln n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{8^n}(x+6)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$

20. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b^n}(x-a)^n,\quad b>0$

22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^n}{\ln n}(x-a)^n,\quad b>0$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}n!(2x-1)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-4)^n}{n^3}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$

29. Si $\sum_{n=0}^{\infty}c_n 4^n$ es convergente, ¿se concluye que las series siguientes son convergentes?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-4)^n$

30. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ converge cuando $x=-4$ y diverge cuando $x=6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de la serie siguiente?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n 8^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n 9^n$

31. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$$

32. Sean p y q números reales con $p < q$. Encuentre una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea
(a) (p, q) (b) $(p, q]$ (c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

33. ¿Es posible encontrar una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea $[0, \infty)$? Explique.



34. Trace la gráfica de las primeras sumas parciales $s_n(x)$ de la serie, $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, junto con la función suma $f(x) = 1/(1 - x)$ sobre una misma pantalla. ¿Sobre qué intervalo parece que convergen estas sumas parciales a $f(x)$?

35. La función J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

Se llama la *función de Bessel de orden 1*.
(a) Determine su dominio.

(b) Trace la gráfica de las primeras sumas parciales en una pantalla común.
SAC (c) Si su SAC tiene incorporadas las funciones de Bessel, trace la gráfica de J_1 en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso (b) y observe cómo se aproximan las sumas parciales a J_1.

36. La función A se define mediante por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

que se llama *función de Airy* en honor al matemático y astrónomo inglés sir George Airy (1801-1892).
(a) Determine el dominio de la función de Airy.

(b) Grafique las primeras sumas parciales en una misma pantalla.
SAC (c) Si su SAC tiene incorporadas las funciones de Airy, trace la gráfica de A en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso (b) y observe cómo las sumas parciales se aproximan a A.

37. Una función f está definida mediante

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

es decir, sus coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n+1} = 2$ para toda $n \geqslant 0$. Determine el intervalo de convergencia de la serie y plantee una fórmula explícita para $f(x)$.

38. Si $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ donde $c_{n+4} = c_n$ para toda $n \geqslant 0$, determine el intervalo de convergencia de la serie y una fórmula para $f(x)$.

39. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, donde $c \neq 0$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma c_n x^n$ es $R = 1/c$.

40. Suponga que la serie de potencias $\Sigma c_n (x - a)^n$ satisface $c_n \neq 0$ para toda n. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$ existe, entonces es igual al radio de convergencia de la serie de potencias.

41. Suponga que el radio de convergencia de la serie $\Sigma c_n x^n$ es 2 y que el radio de convergencia de la serie $\Sigma d_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\Sigma (c_n + d_n) x^n$?

42. Suponga que el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma c_n x^n$ es R. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma c_n x^{2n}$?

11.9 Representación de funciones como series de potencias

En esta sección aprenderá a representar ciertos tipos de funciones como sumas de series de potencias mediante la manipulación de series geométricas, mediante derivación o integración de dichas series. Quizá se pregunte por qué quisiera expresar una función conocida como una suma de una cantidad infinita de términos. Más adelante se explica la utilidad de esta estrategia en la integración de funciones que no tienen antiderivadas elementales, en la solución de ecuaciones diferenciales y para aproximar funciones mediante polinomios. (Los científicos lo hacen para simplificar las expresiones con las que trabajan; los especialistas en computación lo hacen para representar funciones en calculadoras y computadoras.)

Se empezará con una ecuación que ya se estudió antes:

1
$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Ya se mostró esta ecuación en el ejemplo 11.2.7, donde se obtuvo al observar que es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Pero en este caso el punto de vista es distinto. Ahora considere la ecuación 1 como expresión de la función $f(x) = 1/(1 - x)$ como una suma de una serie de potencias.

Una ilustración geométrica de la ecuación 1 se muestra en la figura 1. Como la suma de una serie es el límite de la sucesión de las sumas parciales, se tiene

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

donde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

es la n-ésima suma parcial. Observe que cuando n aumenta, $s_n(x)$ será una mejor aproximación a $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

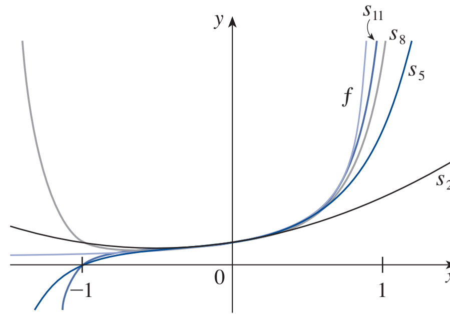


FIGURA 1 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y algunas sumas parciales

EJEMPLO 1 Exprese $1/(1 + x^2)$ como la suma de una serie de potencias y determine el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN Al reemplazar x por $-x^2$ en la ecuación 1, se tiene

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como esta es una serie geométrica, es convergente cuando $|-x^2| < 1$, es decir, $x^2 < 1$, o $|x| < 1$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. (Por supuesto, se podría haber determinado el radio de convergencia aplicando la prueba de la razón, pero esa cantidad de trabajo es innecesaria en este caso.) ■

EJEMPLO 2 Determine una representación en serie de potencias para $1/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Con objeto de poner esta función en la forma del lado izquierdo de la ecuación 1, primero se factoriza un 2 del denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Esta serie converge cuando $|-x/2| < 1$, es decir, $|x| < 2$. Por lo que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. ■

EJEMPLO 3 Obtenga una representación como serie de potencias de $x^3/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Ya que esta función es justamente x^3 veces la función del ejemplo 2, todo lo que debe hacer es multiplicar esa serie por x^3:

Es válido pasar x^3 al otro lado del signo de la suma porque no depende de n. [Aplique el teorema 11.2.8(i) con $c = x^3$.]

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Otra forma de escribir esta serie es como sigue:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Como en el ejemplo 2, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. ■

Derivación e integración de series de potencias

La suma de una serie de potencias es una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Para derivar e integrar estas funciones, el teorema siguiente (el cual no será demostrado) establece que es posible derivar o integrar cada uno de los términos de la serie, justo como se haría para un polinomio. Esto se denomina **derivación e integración término a término**.

2 Teorema Si la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ tiene un radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y, por tanto, continua) sobre el intervalo $(a-R, a+R)$ y

(i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

(ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias en las ecuaciones (i) y (ii) son R.

En el inciso (ii), $\int c_0 dx = c_0 x + C_1$ se escribe como $c_0(x-a) + C$, donde $C = C_1 + ac_0$, por lo que todos los términos de la serie tienen la misma forma.

NOTA 1 Las ecuaciones (i) y (ii) del teorema 2 se pueden volver a escribir en la forma

(iii) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_n(x-a)^n]$$

(iv) $$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\,dx$$

Se sabe que para sumas finitas la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la integral de una suma es la suma de las integrales. Las ecuaciones (iii) y (iv) aseguran que lo mismo se cumple para sumas infinitas, siempre que se esté tratando con *series de potencias*. (Para otros tipos de series de funciones la situación no es tan simple; véase el ejercicio 38.)

NOTA 2 Aunque el teorema 2 establece que el radio de convergencia es el mismo cuando una serie de potencias es derivada o integrada, esto no quiere decir que el *intervalo* de convergencia siga siendo el mismo. Podría suceder que la serie original converja en el punto final, y que la serie derivada sea divergente ahí. (Véase el ejercicio 39.)

NOTA 3 La idea de derivar una serie de potencias término a término es la base de un método eficaz para resolver ecuaciones diferenciales. Se estudiará este método en el capítulo 17.

EJEMPLO 4 En el ejemplo 11.8.3 se vio que la función de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

se define para toda x. De esta manera, de acuerdo con el teorema 2, J_0 es derivable para toda x y su derivada se encuentra derivando término a término como sigue:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$ ■

EJEMPLO 5 Exprese $1/(1 - x)^2$ como una serie de potencias derivando la ecuación 1. ¿Cuál es el radio de convergencia?

SOLUCIÓN Al derivar cada miembro de la ecuación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se obtiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Si se quisiera se podría reemplazar n por $n + 1$ y escribir la respuesta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acuerdo con el teorema 2, el radio de convergencia de la serie derivada es el mismo que el radio de convergencia de la serie original, $R = 1$. ■

EJEMPLO 6 Determine una representación como serie de potencias para $\ln(1 + x)$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Observe que la derivada de esta función es $1/(1 + x)$. De la ecuación 1 se tiene

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad |x| < 1$$

Integrando ambos lados de esta expresión, se obtiene

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Para determinar el valor de C se hace $x = 0$ en esta ecuación y se obtiene $\ln(1 + 0) = C$.

Por tanto, $C = 0$ y

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

El radio de convergencia es el mismo que el de la serie original: $R = 1$. ■

EJEMPLO 7 Encuentre una representación como serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1}x$.

SOLUCIÓN Observe que $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ y encuentre la serie requerida integrando la serie de potencias para $1/(1 + x^2)$ determinada en el ejemplo 1.

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

La serie de potencias para $\tan^{-1}x$ obtenida en el ejemplo 7 se llama *serie de Gregory* en honor al matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien pronosticó algunos de los descubrimientos de Newton. Ya se demostró que la serie de Gregory es válida cuando $-1 < x < 1$, pero resulta que (aunque no es fácil de demostrar) también es válida cuando $x = \pm 1$. Observe que cuando $x = 1$ la serie se convierte en

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Este hermoso resultado se conoce como la fórmula de Leibniz para π.

Para determinar C se hace $x = 0$ y se obtiene $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Por tanto,

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$$

Ya que el radio de convergencia de la serie para $1/(1 + x^2)$ es 1, el radio de convergencia de esta serie para $\tan^{-1}x$ es también 1. ■

EJEMPLO 8

(a) Evalúe $\int [1/(1 + x^7)]\,dx$ como una serie de potencias.

(b) Utilice el inciso *a*) para una aproximación de $\int_0^{0.5} [1/(1 + x^7)]$ con una aproximación de 10^{-7} del valor real.

SOLUCIÓN

(a) El primer paso es expresar el integrando, $1/(1 + x^7)$ como la suma de una serie de potencias. Como en el ejemplo 1, inicie con la ecuación 1 y reemplace x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1 + x^7} = \frac{1}{1 - (-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Este ejemplo muestra una manera en que las representaciones como series de potencias pueden ser útiles. Integrar $1/(1 + x^7)$ a mano es increíblemente difícil. Diferentes sistemas algebraicos computacionales dan respuestas de distintas formas, pero son extremadamente complicadas. (Si tiene un SAC, inténtelo usted mismo.) La respuesta de la serie infinita que se obtiene en el ejemplo 8(a) es realmente mucho más fácil de manejar que la respuesta finita que proporciona un SAC.

Ahora se integra término a término:

$$\int \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n + 1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Esta serie converge para $|-x^7| < 1$, es decir, para $|x| < 1$.

(b) Si se aplica el teorema fundamental del cálculo no importa qué antiderivada se use, por lo que se utilizará la antiderivada del inciso (a) con $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n + 1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Esta serie infinita es el valor exacto de la integral definida, pero como es una serie alternante, se puede obtener una aproximación de la suma aplicando el teorema de la estimación de la serie alternante. Si se deja de sumar después del término $n = 3$, el error es menor que el término con $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

Por lo que se tiene

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$ ■

11.9 EJERCICIOS

1. Si e1 radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es 10, ¿cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$? ¿Por qué?

2. Suponga que sabe que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es convergente para $|x| < 2$. ¿Qué puede decir de la serie siguiente? ¿Por qué?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n + 1} x^{n+1}$$

3-10 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

3. $f(x) = \dfrac{1}{x + 10}$

4. $f(x) = \dfrac{5}{1 - 4x^2}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3 - x}$

6. $f(x) = \dfrac{4}{2x + 3}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 16}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 1}$

9. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

10. $f(x) = \dfrac{x + a}{x^2 + a^2}, \quad a > 0$

11-12 Exprese la función como la suma de una serie de potencias usando primero fracciones parciales. Determine el intervalo de convergencia.

11. $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 3}$

12. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

13. (a) Use la derivación para determinar una representación como serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$$

¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Utilice el inciso *a*) para determinar una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x)^3}$$

(c) Utilice el inciso *b*) para determinar una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1 + x)^3}$$

14. (a) Utilice la ecuación 1 para determinar la representación en series de potencias para $f(x) = \ln(1 - x)$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Utilice el inciso (a) para determinar una serie de potencias para $f(x) = x \ln(1 - x)$.

(c) Haciendo $x = \frac{1}{2}$ en su resultado del inciso *a*), exprese ln 2 como la suma de una serie infinita.

15-20 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el radio de convergencia.

15. $f(x) = \ln(5 - x)$

16. $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x^3)$

17. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + 4x)^2}$

18. $f(x) = \left(\dfrac{x}{2 - x}\right)^3$

19. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(1 - x)^3}$

21-24 Encuentre una representación como serie de potencias para f, y trace la gráfica de f y varias sumas parciales $s_n(x)$ en la misma pantalla. ¿Qué sucede cuando n aumenta?

21. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

22. $f(x) = \ln(1 + x^4)$

23. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

24. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 16}$

25-28 Evalúe la integral indefinida como una serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia?

25. $\displaystyle\int \frac{t}{1 - t^8}\,dt$

26. $\displaystyle\int \frac{t}{1 + t^3}\,dt$

27. $\displaystyle\int x^2 \ln(1 + x)\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x}\,dx$

29-32 Use una serie de potencias para aproximar la integral definida con una aproximación de seis cifras decimales.

29. $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{x}{1 + x^3}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arctan(x/2)\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^{0.2} x\ln(1 + x^2)\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^{0.4} \ln(1 + x^4)\,dx$

33. Con el resultado del ejemplo 7, calcule arctan 0.2 con una aproximación de cinco cifras decimales.

34. Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

35. (a) Demuestre que J_0 (la función de Bessel de orden 0 dada en el ejemplo 4) cumple con la ecuación diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Evalúe $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ con una aproximación de tres cifras decimales.

36. La función de Bessel de orden 1 se define con

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(n + 1)!\,2^{2n+1}}$$

(a) Demuestre que J_1 satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

37. (a) Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Demuestre que $f(x) = e^x$.

38. Sea $f_n(x) = (\text{sen}\, nx)/n^2$. Demuestre que la serie $\Sigma f_n(x)$ es convergente para todos los valores de x, pero la serie de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ es divergente cuando $x = 2n\pi$, n es un entero. ¿Para qué valores de x la serie $\Sigma f_n''(x)$ es convergente?

39. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Determine los intervalos de convergencia para f, f' y f''.

40. (a) Empezando con la serie geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Calcule la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Determine la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)x^n, \quad |x| < 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

41. Utilice la serie de potencias para $\tan^{-1}x$ para demostrar la expresión siguiente para π como la suma de una serie infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)3^n}$$

42. (a) Completando cuadrados demuestre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Al factorizar $x^3 + 1$ como una suma de cubos, escriba de nuevo la integral del inciso (a). Luego exprese $1/(x^3 + 1)$ como la suma de una serie de potencias y úsela para demostrar la fórmula siguiente para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n + 1} + \frac{1}{3n + 2}\right)$$

11.10 Series de Taylor y de Maclaurin

En la sección anterior se representaron como series de potencias una cierta clase restringida de funciones. En esta sección se tratan problemas más generales: ¿qué funciones se pueden representar como series de potencias? ¿Cómo es posible encontrar esa representación?

Se empieza por suponer que f es cualquier función que se puede representar mediante una serie de potencias

1 $$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Se tratará de determinar qué coeficientes c_n tienen que estar en función de f. Para empezar, observe que si se hace $x = a$ en la ecuación 1, entonces todos los términos después del primero son 0 y se obtiene

$$f(a) = c_0$$

De acuerdo con el teorema 11.9.2, se puede derivar la serie de la ecuación 1 término a término:

2 $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

y al sustituir $x = a$ en la ecuación 2 se tiene

$$f'(a) = c_1$$

En seguida se derivan ambos miembros de la ecuación 2 para obtener

3 $$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Una vez más se hace $x = a$ en la ecuación 3. El resultado es

$$f''(a) = 2c_2$$

Se aplica el procedimiento una vez más. La derivación de la serie de la ecuación 3 da

4 $$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

y la sustitución de $x = a$ en la ecuación 4 da

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_2 = 3!c_3$$

Ahora ya se puede ver el patrón. Si se continúa derivando y sustituyendo $x = a$, se obtiene

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Al resolver esta ecuación para el n-ésimo coeficiente c_n, se tiene

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta fórmula sigue siendo válida incluso para $n = 0$ si se adopta la convención de que $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$. Con lo que se ha demostrado el teorema siguiente:

5 Teorema Si f se puede representar como una serie de potencias, (expansión) en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

entonces sus coeficientes están dados por la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Si se sustituye esta fórmula para c_n de nuevo en la serie, se observa que, *si* f tiene un desarrollo en serie de potencias en a, entonces debe ser de la forma siguiente.

6
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Taylor y Maclaurin

La serie de Taylor lleva este nombre en honor al matemático ingles Brook Taylor (1685-1731) y la serie de Maclaurin se llama así para recordar al matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) a pesar del hecho de que la serie de Maclaurin es realmente un caso especial de la serie de Taylor. Pero la idea de representar funciones particulares como sumas de series de potencias se remonta a Newton, y el matemático escocés James Gregory conoció la serie general de Taylor en 1668 y el matemático suizo John Bernoulli por 1690. Al parecer, Taylor desconocía el trabajo de Gregory y el de Bernoulli cuando publicó sus descubrimientos relacionados con las series en 1715 en su libro *Methodus incrementorum directa et inversa*. Las series de Maclaurin se llaman así porque Colin Maclaurin las popularizó en su libro de texto *Treatise of Fluxions* que se publicó en 1742.

La serie de la ecuación 6 se denomina **serie de Taylor de la función f en a** (o **en torno a a** o **centrada en a**). Para el caso especial $a = 0$ la serie de Taylor se transforma en

7
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Este caso surge con bastante frecuencia, y se le da el nombre especial de **serie de Maclaurin**.

NOTA Ya se demostró que *si* f se puede representar como una serie de potencias con respecto a a, entonces f es igual a la suma de sus series de Taylor. Pero hay funciones que no son iguales a la suma de sus series de Taylor. Un ejemplo de tales funciones se presenta en el ejercicio 84.

EJEMPLO 1 Determine la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, por lo que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para toda n. Por tanto, la serie de Taylor para f en 0 (es decir, la serie de Maclaurin) es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para determinar el radio de convergencia se hace $a_n = x^n/n!$ Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

así que, por la prueba de la razón, la serie converge para toda x y el radio de convergencia es $R = \infty$. ■

La conclusión que se obtiene del teorema 5 y el ejemplo 1 es que *si* e^x tiene un desarrollo en serie en potencias en 0, entonces

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Entonces, ¿cómo se puede determinar si e^x *tiene* una representación como serie de potencias?

Se debe investigar la cuestión más general: ¿en qué circunstancias una función es igual a la suma de su serie de Taylor? En otras palabras, si f tiene derivadas de todos los órdenes, cuando es cierto que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Como sucede con cualquier serie convergente, esto quiere decir que $f(x)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales. En el caso de la serie de Taylor, las sumas parciales son

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

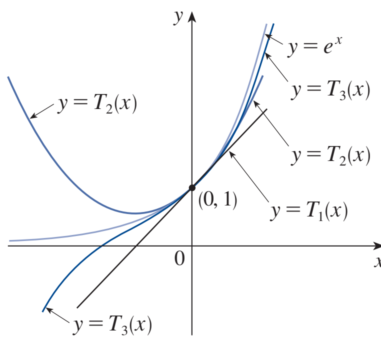


FIGURA 1
Cuando n crece, $T_n(x)$ parece aproximarse a e^x en la figura 1. Esto sugiere que e^x es igual a la suma de su serie de Taylor.

Observe que T_n es un polinomio de grado n llamado **polinomio de Taylor de grado *n*-ésimo de *f* en *a***. Por ejemplo, en el caso de la función exponencial $f(x) = e^x$, el resultado del ejemplo 1 muestra que los polinomios de Taylor en 0 (o polinomios de Maclaurin), con $n = 1$, 2 y 3 son

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Las gráficas de la función exponencial y estos tres polinomios de Taylor se ilustran en la figura 1.

En general, $f(x)$ es la suma de su serie de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Si se hace

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de tal manera que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

entonces $R_n(x)$ se llama **residuo** de la serie de Taylor. Si se puede de alguna manera demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entonces se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Por tanto, se ha demostrado el teorema siguiente.

8 Teorema Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ donde T_n es el polinomio de Taylor de grado n-ésimo de f en a y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$ entonces f es igual a la suma de su serie de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

Al tratar de demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para una función específica f, se usa por lo regular el teorema siguiente.

9 **Desigualdad de Taylor** Si $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor cumple con la desigualdad

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \text{para } |x-a| \leq d$$

Para ver por qué es cierto para $n = 1$, suponga que $|f''(x)| \leq M$. En particular, se tiene $f''(x) \leq M$, tal que para $a \leq x \leq a + d$ se tiene

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leq \int_a^x M\,dt$$

Una antiderivada de f'' es f', por lo que de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo se tiene

$$f'(x) - f'(a) \leq M(x-a) \qquad \text{o} \qquad f'(x) \leq f'(a) + M(x-a)$$

Por lo que

$$\int_a^x f'(t)\,dt \leq \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leq f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leq \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Pero $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Por lo que

$$R_1(x) \leq \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Un razonamiento similar, aplicando $f''(x) \geq -M$, demuestra que

$$R_1(x) \geq -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

De manera que

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{2}|x-a|^2$$

Aunque se ha supuesto que $x > a$, cálculos similares muestran que esta desigualdad es válida también para $x < a$.

Esto demuestra la desigualdad de Taylor para el caso donde $n = 1$. El resultado para cualquier n se demuestra de manera parecida integrando $n + 1$ veces. (Véase el ejercicio 83 para el caso $n = 2$.)

NOTA En la sección 11.11 se explora el uso de la desigualdad de Taylor en la aproximación de funciones. El uso inmediato es junto con el teorema 8.

Con frecuencia, al aplicar los teoremas 8 y 9 es útil recurrir al hecho siguiente.

10
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Fórmulas para el residuo de Taylor
Otras opciones aparte de la desigualdad de Taylor son las fórmulas siguientes para el residuo. Si $f^{(n+1)}$ es continua sobre un intervalo I y $x \in I$, entonces

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Esta expresión recibe el nombre de *forma integral del término del residuo*. Otra fórmula, que se llama *forma de Lagrange del término del residuo*, establece que hay un número z entre x y a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta versión es una generalización del teorema del valor medio (que es el caso $n = 0$).
Las demostraciones de estas fórmulas, además del análisis de cómo usarlas para resolver los ejemplos de las secciones 11.10 y 11.11, se encuentran en la página web

www.stewartcalculus.com

Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Formulas for the Remainder Term in Taylor series.*

Esto es verdadero porque, de acuerdo con el ejemplo 1, la serie $\Sigma x^n/n!$ es convergente para toda x por lo que su n-ésimo término se aproxima a 0.

EJEMPLO 2 Demuestre que e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para toda n. Si d es cualquier número positivo y $|x| \leqslant d$, entonces $|f^{(n+1)}(x)| = e^x < e^d$. Por lo que la desigualdad de Taylor, con $a = 0$ y $M = e^d$, dice que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Observe que la misma constante $M = e^d$ funciona para todo valor de n. Pero, de acuerdo con la ecuación 10, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Se deduce entonces del teorema de la compresión que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x. De acuerdo con el teorema 8, e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin, es decir,

11
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para toda } x$$
■

En particular, si se hace $x = 1$ en la ecuación 11, se obtiene la expresión siguiente para el número e como una suma de una serie infinita:

12
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

En 1748, Leonhard Euler aplicó la ecuación 12 para determinar el valor de e con 23 decimales. En 2010 Shigeru Kondo, usando de nuevo la serie (12), calculó e con más de un billón de decimales. Las técnicas especiales que utilizaron para acelerar el cálculo se explican en la página web

numbers.computation.free.fr

EJEMPLO 3 Determine la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

SOLUCIÓN Se tiene $f^{(n)}(2) = e^2$ y, así, al hacer $a = 2$ en la definición de la serie de Taylor 6, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

También se puede verificar, como en el ejemplo 1, que el radio de convergencia es $R = \infty$. Como en el ejemplo 2 se puede comprobar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, por lo que

13
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para toda } x$$
■

Hay dos desarrollos en series de potencias para e^x, la serie de Maclaurin de la ecuación 11 y la serie de Taylor de la ecuación 13. El primero es mejor si está interesado en valores de x cercanos a 0 y el segundo funciona muy bien si x es cercano a 2.

EJEMPLO 4 Determine la serie de Maclaurin para sen x y demuestre que representa a sen x para toda x.

SOLUCIÓN Se organizan los cálculos en dos columnas como sigue:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

En la figura 2 se ilustra la gráfica de sen x junto con su polinomio de Taylor (o de Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que cuando n aumenta, $T_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para sen x.

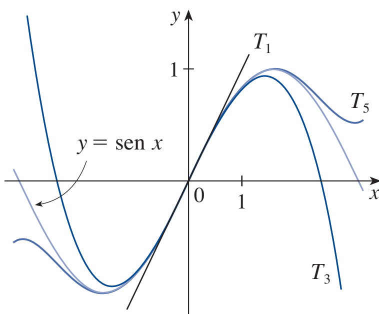


FIGURA 2

Ya que la derivada se repite en un ciclo de cuatro, se puede escribir la serie de Maclaurin como sigue:

$$
\begin{aligned}
f(0) &+ \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Ya que $f^{(n+1)}(x)$ es $\pm$ sen x o $\pm$ cos x, se sabe que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ para toda x. De este modo se puede tomar $M = 1$ en la desigualdad de Taylor:

14 $$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De acuerdo con la ecuación 10, el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $n \to \infty$, por lo que $|R_n(x)| \to 0$ de acuerdo con el teorema de compresión. Se tiene entonces que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo que sen x es igual a la suma de su serie de Maclaurin de acuerdo con el teorema 8. ■

Se establece el resultado del ejemplo 4 para referencia futura.

15 $$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para toda } x
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 5 Determine la serie de Maclaurin para cos x.

SOLUCIÓN Se podría proceder en forma directa como en el ejemplo 4, pero es más fácil derivar la serie de Maclaurin para sen x dada por la ecuación 15:

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}
$$

La serie de Maclaurin para e^x, sen x y cos x encontrada en los ejemplos 2, 4 y 5 fueron descubiertos por Newton, usando diferentes métodos. Estas ecuaciones son importantes porque dicen que se conoce todo acerca de cada una de estas funciones si se conocen todas sus derivadas en un único número 0.

Ya que la serie de Maclaurin para sen x converge para toda x, el teorema 2 de la sección 11.9 señala que la serie derivada para cos x converge también para toda x. Por lo que

16
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para toda } x$$

■

EJEMPLO 6 Determine la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x \cos x$.

SOLUCIÓN En lugar de calcular las derivadas y sustituir en la ecuación 7, es más fácil multiplicar la serie para cos x, ecuación 16, por x:

$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$ ■

EJEMPLO 7 Represente $f(x) = \operatorname{sen} x$ como la suma de su serie de Taylor centrada en $\pi/3$.

SOLUCIÓN Primero se acomodan los valores en columnas, se tiene

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

y este patrón se repite indefinidamente. Por tanto, la serie de Taylor en $\pi/3$ es

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

Se han obtenido dos diferentes representaciones en serie para sen x, la serie de Maclaurin en el ejemplo 4 y la serie de Taylor en el ejemplo 7. Es mejor utilizar la serie de Maclaurin para los valores de x cercanos a 0 y la serie de Taylor para x cercanos a $\pi/3$. Observe que el tercer polinomio de Taylor T_3 en la figura 3 es una buena aproximación al sen x cerca de $\pi/3$, mas no así cerca de 0. Compárelo con el tercer polinomio de Maclaurin T_3 en la figura 2, donde lo opuesto es verdadero.

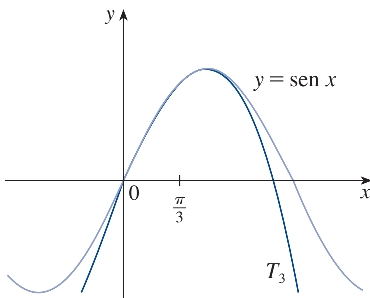


FIGURA 3

La demostración de que esta serie representa sen x para toda x es muy similar a la del ejemplo 4. [Solo reemplace x por $x - \pi/3$ en (14).] Se puede escribir la serie con la notación sigma si separa los términos que contienen $\sqrt{3}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$ ■

Las series de potencias obtenidas mediante métodos indirectos en los ejemplos 5 y 6 y en la sección 11.9 son realmente la serie de Taylor o de Maclaurin de las funciones dadas porque el teorema 5 establece que no importa cómo se obtenga una representación en una serie de potencias $f(x) = \Sigma\, c_n(x - a)^n$, siempre es cierto que $c_n = f^{(n)}(a)n!$ En otras palabras, la determinación de los coeficientes es única.

EJEMPLO 8 Encuentre la serie de Maclaurin para, $f(x) = (1 + x)^k$, donde k es cualquier número real.

SOLUCIÓN Al ordenar el trabajo en columnas, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^k & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= k(1 + x)^{k-1} & f'(0) &= k \\ f''(x) &= k(k - 1)(1 + x)^{k-2} & f''(0) &= k(k - 1) \\ f'''(x) &= k(k - 1)(k - 2)(1 + x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k - 1)(k - 2) \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1)(1 + x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1) \end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)}{n!} x^n$$

Esta serie se denomina **serie binomial**. Observe que si k es un entero no negativo, entonces los términos son eventualmente 0 y por tanto la serie es finita. Para otros valores de k, ninguno de sus términos es 0, por lo que se puede intentar la prueba de la razón. Si el n-ésimo término es a_n, entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)(k - n)x^{n+1}}{(n + 1)!} \cdot \frac{n!}{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)x^n} \right| \\ &= \frac{|k - n|}{n + 1} |x| = \frac{\left| 1 - \dfrac{k}{n} \right|}{1 + \dfrac{1}{n}} |x| \to |x| \qquad \text{cuando } n \to \infty \end{aligned}$$

Entonces, por la prueba de la razón, la serie binomial converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$. ■

La notación tradicional para los coeficientes de la serie binomial es

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k - 1)(k - 2) \cdots (k - n + 1)}{n!}$$

y estos números se llaman **coeficientes binomiales**.

El teorema siguiente establece que $(1 + x)^k$ es igual a la suma de su serie de Maclaurin. Es posible demostrar esto al probar que el residuo $R_n(x)$ se aproxima a 0, pero esto resulta ser muy difícil. La demostración delineada en el ejercicio 85 es mucho más fácil.

17 Serie binomial Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Aun cuando la serie binomial siempre converge cuando $|x| < 1$, la pregunta de si converge o no en los extremos, ± 1, depende del valor de k. Resulta que la serie converge en 1 si $-1 < k \leqslant 0$ y en ambos puntos finales si $k \geqslant 0$. Observe que si k es un entero positivo y $n > k$, entonces la expresión para $\binom{k}{n}$ contiene un factor $(k - k)$, por lo que $\binom{k}{n} = 0$ para $n >$ k. Esto significa que la serie termina y se reduce al teorema del binomio ordinario cuando k es un entero positivo. (Véase la página de referencia 1.)

EJEMPLO 9 Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si se vuelve a escribir $f(x)$ de forma que se pueda usar la serie binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Y al usar la serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$ donde x fue reemplazada por $-x/4$, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3 \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1\cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Se sabe por (17) que esta serie converge cuando $|-x/4| < 1$, es decir, $|x| < 4$, por lo que el radio de convergencia es $R = 4$. ■

En la tabla siguiente se resumen, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin que se han deducido en esta sección y en la anterior.

Tabla 1
Series importantes de Maclaurin y sus radios de convergencia

$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = \infty$
$\tan^{-1} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(1 + x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$	$R = 1$
$(1 + x)^k = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \dfrac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$R = 1$

EJEMPLO 10 Encuentre la suma de la serie $\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{2 \cdot 2^2} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} - \dfrac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots$.

SOLUCIÓN Con la notación sigma se puede escribir la serie dada como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

Entonces, en la tabla 1 se ve que esta serie relaciona la entrada para ln $(1 + x)$ con $x = \frac{1}{2}$. Por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) = \ln \tfrac{3}{2}$$ ■

TEC Module 11.10/11.11 permite ver cómo polinomios sucesivos de Taylor se aproximan a la función original.

Una razón de que las series de Taylor sean importantes, es que permiten integrar funciones que no se podían manejar antes. En efecto, en la introducción de este capítulo se mencionó que Newton integraba a menudo funciones expresándolas primero como series de potencias, y que después integraba la serie término a término. No es posible integrar la función $f(x) = e^{-x^2}$ con las técnicas conocidas hasta este momento, porque su antiderivada no es una función elemental (véase la sección 7.5). En el ejemplo siguiente se aplica la idea de Newton para integrar esta función.

EJEMPLO 11
(a) Evalúe $\int e^{-x^2}\,dx$ como una serie infinita.
(b) Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ de tal manera que no difiera 0.001 del valor real.

SOLUCIÓN
(a) Primero se encuentra la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{-x^2}$. Aunque es posible usar el método directo, determínela simplemente mediante el reemplazo de x con $-x^2$ en la serie para e^x dada en la tabla 1.

Por lo que, para todos los valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Ahora se integra término a término:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Esta serie es convergente para toda x porque la serie original para e^{-x^2} converge para toda x.

(b) El teorema fundamental del cálculo da

Se puede tomar $C = 0$ en la antiderivada del inciso *a*).

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0.7475$$

El teorema de estimación de la serie alternante demuestra que el error implicado en esta aproximación es menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$ ■

Otra aplicación de la serie de Taylor se ilustra en el ejemplo siguiente. El límite podría ser calculado con la regla de L'Hôpital, pero en lugar de hacerlo así se recurre a las series.

EJEMPLO 12 Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Al utilizar la serie de Maclaurin para e^x, se tiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

Algunos sistemas algebraicos computacionales calculan los límites de esta manera.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

porque las series de potencias son funciones continuas. ■

Multiplicación y división de series de potencias

Si las series de potencias se suman o restan, se comportan como polinomios (el teorema 11.2.8 lo demuestra). De hecho, como lo ilustra el ejemplo siguiente, las series también se pueden multiplicar y dividir como los polinomios. Se determinan solo los primeros términos porque los cálculos para los siguientes se vuelven tediosos y los términos iniciales son los más importantes.

EJEMPLO 13 Calcule los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para (a) e^x sen x y (b) tan x.

SOLUCIÓN

(a) Usando la serie de Maclaurin para e^x y sen x en la tabla 1, se tiene

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Al multiplicar esta expresión y agrupar por términos semejantes, al igual que con los polinomios:

$$\begin{array}{rl} & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \times & x \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \hline & x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\ + & \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\ \hline & x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \end{array}$$

Por lo que

$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Al utilizar la serie de Maclaurin en la tabla 1, se tiene

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Se usa un procedimiento como el de la división larga:

$$\begin{array}{r|l} & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \hline 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\ & -\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots\right) \\ \hline & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\ & -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots\right) \\ \hline & \frac{2}{15}x^5 + \cdots \end{array}$$

Por tanto,

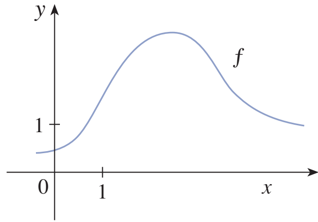
$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Aunque no se ha intentado justificar las manipulaciones formales que se utilizaron en el ejemplo 13, son legítimas. Hay un teorema que establece que si tanto $f(x) = \Sigma\, c_n x^n$ como $g(x) = \Sigma b_n x^n$ convergen para $|x| < R$ y las series se multiplican como si fueran polinomios, entonces la serie resultante también converge para $|x| < R$ y representa $f(x)g(x)$. En cuanto a la división es necesario que $b_0 \neq 0$; la serie resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeña.

11.10 EJERCICIOS

1. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para toda x, escriba una fórmula para b_8.

2. Se muestra la gráfica de f.



(a) Explique por qué la serie

$$1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 1.

(b) Explique por qué la serie

$$2.8 - 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 2.

3. Si para $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

4. Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

5-10 Utilice la definición de una serie de Taylor para encontrar los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie para $f(x)$ centrada en el valor de a dado.

5. $f(x) = xe^x, \quad a = 0$

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 2$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 8$

8. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

9. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6$

10. $f(x) = \cos^2 x, \quad a = 0$

11-18 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

11. $f(x) = (1-x)^{-2}$

12. $f(x) = \ln(1+x)$

13. $f(x) = \cos x$

14. $f(x) = \cos 3x$

15. $f(x) = 2^x$

16. $f(x) = xe^x$

17. $f(x) = \operatorname{senh} x$

18. $f(x) = \cosh x$

19-26 Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] También encuentre el radio de convergencia asociado.

19. $f(x) = x^5 + 2x^3 + x, \quad a = 2$

20. $f(x) = x^6 - x^4 + 2, \quad a = -2$

21. $f(x) = \ln x, \quad a = 2$

22. $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

23. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$

24. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

25. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi$

26. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$

27. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 13 representa $\cos x$ para toda x.

28. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 25 representa $\operatorname{sen} x$ para toda x.

29. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 17 representa $\operatorname{senh} x$ para toda x.

30. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 18 representa $\cosh x$ para toda x.

31-34 Use la serie binomial para desarrollar la función como una serie de potencias. Establezca el radio de convergencia.

31. $\sqrt[4]{1-x}$

32. $\sqrt[3]{8+x}$

33. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$

34. $(1-x)^{3/4}$

35-44 Utilice la serie de Maclaurin que aparece en la tabla 1 para obtener la serie de Maclaurin para la función dada.

35. $f(x) = \arctan(x^2)$

36. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/4)$

37. $f(x) = x \cos 2x$

38. $f(x) = e^{3x} - e^{2x}$

39. $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

40. $f(x) = \cos(\pi x/2)$

41. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

42. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

43. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ $\left[\textit{Sugerencia:} \text{ use } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).\right]$

44. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

45-48 Encuentre la serie de Maclaurin para cada función f (por cualquier medio) y su radio de convergencia. Grafique f y los primeros polinomios de Taylor en la misma pantalla. ¿Qué observa sobre la relación de estos polinomios y f?

45. $f(x) = \cos(x^2)$

46. $f(x) = \ln(1+x^2)$

47. $f(x) = xe^{-x}$

48. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

49. Utilice la serie de Maclaurin para $\cos x$ para calcular $\cos 5°$ correcta a cinco decimales.

50. Utilice la serie de Maclaurin para e^x para calcular $1/\sqrt[10]{e}$ correcto a cinco decimales.

51. (a) Utilice la serie binomial para desarrollar $1/\sqrt{1-x^2}$.
(b) Use el inciso (a) encontrar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1}x$.

52. (a) Desarrolle $1/\sqrt[4]{1+x}$ como una serie de potencias.
(b) Utilice el inciso (a) para estimar $1/\sqrt[4]{1.1}$ correcta con tres decimales.

53-56 Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

53. $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$ **54.** $\int x^2 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

55. $\int x\cos(x^3)\,dx$ **56.** $\int \dfrac{e^x-1}{x}\,dx$

57-60 Utilice series para aproximar la integral definida con la precisión indicada.

57. $\int_0^{1/2} x^3 \arctan x\,dx$ (cuatro decimales)

58. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^4)\,dx$ (cuatro decimales)

59. $\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4}\,dx$ $(|\text{error}| < 5\times 10^{-6})$

60. $\int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2}\,dx$ $(|\text{error}| < 0.001)$

61-65 Utilice series para evaluar el límite.

61. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ **62.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1+x-e^x}$

63. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

64. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$

65. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 3x + 3\tan^{-1}x}{x^5}$

66. Utilice la serie del ejemplo 13(b) para evaluar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

Este límite se calculó en el ejemplo 4.4.4 utilizando la regla de L'Hôpital tres veces. ¿Cuál método prefiere?

67-72 Utilice la multiplicación o la división de series de potencias para determinar los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin para cada función.

67. $y = e^{-x^2}\cos x$ **68.** $y = \sec x$

69. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ **70.** $y = e^x \ln(1+x)$

71. $y = (\arctan x)^2$ **72.** $y = e^x \operatorname{sen}^2 x$

73-80 Determine la suma de la serie.

73. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{4n}}{n!}$ **74.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3^n}{n\,5^n}$ **76.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{5^n n!}$

77. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

78. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

79. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

80. $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{3\cdot 2^3} + \dfrac{1}{5\cdot 2^5} - \dfrac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots$

81. Demuestre que si p es una función polinomial de n-grado, entonces

$$p(x+1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(x)}{i!}$$

82. Si $f(x) = (1+x^3)^{30}$, ¿qué es $f^{(58)}(0)$?

83. Demuestre la desigualdad de Taylor para $n = 2$, es decir, demuestre que si $|f'''(x)| \leqslant M$ para $|x-a| \leqslant d$ entonces

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{6}|x-a|^3 \qquad \text{para } |x-a| \leqslant d$$

84. (a) Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es igual a su serie de Maclaurin.


(b) Trace la gráfica de la función del inciso (a) y comente su comportamiento cerca del origen.

85. Utilice los pasos siguientes para demostrar (17).
(a) Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$. Derive esta serie para demostrar que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1+x} \qquad -1 < x < 1$$

(b) Sea $h(x) = (1+x)^{-k} g(x)$ demuestre que $h'(x) = 0$.
(c) Deduzca que $g(x) = (1+x)^k$.

86. En el ejercicio 10.2.53 se demostró que la longitud de la elipse $x = a \operatorname{sen}\theta$, $y = b\cos\theta$, donde $a > b > 0$, es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse.

Desarrolle el integrando como serie binomial y use el resultado del ejercicio 7.1.50 para expresar L como una serie de potencias de la excentricidad hasta el término en e^6.

PROYECTO DE LABORATORIO SAC UN LÍMITE ESCURRIDIZO

Este proyecto trata con la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)}$$

1. Utilice su sistema algebraico computacional para evaluar $f(x)$ para $x = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?
2. Use el SAC para trazar la gráfica de f cerca de $x = 0$. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?
3. Intente evaluar $\lim_{x \to 0} f(x)$ con la regla de L'Hôpital, usando el SAC para encontrar las derivadas del numerador y el denominador. ¿Qué descubrió? ¿Cuántas aplicaciones de la regla de l'Hôspital se requieren?
4. Evalúe $\lim_{x \to 0} f(x)$ con ayuda del SAC para encontrar la cantidad suficiente de términos de la serie de Taylor del numerador y el denominador. (Utilice la instrucción `taylor` en Maple o `series` en Mathematica.)
5. Utilice la instrucción límite en su SAC para calcular directamente $\lim_{x \to 0} f(x)$. (La mayoría de los sistemas algebraicos computacionales utilizan el método del problema 4 para calcular límites.)
6. En vista de las respuestas a los problemas 4 y 5, ¿cómo explica los resultados de los problemas 1 y 2?

PROYECTO DE REDACCIÓN CÓMO DESCUBRIÓ NEWTON LAS SERIES BINOMIALES

El teorema binomial, que proporciona el desarrollo de $(a + b)^k$, ya lo conocían los matemáticos chinos muchos siglos antes de que naciera Newton, en especial para el caso donde el exponente k es un entero positivo. En 1665, cuando Newton tenía 22 años, descubrió por primera vez el desarrollo de la serie infinita $(a + b)^k$ donde k es un exponente fraccionario, (positivo o negativo). No publicó sus descubrimientos, pero los planteó y proporcionó ejemplos de cómo usarlos en una carta con fecha del 13 de junio de 1676, carta (ahora conocida como *epistola prior*) que envió a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society of London, para que la transmitiera a Leibniz. Cuando él contestó, le preguntó a Newton cómo había descubierto las series binomiales. Newton escribió una segunda carta, la *epistola posterior*, del 24 de octubre de 1676, en la cual explica con lujo de detalles la manera como llegó a su descubrimiento mediante una ruta muy indirecta. Estuvo investigando las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 a x para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Estas son fáciles de calcular si n es par. Al observar patrones y al interpolar, Newton fue capaz de adivinar las respuestas de valores impares de n. Entonces se dio cuenta de que podía obtener las mismas respuestas expresando $(1 - x^2)^{n/2}$ como una serie infinita.

Escriba un ensayo sobre el descubrimiento de Newton. Inicie dando el enunciado de serie binomial en la notación de Newton (véase la *epistola prior* en la página 285 de [4] o la página 402 de [2]). Explique por qué la versión de Newton es equivalente al teorema 17 de la página 767. Luego lea la *epistola posterior* de Newton (página 287 de [4] o página 404 de [2]) y explique los patrones que descubrió Newton en las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Muestre cómo podía él calcular el área bajo las curvas restantes y cómo comprobó su respuesta. Por último, explique cómo estos descubrimientos llevaron a las series binomiales. Los libros de Edwards [1] y Katz [3] contienen comentarios de las cartas de Newton.

1. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, pp. 178-187.
2. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics*: *A Reader*, London: MacMillan Press, 1987.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: HarperCollins, 1993, pp. 463-466.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, 1200-1800, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1969.

11.11 Aplicaciones de los polinomios de Taylor

En esta sección se exploran dos tipos de aplicaciones de los polinomios de Taylor. Primero se examina cómo se usan para aproximar funciones; a los científicos de la computación les gustan porque las polinomiales son las más sencillas de las funciones. Luego se investiga cómo los físicos y los ingenieros los usan en campos como la relatividad, óptica, radiación de cuerpos negros, dipolos eléctricos, la velocidad de las ondas en el agua y la construcción de carreteras en el desierto.

Aproximación de funciones mediante polinomios

Suponga que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor en a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En la sección 11.10 se introdujo la notación $T_n(x)$ para la n-ésima suma parcial de esta serie y se le llamó polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a. Por lo que

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ya que f es la suma de su serie de Taylor, se sabe que $T_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ y de este modo T_n se puede usar como una aproximación de f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Observe que el polinomio de primer grado de Taylor

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

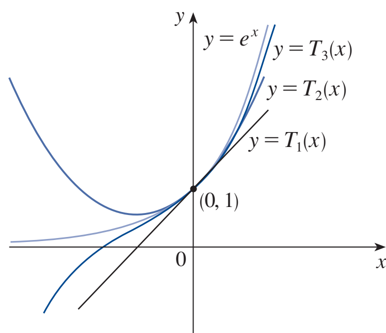


FIGURA 1

es lo mismo que la linealización de f en a que se estudió en la sección 3.10. Note también que T_1 y su derivada tienen los mismos valores en a que f y f'. En general, se puede demostrar que las derivadas de T_n en a concuerdan con las de f hasta las derivadas de orden n, inclusive.

Para ilustrar estas ideas, vea una vez más las gráficas de $y = e^x$ y sus primeros polinomios de Taylor, como se ilustran en la figura 1. La gráfica de T_1 es la recta tangente a $y = e^x$ en (0, 1); esta recta tangente es la mejor aproximación lineal a e^x cerca de (0, 1). La gráfica de T_2 es la parábola $y = 1 + x + x^2/2$, y la gráfica de T_3 es la curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que es un ajuste más cercano a la curva exponencial $y = e^x$ que T_2. El polinomio de Taylor T_4 siguiente sería una aproximación mejor, y así sucesivamente.

	$x = 0.2$	$x = 3.0$
$T_2(x)$	1.220000	8.500000
$T_4(x)$	1.221400	16.375000
$T_6(x)$	1.221403	19.412500
$T_8(x)$	1.221403	20.009152
$T_{10}(x)$	1.221403	20.079665
e^x	1.221403	20.085537

Los valores de la tabla dan una demostración numérica de la convergencia de los polinomios de Taylor $T_n(x)$ a la función $y = e^x$. Se ve que cuando $x = 0.2$ la convergencia es muy rápida, pero cuando $x = 3$ es un poco más lenta. De hecho, entre más lejos esté x de 0, es un poco más lenta la convergencia de $T_n(x)$ a e^x.

Cuando se usa un polinomio de Taylor T_n para aproximar una función f, se debe preguntar: ¿qué tan buena es una aproximación? ¿Qué tan grande se debe tomar n con objeto de que alcance una precisión deseada? Para responder estas preguntas, es necesario examinar el valor absoluto del residuo:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Hay tres métodos posibles para estimar el tamaño del error:

1. Si cuenta con una calculadora que trace gráficas o una computadora, la puede usar para trazar la gráfica $|R_n(x)|$ y de ahí estimar el error.
2. Si sucede que la serie es alternante, se puede aplicar el teorema de estimación de la serie alternante.
3. En todos los casos se puede aplicar la desigualdad de Taylor (teorema 11.10.9), que establece que si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ entonces

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

EJEMPLO 1

(a) Obtenga una aproximación de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por medio del polinomio de Taylor de grado 2 en $a = 8$.
(b) ¿Qué tan exacta es esta aproximación cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$?

SOLUCIÓN

(a)

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f(8) = 2$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(8) = \tfrac{1}{12}$$

$$f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f''(8) = \tfrac{1}{144}$$

$$f'''(x) = \tfrac{10}{27}x^{-8/3}$$

Por lo que el polinomio de Taylor de segundo grado es

$$T_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2$$

$$= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

La aproximación deseada es

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) La serie de Taylor no es alternante cuando $x < 8$, por lo que no se puede aplicar el teorema de estimación de la serie alternante en este ejemplo. Pero se puede usar la desigualdad de Taylor con $n = 2$ y $a = 8$:

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

donde $|f'''(x)| \leqslant M$. Como $x \geqslant 7$, se tiene $x^{8/3} \geqslant 7^{8/3}$ y de esa manera

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leqslant \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0.0021$$

Por tanto se puede hacer $M = 0.0021$. También $7 \leqslant x \leqslant 9$, por lo que $-1 \leqslant x - 8 \leqslant 1$ y $|x-8| \leqslant 1$. Entonces la desigualdad de Taylor da

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0.0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0.0021}{6} < 0.0004$$

En estos términos, si $7 \leqslant x \leqslant 9$, la aproximación en el inciso (a) no difiere en más de 0.0004 del valor real. ■

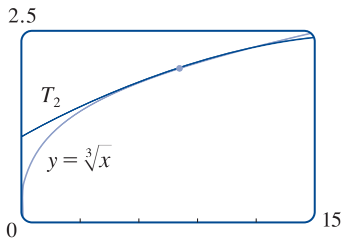


FIGURA 2

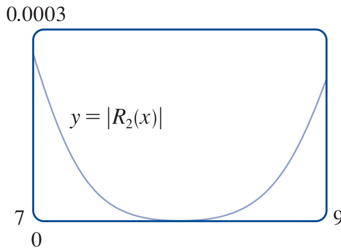


FIGURA 3

Con la ayuda de una calculadora para trazar gráficas o de una computadora compruebe el cálculo del ejemplo 1. En la figura 2 se muestra que las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = T_2(x)$ están muy cercanas entre sí cuando x está cerca de 8. En la figura 3 se ilustra la gráfica de $|R_2(x)|$ calculada a partir de la expresión

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

Se ve de la gráfica que

$$|R_2(x)| < 0.0003$$

cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$. Por lo que la estimación de error mediante métodos gráficos es ligeramente mejor que cuando se hace a partir de la desigualdad de Taylor, en este caso.

EJEMPLO 2

(a) ¿Cuál es el error máximo posible al utilizar la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

cuando $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$? Utilice esta aproximación para calcular sen 12° correcto a seis cifras decimales.

(b) ¿Para qué valores de x esta aproximación no difiere en más de 0.00005 del valor real?

SOLUCIÓN

(a) Observe que la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

es alternante para todos los valores no cero de x, y los términos sucesivos decrecen en tamaño porque $|x| < 1$, por lo que se puede usar el teorema de estimación de la serie alternante. El error en la aproximación de sen x por medio de los tres términos de su serie de Maclaurin es tan pequeño como

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5040}$$

Si $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$, entonces $|x| \leqslant 0.3$, por lo que el error es más pequeño que

$$\frac{(0.3)^7}{5040} \approx 4.3 \times 10^{-8}$$

Para calcular sen 12° primero se convierte a radianes:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 12^\circ &= \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right) \\ &\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0.20791169 \end{aligned}$$

Por lo que con una aproximación de seis decimales, sen $12^\circ \approx 0.207912$.

(b) El error será menor que 0.00005 si

$$\frac{|x|^7}{5040} < 0.00005$$

Al resolver la desigualdad para x, se obtiene

$$|x|^7 < 0.252 \qquad \text{o} \qquad |x| < (0.252)^{1/7} \approx 0.821$$

Por lo que la aproximación dada no difiere en más de 0.00005 cuando $|x| < 0.82$. ■

TEC En Module 11.10/11.11 se muestran en forma gráfica los residuos de las aproximaciones de los polinomios de Taylor.

¿Qué sucede si se recurre a la desigualdad de Taylor para resolver el ejemplo 2? Ya que $f^{(7)}(x) = -\cos x$, se tiene $|f^{(7)}(x)| \leqslant 1$ y así

$$|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{7!}|x|^7$$

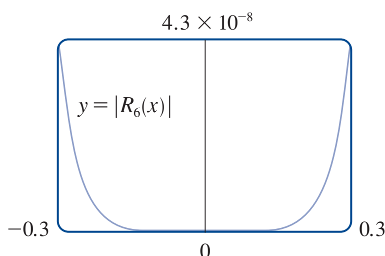


FIGURA 4

De este modo se llega a la misma estimación que con el teorema de la estimación de la serie alternante.

¿Qué hay con respecto a los métodos gráficos? En la figura 4 se ilustra la gráfica de

$$|R_6(x)| = \left|\operatorname{sen} x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\right|$$

y se observa que $|R_6(x)| < 4.3 \times 10^{-8}$ cuando $|x| \leqslant 0.3$. Esta es la misma estimación que se obtuvo en el ejemplo 2. En el caso del inciso (b) se quiere $|R_6(x)| < 0.00005$, por lo que se grafica tanto $y = |R_6(x)|$ como $y = 0.00005$ en la figura 5. Si se coloca el cursor en el punto de intersección derecho, se verá que la desigualdad se cumple cuando $|x| < 0.82$. Una vez más se llega a la misma estimación que se obtuvo en la solución del ejemplo 2.

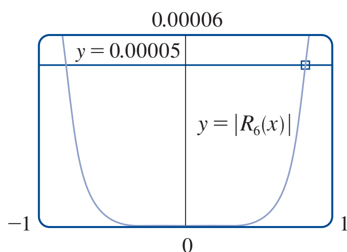


FIGURA 5

Si se hubiera pedido que se aproximara sen 72° en lugar de sen 12° en el ejemplo 2, habría sido prudente utilizar los polinomios de Taylor en $a = \pi/3$ (en lugar de $a = 0$), porque son mejores aproximaciones al sen x para valores de x cercanos a $\pi/3$. Observe que 72° es cercano a 60° (o $\pi/3$ radianes), y las derivadas de sen x son fáciles de calcular en $\pi/3$.

La figura 6 muestra las gráficas de las aproximaciones de los polinomios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad\qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad\qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

a la curva seno. Se puede ver que cuando n aumenta, $T_n(x)$ es una buena aproximación a sen x en un intervalo más y más grande.

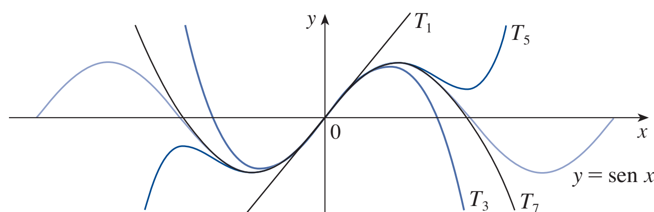


FIGURA 6

Las calculadoras y computadoras aplican el tipo de cálculo hecho en los ejemplos 1 y 2. Por ejemplo, cuando usted presiona la tecla sen o e^x de su calculadora, o cuando un programador de computadoras utiliza una subrutina en el caso de una función trigonométrica o exponencial o de Bessel, en muchas máquinas se calcula una aproximación polinomial. Con frecuencia, el polinomio es uno de Taylor que ha sido modificado de modo que el error se extiende de manera más uniforme en todo el intervalo.

Aplicaciones en la física

Los polinomios de Taylor también se usan con mucha frecuencia en la física. Con objeto de entender una ecuación, los físicos simplifican a menudo una función considerando solo dos o tres términos de la serie de Taylor. En otras palabras, los físicos usan un polinomio de Taylor como una aproximación de la función. La desigualdad de Taylor se puede usar para medir la exactitud de la aproximación. En el ejemplo siguiente se muestra una manera en la cual esta idea se usa en la relatividad especial.

EJEMPLO 3 En la teoría de la relatividad especial de Einstein, la masa de un objeto que se desplaza con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa del objeto cuando está en reposo y c es la velocidad de la luz. La energía cinética del objeto es la diferencia entre su energía total y su energía en reposo:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

(a) Demuestre que cuando v es muy pequeña comparada con c, esta expresión para K concuerda con la física clásica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
(b) Utilice la desigualdad de Taylor para estimar la diferencia en estas expresiones para K cuando $|v| \leqslant 100$ m/s.

SOLUCIÓN
(a) Utilizando las expresiones dadas para K y m, se obtiene

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

La curva superior de la figura 7 es la gráfica de la expresión de la energía cinética K de un objeto con velocidad v en la relatividad especial. La curva inferior muestra la función usada para K en la física clásica newtoniana. Cuando v es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, las curvas son prácticamente idénticas.

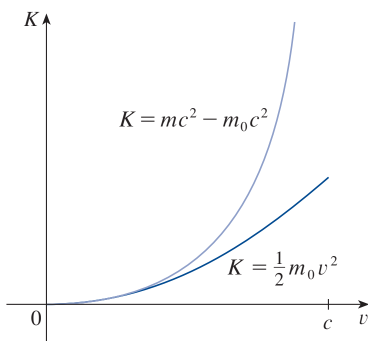


FIGURA 7

Con $x = -v^2/c^2$, la serie de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ es más fácil de calcular que una serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$. (Observe que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Por tanto

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots$$

y

$$K = m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$$

Si v es mucho más pequeña que c, entonces todos los términos después del primero son muy pequeños cuando se les compara con el primer término. Si se omiten, se obtiene

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

(b) Si $x = -v^2/c^2$, $f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$ y M es un número tal que $|f''(x)| \leqslant M$, entonces se puede utilizar la desigualdad de Taylor para escribir

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}x^2$$

Se tiene $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1 + x)^{-5/2}$ y se sabe que $|v| \leqslant 100$ m/s por lo que

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (=M)$$

Por lo que con $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4.17 \times 10^{-10})m_0$$

Por lo que cuando $|v| \leqslant 100$ m/s, la magnitud del error al usar la expresión newtoniana para la energía cinética es cuanto mucho $(4.2 \times 10^{-10})m_0$. ■

Otra aplicación en la física sucede en óptica. La figura 8 se ha adaptado de *Optics* 4a. ed., de Eugene Hecht (San Francisco, 2002), página 153. Representa una onda de la fuente puntual S que se encuentra una interfaz esférica de radio R centrado en C. El rayo SA se refracta hacia P.

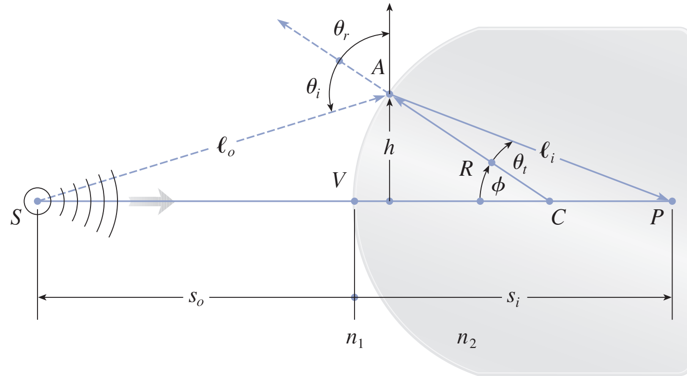


FIGURA 8
Refracción en una interfaz esférica
Fuente: Adaptado de E. Hecht, *Optics*, 4e (Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 2002).

Al usar el principio de Fermat de que la luz viaja en el menor tiempo posible, Hecht deduce la ecuación

1 $$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

donde n_1 y n_2 son índices de refracción y ℓ_0, ℓ_i, s_0 y s_i son las distancias indicadas en la figura 8. De acuerdo con la ley de los cosenos aplicada a los triángulos ACS y ACP, se tiene

2 $$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

En este caso utilice la identidad $\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$

Como es un poco complicado trabajar con la ecuación 1, Gauss, en 1841, la simplificó usando la aproximación lineal $\cos\phi \approx 1$ para valores pequeños de ϕ. (Esto equivale a usar el polinomio de Taylor de grado 1.) Por tanto, la ecuación 1 se transforma en la ecuación más sencilla, que se le pide demostrar en el ejercicio 34(a):

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{3}$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de Gauss* u *óptica de primer orden*, y se ha vuelto la herramienta teórica básica para diseñar lentes.

Una teoría más exacta se obtiene al aproximar $\cos\phi$ por medio de su polinomio de Taylor de grado 3 (que es el mismo que el polinomio de Taylor de grado 2). Esto considera los rayos para los cuales ϕ no es tan pequeña, es decir, rayos que golpean la superficie a mayores distancias h por arriba del eje. En el ejercicio 34(b) se le pide usar esta aproximación para deducir la ecuación más exacta

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right] \tag{4}$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de tercer orden*.

Otras aplicaciones de los polinomios de Taylor a la física y la ingeniería se exploran en los ejercicios 32, 33, 35, 36, 37 y 38, y en el proyecto de aplicación de la página 783.

11.11 EJERCICIOS

1. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 5 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrada en $a = 0$. Trace la gráfica de f y estos polinomios en una misma pantalla.
(b) Evalúe f y estos polinomios en $x = \pi/4$, $\pi/2$ y π.
(c) Explique cómo los polinomios de Taylor convergen a $f(x)$.

2. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 3 para $f(x) = \tan x$ centrada en $a = 0$. Grafique f y estos polinomios en una misma pantalla.
(b) Evalúe f y estos polinomios en $x = \pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$.
(c) Comente cómo los polinomios de Taylor convergen a $f(x)$.

3-10 Determine los polinomios de Taylor $T_3(x)$ para la función f centrada en el número a. Trace la gráfica de f y T_3 en la misma pantalla.

3. $f(x) = e^x$, $a = 1$

4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/6$

5. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/2$

6. $f(x) = x + e^{-x}$, $a = 0$

7. $f(x) = 1/x$, $a = 2$

8. $f(x) = x\cos x$, $a = 0$

9. $f(x) = xe^{-2x}$, $a = 0$

10. $f(x) = \tan^{-1}x$, $a = 1$

11-12 Use un sistema algebraico computacional para encontrar los polinomios de Taylor T_n con centro en a para $n = 2, 3, 4, 5$. Luego trace la gráfica de estos polinomios y f en la misma pantalla.

11. $f(x) = \cot x$, $a = \pi/4$

12. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$, $a = 0$

13-22
(a) Aproxime f mediante un polinomio de Taylor con grado n en el número a.
(b) Con la desigualdad de Taylor estime la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x está en el intervalo dado.
(c) Compruebe el resultado del inciso (b) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = 1/x$, $a = 1$, $n = 2$, $0.7 \leqslant x \leqslant 1.3$

14. $f(x) = x^{-1/2}$, $a = 4$, $n = 2$, $3.5 \leqslant x \leqslant 4.5$

15. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leqslant x \leqslant 4.2$

16. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$

17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0.2 \leqslant x \leqslant 0.2$

18. $f(x) = \ln(1 + 2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.1$

20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

21. $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

22. $f(x) = \operatorname{senh} 2x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

---

23. Utilice la información del ejercicio 5 para estimar cos 80° con una aproximación de cinco decimales.

24. Use la información del ejercicio 16 para estimar sen 38° con una aproximación de cinco decimales.

25. Utilice la desigualdad de Taylor para determinar el número de términos de la serie de Maclaurin para e^x que se debe usar para estimar $e^{0.1}$ de tal manera que difiera menos de 0.00001 del valor real.

26. ¿Cuántos términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ son necesarios para estimar ln 1.4 con 0.001 de precisión?

27-29 Aplique el teorema de estimación de la serie alternante o la desigualdad de Taylor para estimar los valores de x para los cuales la aproximación dada es exacta y está dentro del error establecido. Compruebe gráficamente su respuesta.

27. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \quad (|\text{error}| < 0.01)$

28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \quad (|\text{error}| < 0.005)$

29. $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad (|\text{error}| < 0.05)$

---

30. Suponga que se sabe que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n + 1)}$$

y la serie de Taylor de f con centro en 4 converge a $f(x)$ para toda x en el intervalo de convergencia. Demuestre que el polinomio de Taylor de quinto grado aproxima $f(5)$ con error menor a 0.0002.

31. Un vehículo se desplaza a una velocidad de 20 m/s y a una aceleración de 2 m/s² en un instante dado. Usando un polinomio de Taylor de segundo grado, estime qué tanto se desplazará el automóvil en el segundo siguiente. ¿Sería razonable utilizar este polinomio para estimar la distancia recorrida durante el minuto siguiente?

32. La resistividad ρ de un alambre conductor es el recíproco de la conductividad y se mide en unidades ohms-metros (Ω-m). La resistividad de un metal dado depende de la temperatura de acuerdo con la ecuación

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

donde t es la temperatura en °C. Hay tablas que dan los valores de α (llamado coeficiente de temperatura) y ρ_{20} (la resistividad a 20 °C) para varios metales. Excepto a temperaturas muy bajas, la resistividad varía casi en forma lineal con la temperatura, por lo que es común aproximar la expresión para $\rho(t)$ mediante su polinomio de Taylor de primero o segundo grados en $t = 20$.

(a) Encuentre expresiones para estas aproximaciones lineales y cuadráticas.

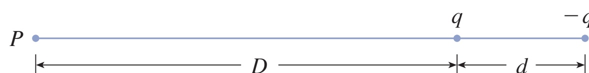
(b) Por lo que se refiere al cobre, las tablas dan $\alpha = 0.0039/°\text{C}$ y $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8}\Omega$-m. Trace la gráfica de la resistividad del cobre y las aproximaciones lineales y cuadráticas para $-250\ °\text{C} \leqslant t \leqslant 1000\ °\text{C}$.

(c) ¿Para qué valores de t la aproximación lineal concuerda con la expresión exponencial de tal manera que difiera menos de 1% del valor real?

33. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas eléctricas de igual magnitud y signos opuestos. Si las cargas son q y $-q$ y hay una distancia d entre ellas, entonces el campo eléctrico E en el punto P en la figura es

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D + d)^2}$$

Al desarrollar esta expresión para E como serie en potencias de d/D, demuestre que E es aproximadamente proporcional a $1/D^3$ cuando P está alejada del dipolo.



34. (a) Deduzca la ecuación 3 para la óptica de Gauss a partir de la ecuación 1 aproximando cos ϕ en la ecuación 2 mediante su polinomio de Taylor de primer grado.

(b) Demuestre que si cos ϕ es reemplazado por su polinomio de Taylor de tercer grado en la ecuación 2, entonces la ecuación 1 se transforma en la ecuación 4 para una óptica de tercer orden. [*Sugerencia*: utilice los dos primeros términos de la serie binomial para ℓ_o^{-1} y ℓ_i^{-1}. Use también $\phi \approx \operatorname{sen} \phi$.]

35. Si una onda de agua de longitud L se desplaza con una velocidad v a través de un cuerpo de agua de profundidad d como en la figura de la página 782, entonces

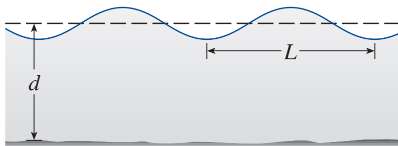
$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

(a) Si el agua es profunda, demuestre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.

(b) Si el agua es poco profunda, use la serie de Maclaurin para tanh para demostrar que $v \approx \sqrt{gd}$ (Por lo que,

en agua poco profunda, la velocidad de una onda tiende a ser independiente de la longitud de la onda.)

(c) Utilice el teorema de estimación de la serie alternante, para demostrar que si $L > 10d$, entonces la estimación $v^2 \approx gd$ es exacta dentro de $0.014gL$.

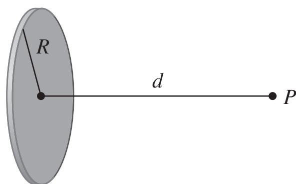


36. Un disco uniformemente cargado tiene radio R y densidad de carga superficial σ, como se ve en la figura. El potencial eléctrico V en un punto P a una distancia d a lo largo de la perpendicular al eje central del disco es

$$V = 2\pi k_e\sigma\left(\sqrt{d^2 + R^2} - d\right)$$

donde k_e es una constante (llamada constante de Coulomb). Demuestre que

$$V \approx \frac{\pi k_e R^2 \sigma}{d} \quad \text{para } d \text{ grande}$$



37. Si un topógrafo mide diferencias en la altitud cuando hace planos para una carretera que cruza un desierto, se deben hacer correcciones tomando en cuenta la curvatura de la Tierra.

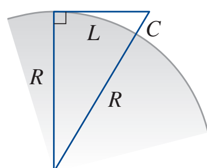
(a) Si R es el radio de la Tierra y L es la longitud de la carretera, demuestre que la corrección es

$$C = R\,sec(L/R) - R$$

(b) Mediante un polinomio de Taylor demuestre que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare las correcciones dadas por las fórmulas en los incisos (a) y (b) para una carretera que mide 100 km de longitud. (Tome como radio de la Tierra 6370 km.)



38. El período de un péndulo con longitud L que subtiende un ángulo máximo θ_0 con la vertical es

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2 x}}$$

donde $k = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. (En el ejercicio 7.7.42 se aproximó esta integral usando la regla de Simpson.)

(a) Desarrolle el integrando como una serie binomial y use el resultado del ejercicio 7.1.50 para demostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Si θ_0 no es demasiado grande, se usa a menudo la aproximación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtenida usando solo el primer término de la serie. Se obtiene una mejor aproximación si se usan solo dos términos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Observe que todos los términos de la serie después del primero tienen coeficientes que son cuanto mucho $\frac{1}{4}$. Use este hecho para comparar esta serie con una serie geométrica y demuestre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leqslant T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Use las desigualdades del inciso *b*), estime el período de un péndulo con $L = 1$ metros y $\theta_0 = 10°$. ¿Cómo es si se le compara con la estimación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? ¿Cómo es si $\theta_0 = 42°$?

39. En la sección 4.8 se utilizó el método de Newton para obtener un valor aproximado de una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, y a partir de una aproximación inicial x_1 se obtuvo aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$, donde

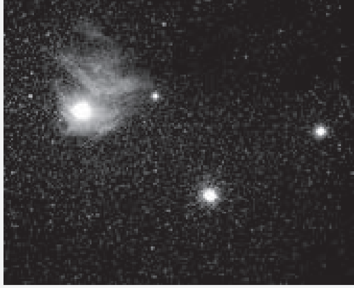
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Utilice la desigualdad de Taylor con $n = 1$, $a = x_n$ y $x = r$ para demostrar que si $f''(x)$ existe sobre un intervalo I que contiene a r, x_n y x_{n+1}, y $|f''(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ para toda $x \in I$, entonces

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Esto significa que si x_n es exacta con d cifras decimales, entonces x_{n+1} es exacta con una aproximación de $2d$ decimales. Más preciso, si el error en la etapa n es a lo más 10^{-m}, entonces el error en la etapa $n + 1$ es a lo más $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROYECTO DE APLICACIÓN RADIACIÓN DE LAS ESTRELLAS


© Luke Dodd / Science Source

Cualquier objeto emite radiaciones cuando se calienta. Un *cuerpo negro* es un sistema que absorbe toda la radiación que le llega. Por ejemplo, una superficie negra mate o una cavidad grande con un pequeño agujero en su pared (como un alto horno) es un cuerpo negro y emite radiación de cuerpo negro. Incluso la radiación que llega del Sol está cerca de ser radiación de un cuerpo negro.

La ley de Rayleigh-Jeans, propuesta a fines del siglo XIX, expresa la densidad de energía de radiación de cuerpo negro de longitud de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins (K) y k es la constante de Boltzmann. La ley de Rayleigh-Jeans concuerda con las mediciones experimentales para longitudes de onda largas, pero no sucede lo mismo con las longitudes de onda cortas. [La ley predice que $f(\lambda) \to \infty$ cuando $\lambda \to 0^+$ pero los experimentos han demostrado que $f(\lambda) \to 0$.] Este hecho recibe el nombre de *catástrofe ultravioleta*.

En 1900, Max Planck encontró un mejor modelo (que se conoce ahora como ley de Planck) para la radiación de cuerpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins y

$$h = \text{constante de Planck} = 6.6262 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$

$$c = \text{velocidad de la luz} = 2.997925 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1.3807 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

1. Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para la ley de Planck. De este modo, esta ley modela la radiación de cuerpo negro mejor que la ley de Rayleigh-Jeans para longitudes de onda cortas.

2. Use un polinomio de Taylor para demostrar que, en el caso de las longitudes de onda largas, la ley de Planck da aproximadamente los mismos valores que la ley de Rayleigh-Jeans.

3. Trace la gráfica de f de acuerdo con ambas leyes en una misma pantalla y comente sobre las similitudes y las diferencias. Use $T = 5700$ K (la temperatura del Sol). (Quizá quiera cambiar de metros a la unidad más conveniente de micrómetros: 1 mm $= 10^{-6}$ m.)

4. Use la gráfica del problema 3 para estimar el valor de λ para el cual $f(\lambda)$ es un máximo de acuerdo con la ley de Planck.

5. Investigue cómo la gráfica de f cambia cuando T varía. (Utilice la ley de Planck.) En particular, trace la gráfica de f para las estrellas Betelgeuse ($T = 3400$ K), Procyon ($T = 6400$ K) y Sirio ($T = 9200$ K), así como para el Sol. ¿Cómo varía la radiación total emitida, es decir (el área bajo la curva), con respecto a T? Apóyese en las gráficas y explique por qué a Sirio se le conoce como estrella azul y a Betelgeuse como una estrella roja.

11 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una sucesión convergente?
(b) ¿Qué es una serie convergente?
(c) ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
(d) ¿Qué significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión acotada?
(b) ¿Qué es una sucesión monótona?
(c) ¿Qué puede decir con respecto a una sucesión monótona acotada?

3. (a) ¿Qué es una serie geométrica? ¿En qué circunstancias es convergente? ¿Cuál es su suma?
(b) ¿Qué es una serie p? ¿En qué circunstancias es convergente?

4. Suponga que $\Sigma a_n = 3$ y s_n es la n-ésima suma parcial de la serie. ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} a_n$? ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} s_n$?

5. Enuncie lo siguiente.
(a) Prueba de la divergencia
(b) Prueba de la integral
(c) Prueba por comparación
(d) Prueba por comparación del límite
(e) Prueba de la serie alternante
(f) Prueba de la razón
(g) Prueba de la raíz

6. (a) ¿Qué es una serie absolutamente convergente?
(b) ¿Qué puede decir acerca de dicha serie?
(c) ¿Qué es una serie condicionalmente convergente?

7. (a) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la integral, ¿cómo estima su suma?
(b) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba por comparación, ¿cómo estima su suma?
(c) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante, ¿cómo estima su suma?

8. (a) Escriba la forma general de una serie de potencias.
(b) ¿Qué es el radio de convergencia de una serie de potencias?
(c) ¿Qué es el intervalo de convergencia de una serie de potencias?

9. Suponga que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia R.
(a) ¿Cómo deriva f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para f'?
(b) ¿Cómo integra f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para $\int f(x)dx$?

10. (a) Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de grado n-ésimo de f centrada en a.
(b) Escriba una expresión para la serie de Taylor de f centrada en a.
(c) Escriba una expresión para la serie de Maclaurin de f.
(d) ¿Cómo demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor?
(e) Enuncie la desigualdad de Taylor.

11. Escriba la serie de Maclaurin y el intervalo de convergencia para cada una de las funciones siguientes.
(a) $1/(1-x)$ (b) e^x (c) $\operatorname{sen} x$
(d) $\cos x$ (e) $\tan^{-1}x$ (f) $\ln(1+x)$

12. Escriba el desarrollo de la serie binomial de $(1+x)^k$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces Σa_n es convergente.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen} 1}$ es convergente.

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.

4. Si $\Sigma c_n 6^n$ es convergente, entonces $\Sigma c_n(-2)^n$ es convergente.

5. Si $\Sigma c_n 6^n$ es convergente, entonces $\Sigma c_n(-6)^n$ es convergente.

6. Si $\Sigma c_n x^n$ diverge cuando $x = 6$, entonces diverge cuando $x = 10$.

7. La prueba de la razón se puede usar para determinar si converge $\Sigma 1/n^3$.

8. La prueba de la razón se puede usar para determinar si converge $\Sigma 1/n!$

9. Si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ y Σb_n diverge, entonces la serie Σa_n diverge.

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

11. Si $-1 < \alpha < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

12. Si Σa_n es divergente, entonces $\Sigma |a_n|$ es divergente.

13. Si $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$ converge para toda x, entonces $f'''(0) = 2$.

14. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n + b_n\}$ es divergente.

15. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n b_n\}$ es divergente.

16. Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n > 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

17. Si $a_n > 0$ y Σa_n converge, entonces $\Sigma(-1)^n a_n$ converge.

18. Si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

19. $0.99999\ldots = 1$

20. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces $\lim_{n\to\infty} (a_{n+3} - a_n) = 0$.

21. Si un número finito de términos se agrega a una serie convergente, la nueva serie aún converge.

22. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = AB$.

EJERCICIOS

1-8 Determine si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, determine su límite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$

2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$

3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$

4. $a_n = \cos(n\pi/2)$

5. $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n}{n^2 + 1}$

6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$

8. $\{(-10)^n/n!\}$

9. Una sucesión se define recursivamente mediante las ecuaciones $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y $a_n < 2$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

10. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$ y use una gráfica para determinar el valor más pequeño de N que corresponde a $\varepsilon = 0.1$ en la definición exacta de límite.

11-22 Determine si la serie es convergente o divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}}$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n + 1}\right)$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1.2)^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{5^n n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n + 1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}{n}$

23-26 Determine si la serie es condicionalmente convergente, absolutamente convergente o divergente.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1) 3^n}{2^{2n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

27-31 Calcule la suma de la serie.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 3)}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n + 1) - \tan^{-1} n]$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

31. $1 - e + \dfrac{e^2}{2!} - \dfrac{e^3}{3!} + \dfrac{e^4}{4!} - \cdots$

32. Exprese el decimal periódico 4.17326326326... como una fracción.

33. Demuestre que $\cosh x \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$ para toda x.

34. ¿Para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$?

35. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ correcta a cuatro decimales.

36. (a) Determine la suma parcial s_5 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ y estime el error al usarla como aproximación de la suma de la serie.

(b) Calcule la suma de esta serie con una aproximación de cinco decimales.

37. Use la suma de los primeros ocho términos para aproximarse a la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$. Estime el error implicado en esta aproximación.

38. (a) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ es convergente.

(b) Deduzca que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

39. Demuestre que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 1}{n}\right) a_n$$

también es absolutamente convergente.

40-43 Encuentre el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n 4^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{(n+2)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

44. Calcule el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \pi/6$.

46. Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/3$.

47-54 Encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. Puede aplicar el método directo (definición de una serie de Maclaurin) o las series conocidas, como la serie geométrica, serie binomial o la serie de Maclaurin para e^x, sen x, $\tan^{-1}x$ y $\ln(1+x)$.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

48. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

49. $f(x) = \ln(4 - x)$

50. $f(x) = xe^{2x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

52. $f(x) = 10^x$

53. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16 - x}$

54. $f(x) = (1 - 3x)^{-5}$

55. Evalúe $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$ como una serie infinita.

56. Use series para aproximar $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$ con dos dígitos decimales.

57-58

(a) Obtenga un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor de grado n en el número a.

(b) Trace la gráfica de f y T_n en una misma pantalla.

(c) Use la desigualdad de Taylor para estimar la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x se encuentra en el intervalo dado.

(d) Compruebe su resultado del inciso (c) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

57. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$

58. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

59. Utilice series para evaluar el límite siguiente.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

60. La fuerza debida a la gravedad que actúa sobre un objeto de masa m a una altura h arriba de la superficie de la Tierra es

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad para un objeto en la superficie de la Tierra.

(a) Exprese F como una serie en potencias de h/R.

(b) Observe que si aproxima F con el primer término de la serie, se obtiene la expresión $F \approx mg$ que se usa por lo común cuando h es mucho más pequeña que R. Aplique el teorema de la estimación de la serie alternante para calcular los valores de h para los cuales la aproximación $F \approx mg$ difiere menos de 1% del valor real. (Use $R = 6400$ km.)

61. Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para toda x.

(a) Si f es una función impar, demuestre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

(b) Si f es una función par, demuestre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Si $f(x) = e^{x^2}$, demuestre que $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Problemas adicionales

Antes de ver la solución del ejemplo, cúbrala e intente resolver el problema por sí mismo.

EJEMPLO Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$.

SOLUCIÓN El principio de resolución de problemas es relevante aquí ya que hay que *reconocer algo familiar*. ¿La serie dada se parece a alguna que ya conozca? Bueno, tiene algunos ingredientes en común con la serie de Maclaurin para la función exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Se puede hacer que esta serie se parezca más reemplazando x por $x + 2$:

$$e^{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \cdots$$

Pero aquí el exponente en el numerador coincide con el factorial del número en el denominador. Para hacer que esto pase en la serie dada, se multiplicará y dividirá por $(x + 2)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = \frac{1}{(x+2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$= (x+2)^{-3}\left[\frac{(x+2)^3}{3!} + \frac{(x+2)^4}{4!} + \cdots\right]$$

Vea que la serie entre paréntesis es justamente la serie para e^{x+2} con los tres primeros términos faltantes. Por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = (x+2)^{-3}\left[e^{x+2} - 1 - (x+2) - \frac{(x+2)^2}{2!}\right] \quad \blacksquare$$

Problemas

1. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encuentre $f^{(15)}(0)$.

2. Una función f está definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

¿Dónde es continua f?

3. (a) Demuestre que $\tan \frac{1}{2}x = \cot \frac{1}{2}x - 2 \cot x$.

(b) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

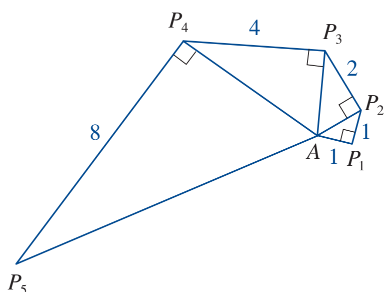
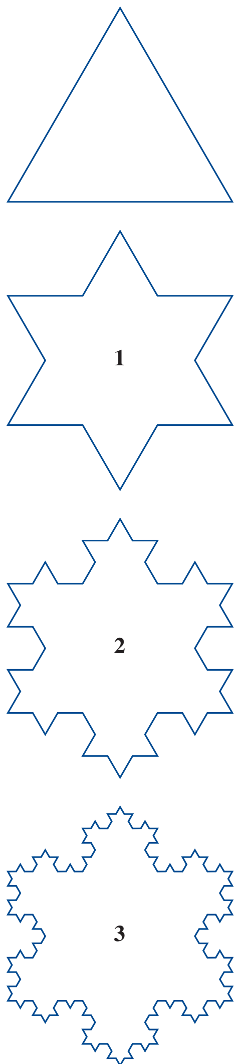


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

4. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de puntos determinados de acuerdo con la figura. Por tanto $|AP_1| = 1$, $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$ y el ángulo AP_nP_{n+1} es un ángulo recto. Calcule $\lim_{n\to\infty} \angle P_nAP_{n+1}$.



FIGURAS PARA EL PROBLEMA 5

5. Para construir la **curva del copo de nieve**, inicie con un triángulo equilátero de lados de longitud igual a 1. El paso 1 de la construcción consta de dividir cada lado en tres partes iguales, construir un triángulo equilátero en la parte media y luego borrar la parte media (véase la figura). El paso 2 es repetir el paso 1 en cada lado del polígono resultante. Se repite este procedimiento en cada paso posterior. La curva del copo de nieve es la curva que resulta de repetir este proceso indefinidamente.

(a) Sean s_n, l_n y p_n, respectivamente, el número de lados, la longitud de un lado y la longitud total de la curva de aproximación n-ésima (la curva obtenida después del paso n del trazo). Encuentre fórmulas para s_n, l_n y p_n.

(b) Demuestre que $p_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

(c) Sume una serie infinita para encontrar el área encerrada por la curva del copo de nieve.

Nota: los incisos (b) y (c) demuestran que la curva del copo de nieve es infinitamente larga pero encierra un área finita.

6. Calcule la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

donde los términos son los recíprocos de los enteros positivos cuyos factores primos son 2s y 3s.

7. (a) Demuestre que para $xy \neq -1$,

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy}$$

si el miembro izquierdo se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

(b) Demuestre que $\arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \pi/4$.

(c) Deduzca la fórmula siguiente de John Machin (1680-1751):

$$4 \arctan \tfrac{1}{5} - \arctan \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Utilice la serie de Maclaurin del arctan para demostrar que

$$0.1973955597 < \arctan \tfrac{1}{5} < 0.1973955616$$

(e) Demuestre que

$$0.004184075 < \arctan \tfrac{1}{239} < 0.004184077$$

(f) Deduzca que el valor siguiente es correcto con siete decimales $\pi \approx 3.1415927$.

Machin aplicó este método en 1706 para determinar π con 100 decimales. Recientemente, con la ayuda de computadoras, se ha calculado cada vez con mayor exactitud el valor de π. ¡En 2013 Shigeru Kondo y Alexander Yee calcularon el valor de π con más de 12 billones de decimales!

8. (a) Demuestre una fórmula similar a la del problema 7(a), pero que contenga arccot en lugar de arctan.

(b) Calcule la suma de la serie $\Sigma_{n=0}^{\infty}$ $\operatorname{arccot}(n^2 + n + 1)$.

9. Use el resultado del problema 7(a) para encontrar la suma de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} \arctan(2/n^2)$.

10. Si $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n + 1} + a_2\sqrt{n + 2} + \cdots + a_k\sqrt{n + k}\right) = 0$$

Si no ve cómo demostrarlo, intente la estrategia de resolución de problemas *usando analogías* (véase la página 71). Intente los casos especiales $k = 1$ y $k = 2$ primero. Si puede ver cómo demostrar la afirmación para estos casos, probablemente verá cómo demostrarla en general.

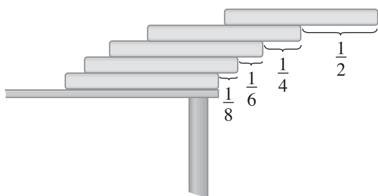


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

11. Determine el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ y calcule la suma.

12. Suponga que tiene una gran cantidad de libros, todos del mismo tamaño, y que los apila en el borde de una mesa, y que cada libro sobresale un poco más del borde de la mesa que el libro anterior. Demuestre que es posible hacerlo de tal manera que el libro que quede hasta encima está por completo más allá del borde de la mesa. En efecto, muestre que el libro de hasta encima se puede acomodar a cualquier distancia más allá del borde de la mesa si la pila de libros tiene la altura suficiente. Utilice el método siguiente para apilar los libros: la mitad del largo del libro de hasta arriba sobresale del segundo libro. El segundo libro sobresale solo un cuarto de su largo con respecto al libro tercero. El tercer libro sobresale un sexto de su largo con respecto al libro cuarto, y así sucesivamente. (Inténtelo usted mismo con un mazo de cartas.) Considere el centro de masa.

13. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

14. Si $p > 1$, evalúe la expresión

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

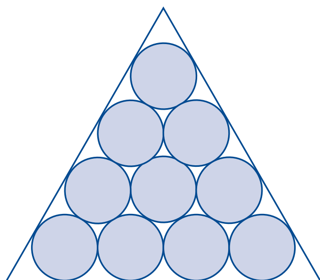


FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

15. Suponga que círculos de igual diámetro están acomodados apretadamente en n filas dentro de un triángulo equilátero. (La figura ilustra el caso $n = 4$.) Si A es el área del triángulo y A_n es el área total ocupada por las n filas de círculos, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

16. Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante las ecuaciones

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

17. Si la curva $y = e^{-x/10} \operatorname{sen} x$, $x \geqslant 0$, se rota alrededor del eje x, el sólido resultante se parece a una cadena infinita decreciente de cuentas.
(a) Determine el volumen exacto de n-ésima cuenta. (Utilice, ya sea una tabla de integrales o un sistema algebraico computacional.)
(b) Encuentre el volumen total de las cuentas.

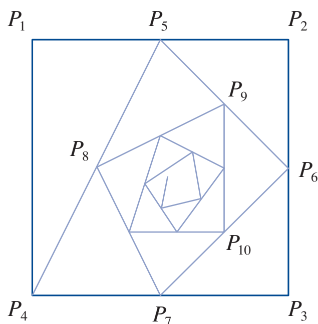


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18

18. Inicie con los vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de un cuadrado, y localice puntos como se muestra en la figura: P_5 es el punto medio de P_1P_2, P_6 es el punto medio de P_2P_3, P_7 es el punto medio de P_3P_4, y así sucesivamente. La trayectoria espiral de la poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7\ldots$ se aproxima al punto P dentro del cuadrado.
(a) Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), demuestre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ y encuentre una ecuación similar para las coordenadas y.
(b) Determine las coordenadas de P.

19. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

20. Realice los pasos siguientes para demostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln 2$$

(a) Use la fórmula para la suma de una serie geométrica finita (11.2.3) para obtener una expresión para

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1}$$

(b) Integre el resultado del inciso (a) de 0 a 1 para obtener una expresión para

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

como una integral.

(c) Del inciso (b) deduzca que

$$\left| \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \right| < \int_0^1 x^{2n}\, dx$$

(d) Utilice el inciso (c) para demostrar que la suma de la serie dada es ln 2.

21. Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots = 0$$

[*Sugerencia*: considere los casos $x \geqslant 0$ y $x < 0$ por separado.]

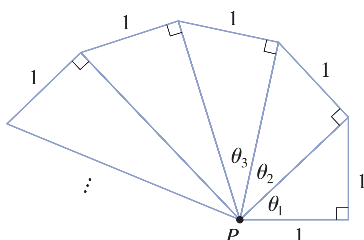


FIGURA PARA EL PROBLEMA 22

22. Se trazan triángulos rectángulos como en la figura. Cada uno de los triángulos tiene una altura de 1 y su base es la hipotenusa del triángulo precedente. Demuestre que esta sucesión de triángulos da una cantidad indefinida de vueltas alrededor de P mostrando que $\Sigma\, \theta_n$ es una serie divergente.

23. Considere la serie cuyos términos son los recíprocos de los enteros positivos que se pueden escribir con la notación de base 10 sin usar el dígito 0. Demuestre que esta serie es convergente y que la suma es menor que 90.

24. (a) Demuestre que la serie de Maclaurin de la función es

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \qquad \text{es} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci, es decir, $f_1 = 1, f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Sugerencia*: escriba $x/(1 - x - x^2) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ y multiplique ambos lados de esta ecuación por $1 - x - x^2$.]

(b) Determine una fórmula explícita para el n-ésimo número de Fibonacci, escribiendo $f(x)$ como una suma de fracciones parciales, y con ello, obtenga la serie de Maclaurin de una manera distinta.

25. Sea

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

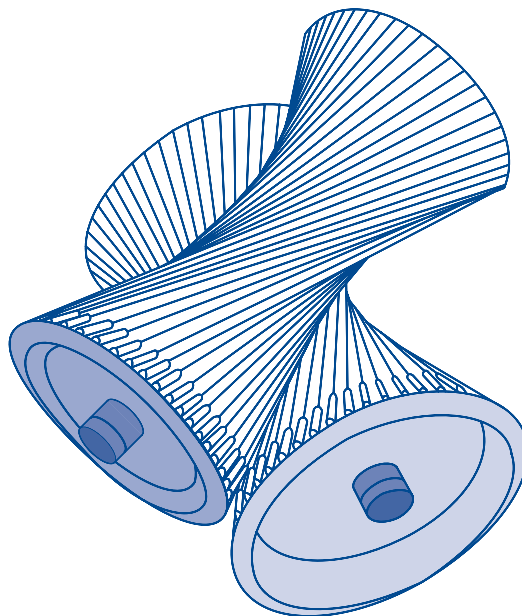
$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Demuestre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

26. Demuestre que si $n > 1$, la n-ésima suma parcial de la serie armónica no es un entero.

Sugerencia: sea 2^k la máxima potencia de 2 que es menor o igual a n y sea M el producto de todos los enteros impares que sean menores o iguales a n. Suponga que $s_n = m$, un entero. Entonces $M2^k s_n = M2^k$m. El lado derecho de esta ecuación es par. Demuestre que el lado izquierdo es impar al demostrar que cada uno de sus términos es un entero par, excepto el último.

12 Vectores y la geometría del espacio



Cada uno de estos engranajes tiene la forma de un hiperboloide, tipo de superficie que se estudiará en la sección 12.6. Esta forma permite a los engranajes transmitir movimiento entre ejes sesgados (ni paralelos ni intersecantes).

EN ESTE CAPÍTULO SE PRESENTARÁN los vectores y sistemas de coordenadas para el espacio tridimensional. Este será el fundamento para el estudio del cálculo de funciones de dos variables en el capítulo 14, porque la gráfica de estas funciones es una superficie en el espacio. En este capítulo se verá que los vectores ofrecen descripciones particularmente simples de rectas y planos en el espacio.

12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales

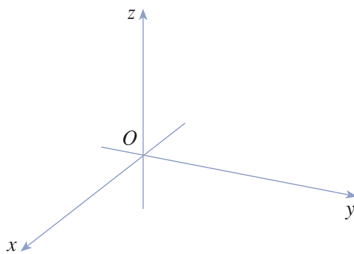


FIGURA 1
Ejes de coordenadas

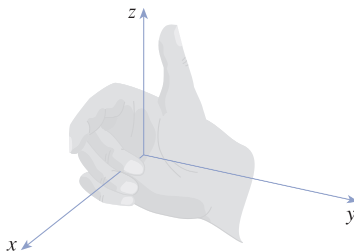


FIGURA 2
Regla de la mano derecha

Espacio tridimensional

Para localizar un punto en un plano se necesitan dos números. Se sabe que cualquier punto en el plano se puede representar como un par ordenado (a, b) de números reales, donde a es la coordenada x y b es la coordenada y. Por esta razón, se dice que un plano es bidimensional. Para localizar un punto en el espacio se requieren tres números. Se representa cualquier punto en el espacio mediante una terna ordenada (a, b, c) de números reales.

Para representar puntos en el espacio, primero se eligen un punto fijo O (el origen) y tres rectas dirigidas que pasan por O y que son perpendiculares entre sí, llamadas **ejes de coordenadas** y denominadas eje x, eje y y eje z. Usualmente los ejes x y y se conciben como horizontales y el eje z como vertical y la orientación de los ejes se traza como en la figura 1. La dirección del eje z se determina por la **regla de la mano derecha**, como se ilustra en la figura 2: si usted dobla los dedos de la mano derecha alrededor del eje z en la dirección de una rotación de 90° contrarreloj del eje x positivo al eje y positivo, su pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z.

Los tres ejes de coordenadas determinan los tres **planos coordenados** ilustrados en la figura 3(a). El plano xy es el plano que contiene los ejes x y y; el plano yz contiene los ejes y y z; el plano xz contiene los ejes x y z. Estos tres planos coordenados dividen el espacio en ocho partes, llamados **octantes**. El **primer octante**, al frente, está determinado por los ejes positivos.

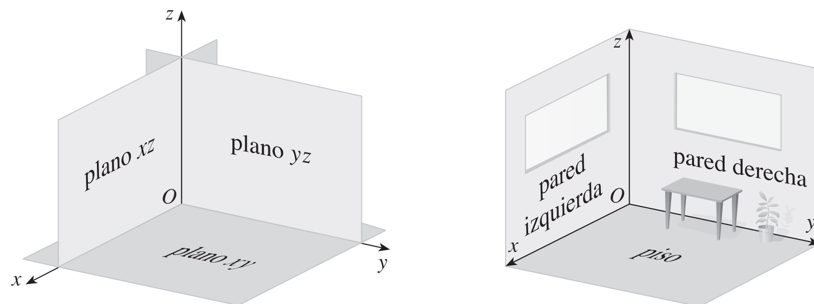


FIGURA 3 (a) Planos coordenados (b)

Como muchas personas tienen cierta dificultad para visualizar diagramas de figuras tridimensionales, podría resultar útil hacer lo siguiente [véase figura 3(b)]. Identifique cualquier esquina inferior de una habitación y denomínela el origen. La pared a su izquierda es el plano xz; la pared a su derecha, el plano yz y el piso, el plano xy. El eje x corre a lo largo de la intersección del piso y la pared izquierda. El eje y corre a lo largo de la intersección del piso y la pared derecha. El eje z corre hacia arriba desde el piso en dirección al techo a lo largo de la intersección de las dos paredes. Usted está situado en el primer octante y ahora puede imaginar otras siete habitaciones situadas en los otros siete octantes (tres en el mismo piso y cuatro en el piso inferior), todos ellos relacionados por el punto de esquina común O.

Ahora bien, si P es cualquier punto en el espacio, sea a la distancia (dirigida) del plano yz a P; b, la distancia del plano xz a P, y c la distancia del plano xy a P. Se representa el punto P con la terna ordenada (a, b, c) de números reales y se llaman a, b y c a las **coordenadas** de P; a es la coordenada x, b la coordenada y y c la coordenada z. Así, para localizar el punto (a, b, c) se comienza por el origen O y se desplaza a unidades a lo largo del eje x, luego b unidades en paralelo al eje y y, por último, c unidades en paralelo al eje z, como en la figura 4.

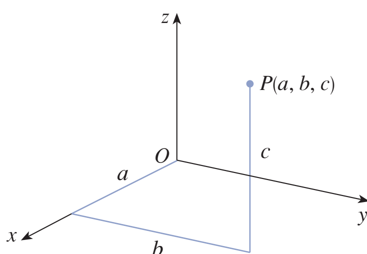


FIGURA 4

El punto $P(a, b, c)$ determina una caja rectangular como en la figura 5. Si se traza una recta perpendicular de P al plano xy se obtiene un punto Q con las coordenadas $(a, b, 0)$, llamado **proyección** de P en el plano xy. De igual manera, $R(0, b, c)$ y $S(a, 0, c)$ son las proyecciones de P en el plano yz y el plano xz, respectivamente.

Como ilustraciones numéricas, los puntos $(-4, 3, -5)$ y $(3, -2, -6)$ se trazan en la figura 6.

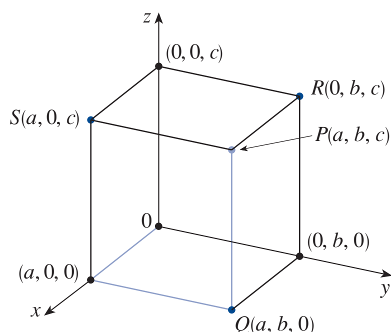
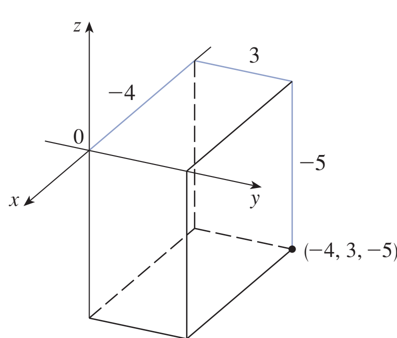


FIGURA 5



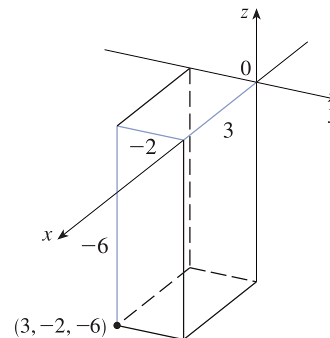


FIGURA 6

El producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales y se denota con $\mathbb{R}^3$. Se ha dado una correspondencia inyectiva entre puntos P en el espacio y ternas ordenadas (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$. Esto se llama **sistema de coordenadas rectangulares tridimensional**. Observe que, en términos de coordenadas, el primer octante puede describirse como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son todas positivas.

Superficies

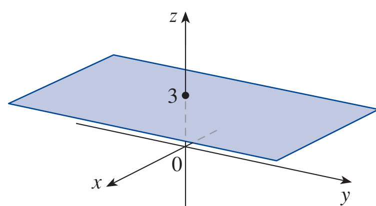
En geometría analítica bidimensional, la gráfica de una ecuación que implica x y y es una curva en $\mathbb{R}^2$. En geometría analítica tridimensional, una ecuación en x, y y z representa una *superficie* en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 1 ¿Qué superficies en $\mathbb{R}^3$ están representadas por las ecuaciones siguientes?

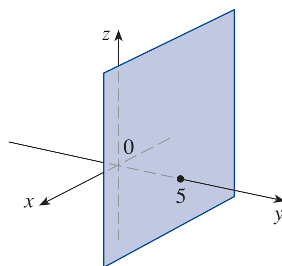
(a) $z = 3$ (b) $y = 5$

SOLUCIÓN

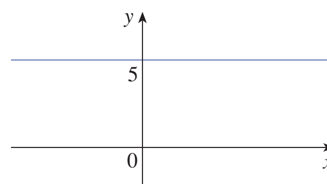
(a) La ecuación $z = 3$ representa el conjunto $\{(x, y, z) \mid z = 3\}$, el cual es el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuya coordenada z es 3 (x y y pueden ser cualquier valor). Este es el plano horizontal paralelo al plano xy y tres unidades arriba de él, como en la figura 7(a).



(a) $z = 3$, un plano en $\mathbb{R}^3$



(b) $y = 5$, un plano en $\mathbb{R}^3$



(c) $y = 5$, una línea en $\mathbb{R}^2$

FIGURA 7

(b) La ecuación $y = 5$ representa el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuya coordenada y es 5. Este es el plano vertical paralelo al plano xz y cinco unidades a la derecha de él, como en la figura 7(b). ■

NOTA Cuando se da una ecuación, debe deducirse del contexto si representa una curva en $\mathbb{R}^2$ o una superficie en $\mathbb{R}^3$. En el ejemplo 1, $y = 5$ representa un plano en $\mathbb{R}^3$, pero, desde luego, $y = 5$ también puede representar una recta en $\mathbb{R}^2$ si se trata con geometría analítica bidimensional. Véase la figura 7(b) y (c).

En general, si k es una constante, entonces $x = k$ representa un plano paralelo al plano yz, $y = k$ es un plano paralelo al plano xz y $z = k$ es un plano paralelo al plano xy. En la figura 5, las caras de la caja rectangular están formadas por los tres planos coordenados $x = 0$ (el plano yz), $y = 0$ (el plano xz) y $z = 0$ (el plano xy) y los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

EJEMPLO 2

(a) ¿Qué puntos (x, y, z) satisfacen las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{y} \quad z = 3?$$

(b) ¿Qué representa la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ como una superficie en $\mathbb{R}^3$?

SOLUCIÓN

(a) Como $z = 3$, los puntos se encuentran en el plano horizontal $z = 3$ del ejemplo 1(a). Como $x^2 + y^2 = 1$, los puntos se encuentran en el círculo con radio 1 y centro en el eje z. Véase la figura 8.

(b) Dado que $x^2 + y^2 = 1$, sin ninguna restricción en z, se ve que el punto (x, y, z) podría situarse en un círculo en cualquier plano horizontal $z = k$. Así, la superficie $x^2 + y^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ consta de todos los posibles círculos horizontales $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$ y es, por tanto, el cilindro circular con radio 1 cuyo eje es el eje z. Véase la figura 9.

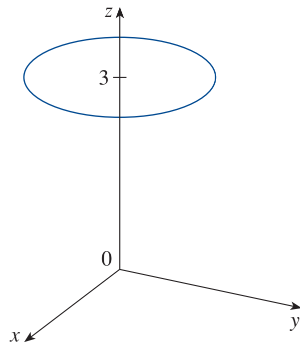


FIGURA 8
El círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 3$

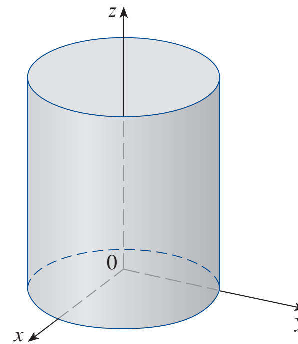


FIGURA 9
El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ ■

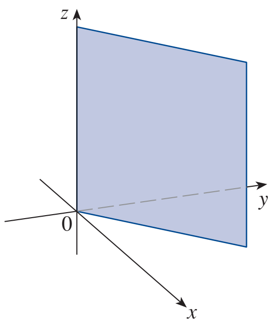


FIGURA 10
El plano $y = x$

EJEMPLO 3 Describa y trace la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $y = x$.

SOLUCIÓN Esta ecuación representa el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas x y y son iguales, es decir $\{(x, x, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$. Este es un plano vertical que interseca el plano xy en la recta $y = x$, $z = 0$. La porción de este plano que se ubica en el primer octante se traza en la figura 10. ■

Distancia y esferas

La fórmula conocida para la distancia entre dos puntos en un plano puede extenderse fácilmente a la fórmula tridimensional siguiente.

Fórmula de distancia en tres dimensiones La distancia $|P_1P_2|$ entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

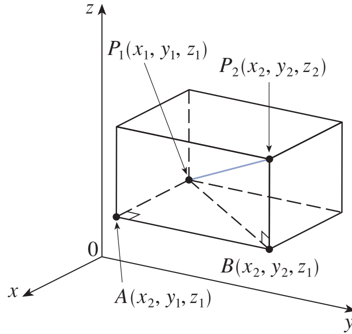


FIGURA 11

Para ver por qué esta fórmula es cierta, se ha construido una caja rectangular como en la figura 11, donde P_1 y P_2 son vértices opuestos y las caras de la caja son paralelas a los planos coordenados. Si $A(x_2, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_1)$ son los vértices de la caja indicada en la figura, entonces

$$|P_1A| = |x_2 - x_1| \qquad |AB| = |y_2 - y_1| \qquad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

Como los triángulos P_1BP_2 y P_1AB son rectángulos, dos aplicaciones del teorema de Pitágoras dan

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$

y

$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Si se combinan estas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2 &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

EJEMPLO 4 La distancia del punto $P(2, -1, 7)$ al punto $Q(1, -3, 5)$ es

$$|PQ| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 + 1)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$ ■

EJEMPLO 5 Determine una ecuación de una esfera con radio r y centro $C(h, k, l)$.

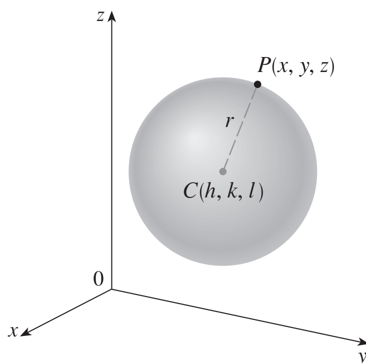


FIGURA 12

SOLUCIÓN Por definición, una esfera es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ cuya distancia desde C es r. (Véase la figura 12.) Así, P está en esa esfera si y solo si $|PC| = r$. Si se eleva al cuadrado ambos miembros, se tiene $|PC|^2 = r^2$ o

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$ ■

Será útil recordar el resultado del ejemplo 5.

Ecuación de una esfera Una ecuación de una esfera con centro $C(h, k, l)$ y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen O, entonces una ecuación de una esfera es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

EJEMPLO 6 Demuestre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ es la ecuación de una esfera y determine su centro y radio.

SOLUCIÓN Se puede reescribir la ecuación dada en la forma de una ecuación de una esfera si se completan los cuadrados:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8$$

Al comparar esta ecuación con la forma estándar, se ve que es la ecuación de una esfera con centro $(-2, 3, -1)$ y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ■

EJEMPLO 7 ¿Qué región en $\mathbb{R}^3$ está representada por las desigualdades siguientes?

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \qquad z \leqslant 0$$

SOLUCIÓN Las desigualdades

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$$

pueden reescribirse como

$$1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 2$$

así representan los puntos (x, y, z) cuya distancia desde el origen es de al menos 1 y a lo sumo 2. Pero también se da que $z \leqslant 0$, de manera que los puntos se sitúan en o debajo del plano xy. Así, las desigualdades dadas representan la región que se ubica entre (o en) las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y debajo de (o en) el plano xy. Esto se traza en la figura 13. ■

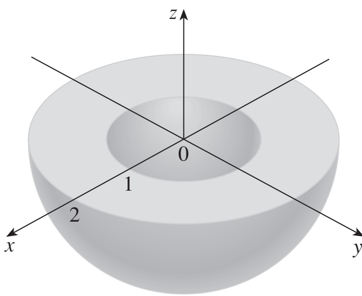


FIGURA 13

12.1 EJERCICIOS

1. Suponga que comienza en el origen, se mueve a lo largo del eje x una distancia de 4 unidades en la dirección positiva y después se mueve hacia abajo una distancia de 3 unidades. ¿Cuáles son las coordenadas de su posición?

2. Trace los puntos $(1, 5, 3)$, $(0, 2, -3)$, $(-3, 0, 2)$ y $(2, -2, -1)$ en un solo conjunto de ejes de coordenadas.

3. ¿Cuál de los puntos $A(-4, 0, -1)$, $B(3, 1, -5)$ y $C(2, 4, 6)$ está más cerca del plano yz? ¿Cuál de esos puntos se encuentra en el plano xz?

4. ¿Cuáles son las proyecciones del punto $(2, 3, 5)$ en los planos xy, yz y xz? Trace una caja rectangular con el origen y $(2, 3, 5)$ como vértices opuestos y con sus caras paralelas a los planos coordenados. Etiquete todos los vértices de la caja. Determine la longitud de la diagonal de la caja.

5. ¿Qué representa la ecuación $x = 4$ en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué representa en $\mathbb{R}^3$? Ilustre con diagramas.

6. ¿Qué representa la ecuación $y = 3$ en $\mathbb{R}^3$? ¿Qué representa $z = 5$? ¿Qué representa el par de ecuaciones $y = 3$, $z = 5$? En otras palabras, describa el conjunto de puntos (x, y, z) tal que $y = 3$ y $z = 5$. Ilustre con un diagrama.

7. Describa y trace la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $x + y = 2$.

8. Describa y trace la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $x^2 + z^2 = 9$.

9-10 Determine las longitudes de los lados del triángulo PQR. ¿Es este un triángulo rectángulo? ¿Es un triángulo isósceles?

9. $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$

10. $P(2, -1, 0)$, $Q(4, 1, 1)$, $R(4, -5, 4)$

---

11. Determine si estos puntos se encuentran en una línea recta.
(a) $A(2, 4, 2)$, $B(3, 7, —2)$, $C(1, 3, 3)$
(b) $D(0, —5, 5)$, $E(1, —2, 4)$, $F(3, 4, 2)$

12. Determine la distancia de $(3, 7, -5)$ a cada uno de los elementos siguientes.
(a) El plano xy
(b) El plano yz
(c) El plano xz
(d) El eje x
(e) El eje y
(f) El eje z

13. Determine una ecuación de la esfera con centro $(1, -4, 3)$ y radio 5. ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?

14. Determine una ecuación de la esfera con centro $(2, -6, 4)$ y radio 5. Describa su intersección con cada uno de los planos coordenados.

15. Determine una ecuación de la esfera que pasa por el punto $(4, 3, -1)$ y tiene centro $(3, 8, 1)$.

16. Determine una ecuación de la esfera que pasa por el origen y cuyo centro es $(1, 2, 3)$.

17-20 Demuestre que cada una de estas ecuaciones representa una esfera y determine su centro y radio.

17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15$

18. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 17 = 0$

19. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8x - 24z + 1$

20. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 10 + 6y + 12z$

---

21. (a) Pruebe que el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

(b) Determine las longitudes de las medianas del triángulo con vértices $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ y $C(4, 1, 5)$. (Una *mediana* de un triángulo es un segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.)

22. Determine una ecuación de una esfera si uno de sus diámetros tiene los puntos finales $(5, 4, 3)$ y $(1, 6, -9)$.

23. Determine ecuaciones de las esferas con centro $(2, -3, 6)$ que tocan (a) el plano xy, (b) el plano yz, (c) el plano xz.

24. Determine una ecuación de la esfera más grande con centro $(5, 4, 9)$ contenida en el primer octante.

25-38 Describa en palabras la región de $\mathbb{R}^3$ representada por cada ecuación (ecuaciones) o desigualdad.

25. $x = 9$

26. $x \geqslant -3$

27. $z < 8$

28. $z \geqslant -1$

29. $0 \leqslant z \leqslant 6$

30. $y^2 = 4$

31. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -1$

32. $x^2 + y^2 = 4$

33. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

34. $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$

35. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 5$

36. $y^2 + z^2 = 16$

37. $x^2 + z^2 \leqslant 9$

38. $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$

39-42 Escriba desigualdades para describir la región.

39. La región entre el plano yz y el plano vertical $x = 5$

40. El cilindro sólido que se encuentra sobre o debajo del plano $z = 8$ y sobre o arriba del disco en el plano xy con centro en el origen y radio 2

41. La región que consta de todos los puntos entre (pero no sobre) las esferas de radio r y R centradas en el origen, donde $r < R$

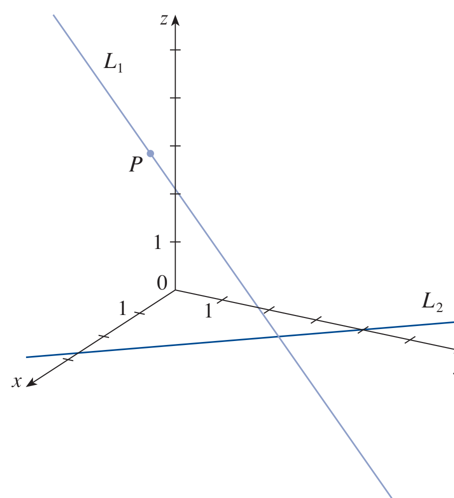
42. El hemisferio superior sólido de la esfera de radio 2 centrada en el origen

---

43. La figura muestra una recta L_1 en el espacio y una segunda recta L_2, la cual es la proyección de L_1 en el plano xy. (En otras palabras, los puntos en L_2 están directamente abajo, o arriba, de los puntos en L_1.)

(a) Determine las coordenadas del punto P en la recta L_1.

(b) Localice en el diagrama los puntos A, B y C, donde la recta L_1 interseca el plano xy, el plano yz y el plano xz, respectivamente.



44. Considere los puntos P tales que la distancia de P a $A(-1, 5, 3)$ sea el doble de la distancia de P a $B(6, 2, -2)$. Demuestre que el conjunto de todos esos puntos es una esfera y determine su centro y radio.

45. Determine una ecuación del conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos $A(-1, 5, 3)$ y $B(6, 2, -2)$. Describa ese conjunto.

46. Determine el volumen del sólido que se ubica dentro de las dos esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

47. Determine la distancia entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 4y + 4z - 11$.

48. Describa y trace un sólido con las propiedades siguientes. Cuando es iluminado por rayos paralelos al eje z, su sombra es un disco circular. Si los rayos son paralelos al eje y, su sombra es un cuadrado. Si los rayos son paralelos al eje x, su sombra es un triángulo isósceles.

12.2 Vectores

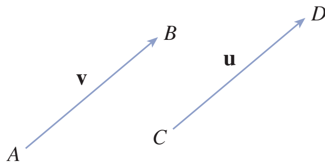


FIGURA 1
Vectores equivalentes

El término **vector** es usado por los científicos para indicar una cantidad (como desplazamiento, velocidad o fuerza) que posee tanto magnitud como dirección. Un vector suele representarse con una flecha o un segmento de recta dirigido. La longitud de la flecha representa la magnitud del vector y la flecha apunta en la dirección del vector. Se denota un vector imprimiendo una letra en negritas (**v**) o poniendo una flecha sobre la letra ($\vec{v}$).

Por ejemplo, suponga que una partícula se mueve a lo largo de un segmento de recta del punto A al punto B. El **vector de desplazamiento v** correspondiente, el cual se muestra en la figura 1, tiene el **punto inicial** A (la cola) y el **punto terminal** B (la punta), lo que se indica escribiendo $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. Observe que el vector $\mathbf{u} = \overrightarrow{CD}$ tiene la misma longitud y la misma dirección que **v** aunque esté en una posición diferente. Se dice que **u** y **v** son **equivalentes** (o **iguales**) y se escribe $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. El **vector cero**, denotado por **0**, tiene longitud 0. Este es el único vector sin dirección específica.

Combinación de vectores

Suponga que una partícula se mueve de A a B, así que su vector de desplazamiento es $\overrightarrow{AB}$. Luego la partícula cambia de dirección y se mueve de B a C, con vector de desplazamiento $\overrightarrow{BC}$ como en la figura 2. El efecto combinado de estos desplazamientos es que la partícula se ha movido de A a C. El vector resultante de desplazamiento $\overrightarrow{AC}$ se llama la *suma* de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y se escribe

C
B
A

FIGURA 2

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

En general, se comienza con los vectores **u** y **v**, primero se mueve **v** de tal forma que su cola coincida con la punta de **u** y se defina la suma de **u** y **v** como sigue.

> **Definición de la adición de vectores** Si **u** y **v** son vectores posicionados de tal manera que el punto inicial de **v** está en el punto terminal de **u**, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector del punto inicial de **u** al punto terminal de **v**.

La definición de la adición de vectores se ilustra en la figura 3. Usted puede ver por qué esta definición suele llamarse la **ley del triángulo**.

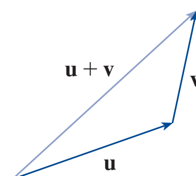


FIGURA 3
La ley del triángulo

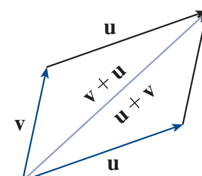


FIGURA 4
La ley del paralelogramo

En la figura 4 se comienza con los mismos vectores **u** y **v** como en la figura 3 y se traza otra copia de **v** con el mismo punto inicial que **u**. Al completar el paralelogramo, se observa que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Esto también da otra forma de construir la suma: si se coloca **u** y **v** de tal manera que comiencen en el mismo punto, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se ubica a lo largo de la diagonal del paralelogramo con **u** y **v** como lados. (Esto se llama **ley del paralelogramo**.)



FIGURA 5

EJEMPLO 1 Trace la suma de los vectores **a** y **b** que se muestran en la figura 5.

SOLUCIÓN Primero se mueve **b** y se coloca su cola en la punta de **a**, cuidando de trazar una copia de **b** que tenga la misma longitud y dirección. Luego se traza el vector

a + **b** [véase la figura 6(a)] comenzando en el punto inicial de **a** y terminando en el punto terminal de la copia de **b**.

O bien, se podría colocar **b** de tal modo que empiece donde comienza **a** y construir **a** + **b** por la ley del paralelogramo como en la figura 6(b).

TEC Visual 12.2 muestra cómo funcionan las leyes del triángulo y del paralelogramo para varios vectores **a** y **b**.

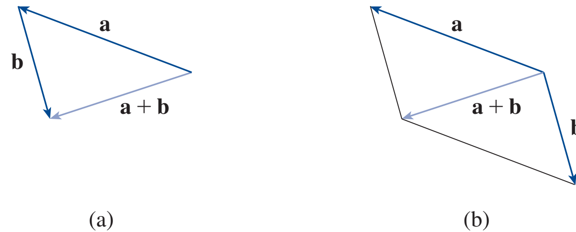


FIGURA 6 (a) (b)

Es posible multiplicar un vector por un número real c. (En este contexto al número real c se le llama **escalar** para distinguirlo de un vector.) Por ejemplo, si se quiere que $2\mathbf{v}$ sea un vector igual a $\mathbf{v} + \mathbf{v}$, el cual tiene la misma dirección que **v** pero es dos veces más largo. En general, un vector por un escalar se multiplica como sigue.

Definición de la multiplicación por un escalar Si c es un escalar y **v** un vector, entonces el **múltiplo escalar** $c\mathbf{v}$ es el vector cuya longitud es $|c|$ veces la longitud de **v** y cuya dirección es la misma que **v** si $c > 0$ y opuesta a **v** si $c < 0$. Si $c = 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Esta definición se ilustra en la figura 7. Vea que los números reales operan aquí como factores de escalamiento; por eso se llaman escalares. Observe que dos vectores diferentes de cero son **paralelos** si son múltiplos escalares entre sí. En particular, el vector $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ tiene la misma longitud que **v** pero apunta en la dirección opuesta. Se llama **negativo** de **v.**

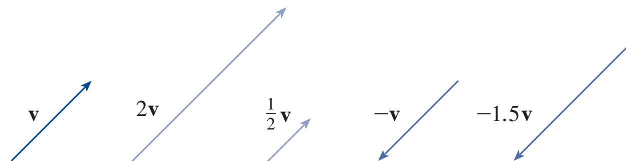


FIGURA 7
Múltiplos escalares de **v**

Por la **diferencia u − v** de dos vectores se entiende

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

Así, se puede construir $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ trazando primero el negativo de **v**, $-\mathbf{v}$, y sumándolo después a **u** por la ley del paralelogramo como en la figura 8(a). O bien, como $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$, el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, cuando se suma **v**, da **u**. Así, se podría construir $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ como en la figura 8(b) por la ley del triángulo. Observe que si **u** y **v** comienzan en el mismo punto inicial, entonces $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ une la punta de **v** con la punta de **u**.

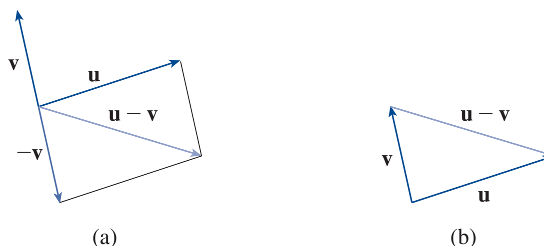


FIGURA 8
Trazo de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (a) (b)



FIGURA 9

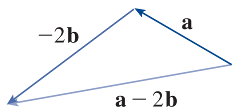


FIGURA 10

EJEMPLO 2 Si **a** y **b** son los vectores que se muestran en la figura 9, trace **a** − 2**b**.

SOLUCIÓN Primero se traza el vector −2**b** apuntando en la dirección opuesta a **b** y del doble de su largo. Se le coloca con la cola en la punta de **a** y luego se emplea la ley del triángulo para trazar **a** + (−2**b**) como en la figura 10. ■

Componentes

Para ciertos propósitos es mejor introducir un sistema de coordenadas y tratar los vectores algebraicamente. Si se coloca el punto inicial de un vector **a** en el origen de un sistema de coordenadas rectangular, el punto terminal de **a** tiene coordenadas de la forma (a_1, a_2) o (a_1, a_2, a_3), dependiendo de si el sistema de coordenadas es bi o tridimensional (véase la figura 11). Estas coordenadas se llaman los **componentes** de **a** y se escribe

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Se usa la notación $\langle a_1, a_2 \rangle$ para el par ordenado que se refiere a un vector para no confundirla con el par ordenado (a_1, a_2), que se refiere a un punto en el plano.

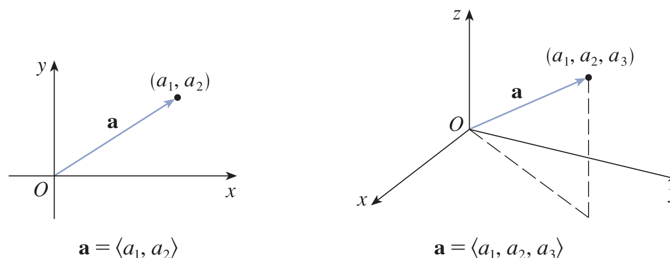


FIGURA 11

Por ejemplo, los vectores que aparecen en la figura 12 son todos ellos equivalentes al vector $\overrightarrow{OP} = \langle 3, 2 \rangle$ cuyo punto terminal es $P(3, 2)$. Lo que tienen en común es que el punto terminal se alcanza desde el punto inicial por un desplazamiento de tres unidades a la derecha y dos arriba. Todos estos vectores geométricos pueden concebirse como **representaciones** del vector algebraico $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$. La representación particular $\overrightarrow{OP}$ del origen al punto $P(3, 2)$ se llama **vector de posición** del punto P.

En tres dimensiones, el vector $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es el **vector de posición** del punto $P(a_1, a_2, a_3)$. (Véase la figura 13.) Considere cualquier otra representación $\overrightarrow{AB}$ de **a**, donde el punto inicial es $A(x_1, y_1, z_1)$ y el punto terminal es $B(x_2, y_2, z_2)$. Debe tener $x_1 + a_1 = x_2$, $y_1 + a_2 = y_2$, y $z_1 + a_3 = z_2$, de manera que $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, y $a_3 = z_2 - z_1$. Se tiene así el resultado siguiente.

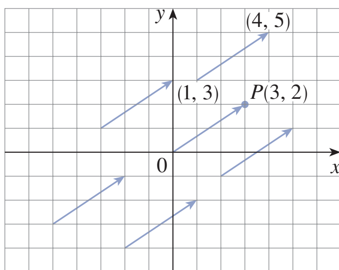


FIGURA 12
Representaciones de $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$

1 Dados los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, el vector **a** con representación $\overrightarrow{AB}$ es

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

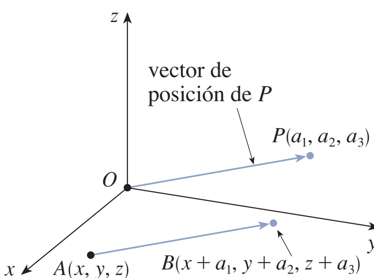


FIGURA 13
Representaciones de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

EJEMPLO 3 Determine el vector representado por el segmento de recta dirigida con punto inicial $A(2, -3, 4)$ y punto terminal $B(-2, 1, 1)$.

SOLUCIÓN Por (1), el vector correspondiente a $\overrightarrow{AB}$ es

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 2, 1 - (-3), 1 - 4 \rangle = \langle -4, 4, -3 \rangle$$ ■

La **magnitud** o **longitud** del vector **v** es la longitud de cualquiera de sus representaciones y se denota con el símbolo $|\mathbf{v}|$ o $\|\mathbf{v}\|$. Por el uso de la fórmula de la distancia para calcular la longitud de un segmento OP, se obtienen las fórmulas siguientes.

La longitud del vector bidimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La longitud del vector tridimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

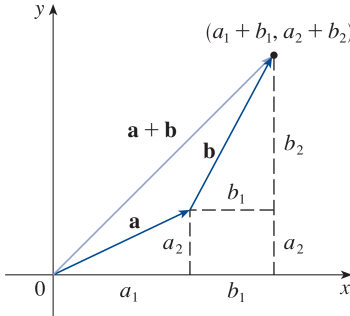


FIGURA 14

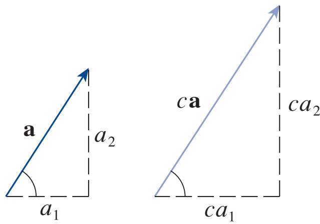


FIGURA 15

¿Cómo se suman algebraicamente los vectores? La figura 14 muestra que si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, la suma es $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, al menos para el caso en que los componentes son positivos. En otras palabras, *para sumar vectores algebraicos se suman los componentes correspondientes*. De igual manera, *para restar vectores se restan los componentes correspondientes*. En los triángulos similares de la figura 15 se ve que los componentes de $c\mathbf{a}$ son ca_1 y ca_2. Así, *para multiplicar un vector por un escalar se multiplica cada componente por ese escalar*.

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

De igual manera, para vectores tridimensionales,

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

EJEMPLO 3 Si $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, determine $|\mathbf{a}|$ y los vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{b}$ y $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.

SOLUCIÓN

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle \\ &= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} - \mathbf{b} &= \langle 4, 0, 3 \rangle - \langle -2, 1, 5 \rangle \\ &= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle\end{aligned}$$

$$3\mathbf{b} = 3\langle -2, 1, 5 \rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(5) \rangle = \langle -6, 3, 15 \rangle$$

$$\begin{aligned}2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} &= 2\langle 4, 0, 3 \rangle + 5\langle -2, 1, 5 \rangle \\ &= \langle 8, 0, 6 \rangle + \langle -10, 5, 25 \rangle = \langle -2, 5, 31 \rangle\end{aligned}$$

■

Vectores en n dimensiones se usan para enlistar varias cantidades en forma organizada. Por ejemplo, los componentes de un vector hexadimensional

$$\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle$$

podrían representar los precios de seis diferentes ingredientes requeridos para hacer un producto particular. Vectores tetradimensionales $\langle x, y, z, t \rangle$ se emplean en la teoría de la relatividad, donde los tres primeros componentes especifican una posición en el espacio y el cuarto representa el tiempo.

Se denota con V_2 el conjunto de todos los vectores bidimensionales y con V_3 el conjunto de todos los vectores tridimensionales. Más en general, después se tendrá que considerar el conjunto V_n de todos los vectores n-dimensionales. Un vector n-dimensional es una n-ada ordenada:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales llamados componentes de **a**. La adición y la multiplicación por un escalar se definen en términos de componentes justo como en los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Propiedades de los vectores Si **a**, **b** y **c** son vectores en V_n y c y d son escalares, entonces

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ **2.** $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ **4.** $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

5. $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$ **6.** $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$

7. $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$ **8.** $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Estas ocho propiedades de los vectores pueden verificarse rápidamente en términos geométricos o algebraicos. Por ejemplo, la propiedad 1 puede verse en la figura 4 (es equivalente a la ley del paralelogramo) o como sigue para el caso $n = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a}\end{aligned}$$

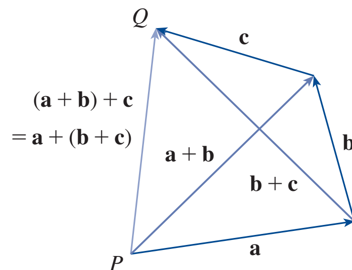


FIGURA 16

Se puede ver por qué la propiedad 2 (la ley asociativa) es cierta si se examina la figura 16 y se aplica la ley del triángulo varias veces: el vector $\overrightarrow{PQ}$ se obtiene ya sea construyendo primero $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y después sumando **c** o sumando **a** al vector $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Tres vectores en V_3 desempeñan un papel especial. Sea

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Estos vectores **i**, **j** y **k** se llaman **vectores de base estándar**. Tienen longitud 1 y apuntan en la dirección de los ejes x, y y z positivos. De igual forma, en dos dimensiones se definió $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. (Véase la figura 17.)

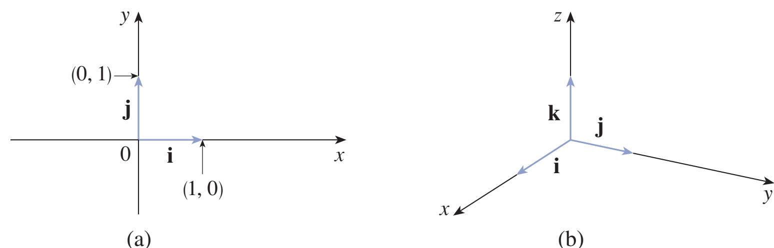
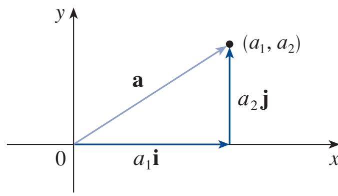
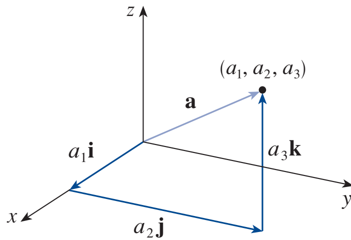


FIGURA 17
Vectores de base estándar en V_2 y V_3



(a) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



(b) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

FIGURA 18

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, se puede escribir

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle$$

$$= a_1\langle 1, 0, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1, 0 \rangle + a_3\langle 0, 0, 1 \rangle$$

2 $$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Así, cualquier vector en V_3 puede expresarse en términos de **i**, **j** y **k**. Por ejemplo,

$$\langle 1, -2, 6 \rangle = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

De igual modo, en dos dimensiones, se puede escribir

3 $$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

Véase la figura 18 para la interpretación geométrica de las ecuaciones 3 y 2 y compare con la figura 17.

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, exprese el vector $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ en términos de **i**, **j** y **k**.

SOLUCIÓN Usando las propiedades 1, 2, 5, 6 y 7 de los vectores, se tiene

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k})$$

$$= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$ ■

Gibbs

Josiah Willard Gibbs (1839-1903), profesor de física matemática en Yale College, publicó el primer libro sobre vectores, *Vector Analysis*, en 1881. Objetos más complicados, llamados cuaterniones, habían sido previamente inventados por Hamilton como herramientas matemáticas para describir el espacio, pero no eran fáciles de usar por los científicos. Los cuaterniones tienen una parte escalar y una parte vectorial. La idea de Gibbs fue usar la parte vectorial por separado. Maxwell y Heaviside tuvieron ideas similares, pero el enfoque de Gibbs ha resultado ser el modo más conveniente de estudiar el espacio.

Un **vector unitario** es un vector cuya longitud es 1. Por ejemplo, **i**, **j** y **k** son vectores unitarios. En general, si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces el vector unitario con igual dirección que **a** es

4 $$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Para comprobar esto, sea $c = 1/|\mathbf{a}|$. Entonces $\mathbf{u} = c\mathbf{a}$ y c es un escalar positivo, así que **u** tiene la misma dirección que **a**. Asimismo,

$$|\mathbf{u}| = |c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1$$

EJEMPLO 6 Determine el vector unitario en la dirección del vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN El vector dado tiene longitud

$$|2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

así, por la ecuación 4, el vector unitario con la misma dirección es

$$\tfrac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}$$ ■

Aplicaciones

Los vectores son útiles en muchos aspectos de la física y la ingeniería. En el capítulo 13 se verá cómo describen la velocidad y aceleración de objetos que se mueven en el espacio. Aquí se examinarán las fuerzas.

Una fuerza se representa con un vector porque tiene tanto magnitud (medida en libras o newtons) como dirección. Si varias fuerzas actúan sobre un objeto, la **fuerza resultante** experimentada por el objeto es la suma vectorial de esas fuerzas.

EJEMPLO 7 Una carga con masa de 100 kg cuelga de dos alambres, como se muestra en la figura 19. Determine las tensiones (fuerzas) $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en ambos alambres y las magnitudes de las tensiones.

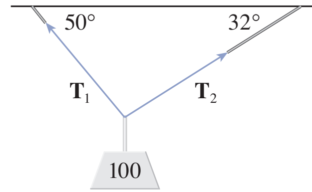


FIGURA 19

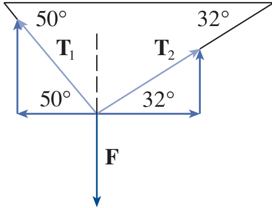


FIGURA 20

SOLUCIÓN Primero se expresa $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en términos de sus componentes horizontales y verticales. De la figura 20 se deduce que

5 $$\mathbf{T}_1 = -|\mathbf{T}_1| \cos 50° \,\mathbf{i} + |\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° \,\mathbf{j}$$

6 $$\mathbf{T}_2 = |\mathbf{T}_2| \cos 32° \,\mathbf{i} + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32° \,\mathbf{j}$$

La fuerza de gravedad que actúa sobre la carga es $\mathbf{F} = -100(9.8)\mathbf{j} = -980\mathbf{j}$. La resultante $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ de las tensiones sirve de contrapeso a $\mathbf{F}$, así que se debe tener

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = -\mathbf{F} = 980\mathbf{j}$$

Por tanto,

$$\left(-|\mathbf{T}_1| \cos 50° + |\mathbf{T}_2| \cos 32°\right) \mathbf{i} + \left(|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32°\right) \mathbf{j} = 980\,\mathbf{j}$$

Igualando componentes, se tiene

$$-|\mathbf{T}_1| \cos 50° + |\mathbf{T}_2| \cos 32° = 0$$

$$|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32° = 980$$

Si se despeja $|\mathbf{T}_2|$ en la primera de estas ecuaciones y se sustituye en la segunda, se obtiene

$$|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + \frac{|\mathbf{T}_1| \cos 50°}{\cos 32°} \operatorname{sen} 32° = 980$$

Así, las magnitudes de las tensiones son

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{980}{\operatorname{sen} 50° + \tan 32° \cos 50°} \approx 839 \text{ N}$$

y $$|\mathbf{T}_2| = \frac{|\mathbf{T}_1| \cos 50°}{\cos 32°} \approx 636 \text{ N}$$

Al sustituir estos valores en (5) y (6), se obtienen los vectores de tensión

$$\mathbf{T}_1 \approx -539\mathbf{i} + 643\mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_2 \approx 539\mathbf{i} + 337\mathbf{j}$$

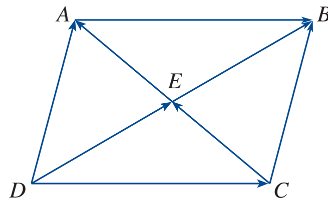


12.2 EJERCICIOS

1. ¿Las cantidades siguientes son vectores o escalares? Explique su respuesta.
(a) El costo de un boleto de cine
(b) La corriente de un río
(c) La trayectoria de vuelo inicial de Houston a Dallas
(d) La población mundial

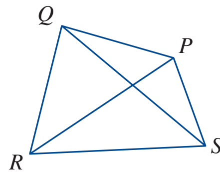
2. ¿Cuál es la relación entre el punto (4, 7) y el vector $\langle 4, 7\rangle$? Ilustre con un diagrama.

3. Mencione todos los vectores iguales en el paralelogramo que se muestra aquí.

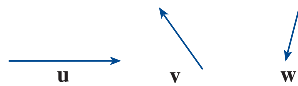


4. Escriba cada combinación de vectores como un vector.

(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$
(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$



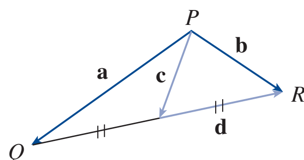
5. Copie los vectores de la figura y úselos para trazar los vectores siguientes.
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} + \mathbf{w}$
(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
(e) $\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$ (f) $\mathbf{u} - \mathbf{w} - \mathbf{v}$



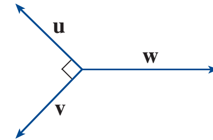
6. Copie los vectores de la figura y úselos para trazar los vectores siguientes.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
(c) $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ (d) $-3\mathbf{b}$
(e) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ (f) $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$



7. En la figura, la punta de **c** y la cola de **d** son ambos el punto medio de QR. Exprese **c** y **d** en términos de **a** y **b**.



8. Si los vectores en la figura satisfacen $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, ¿qué es $|\mathbf{w}|$?



9-14 Determine un vector **a** con representación dada por el segmento de recta dirigida $\overrightarrow{AB}$. Trace $\overrightarrow{AB}$ y la representación equivalente comenzando en el origen.

9. $A(-2, 1)$, $B(1, 2)$ **10.** $A(-5, -1)$, $B(-3, 3)$
11. $A(3, -1)$, $B(2, 3)$ **12.** $A(3, 2)$, $B(1, 0)$
13. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **14.** $A(0, 6, -1)$, $B(3, 4, 4)$

15-18 Determine la suma de los vectores dados e ilustre geométricamente.

15. $\langle -1, 5\rangle$, $\langle 6, -1\rangle$ **16.** $\langle 3, -3\rangle$, $\langle 1, 6\rangle$
17. $\langle 3, 0, 1\rangle$, $\langle 0, 8, 0\rangle$ **18.** $\langle 1, 3, -2\rangle$, $\langle 0, 0, 6\rangle$

19-22 Determine $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $4\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

19. $\mathbf{a} = \langle -3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 9, -1\rangle$
20. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
21. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$
22. $\mathbf{a} = \langle 8, 1, -4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -2, 1\rangle$

23-25 Determine un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

23. $\langle 6, -2\rangle$ **24.** $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
25. $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

26. Determine el vector con la misma dirección que $\langle 6, 2, -3\rangle$, pero con longitud 4.

27-28 ¿Cuál es el ángulo entre el vector dado y la dirección positiva del eje x?

27. $\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$ **28.** $8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

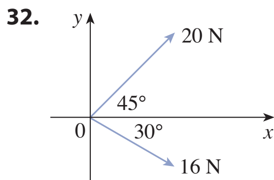
29. Si **v** se ubica en el primer cuadrante y hace un ángulo $\pi/3$ con el eje x positivo y $|\mathbf{v}| = 4$, determine **v** en forma de componente.

30. Si un niño tira de un trineo en la nieve sobre un camino parejo con una fuerza de 50 N ejercida a un ángulo de 38° sobre la horizontal, determine los componentes horizontal y vertical de la fuerza.

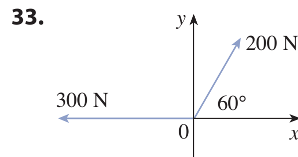
31. Un mariscal de campo lanza un balón con un ángulo de elevación de 40° y una rapidez de 60 pies/s. Determine los componentes horizontal y vertical del vector de velocidad.

32-33 Determine la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con el eje x positivo.

32.



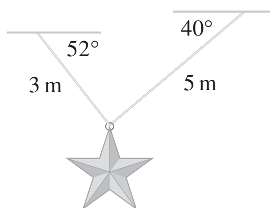
33.



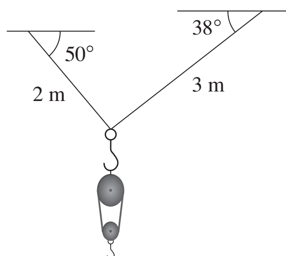
34. La magnitud de un vector de velocidad se llama *rapidez*. Suponga que un viento sopla *desde* la dirección N45°O con una rapidez de 50 km/h. (Esto significa que la dirección desde la que sopla el viento se encuentra 45° al oeste de la dirección norte.) Un piloto conduce un avión en la dirección N60°E a una rapidez propia (rapidez en aire quieto) de 250 km/h. El *curso real*, o *trayectoria*, del avión es la dirección de la resultante de los vectores de velocidad del avión y el viento. La *rapidez en tierra* del avión es la magnitud de la resultante. Determine el curso real y la rapidez en tierra del avión.

35. Una mujer camina al oeste en la cubierta de un barco a 5 km/h. El barco se dirige al norte a una rapidez de 35 km/h. Determine la rapidez y dirección de la mujer en relación con la superficie del agua.

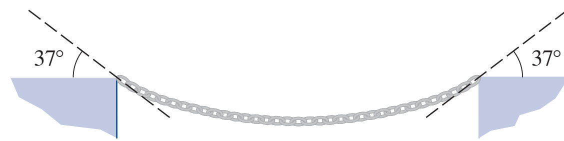
36. Sogas de 3 y 5 m de longitud son sujetadas a un elemento decorativo suspendido sobre una plaza pública. La decoración tiene una masa de 5 kg. Las sogas, sujetadas a diferentes alturas, forman ángulos de 52° y 40° con la horizontal. Determine la tensión en cada alambre y la magnitud de cada tensión.



37. Un aparejo de poleas está suspendido en una bodega con sogas de 2 y 3 m de longitud. El aparejo pesa 350 N. Las sogas, sujetadas a diferentes alturas, forman ángulos de 50° y 38° con la horizontal. Determine la tensión en cada soga y la magnitud de cada tensión.



38. La tensión **T** en cada extremo de una cadena tiene una magnitud de 25 N (véase la figura). ¿Cuál es el peso de la cadena?



39. Un barquero desea cruzar un canal de 3 km de ancho y quiere desembarcar en un punto 2 km río arriba de su punto de partida. La corriente del canal fluye a 3.5 km/h y la rapidez de la embarcación es de 13 km/h.
(a) ¿Qué dirección debe seguir el barquero?
(b) ¿Cuánto tiempo durará el trayecto?

40. Tres fuerzas actúan sobre un objeto. Dos de ellas están en un ángulo de 100° entre sí y tienen magnitudes de 25 N y 12 N. La tercera es perpendicular al plano de esas dos fuerzas y tiene una magnitud de 4 N. Calcule la magnitud de la fuerza que contrarrestaría exactamente a estas tres fuerzas.

41. Determine los vectores unitarios paralelos a la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (2, 4).

42. (a) Determine los vectores unitarios paralelos a la recta tangente a la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/6, 1)$.
(b) Determine los vectores unitarios perpendiculares a esa recta tangente.
(c) Trace la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ y los vectores de los incisos (a) y (b) comenzando en $(\pi/6, 1)$.

43. Si A, B y C son los vértices de un triángulo, determine

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

44. Sea C el punto del segmento de recta AB que está dos veces más lejos de B que de A. Si $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, y $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, demuestre que $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

45. (a) Trace los vectores $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 7, 1 \rangle$.
(b) Demuestre, por medio de un diagrama, que hay escalares s y t tales que $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.
(c) Use el diagrama para estimar los valores de s y t.
(d) Determine los valores exactos de s y t.

46. Suponga que **a** y **b** son vectores diferentes de cero no paralelos y que **c** es cualquier vector en el plano determinado por **a** y **b**. Dé un argumento geométrico para demostrar que **c** puede escribirse como $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para escalares adecuados s y t. Dé después un argumento usando componentes.

47. Si $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, describa el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = 1$.

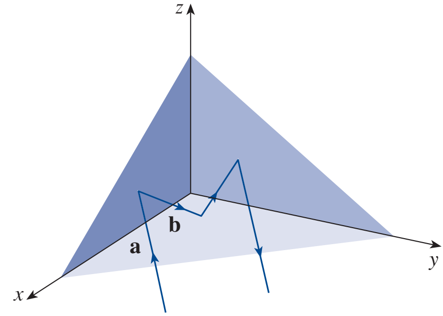
48. Si $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$, describa el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = k$, donde $k > |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

49. La figura 16 da una demostración geométrica de la propiedad 2 de los vectores. Use componentes para dar una prueba algebraica de este axioma para el caso $n = 2$.

50. Pruebe algebraicamente la propiedad 5 de los vectores para el caso $n = 3$. Use después triángulos similares para dar una prueba geométrica.

51. Use vectores para comprobar que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado y de la mitad de su longitud.

52. Suponga que tres planos coordenados han sido cubiertos con espejos y que un rayo luminoso dado por el vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ cae primeramente sobre el plano xz, como se muestra en la figura. Use el dato de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para demostrar que la dirección del rayo reflejado está dada por $\mathbf{b} = \langle a_1, -a_2, a_3 \rangle$. Deduzca que, después de ser reflejado por los tres espejos mutuamente perpendiculares, el rayo resultante es paralelo al rayo inicial. (Científicos espaciales estadounidenses emplearon este principio, junto con rayos láser y una serie de espejos angulares sobre la luna, para calcular con gran precisión la distancia de la Tierra a la luna.)



12.3 El producto punto

Hasta aquí se han sumado dos vectores y multiplicado un vector por un escalar. Surge la pregunta: ¿es posible multiplicar dos vectores de tal manera que su producto sea una cantidad útil? Un producto así es el producto punto, cuya definición aparece enseguida. Otro es el producto cruz, que se analizará en la sección siguiente.

1 Definición Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, **el producto punto** de **a** y **b** es el número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Así, para determinar el producto punto de **a** y **b**, se multiplican los componentes correspondientes y se suman. El resultado no es un vector. Es un número real, es decir un escalar. Por esta razón, al producto punto también se le conoce como **producto escalar** (o **producto interno**). Aunque la definición 1 se da para vectores tridimensionales, el producto punto de vectores bidimensionales se define en forma similar:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2$$

EJEMPLO 1

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

$$\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \left\langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \right\rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

$$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$

■

El producto punto obedece muchas de las leyes que se aplican a los productos ordinarios de números reales. Estas se enuncian en el teorema siguiente.

2 Propiedades del producto punto Si **a**, **b** y **c** son vectores en V_3 y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Estas propiedades se comprueban fácilmente usando la definición 1. Por ejemplo, he aquí las comprobaciones de las propiedades 1 y 3:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$

3.
$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}\end{aligned}$$

Las comprobaciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicios. ■

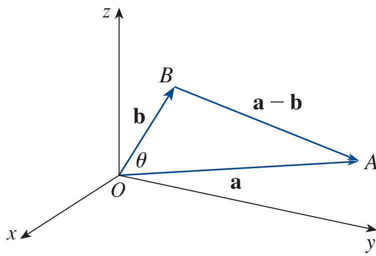


FIGURA 1

El producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ puede recibir una interpretación geométrica en términos del **ángulo** θ **entre a y b**, el cual se define como el ángulo entre las representaciones de **a** y **b** que parten del origen, donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. En otras palabras, θ es el ángulo entre los segmentos de recta $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de la figura 1. Observe que si **a** y **b** son vectores paralelos, entonces $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

La fórmula del teorema siguiente es usada por los físicos como la *definición* del producto punto.

3 Teorema Si θ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$

COMPROBACIÓN Si se aplica la ley de los cosenos al triángulo OAB de la figura 1, se obtiene

4 $$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\,|OB| \cos \theta$$

(Observe que la ley de los cosenos no deja de aplicarse en los casos límite en que $\theta = 0$ o π, o $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.) Pero $|OA| = |\mathbf{a}|$, $|OB| = |\mathbf{b}|$ y $|AB| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, así que la ecuación 4 se convierte en

5 $$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$

Si se usan las propiedades 1, 2 y 3 del producto punto, el miembro izquierdo de esta ecuación puede reescribirse como sigue:

$$\begin{aligned}|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación 5 da

$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$

Así, $$-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$

o $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta$$ ■

EJEMPLO 2 Si los vectores **a** y **b** tienen longitudes de 4 y 6 y el ángulo entre ellos es $\pi/3$, determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

SOLUCIÓN Usando el teorema 3, se tiene

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\pi/3) = 4 \cdot 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 12$$ ■

La fórmula del teorema 3 también permite determinar el ángulo entre dos vectores.

6 **Corolario** Si θ es el ángulo entre los vectores diferentes de cero **a** y **b**, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

EJEMPLO 3 Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$.

SOLUCIÓN Como

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

y como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

del corolario 6 se desprende que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Así, el ángulo entre **a** y **b** es

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 1.46 \quad (\text{o } 84°)$$ ■

Dos vectores diferentes de cero **a** y **b** se llaman **perpendiculares** u **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\theta = \pi/2$. Entonces, el teorema 3 da

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\pi/2) = 0$$

y, a la inversa, si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, entonces $\cos\theta = 0$, así que $\theta = \pi/2$. El vector cero **0** se considera perpendicular a todos los vectores. En consecuencia, se tiene el método siguiente para determinar si dos vectores son ortogonales.

7 Dos vectores **a** y **b** son ortogonales si y solo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

EJEMPLO 4 Demuestre que $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es perpendicular a $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Como

$$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = 0$$

estos vectores son perpendiculares por (7). ■

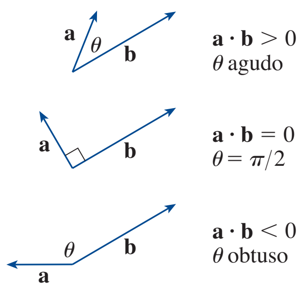


FIGURA 2

TEC Visual 12.3A muestra una animación de la figura 2.

Como $\cos\theta > 0$ si $0 \leqslant \theta < \pi/2$ y $\cos\theta < 0$ si $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, se ve que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es positivo para $\theta < \pi/2$ y negativo para $\theta > \pi/2$. Se puede concebir que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ mide el grado en que **a** y **b** apuntan en la misma dirección. El producto punto $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es positivo si **a** y **b** apuntan en la misma dirección general, 0 si son perpendiculares, y negativo si apuntan en direcciones generalmente opuestas (véase la figura 2). En el caso extremo en que **a** y **b** apuntan exactamente en la misma dirección, se tiene $\theta = 0$, así que $\cos\theta = 1$ y

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

Si **a** y **b** apuntan en direcciones exactamente opuestas, entonces se tiene $\theta = \pi$, así que $\cos\theta = -1$ y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.

Ángulos de dirección y cosenos directores

Los **ángulos de dirección** de un vector **a** diferente de cero son los ángulos α, β y γ (en el intervalo $[0, \pi]$) que **a** forma con los ejes x, y y z positivos, respectivamente. (Véase la figura 3.)

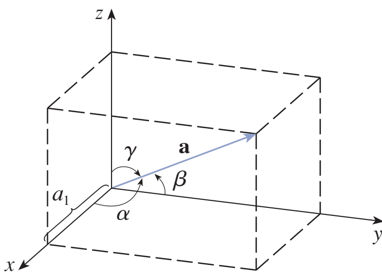


FIGURA 3

Los cosenos de estos ángulos de dirección, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, se llaman **cosenos directores** del vector **a**. Usando el corolario 6 con **b** reemplazada por **i**, se obtiene

8 $$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$$

(Esto también puede deducirse directamente de la figura 3.)

De igual manera, también se tiene

9 $$\cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Tras elevar al cuadrado las expresiones en las ecuaciones 8 y 9 y sumar, se observa que

10 $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

También se pueden usar las ecuaciones 8 y 9 para escribir

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle = \big\langle |\mathbf{a}|\cos\alpha, |\mathbf{a}|\cos\beta, |\mathbf{a}|\cos\gamma\big\rangle$$

$$= |\mathbf{a}|\langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$$

Por tanto,

11 $$\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$$

lo que indica que los cosenos directores de **a** son los componentes del vector unitario en la dirección de **a**.

EJEMPLO 5 Determine los ángulos de dirección del vector $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$.

SOLUCIÓN Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, las ecuaciones 8 y 9 dan

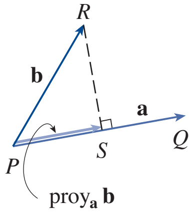
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

así que

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74^\circ \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58^\circ \qquad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37^\circ$$

■

TEC Visual 12.3B muestra cómo cambia la figura 4 cuando se varía **a** y **b**.



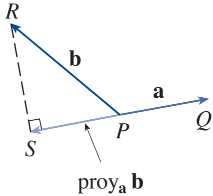


FIGURA 4
Proyecciones vectoriales

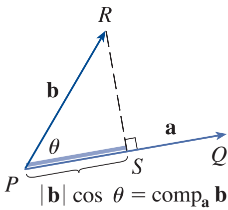


FIGURA 5
Proyección escalar

Proyecciones

La figura 4 muestra representaciones $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ de dos vectores **a** y **b** con el mismo punto inicial P. Si S es el pie de la perpendicular de R a la recta que contiene $\overrightarrow{PQ}$, entonces el vector con representación $\overrightarrow{PS}$ se llama **proyección vectorial** de **b** en **a** y se denota con proy$_{\mathbf{a}}$ **b**. (Usted puede concebir esto como una sombra de **b**.)

La **proyección escalar** de **b** en **a** (también llamada **componente de b a lo largo de a**) se define como la magnitud con signo de la proyección vectorial, la cual es el número $|\mathbf{b}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre **a** y **b**. (Véase la figura 5.) Esto se denota con comp$_{\mathbf{a}}$ **b**. Obsérvese que esta cantidad es negativa si $\pi/2 < \theta \leq \pi$. La ecuación

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{a}|\big(|\mathbf{b}|\cos\theta\big)$$

muestra que el producto punto de **a** y **b** puede interpretarse como la longitud de **a** multiplicada por la proyección escalar de **b** en **a**. Como

$$|\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{b}$$

el componente de **b** a lo largo de **a** puede calcularse tomando el producto punto de **b** con el vector unitario en la dirección de **a**. Estas ideas se resumen como sigue.

Proyección escalar de **b** en **a**: $\quad \text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$

Proyección vectorial de **b** en **a**: $\quad \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \left(\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}$

Observe que la proyección vectorial es la proyección escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección de **a**.

EJEMPLO 6 Determine la proyección escalar y la proyección vectorial de $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 2\rangle$ en $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1\rangle$.

SOLUCIÓN Como $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, la proyección escalar de **b** en **a** es

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

La proyección vectorial es esta proyección escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección de **a**:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}}\,\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{14}\,\mathbf{a} = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\right\rangle$$ ■

Un uso de las proyecciones ocurre en física al calcular trabajo. En la sección 6.4 se definió el trabajo hecho por una fuerza constante F al mover un objeto por una distancia d como $W = Fd$, pero esto solo se aplica cuando la fuerza se dirige a lo largo de la línea de movimiento del objeto. Suponga, sin embargo, que la fuerza constante es un vector $\mathbf{F} = \overrightarrow{PR}$ que apunta en otra dirección, como en la figura 6. Si esa fuerza mueve el objeto de P a Q, el **vector de desplazamiento** es $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$. El **trabajo** realizado por esta fuerza se define como el producto del componente de la fuerza a lo largo de **D** y la distancia recorrida:

$$W = \big(|\mathbf{F}|\cos\theta\big)|\mathbf{D}|$$

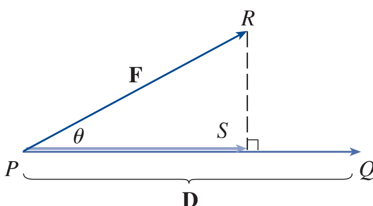


FIGURA 6

Pero por el teorema 3 se tiene

12 $$W = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$$

Así, el trabajo realizado por una fuerza constante **F** es el producto punto $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$, donde **D** es el vector de desplazamiento.

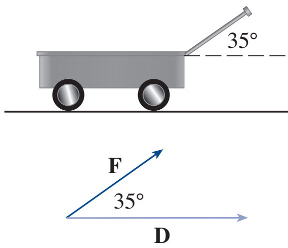


FIGURA 7

EJEMPLO 7 Una carretilla es tirada por una distancia de 100 m a lo largo de una trayectoria horizontal por una fuerza constante de 70 N. El tirador de la carretilla se mantiene en un ángulo de 35° sobre la horizontal. Determine el trabajo efectuado por la fuerza.

SOLUCIÓN Si **F** y **D** son los vectores de fuerza y de desplazamiento, como se ilustra en la figura 7, el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}|\cos 35°$$

$$= (70)(100)\cos 35° \approx 5734 \text{ N}\cdot\text{m} = 5734 \text{ J}$$ ■

EJEMPLO 8 Una fuerza está dada por un vector $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y mueve una partícula del punto $P(2, 1, 0)$ al punto $Q(4, 6, 2)$. Determine el trabajo realizado.

SOLUCIÓN El vector de desplazamiento es $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 5, 2\rangle$, así que por la ecuación 12 el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = \langle 3, 4, 5\rangle \cdot \langle 2, 5, 2\rangle$$

$$= 6 + 20 + 10 = 36$$

Si la unidad de longitud es metros y la magnitud de la fuerza se mide en newtons, entonces el trabajo realizado es 36 J. ■

12.3 EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de las expresiones siguientes tienen sentido? ¿Cuáles no lo tienen? Explique su respuesta.
(a) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$
(b) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$
(c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$
(d) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
(e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}$
(f) $|\mathbf{a}|\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

2-10 Determine $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

2. $\mathbf{a} = \langle 5, -2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$

3. $\mathbf{a} = \langle 1.5, 0.4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 6\rangle$

4. $\mathbf{a} = \langle 6, 4, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 5, -9\rangle$

5. $\mathbf{a} = \langle 1.9, 3.6, -1.1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2.1, -2.2, -4.1\rangle$

6. $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s\rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t\rangle$

7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$

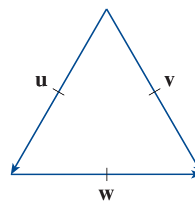
8. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

9. $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 4$, el ángulo entre **a** y **b** es 30°

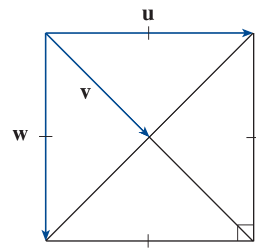
10. $|\mathbf{a}| = 80$, $|\mathbf{b}| = 50$, el ángulo entre **a** y **b** es $3\pi/4$

11-12 Si **u** es un vector unitario, determine $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$.

11.



12.



13. (a) Demuestre que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$.
(b) Demuestre que $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$.

14. Un vendedor ambulante vende a hamburguesas, b hot dogs y c refrescos en un día dado. Cobra \$4 por hamburguesa, \$2.50 por hot dog y \$1 por refresco. Si $\mathbf{A} = \langle a, b, c\rangle$ y $\mathbf{P} = \langle 4, 2.5, 1\rangle$, ¿cuál es el significado del producto punto $\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}$?

15-20 Determine el ángulo entre los vectores. (Determine primero una expresión exacta y después aproxime al grado más cercano.)

15. $\mathbf{a} = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1\rangle$

16. $\mathbf{a} = \langle -2, 5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 12\rangle$

17. $\mathbf{a} = \langle 1, -4, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 2, -2 \rangle$

18. $\mathbf{a} = \langle -1, 3, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 2, 1 \rangle$

19. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

21-22 Determine, al grado más cercano, los tres ángulos de cada triángulo con los vértices dados.

21. $P(2, 0)$, $Q(0, 3)$, $R(3, 4)$

22. $A(1, 0, -1)$, $B(3, -2, 0)$, $C(1, 3, 3)$

23-24 Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos.

23. (a) $\mathbf{a} = \langle 9, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 6 \rangle$
(b) $\mathbf{a} = \langle 4, 5, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 5 \rangle$
(c) $\mathbf{a} = -8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
(d) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

24. (a) $\mathbf{u} = \langle -5, 4, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -1 \rangle$
(b) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \langle c, c, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle c, 0, -c \rangle$

25. Use vectores para decidir si el triángulo con vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ y $R(6, -2, -5)$ es rectángulo.

26. Determine los valores de x tales que el ángulo entre los vectores $\langle 2, 1, -1 \rangle$ y $\langle 1, x, 0 \rangle$ sea de 45°.

27. Determine un vector unitario que sea ortogonal tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ como a $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

28. Determine dos vectores unitarios que formen un ángulo de 60°con $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

29-30 Determine el ángulo agudo entre las rectas.

29. $2x - y = 3$, $3x + y = 7$

30. $x + 2y = 7$, $5x - y = 2$

31-32 Determine los ángulos agudos entre las curvas en sus puntos de intersección. (El ángulo entre dos curvas es el ángulo entre sus rectas tangentes en el punto de intersección.)

31. $y = x^2$, $y = x^3$

32. $y = \operatorname{sen} x$, $\quad y = \cos x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

33-37 Determine los cosenos directores y ángulos de dirección del vector. (Dé los ángulos de dirección al grado más cercano.)

33. $\langle 2, 1, 2 \rangle$

34. $\langle 6, 3, -2 \rangle$

35. $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

36. $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. $\langle c, c, c \rangle$, $\quad$ donde $c > 0$

38. Si un vector tiene ángulos de dirección $\alpha = \pi/4$ y $\beta = \pi/3$, determine el tercer ángulo de dirección γ.

39-44 Determine las proyecciones escalar y vectorial de **b** en **a**.

39. $\mathbf{a} = \langle 4, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 7 \rangle$

40. $\mathbf{a} = \langle -1, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 5 \rangle$

41. $\mathbf{a} = \langle 4, 7, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 1 \rangle$

42. $\mathbf{a} = \langle -1, 4, 8 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 12, 1, 2 \rangle$

43. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

44. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{k}$

45. Demuestre que el vector $\text{ort}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ es ortogonal a **a**. (Esto se llama **proyección ortogonal** de **b**.)

46. Para los vectores del ejercicio 40, determine $\text{ort}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ e ilustre trazando los vectores **a**, **b**, $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ y $\text{ort}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

47. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, determine un vector **b** tal que $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 2$.

48. Suponga que **a** y **b** son vectores diferentes de cero.
(a) ¿En qué circunstancias $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$?
(b) ¿En qué circunstancias $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$?

49. Determine el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ que mueve un objeto del punto $(0, 10, 8)$ al punto $(6, 12, 20)$ a lo largo de una línea recta. La distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

50. Un camión de remolque arrastra un automóvil descompuesto a lo largo de una calle. La cadena forma un ángulo de 30° con la calle y la tensión en la cadena es de 1500 N. ¿Cuánto trabajo realiza el camión para tirar del auto a lo largo de 1 km?

51. Una mujer ejerce una fuerza horizontal de 140 N sobre una caja al subirla por una rampa de 4 m de largo e inclinada en un ángulo de 20° sobre la horizontal. Determine el trabajo realizado sobre la caja.

52. Determine el trabajo efectuado por una fuerza de 100 N que actúa en la dirección N50°W al mover un objeto 5 m al oeste.

53. Use una proyección escalar para demostrar que la distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by + c = 0$ es

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

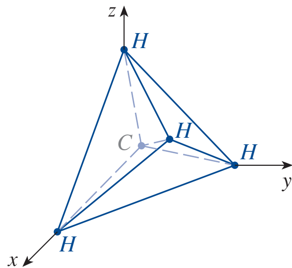
Emplee esta fórmula para hallar la distancia del punto $(-2, 3)$ a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

54. Si $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, demuestre que la ecuación vectorial $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$ representa una esfera y determine su centro y radio.

55. Determine el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus aristas.

56. Determine el ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

57. Una molécula de metano, CH_4, se compone de cuatro átomos de hidrógeno en los vértices de un tetraedro regular y un átomo de carbono en el centroide. El *ángulo de enlace* es el ángulo formado por la combinación H—C—H; este es el ángulo entre las rectas que unen el átomo de carbono con dos de los átomos de hidrógeno. Demuestre que el ángulo de enlace es de alrededor de 109.5°. [*Sugerencia*: tome los vértices del tetraedro como los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) y (1, 1, 1), como se muestra en la figura. Entonces el centroide es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.]



58. Si $\mathbf{c} = |\mathbf{a}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a}$, donde **a**, **b** y **c** son vectores diferentes de cero, demuestre que **c** biseca el ángulo entre **a** y **b**.

59. Compruebe las propiedades 2, 4 y 5 del producto punto (teorema 2).

60. Suponga que todos los lados de un cuadrilátero son iguales en longitud y que los lados opuestos son paralelos. Use métodos vectoriales para demostrar que las diagonales son perpendiculares.

61. Use el teorema 3 para comprobar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

62. La desigualdad del triángulo para vectores es

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

(a) Dé una interpretación geométrica de la desigualdad del triángulo.

(b) Emplee la desigualdad de Cauchy-Schwarz del ejercicio 61 para comprobar la desigualdad del triángulo. [*Sugerencia*: use el dato de que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ y emplee la propiedad 3 del producto punto.]

63. La ley del paralelogramo sostiene que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

(a) Dé una interpretación geométrica de la ley del paralelogramo.

(b) Compruebe la ley del paralelogramo. (Véase la sugerencia del ejercicio 62.)

64. Demuestre que si $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son ortogonales, entonces los vectores **u** y **v** deben tener la misma longitud.

65. Si θ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**, demuestre que

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \cdot \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cos^2 \theta$$

12.4 El producto cruz

Dados los dos vectores diferentes de cero $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, es muy útil poder determinar un vector **c** diferente de cero perpendicular tanto a **a** como a **b**, como se verá en la sección siguiente y en los capítulos 13 y 14. Si $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ es ese vector, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, y por tanto

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \tag{1}$$

$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \tag{2}$$

Para eliminar c_3 se multiplica (1) por b_3 y (2) por a_3 y se resta:

$$(a_1b_3 - a_3b_1)c_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 = 0 \tag{3}$$

La ecuación 3 tiene la forma $pc_1 + qc_2 = 0$, para la que una solución obvia es $c_1 = q$ y $c_2 = -p$. Así, una solución de (3) es

$$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2 \quad c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$$

Al sustituir estos valores en (1) y (2) se obtiene

$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

Esto significa que un vector perpendicular tanto a **a** como a **b** es

$$\langle c_1, c_2, c_3 \rangle = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

El vector resultante se llama *producto cruz* de **a** y **b** y se denota con $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Hamilton

El producto cruz fue inventado por el matemático irlandés sir William Rowan Hamilton (1805-1865), quien había creado un precursor de los vectores, llamado cuaterniones. Cuando tenía cinco años de edad, Hamilton ya sabía leer en latín, griego y hebreo. A los ocho años añadió el francés e italiano y a los diez ya sabía leer en árabe y sánscrito. A los 21, cuando aún era estudiante de licenciatura en el Trinity College de Dublín, ¡fue nombrado profesor de astronomía de la universidad y astrónomo real de Irlanda!

4 Definición Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, el **producto cruz** de **a** y **b** es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

Observe que el **producto cruz** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores **a** y **b**, a diferencia del producto punto, es un vector. Por esta razón también se le conoce como **producto vectorial**. Nótese que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se define solo para el caso en que **a** y **b** son *vectores tridimensionales*.

A fin de recordar con más facilidad la definición 4, se usa la notación de los determinantes. Un **determinante de orden 2** se define con

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(Multiplique las diagonales y reste.) Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

Un **determinante de orden 3** puede definirse en términos de determinantes de segundo orden como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Observe que cada término en el miembro derecho de la ecuación 5 involucra un número a_i en la primera fila del determinante y que a_i se multiplica por el determinante de segundo orden obtenido del miembro izquierdo eliminando la fila y columna en la que aparece a_i. Adviértase también el signo menos en el segundo término. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0 - 4) - 2(6 + 5) + (-1)(12 - 0) = -38$$

Si se reescribe ahora la definición 4 usando determinantes de segundo orden y los vectores de base estándar **i**, **j** y **k**, se verá que el producto cruz de los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \tag{6}$$

En vista de la semejanza entre las ecuaciones 5 y 6, a menudo se escribe

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Aunque la primera fila del determinante simbólico de la ecuación 7 consta de vectores, si se desarrolla como si fuera un determinante ordinario usando la regla de la ecuación 5,

se obtiene la ecuación 6. La fórmula simbólica de la ecuación 7 es probablemente la manera más fácil de recordar y calcular productos cruz.

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (-15 - 28)\,\mathbf{i} - (-5 - 8)\,\mathbf{j} + (7 - 6)\,\mathbf{k} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}$$ ■

EJEMPLO 2 Demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para cualquier vector $\mathbf{a}$ en V_3.

SOLUCIÓN Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2a_3 - a_3a_2)\,\mathbf{i} - (a_1a_3 - a_3a_1)\,\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\,\mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} - 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$ ■

Se construye el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ para que fuera perpendicular tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$. Esta es una de las propiedades más importantes de un producto cruz, así que enfatícelo y compruébelo en el teorema siguiente y dé una prueba formal.

> **8** **Teorema** El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$.

COMPROBACIÓN A fin de demostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$, se calcula su producto punto como sigue:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3$$

$$= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3$$

$$= 0$$

Un cálculo similar demuestra que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$. Por tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$. ■

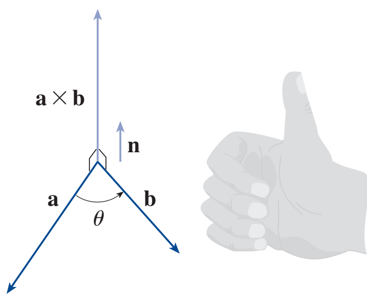


FIGURA 1
La regla de la mano derecha da la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se representan con segmentos de recta dirigida con el mismo punto inicial (como en la figura 1), el teorema 8 indica que el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ apunta en una dirección perpendicular al plano que pasa por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Resulta que la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dada por la *regla de la mano derecha*: si usted dobla los dedos de su mano derecha en la

dirección de una rotación (a través de un ángulo de menos de 180°) de **a** a **b**, su pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Ahora que se conoce la dirección del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, para completar su descripción geométrica falta su longitud $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Esta está dada por el teorema siguiente.

9 Teorema Si θ es el ángulo entre **a** y **b** (de tal manera que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), entonces

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

TEC Visual 12.4 muestra cómo cambia $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ al cambiar **b**.

COMPROBACIÓN De las definiciones del producto cruz y la longitud de un vector se deduce que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\
&\qquad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2\theta \qquad \text{(por el teorema 12.3.3)} \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

Si se toman las raíces cuadradas y se observa que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta$ porque $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$ cuando $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, se tiene

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$ ■

Caracterización geométrica de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Como un vector está completamente determinado por su magnitud y dirección, ahora puede decirse que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el vector perpendicular tanto a **a** como a **b**, cuya orientación es determinada por la regla de la mano derecha y cuya longitud es $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$. De hecho, así es justamente como los físicos *definen* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

10 Corolario Dos vectores diferentes de cero **a** y **b** son paralelos si y solo si

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

COMPROBACIÓN Dos vectores diferentes de cero **a** y **b** son paralelos si y solo si $\theta = 0$ o π. En cualquier caso, $\operatorname{sen}\theta = 0$, así que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$ y por tanto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. ■

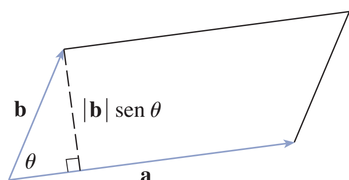


FIGURA 2

La interpretación geométrica del teorema 9 puede verse examinando la figura 2. Si **a** y **b** se representan con segmentos de recta dirigida con el mismo punto inicial, entonces determinan un paralelogramo con base $|\mathbf{a}|$, altura $|\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$ y área

$$A = |\mathbf{a}|\big(|\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta\big) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Se tiene entonces la siguiente manera de interpretar la magnitud de un producto cruz.

La longitud del producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

EJEMPLO 3 Determine un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular tanto a $\overrightarrow{PQ}$ como a $\overrightarrow{PR}$, y por tanto perpendicular al plano que pasa por P, Q y R. Por (12.2.1) se sabe que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\,\mathbf{i} + (5 - 4)\,\mathbf{j} + (-1 - 6)\,\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\,\mathbf{i} + (-1 - 4)\,\mathbf{j} + (1 - 6)\,\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se calcula el producto cruz de estos vectores:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-5 - 35)\,\mathbf{i} - (15 - 0)\,\mathbf{j} + (15 - 0)\,\mathbf{k} = -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

Así, el vector $\langle -40, -15, 15 \rangle$ es perpendicular al plano dado. Cualquier múltiplo escalar diferente de cero de este vector, como $\langle -8, -3, 3 \rangle$, también es perpendicular al plano. ■

EJEMPLO 4 Determine el área del triángulo con vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 se calculó que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$. El área del paralelogramo con lados adyacentes PQ y PR es la longitud de este producto cruz:

$$\left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

El área A del triángulo PQR es la mitad del área de este paralelogramo, es decir $\frac{5}{2}\sqrt{82}$. ■

Si se aplican los teoremas 8 y 9 a los vectores de base estándar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ usando $\theta = \pi/2$, se obtiene

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{I}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

Observe que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Así, el producto cruz no es conmutativo. Asimismo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

mientras que

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Así, la ley asociativa de la multiplicación no suele aplicarse; es decir, en general,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Sin embargo, algunas de las leyes usuales del álgebra *sí* se aplican a los productos cruz. El teorema siguiente resume las propiedades de los productos vectoriales.

11 Propiedades del producto cruz Si **a**, **b** y **c** son vectores y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Estas propiedades pueden comprobarse escribiendo los vectores en términos de sus componentes y usando la definición de producto cruz. Se da la comprobación de la propiedad 5 y se dejan las comprobaciones restantes como ejercicios.

COMPROBACIÓN DE LA PROPIEDAD 5 Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, entonces

$$\boxed{12} \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

■

Productos triples

El producto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que ocurre en la propiedad 5 se llama **triple producto escalar** de los vectores **a**, **b** y **c**. Observe en la ecuación 12 que se puede escribir el producto triple escalar como un determinante:

$$\boxed{13} \qquad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El significado geométrico del producto triple escalar puede verse considerando el paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c**. (Véase la figura 3.) El área de la base del paralelogramo es $A = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$. Si θ es el ángulo entre **a** y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, entonces la altura h del paralelepípedo es $h = |\mathbf{a}||\cos\theta|$. (Debe usar $|\cos\theta|$ en vez de $\cos\theta$ en el caso $\theta > \pi/2$.) Así, el volumen del paralelepípedo es

$$V = Ah = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{a}||\cos\theta| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

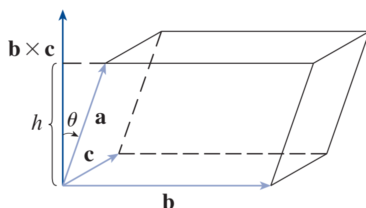


FIGURA 3

Se ha demostrado entonces la fórmula siguiente.

14 El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c** es la magnitud de su triple producto escalar:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Si se usa la fórmula en (14) y se descubre que el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0, entonces los vectores deben situarse en el mismo plano; es decir, son **coplanares**.

EJEMPLO 5 Use el triple producto escalar para demostrar que los vectores $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18 \rangle$ son coplanares.

SOLUCIÓN Use la ecuación 13 para calcular su producto triple escalar:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0$$

Así, por (14), el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0. Esto significa que **a**, **b** y **c** son coplanares. ■

El producto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que ocurre en la propiedad 6 se llama **triple producto vectorial** de **a**, **b** y **c**. La propiedad 6 se usará para derivar la primera ley de Kepler del movimiento de los planetas en el capítulo 13. Su comprobación se deja como ejercicio 50.

Momento de torsión

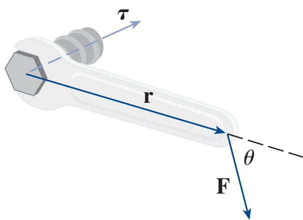


FIGURA 4

La idea de un producto cruz ocurre a menudo en física. En particular, se considera una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto dado por un vector de posición **r**. (Por ejemplo, si se aprieta un tornillo aplicando una fuerza a una llave como en la figura 4, se produce un efecto de torsión.) El momento de **torsión** $\boldsymbol{\tau}$ (en relación con el origen) se define como el producto cruz de los vectores de posición y de fuerza

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

y mide la tendencia del cuerpo a rotar alrededor del origen. La dirección del vector de momento de torsión indica el eje de la rotación. De acuerdo con el teorema 9, la magnitud del vector de momento de torsión es

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de posición y fuerza. Observe que el único componente de **F** que puede causar una rotación es el perpendicular a **r**, es decir $|\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$. La magnitud del momento de torsión es igual al área del paralelogramo determinada por **r** y **F**.

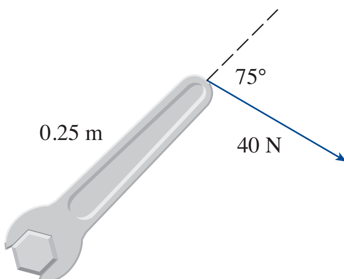


FIGURA 5

EJEMPLO 6 Un tornillo se aprieta aplicando una fuerza de 40 N a una llave de 0.25 m como se muestra en la figura 5. Determine la magnitud del momento de torsión alrededor del centro del tornillo.

SOLUCIÓN La magnitud del vector de momento de torsión es

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} 75^\circ = (0.25)(40) \operatorname{sen} 75^\circ$$
$$= 10 \operatorname{sen} 75^\circ \approx 9.66 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Si el tornillo es de rosca derecha, entonces el vector de momento de torsión es

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\,\mathbf{n} \approx 9.66\,\mathbf{n}$$

donde **n** es un vector unitario dirigido hacia el pie de la página (por la regla de la mano derecha). ■

12.4 EJERCICIOS

1-7 Determine el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y compruebe que es ortogonal tanto a **a** como a **b**.

1. $\mathbf{a} = \langle 2, 3, 0\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 1, 0, 5\rangle$
2. $\mathbf{a} = \langle 4, 3, -2\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 2, -1, 1\rangle$
3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
4. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
5. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = t\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$
7. $\mathbf{a} = \langle t, 1, 1/t\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle t^2, t^2, 1\rangle$

---

8. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Trace **a**, **b** y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vectores a partir del origen.

9-12 Determine el vector, no con determinantes, sino usando propiedades del producto cruz.

9. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$
10. $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{k})$
11. $(\mathbf{j} - \mathbf{i}) \times (\mathbf{k} - \mathbf{i})$
12. $(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{k})$

---

13. Indique si cada una de estas expresiones tiene sentido. De no ser así, explique por qué. Si lo tiene, indique si se trata de un vector o de un escalar.
    (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
    (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
    (e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ (f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

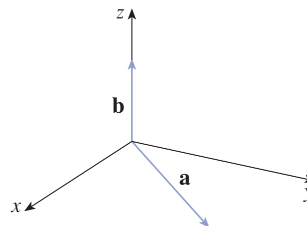
14-15 Determine $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ y establezca si $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se dirige a la página o fuera de la página.

14. $|\mathbf{v}| = 6$, $60°$, $|\mathbf{u}| = 5$

15. $|\mathbf{u}| = 7$, $150°$, $|\mathbf{v}| = 10$

---

16. La figura muestra un vector **a** en el plano xy y un vector **b** en la dirección de **k**. Sus longitudes son $|\mathbf{a}| = 3$ y $|\mathbf{b}| = 2$.
    (a) Determine $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
    (b) Use la regla de la mano derecha para decidir si los componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ son positivos, negativos o 0.



17. Si $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 2, 1\rangle$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.
18. Si $\mathbf{a} = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, 1, 3\rangle$, demuestre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.
19. Determine dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\langle 3, 2, 1\rangle$ como a $\langle -1, 1, 0\rangle$.
20. Determine dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ como a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
21. Demuestre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para cualquier vector **a** en V_3.
22. Demuestre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos los vectores **a** y **b** en V_3.

23-26 Compruebe la propiedad de productos cruz (teorema 11).

23. Propiedad 1: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
24. Propiedad 2: $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
25. Propiedad 3: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
26. Propiedad 4: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

---

27. Determine el área del paralelogramo con vértices $A(-3, 0)$, $B(-1, 3)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -1)$.
28. Determine el área del paralelogramo con vértices $P(1, 0\ 2)$, $Q(3, 3, 3)$, $R(7, 5, 8)$ y $S(5, 2, 7)$.

29-32 (a) Determine un vector diferente de cero ortogonal al plano que pasa por los puntos P, Q y R y (b) determine el área del triángulo PQR.

29. $P(1, 0, 1)$, $Q(-2, 1, 3)$, $R(4, 2, 5)$
30. $P(-1, 3, 1)$, $Q(0, 5, 2)$, $R(4, 3, -1)$

31. $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 3, 1)$

32. $P(2, -3, 4)$, $Q(-1, -2, 2)$, $R(3, 1, -3)$

33-34 Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c**.

33. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

34. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

35-36 Determine el volumen del paralelepípedo con extremos adyacentes PQ, PR y PS.

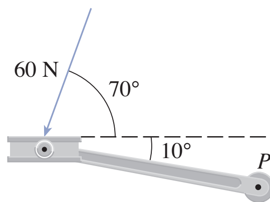
35. $P(-2, 1, 0)$, $Q(2, 3, 2)$, $R(1, 4, -1)$, $S(3, 6, 1)$

36. $P(3, 0\ 1)$, $Q(-1, 2, 5)$ $R(5, 1, -1)$, $S(0, 4, 2)$

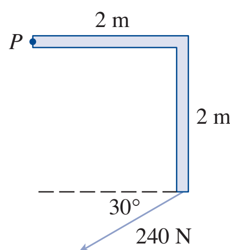
37. Use el triple producto escalar para comprobar que los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ son coplanares.

38. Use el triple producto escalar para determinar si los puntos $A(1, 3, 2)$, $B(3, -1, 6)$, $C(5, 2, 0)$ y $D(3, 6, -4)$ están en el mismo plano.

39. Un pedal de bicicleta es empujado por un pie con una fuerza de 60 N, como se muestra. El eje del pedal es de 18 cm de largo. Determine la magnitud del momento de torsión alrededor de P.



40. Encuentre la magnitud del momento de torsión alrededor de P si una fuerza de 240 N se aplica como se muestra.



41. Una llave de 30 cm de largo se tiende a lo largo del eje y positivo y sujeta un tornillo en el origen. Una fuerza se aplica en la dirección $\langle 0, 3, -4 \rangle$ al extremo de la llave. Determine la magnitud de la fuerza necesaria para proporcionar al tornillo un momento de torsión de $100\ \text{N} \cdot \text{m}$.

42. Sea $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ y sea **u** un vector con longitud 3 que parte del origen y rota en el plano xy. Determine los valores máximo y mínimo de la longitud del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. ¿En qué dirección apunta $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

43. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{3}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle 1, 2, 2 \rangle$, determine el ángulo entre **a** y **b**.

44. (a) Determine todos los vectores **v** tales que

$$\langle 1, 2, 1 \rangle \times \mathbf{v} = \langle 3, 1, -5 \rangle$$

(b) Explique por qué no hay ningún vector **v** tal que

$$\langle 1, 2, 1 \rangle \times \mathbf{v} = \langle 3, 1, 5 \rangle$$

45. (a) Sea P un punto no en la recta L que pasa por los puntos Q y R. Demuestre que la distancia d del punto P a la recta L es

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

donde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Use la fórmula del inciso (a) para determinar la distancia del punto $P(1, 1, 1)$ a la recta que pasa por $Q(0, 6, 8)$ y $R(-1, 4, 7)$.

46. (a) Sea P un punto no en el plano que pasa por los puntos Q, R y S. Demuestre que la distancia d de P al plano es

$$d = \frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

donde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QS}$, y $\mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Use la fórmula del inciso (a) para determinar la distancia del punto $P(2, 1, 4)$ al plano que pasa por los puntos $Q(1, 0, 0)$, $R(0, 2, 0)$, y $S(0, 0, 3)$.

47. Demuestre que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

48. Si $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, demuestre que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

49. Demuestre que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

50. Demuestre la propiedad 6 de los productos cruz, es decir

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

51. Use el ejercicio 50 para comprobar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

52. Demuestre que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

53. Suponga que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

(a) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, ¿de esto se sigue que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(b) Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, ¿de esto se sigue que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(c) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, ¿de esto se sigue que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

54. Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son vectores no coplanares, sea

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

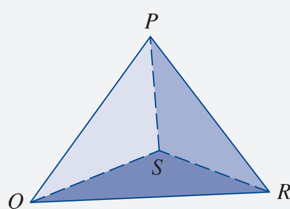
(Estos vectores ocurren en el estudio de la cristalografía. Vectores de la forma $n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + n_3\mathbf{v}_3$, donde cada n_i es un entero, forman una *red* para un cristal. Vectores escritos de modo similar en términos de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ y $\mathbf{k}_3$ forman la *red recíproca*.)

(a) Demuestre que $\mathbf{k}_i$ es perpendicular a $\mathbf{v}_j$ si $i \neq j$.

(b) Demuestre que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

(c) Demuestre que $\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) = \dfrac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO LA GEOMETRÍA DE UN TETRAEDRO



Un tetraedro es un sólido con cuatro vértices, P, Q, R y S, y cuatro caras triangulares, como se muestra en la figura.

1. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ vectores con longitudes iguales a las áreas de las caras opuestas a los vértices P, Q, R y S, respectivamente, y direcciones perpendiculares a las respectivas caras y que apuntan hacia fuera. Demuestre que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

2. El volumen V de un tetraedro es un tercio la distancia de un vértice a la cara opuesta multiplicado por el área de esa cara.

(a) Determine una fórmula para el volumen de un tetraedro en términos de las coordenadas de sus vértices P, Q, R y S.

(b) Determine el volumen del tetraedro cuyos vértices son $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(1, 1, 2)$ y $S(3, -1, 2)$.

3. Suponga que el tetraedro de la figura tiene un vértice trirrectangular S. (Esto significa que los tres ángulos en S son rectos.) Sean A, B y C las áreas de las tres caras que se encuentran en S, y sea D el área de la cara opuesta PQR. Usando o no el resultado del problema 1, demuestre que

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

(Esta es una versión tridimensional del teorema de Pitágoras.)

12.5 Ecuaciones de rectas y planos

Rectas

Una recta en el plano xy se determina cuando se dan un punto en la recta y la dirección de la recta (su pendiente o ángulo de inclinación). La ecuación de la recta puede escribirse entonces usando la forma punto-pendiente.

De igual manera, una recta L en el espacio tridimensional se determina cuando se conoce un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en L y la dirección de L. En tres dimensiones, la dirección de una recta es convenientemente descrita por un vector, así que sea $\mathbf{v}$ un vector paralelo a L. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en L, y sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de P_0 y P (es decir, que tienen representaciones $\overrightarrow{OP_0}$ y $\overrightarrow{OP}$). Si $\mathbf{a}$ es el vector con representación $\overrightarrow{P_0P}$, como en la figura 1, la ley del triángulo para la adición de vectores da $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$. Pero como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ son vectores paralelos, hay un escalar t tal que $\mathbf{a} = t\mathbf{v}$. Así,

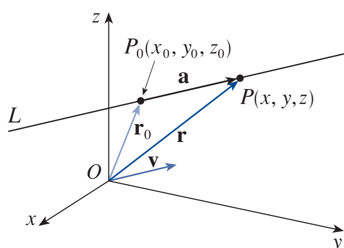


FIGURA 1

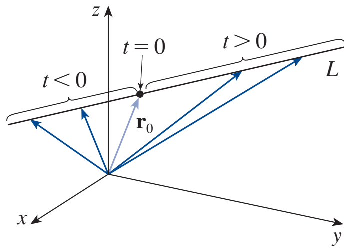


FIGURA 2

1 $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$$

la cual es una **ecuación vectorial** de L. Cada valor del **parámetro** t da el vector de posición $\mathbf{r}$ de un punto en L. En otras palabras, al variar t, la recta es trazada por la punta del vector $\mathbf{r}$. Como indica la figura 2, valores positivos de t corresponden a puntos en L situados a un lado de P_0, mientras que valores negativos de t corresponden a puntos situados al otro lado de P_0.

Si el vector $\mathbf{v}$ que da la dirección de la recta L se escribe en forma de componente como $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$, se tiene $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc\rangle$. También puede escribirse $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, así que la ecuación vectorial (1) se convierte en

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc\rangle$$

Dos vectores son iguales si y solo si sus componentes correspondientes son iguales. Por tanto, se tienen tres ecuaciones escalares:

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta L que pasa por el punto $P_0\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$. Cada valor del parámetro t da un punto (x, y, z) en L.

2 Ecuaciones paramétricas para una recta que pasa por el punto $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y paralela al vector de dirección $\langle a, b, c\rangle$ son

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

La figura 3 muestra la recta L del ejemplo 1 y su relación con el punto dado y con el vector que da su dirección.

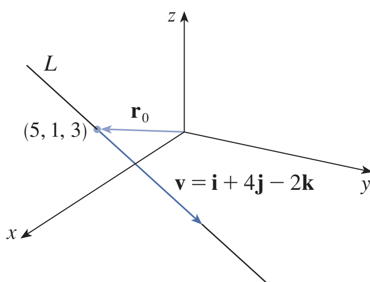


FIGURA 3

EJEMPLO 1

(a) Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto (5, 1, 3) y es paralela al vector $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
(b) Determine otros dos puntos en esa recta.

SOLUCIÓN

(a) Aquí $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3\rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, así que la ecuación vectorial (1) se convierte en

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

o $$\mathbf{r} = (5 + t)\,\mathbf{i} + (1 + 4t)\,\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

(b) La selección del valor paramétrico $t = 1$ da $x = 6$, $y = 5$ y $z = 1$, de modo que (6, 5, 1) es un punto en la recta. De igual forma, $t = -1$ da el punto $(4, -3, 5)$. ■

La ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de una recta no son únicas. Si se cambia el punto o el parámetro o se elige un vector paralelo diferente, entonces las ecuaciones cambian. Por ejemplo, si en lugar de (5, 1, 3), se elige el punto (6, 5, 1) en el ejemplo 1, entonces las ecuaciones paramétricas de la recta se convierten en

$$x = 6 + t \qquad y = 5 + 4t \qquad z = 1 - 2t$$

O si se mantiene el punto (5, 1, 3) pero se elige el vector paralelo $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, se llega a las ecuaciones

$$x = 5 + 2t \qquad y = 1 + 8t \qquad z = 3 - 4t$$

En general, si un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ se usa para describir la dirección de una recta L, los números a, b y c se llaman **números de dirección** de L. Como cualquier vector paralelo a $\mathbf{v}$ podría usarse también, se ve que tres números cualesquiera proporcionales a a, b y c podrían usarse igualmente como un conjunto de números de dirección para L.

Otra manera de describir una recta L es eliminar el parámetro t de las ecuaciones 2. Si ni a ni b ni c son 0, se puede despejar t en cada una de estas ecuaciones:

$$t = \frac{x - x_0}{a} \qquad t = \frac{y - y_0}{b} \qquad t = \frac{z - z_0}{c}$$

Al igualar los resultados, se obtiene

3
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones simétricas** de L. Observe que los números a, b y c que aparecen en los denominadores de las ecuaciones 3 son números de dirección de L, es decir componentes de un vector paralelo a L. Si de a, b y c alguno es 0, aun así se puede eliminar t. Por ejemplo, si $a = 0$, se podrían escribir las ecuaciones de L como

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Esto significa que L se sitúa en el plano vertical $x = x_0$.

La figura 4 muestra la recta L del ejemplo 2 y el punto P donde interseca el plano xy.

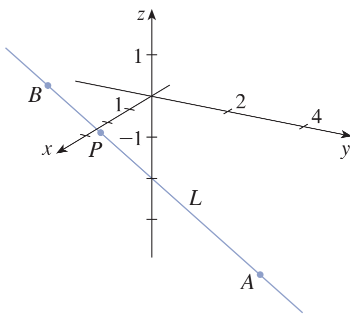


FIGURA 4

EJEMPLO 2

(a) Determine las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, -3)$ y $B(3, -1, 1)$.
(b) ¿En qué punto interseca esta recta el plano xy?

SOLUCIÓN

(a) No se da explícitamente un vector paralelo a la recta, pero observe que el vector $\mathbf{v}$ con representación $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a la recta y

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3)\rangle = \langle 1, -5, 4\rangle$$

Así, los números de dirección son $a = 1$, $b = -5$ y $c = 4$. Tomando el punto $(2, 4, -3)$ como P_0, las ecuaciones paramétricas (2) son

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t$$

y las ecuaciones simétricas (3) son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

(b) La recta interseca el plano xy cuando $z = 0$, así que se pone $z = 0$ en las ecuaciones simétricas y se obtiene

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{3}{4}$$

Esto da $x = \frac{11}{4}$ y $y = \frac{1}{4}$, de manera que la recta interseca el plano xy en el punto $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$. ■

En general, el procedimiento del ejemplo 2 muestra que los números de dirección de la recta L que pasa por los puntos $P_0\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y $P_1\langle x_1, y_1, z_1\rangle$ son $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ y $z_1 - z_0$, así que las ecuaciones simétricas de L son

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

A menudo se necesita una descripción no de una recta entera, sino de solo un segmento de recta. ¿Cómo podría describir, por ejemplo, el segmento de recta AB del ejemplo 2? Si pone $t = 0$ en las ecuaciones paramétricas del ejemplo 2(a), se obtiene el punto $(2, 4, -3)$, y si se pone $t = 1$ se obtiene $(3, -1, 1)$. Así, el segmento de recta AB se describe con las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

o con la correspondiente ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + t, 4 - 5t, -3 + 4t\rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

En general, por la ecuación 1 se sabe que la ecuación vectorial de una recta que pasa por (la punta de) el vector $\mathbf{r}_0$ en la dirección de un vector $\mathbf{v}$ es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Si la recta también pasa por (la punta de) $\mathbf{r}_1$, se puede tomar $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ y su ecuación vectorial es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

El segmento de recta de $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$ está dado por el intervalo paramétrico $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4 El segmento de recta de $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$ está dado por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Las rectas L_1 y L_2 del ejemplo 3, mostradas en la figura 5, son rectas sesgadas.

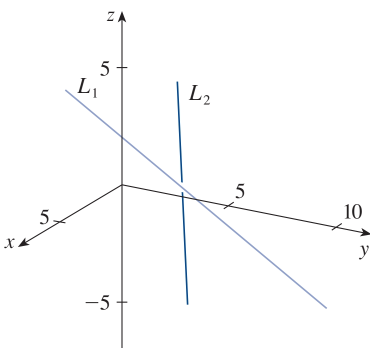


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Demuestre que las rectas L_1 y L_2 con ecuaciones paramétricas

$$L_1\text{:}\quad x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$L_2\text{:}\quad x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son **rectas sesgadas**; es decir, no intersecan ni son paralelas (y por tanto no están en el mismo plano).

SOLUCIÓN Las rectas no son paralelas porque los vectores de dirección correspondientes $\langle 1, 3, -1\rangle$ y $\langle 2, 1, 4\rangle$ no son paralelos. (Sus componentes no son proporcionales.) Si L_1 y L_2 tuvieran un punto de intersección, habría valores de t y s tales que

$$1 + t = 2s$$

$$-2 + 3t = 3 + s$$

$$4 - t = -3 + 4s$$

Pero si se resuelven las dos primeras ecuaciones, se obtiene $t = \frac{11}{5}$ y $s = \frac{8}{5}$, y estos valores no satisfacen la tercera ecuación. En consecuencia, no hay valores de t y s que satisfagan las tres ecuaciones, así que L_1 y L_2 no intersecan. Por tanto, L_1 y L_2 son rectas sesgadas. ■

Planos

Aunque una recta en el espacio está determinada por un punto y una dirección, un plano en el espacio es más difícil de describir. Un vector paralelo a un plano no basta para sugerir

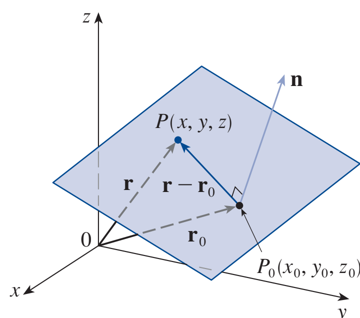


FIGURA 6

la "dirección" del plano, pero un vector perpendicular al plano especifica por completo su dirección. Así, un plano en el espacio está determinado por un punto $P_0\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ en el plano y un vector **n** ortogonal al plano. Este vector ortogonal **n** se llama **vector normal**. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en el plano, y sean $\mathbf{r}_0$ y **r** los vectores de posición de P_0 y P. Entonces, el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ está representado por $\overrightarrow{P_0P}$. (Véase la figura 6.) El vector normal **n** es ortogonal a todos los vectores en el plano dado. En particular, **n** es ortogonal a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, así que se tiene

5
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

lo que puede reescribirse como

6
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

La ecuación 5 o la ecuación 6 se llama **ecuación vectorial del plano**.

Para obtener una ecuación escalar del plano, se escribe $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Así, la ecuación vectorial (5) se convierte en

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

o

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

7 Una **ecuación escalar del plano** que pasa por el punto $P_0\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ con vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

EJEMPLO 4 Determine una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ con vector normal $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4\rangle$. Determine las intersecciones y trace el plano.

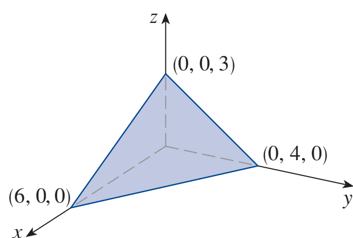


FIGURA 7

SOLUCIÓN Si se incluye $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y $z_0 = -1$ en la ecuación 7, se observa que una ecuación del plano es

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

o

$$2x + 3y + 4z = 12$$

Para determinar la intersección en x se establece $y = z = 0$ en esta ecuación y se obtiene $x = 6$. De igual modo, la intersección en y es 4 y la intersección en z es 3. Esto permite trazar la porción del plano que se sitúa en el primer octante (véase la figura 7). ■

Al reunir términos en la ecuación 7 como se hizo en el ejemplo 4, puede reescribir la ecuación de un plano como

8
$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. La ecuación 8 se llama **ecuación lineal** en x, y y z. A la inversa, puede demostrarse que si a, b y c no son 0, la ecuación lineal (8) representa un plano con vector normal $\langle a, b, c\rangle$. (Véase el ejercicio 83.)

La figura 8 muestra la porción del plano del ejemplo 5 encerrada por el triángulo PQR.

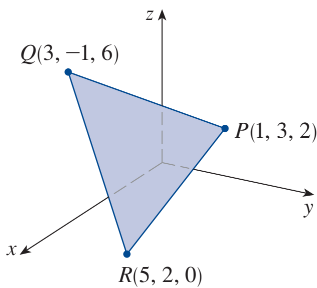


FIGURA 8

EJEMPLO 5 Determine una ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ y $R(5, 2, 0)$.

SOLUCIÓN Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ correspondientes a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4 \rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2 \rangle$$

Puesto que tanto $\mathbf{a}$ como $\mathbf{b}$ están en el plano, su producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal al plano y puede tomarse como el vector normal. Así,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} + 14\,\mathbf{k}$$

Con el punto $P(1, 3, 2)$ y el vector normal $\mathbf{n}$, una ecuación del plano es

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0$$

o

$$6x + 10y + 7z = 50$$

■

EJEMPLO 6 Determine el punto en el que la recta con ecuaciones paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, $z = 5 + t$ interseca el plano $4x + 5y - 2z = 18$.

SOLUCIÓN Se sustituyen las expresiones para x, y y z de las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano:

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$

Esto se simplifica en $-10t = 20$, así que $t = -2$. Por tanto, el punto de intersección ocurre cuando el valor paramétrico es $t = -2$. Entonces $x = 2 + 3(-2) = -4$, $y = -4(-2) = 8$, $z = 5 - 2 = 3$ y el punto de intersección es $(-4, 8, 3)$. ■

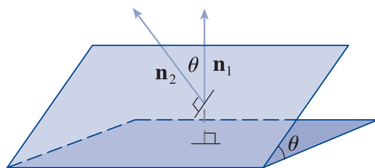


FIGURA 9

Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Por ejemplo, los planos $x + 2y - 3z = 4$ y $2x + 4y - 6z = 3$ son paralelos porque sus vectores normales son $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 4, -6 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$. Si dos planos no son paralelos, entonces intersecan en una línea recta y el ángulo entre los dos planos se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales (véase el ángulo θ de la figura 9).

La figura 10 muestra los planos del ejemplo 7 y su recta de intersección L.

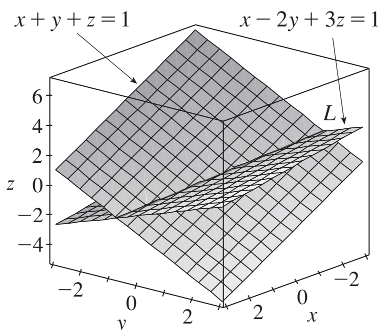


FIGURA 10

EJEMPLO 7

(a) Determine el ángulo entre los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$.

(b) Determine ecuaciones simétricas para la recta de intersección L de esos dos planos.

SOLUCIÓN

(a) Los vectores normales de estos planos son

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \qquad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3 \rangle$$

de manera que si θ es el ángulo entre los planos, el corolario 12.3.6 da

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1 + 1 + 1}\,\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^\circ$$

(b) Primero se debe hallar un punto en L. Por ejemplo, se puede determinar el punto en el que la recta interseca el plano xy estableciendo $z = 0$ en las ecuaciones de ambos

planos. Esto da las ecuaciones $x + y = 1$ y $x - 2y = 1$, cuya solución es $x = 1$, $y = 0$. Así, el punto (1, 0, 0) está en L.

Ahora se observa que como L está en ambos planos, es perpendicular a los dos vectores normales. Así, un vector $\mathbf{v}$ paralelo a L está dado por el producto cruz

Otra forma de determinar la recta de intersección es despejar dos de las variables de las ecuaciones de los planos en términos de la tercera, que puede tomarse como el parámetro.

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

y las ecuaciones simétricas de L pueden escribirse como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$ ■

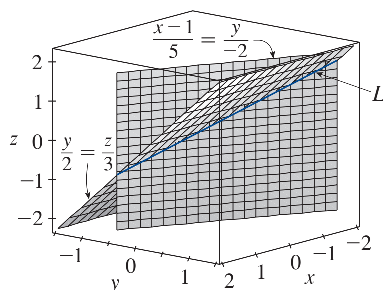


FIGURA 11

La figura 11 muestra cómo la recta L del ejemplo 7 también puede considerarse la recta de intersección de los planos deducida de sus ecuaciones simétricas.

NOTA Como una ecuación lineal en x, y y z representa un plano y dos planos no paralelos intersecan en una recta, de esto se sigue que dos ecuaciones lineales pueden representar una recta. Los puntos (x, y, z) que satisfacen tanto $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ como $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ están en esos dos planos, así que ese par de ecuaciones lineales representa la recta de intersección de los planos (si no son paralelos). Por ejemplo, en el ejemplo 7 la recta L fue dada como la recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$. Las ecuaciones simétricas que se determinaron para L podrían escribirse como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

lo que es de nuevo un par de ecuaciones lineales. Estas exhiben a L como la recta de intersección de los planos $(x-1)/5 = y/(-2)$ y $y/(-2) = z/(-3)$. (Véase la figura 11.)

En general, cuando se escriben las ecuaciones de una recta en la forma simétrica

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

se puede considerar la recta como la recta de intersección de los dos planos

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \qquad \text{y} \qquad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Distancias

EJEMPLO 8 Determine una fórmula para la distancia D de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$.

SOLUCIÓN Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ cualquier punto en el plano dado y sea $\mathbf{b}$ el vector correspondiente a $\overrightarrow{P_0P_1}$. Entonces

$$\mathbf{b} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$$

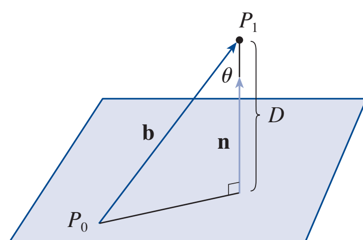


FIGURA 12

En la figura 12 puede verse que la distancia D de P_1 al plano es igual al valor absoluto de la proyección escalar de $\mathbf{b}$ en el vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$. (Véase la sección 12.3.) Así,

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como P_0 está en el plano, sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano, así que se tiene $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Por tanto, la fórmula para D puede escribirse como

9

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

EJEMPLO 9 Determine la distancia entre los planos paralelos $10x + 2y - 2z = 5$ y $5x + y - z = 1$.

SOLUCIÓN Se señala primero que los planos son paralelos porque sus vectores normales $\langle 10, 2, -2\rangle$ y $\langle 5, 1, -1\rangle$ son paralelos. Para determinar la distancia D entre los planos, se elige cualquier punto en un plano y se calcula su distancia al otro plano. En particular, si se incluye $y = z = 0$ en la ecuación del primer plano, se obtiene $10x = 5$ y $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ es un punto en este plano. Por la fórmula 9, la distancia entre $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ y el plano $5x + y - z - 1 = 0$ es

$$D = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Así, la distancia entre los planos es $\sqrt{3}/6$.

EJEMPLO 10 En el ejemplo 3 se demostró que las rectas

$$L_1\colon x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$L_2\colon x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son sesgadas. Determine la distancia entre ellas.

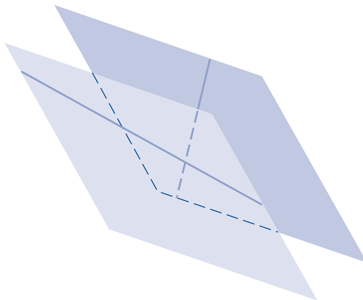


FIGURA 13
Las rectas sesgadas, como las del ejemplo 10, siempre están en planos paralelos (no idénticos).

SOLUCIÓN Como las dos rectas L_1 y L_2 son sesgadas, pueden verse como tendidas en dos planos paralelos P_1 y P_2. La distancia entre L_1 y L_2 es igual a la distancia entre P_1 y P_2, la que puede calcularse como en el ejemplo 9. El vector normal común para ambos planos debe ser ortogonal tanto a $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1\rangle$ (la dirección de L_1) como a $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4\rangle$ (la dirección de L_2). Así, un vector normal es

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Si se incluye $s = 0$ en las ecuaciones de L_2, se obtiene el punto $(0, 3, -3)$ en L_2, de modo que una ecuación para P_2 es

$$13(x - 0) - 6(y - 3) - 5(z + 3) = 0 \qquad \text{o} \qquad 13x - 6y - 5z + 3 = 0$$

Si ahora se establece $t = 0$ en las ecuaciones para L_1, se obtiene el punto $(1, -2, 4)$ en P_1. Así, la distancia entre L_1 y L_2 es igual a la distancia de $(1, -2, 4)$ a $13x - 6y - 5z + 3 = 0$. Por la fórmula 9, esta distancia es

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0.53$$

12.5 EJERCICIOS

1. Determine si cada uno de los enunciados siguientes es cierto o falso en $\mathbb{R}^3$.
(a) Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas.
(b) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.
(c) Dos planos paralelos a uno tercero son paralelos.
(d) Dos planos perpendiculares a uno tercero son paralelos.
(e) Dos rectas paralelas a un plano son paralelas.
(f) Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas.
(g) Dos planos paralelos a una recta son paralelos.
(h) Dos planos perpendiculares a una recta son paralelos.
(i) Dos planos se intersecan o son paralelos.
(j) Dos rectas se intersecan o son paralelas.
(k) Un plano y una recta intersecan o son paralelos.

2-5 Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta.

2. La recta que pasa por el punto $(6, -5, 2)$ y paralela al vector $\langle 1, 3, -\frac{2}{3}\rangle$

3. La recta que pasa por el punto $(2, 2.4, 3.5)$ y paralela al vector $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

4. La recta que pasa por el punto $(0, 14, -10)$ y paralela a la recta $x = -1 + 2t$, $y = 6 - 3t$, $z = 3 + 9t$

5. La recta que pasa por el punto $(1, 0, 6)$ y perpendicular al plano $x + 3y + z = 5$

6-12 Determine ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas para la recta.

6. La recta que pasa por el origen y el punto $(4, 3, -1)$

7. La recta que pasa por los puntos $(0, \frac{1}{2}, 1)$ y $(2, 1 -3)$

8. La recta que pasa por los puntos $(4, -6, 6)$ y $(2, 3, 1)$

9. La recta que pasa por los puntos $(8, 4, -1)$ y $(5, 4, 6)$

10. La recta que pasa por $(2, 1, 0)$ y perpendicular tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ como a $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. La recta que pasa por $(-6, 2, 3)$ y paralela a la recta $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y = z + 1$

12. La recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 1$ y $x - y + z = 1$

13. ¿La recta que pasa por $(-4, -6, 1)$ y $(-2, 0, -3)$ es paralela a la que pasa por $(10, 18, 4)$ y $(5, 3, 14)$?

14. ¿La recta que pasa por $(8, 0, 5)$ y $(4, 2, -3)$ es perpendicular a la que pasa por $(4, 3, 7)$ y $(7, 1, 3)$?

15. (a) Determine ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto $(1, -5, 6)$ y es paralela al vector $\langle -1, 2, -3\rangle$.
(b) Determine los puntos en los que la recta requerida en el inciso (a) interseca los planos coordenados.

16. (a) Determine ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(2, 4, 6)$ y es perpendicular al plano $x - y + 3z = 7$.
(b) ¿En qué puntos interseca esa recta los planos coordenados?

17. Encuentre una ecuación vectorial para el segmento de recta de $(6, -1, 9)$ a $(7, 6, 0)$.

18. Encuentre ecuaciones paramétricas para el segmento de recta de $(-2, 18, 31)$ a $(11, -4, 48)$.

19-22 Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, sesgadas o intersecantes. Si se intersecan, encuentre el punto de intersección.

19. L_1: $x = 3 + 2t, \quad y = 4 - t, \quad z = 1 + 3t$
L_2: $x = 1 + 4s, \quad y = 3 - 2s, \quad z = 4 + 5s$

20. L_1: $x = 4 - 6t, \quad y = 1 + 3t, \quad z = -5 + 2t$
L_2: $x = 5 + 18t, \quad y = 6 - 9t, \quad z = 3 - 6t$

21. L_1: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{-3}$
L_2: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-2}{-7}$

22. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$
L_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z}{7}$

23-40 Determine una ecuación del plano.

23. El plano que pasa por el punto $(6, 3, 2)$ y perpendicular al vector $\langle -2, 1, 5\rangle$

24. El plano que pasa por el punto $(4, 0, -3)$ y con vector normal $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. El plano que pasa por el punto $\left(-1, \frac{1}{2}, 3\right)$ y con vector normal $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

26. El plano que pasa por el punto $(2, 0, 1)$ y perpendicular a la recta $x = 3t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 4t$

27. El plano que pasa por el punto $(1, -1, -1)$ y paralelo al plano $5x - y - z = 6$

28. El plano que pasa por el punto $(3, -2, 8)$ y paralelo al plano $z = x + y$

29. El plano que pasa por el punto $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y paralelo al plano $x + y + z = 0$

30. El plano que contiene la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - 3t$ y paralelo al plano $5x + 2y + z = 1$

31. El plano que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$

32. El plano que pasa por el origen y los puntos $(3, -2, 1)$ y $(1, 1, 1)$

33. El plano que pasa por los puntos $(2, 1, 2)$, $(3, -8, 6)$ y $(-2, -3, 1)$

34. El plano que pasa por los puntos $(3, 0, -1)$, $(-2, -2, 3)$ y $(7, 1, -4)$

35. El plano que pasa por el punto $(3, 5, -1)$ y que contiene la recta $x = 4 - t$, $y = 2t - 1$, $z = -3t$

36. El plano que pasa por el punto $(6, -1, 3)$ y que contiene la recta con ecuaciones simétricas $x/3 = y + 4 = z/2$

37. El plano que pasa por el punto $(3, 1, 4)$ y que contiene la recta de intersección de los planos $x + 2y + 3z = 1$ y $2x - y + z = -3$

38. El plano que pasa por los puntos $(0, -2, 5)$ y $(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $2z = 5x + 4y$

39. El plano que pasa por el punto $(1, 5, 1)$ y es perpendicular a los planos $2x + y - 2z = 2$ y $x + 3z = 4$

40. El plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$ y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$

41-44 Use intersecciones para trazar el plano.

41. $2x + 5y + z = 10$

42. $3x + y + 2z = 6$

43. $6x - 3y + 4z = 6$

44. $6x + 5y - 3z = 15$

45-47 Determine el punto en el que la recta interseca el plano dado.

45. $x = 2 - 2t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + t; \quad x + 2y - z = 7$

46. $x = t - 1, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 3 - t; \quad 3x - y + 2z = 5$

47. $5x = y/2 = z + 2; \quad 10x - 7y + 3z + 24 = 0$

48. ¿Dónde interseca la recta que pasa por $(-3, 1, 0)$ y $(-1, 5, 6)$ el plano $2x + y - z = -2$?

49. Determine números de dirección para la recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x + z = 0$.

50. Determine el coseno del ángulo entre los planos $x + y + z = 0$ y $x + 2y + 3z = 1$.

51-56 Determine si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguno de los dos. En este caso, encuentre el ángulo entre ellos. (Redondee a un decimal.)

51. $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$

52. $9x - 3y + 6z = 2, \quad 2y = 6x + 4z$

53. $x + 2y - z = 2, \quad 2x - 2y + z = 1$

54. $x - y + 3z = 1, \quad 3x + y - z = 2$

55. $2x - 3y = z, \quad 4x = 3 + 6y + 2z$

56. $5x + 2y + 3z = 2, \quad y = 4x - 6z$

57-58 (a) Determine ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos y (b) encuentre el ángulo entre los planos.

57. $x + y + z = 1$, $x + 2y + 2z = 1$

58. $3x - 2y + z = 1$, $2x + y - 3z = 3$

59-60 Determine ecuaciones simétricas para la recta de intersección de los planos.

59. $4x - y + 2z = 3$, $2x + y + 7z = 9$

60. $z = 3x + 2y + 1$, $z = 4x + y + 3$

61. Determine una ecuación para el plano que consta de todos los puntos equidistantes de los puntos $(1, 0, -2)$ y $(3, 4, 0)$.

62. Determine una ecuación para el plano que consta de todos los puntos equidistantes de los puntos $(2, 5, 5)$ y $(-6, 3, 1)$.

63. Determine una ecuación del plano con intersección a en x, intersección b en y e intersección c en z.

64. (a) Encuentre el punto en el que intersecan las rectas dadas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$

$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s\langle -1, 1, 0 \rangle$$

(b) Halle una ecuación del plano que contiene estas rectas.

65. Determine ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, paralela al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

66. Determine ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, perpendicular a la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$ y que interseca esta recta.

67. ¿Cuáles de los cuatro planos siguientes son paralelos? ¿Algunos de ellos son idénticos?

P_1: $3x + 6y - 3z = 6$ $\quad$ P_2: $4x - 12y + 8z = 5$

P_3: $9y = 1 + 3x + 6z$ $\quad$ P_4: $z = x + 2y - 2$

68. ¿Cuáles de las cuatro rectas siguientes son paralelas? ¿Algunas de ellas son idénticas?

L_1: $x = 1 + 6t, \quad y = 1 - 3t, \quad z = 12t + 5$

L_2: $x = 1 + 2t, \quad y = t, \quad z = 1 + 4t$

L_3: $2x - 2 = 4 - 4y = z + 1$

L_4: $\mathbf{r} = \langle 3, 1, 5 \rangle + t\langle 4, 2, 8 \rangle$

69-70 Use la fórmula del ejercicio 12.4.45 para determinar la distancia del punto a la recta dada.

69. $(4, 1, -2)$; $\quad x = 1 + t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 - 3t$

70. $(0, 1, 3)$; $\quad x = 2t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 3 + t$

71-72 Determine la distancia del punto al plano dado.

71. $(-2, 2, 1)$, $\quad 3x - 5y + z = 5$

72. $(4, 0, 4)$, $\quad x - 6y + 3z = -25$

73-74 Determine la distancia entre los planos paralelos dados.

73. $2x - 3y + z = 4$, $4x - 6y + 2z = 3$

74. $6z = 4y - 2x$, $9z = 1 - 3x + 6y$

75. Demuestre que la distancia entre los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

76. Determine ecuaciones de los planos paralelos al plano $x + 2y - 2z = 1$ y a dos unidades de distancia de él.

77. Demuestre que las rectas con ecuaciones simétricas $x = y = z$ y $x + 1 = y/2 = z/3$ son sesgadas y determine la distancia entre ellas.

78. Halle la distancia entre las rectas sesgadas con ecuaciones paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ y $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

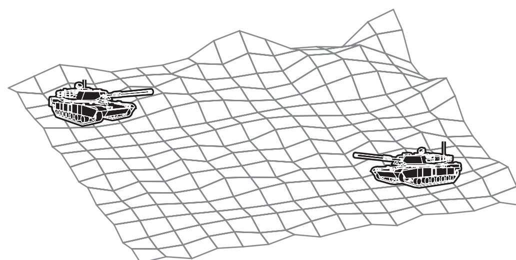
79. Sea L_1 la recta que pasa por el origen y el punto $(2, 0, -1)$. Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $(1, -1, 1)$ y $(4, 1, 3)$. Determine la distancia entre L_1 y L_2.

80. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $(1, 2, 6)$ y $(2, 4, 8)$. Sea L_2 la recta de intersección de los planos P_1 y P_2, donde P_1 es el plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y P_2 el plano que pasa por los puntos $(3, 2, -1)$, $(0, 0, 1)$ y $(1, 2, 1)$. Calcule la distancia entre L_1 y L_2.

81. Dos tanques participan en un simulacro de batalla. El tanque A está en el punto (325, 810, 561) y el tanque B en el punto (765, 675, 599).

(a) Determine ecuaciones paramétricas para la línea de mira entre los tanques.

(b) Si se divide la línea de mira en 5 segmentos iguales, las elevaciones del terreno en los cuatro puntos intermedios del tanque A al tanque B son 549, 566, 586 y 589. ¿Los tanques pueden verse entre sí?



82. Dé una descripción geométrica de cada familia de planos.

(a) $x + y + z = c$

(b) $x + y + cz = 1$

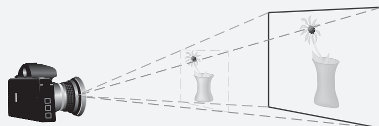
(c) $y \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta = 1$

83. Si a, b y c no son 0, demuestre que la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano y $\langle a, b, c\rangle$ es un vector normal al plano.

Sugerencia: suponga $a \neq 0$ y reescriba la ecuación en la forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

PROYECTO DE LABORATORIO PONER LA TRIDIMENSIONALIDAD EN PERSPECTIVA



Los programadores de gráficos para computadora enfrentan el mismo reto que los grandes pintores del pasado: cómo representar una escena tridimensional como una imagen plana en un plano bidimensional (una pantalla o un lienzo). Para crear la ilusión de perspectiva, en la que los objetos cercanos parecen más grandes que los lejanos, los objetos tridimensionales en la memoria de la computadora se proyectan en una ventana rectangular desde el punto de vista en el que se localiza el ojo, o la cámara. El volumen de visualización –la porción de espacio que será visible– es la región contenida por los cuatro planos que pasan por el punto de vista y un extremo de la ventana. Si los objetos en la escena se extienden más allá de esos cuatro planos, deben ser truncados antes de que datos de píxeles sean enviados a la pantalla. Por tanto, estos planos se llaman *planos de corte*.

1. Suponga que la pantalla está representada por un rectángulo en el plano yz con vértices $(0, \pm 400, 0)$ y $(0, \pm 400, 600)$ y que la cámara se encuentra en $(1000, 0, 0)$. Una recta L en la escena pasa por los puntos (230, –285, 102) y (860, 105, 264). ¿En qué puntos debe ser cortada L por los planos de corte?

2. Si el segmento de recta cortado se proyecta en la ventana, identifique el segmento de recta resultante.

3. Use ecuaciones paramétricas para trazar las orillas de la ventana, el segmento de recta cortado y su proyección en la ventana. Añada después las líneas de mira que unen el punto de vista con cada extremo de los segmentos cortados para comprobar que la proyección es correcta.

4. Un rectángulo con vértices $(621, -147, 206)$, $(563, 31, 242)$, $(657, -111, 86)$ y $(599, 67, 122)$ se agrega a la escena. La recta L interseca este rectángulo. Para hacer que el rectángulo parezca opaco, un programador puede usar *representación de líneas ocultas*, que elimina porciones de objetos que están detrás de otros objetos. Identifique la porción de L que debería eliminarse.

12.6 Cilindros y superficies cuádricas

Ya se examinaron dos tipos especiales de superficies: planos (en la sección 12.5) y esferas (en la sección 12.1). Aquí se investigarán otros dos tipos de superficies: cilindros y superficies cuádricas.

Para trazar la gráfica de una superficie es útil determinar las curvas de intersección de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Estas curvas se llaman **trazas** (o secciones transversales) de la superficie.

Cilindros

Un **cilindro** es una superficie que consta de todas las rectas (llamadas **generatrices**) paralelas a una recta dada y que pasan por una curva plana dada.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la superficie $z = x^2$.

SOLUCIÓN Observe que la ecuación de la gráfica, $z = x^2$, no implica a y. Esto significa que cualquier plano vertical con la ecuación $y = k$ (paralela al plano xz) interseca la gráfica en una curva con la ecuación $z = x^2$. Así, estas trazas verticales son parábolas. La figura 1 muestra cómo se forma la gráfica tomando la parábola $z = x^2$ en el plano xz y moviéndola en la dirección del eje y. Esta gráfica es una superficie, llamada **cilindro parabólico**, y está compuesta por numerosas copias infinitamente desplazadas de la misma parábola. Aquí las generatrices del cilindro son paralelas al eje y.

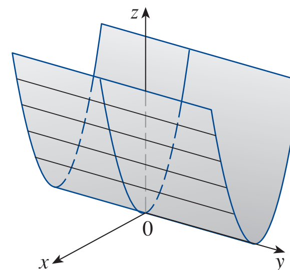


FIGURA 1
La superficie $z = x^2$ es un cilindro parabólico.

■

Se señala que la variable y está ausente en la ecuación del cilindro del ejemplo 1. Esto es habitual en una superficie cuyas generatrices son paralelas a uno de los ejes de coordenadas. Si una de las variables x, y y z falta en la ecuación de una superficie, esta es un cilindro.

EJEMPLO 2 Identifique y trace las superficies.

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y^2 + z^2 = 1$

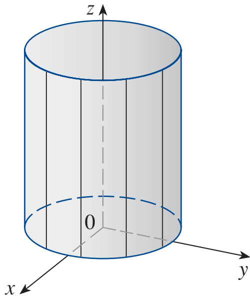


FIGURA 2
$x^2 + y^2 = 1$

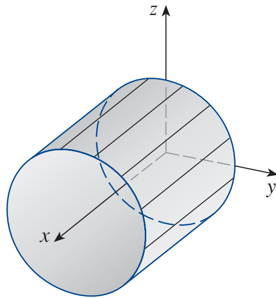


FIGURA 3
$y^2 + z^2 = 1$

SOLUCIÓN
(a) Como z está ausente y las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$ representan un círculo con radio 1 en el plano $z = k$, la superficie $x^2 + y^2 = 1$ es un cilindro circular cuyo eje es el eje z. (Véase la figura 2.) Aquí las generatrices son líneas verticales.

(b) En este caso falta x y la superficie es un cilindro circular cuyo eje es el eje x. (Véase la figura 3.) Esto se obtiene tomando el círculo $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$ en el plano yz y moviéndolo en paralelo al eje x. ■



NOTA Cuando se trata con superficies, es importante advertir que una ecuación como $x^2 + y^2 = 1$ representa un cilindro y no un círculo. La traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy es el círculo con ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Superficies cuádricas

Una **superficie cuádrica** es la gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y y z. La más general de esas ecuaciones es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde $A, B, C, \ldots, J$ son constantes, pero por traslación y rotación puede convertirse en una de estas dos formas estándar

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{o} \quad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Las superficies cuádricas son la contraparte en tres dimensiones de las secciones cónicas en el plano. (Véase la sección 10.5 para un repaso de las secciones cónicas.)

EJEMPLO 3 Use trazas para diagramar la superficie cuádrica con la ecuación

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

SOLUCIÓN Al sustituir $z = 0$ se halla que la traza en el plano xy es $x^2 + y^2/9 = 1$, la que se reconoce como una ecuación de una elipse. En general, la traza horizontal en el plano $z = k$ es

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

la cual es una elipse, siempre y cuando $k^2 < 4$, es decir $-2 < k < 2$.

De igual manera, las trazas verticales paralelas a los planos yz y xz también son elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2 \qquad x = k \qquad (\text{si } -1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9} \qquad y = k \qquad (\text{si } -3 < k < 3)$$

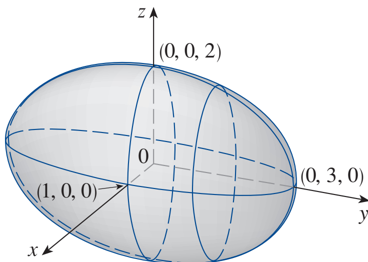


FIGURA 4
El elipsoide $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

La figura 4 muestra cómo al diagramar algunas trazas, se esboza la forma de la superficie. Esta se llama **elipsoide** porque todas sus trazas son elipses. Observe que es simétrica con respecto a cada plano coordenado; esto es un reflejo del hecho de que su ecuación solo implica potencias pares de x, y y z. ■

EJEMPLO 4 Use trazas para diagramar la superficie $z = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Si se establece $x = 0$, se obtiene $z = y^2$, así que el plano yz interseca la superficie en una parábola. Si se aplica $x = k$ (una constante), se obtiene $z = y^2 + 4k^2$.

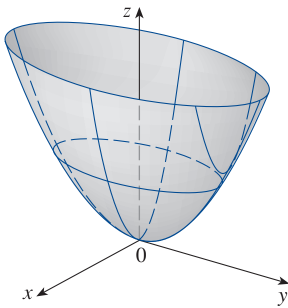


FIGURA 5
La superficie $z = 4x^2 + y^2$ es un paraboloide elíptico. Las trazas horizontales son elipses; las trazas verticales son parábolas.

Esto significa que si se corta la gráfica con cualquier plano paralelo al plano yz, se obtiene una parábola que se abre hacia arriba. De igual modo, si $y = k$, la traza es $z = 4x^2 + k^2$, la que es de nueva cuenta una parábola que se abre hacia arriba. Si se aplica $z = k$, se obtienen las trazas horizontales $4x^2 + y^2 = k$, que se reconocen como una familia de elipses. En conocimiento de las formas de las trazas, se puede diagramar la gráfica en la figura 5. A causa de las trazas elípticas y parabólicas, la superficie cuádrica $z = 4x^2 + y^2$ se llama **paraboloide elíptico**. ■

EJEMPLO 5 Trace la superficie $z = y^2 - x^2$.

SOLUCIÓN Las trazas en los planos verticales $x = k$ son las parábolas $z = y^2 - k^2$, que se abren hacia arriba. Las trazas en $y = k$ son las parábolas $z = -x^2 + k^2$, que se abren hacia bajo. Las trazas horizontales son $y^2 - x^2 = k$, una familia de hipérbolas. Se dibujan las familias de trazas en la figura 6 y se muestran cómo aparecen las trazas cuando se colocan en sus planos correctos en la figura 7.

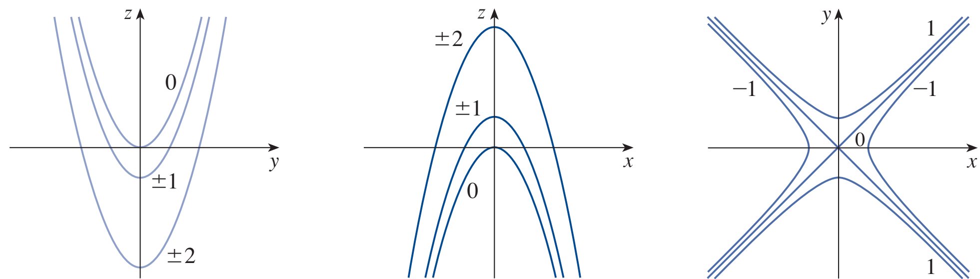


FIGURA 6
Las trazas verticales son parábolas; las trazas horizontales son hipérbolas. Todas las trazas se rotulan con el valor de k.

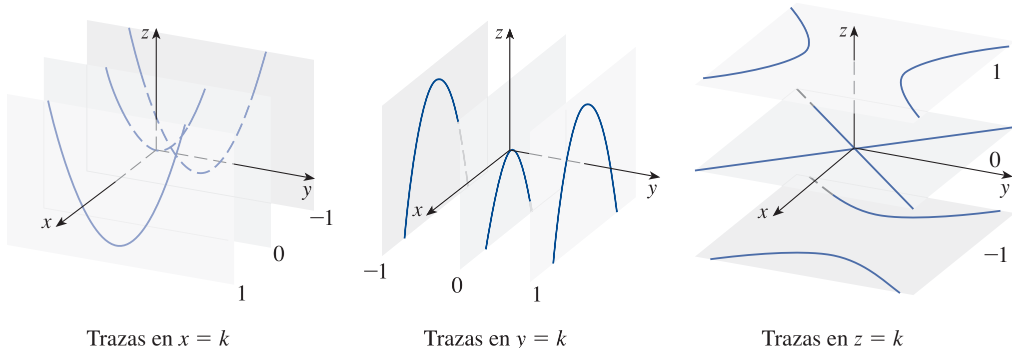


FIGURA 7
Trazas desplazadas a sus planos correctos

TEC En Module 12.6A puede investigar cómo las trazas determinan la forma de una superficie.

En la figura 8 se reúnen las trazas de la figura 7 para formar la superficie $z = y^2 - x^2$, un **paraboloide hiperbólico**. Observe que la forma de la superficie cerca del origen se asemeja a la de una silla de montar. Esta superficie se investigará más a fondo en la sección 14.7 cuando se analicen los puntos de silla.

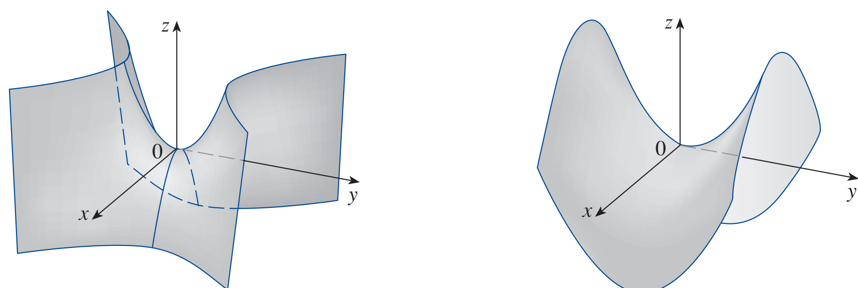


FIGURA 8
Dos vistas de la superficie $z = y^2 - x^2$, un paraboloide hiperbólico

■

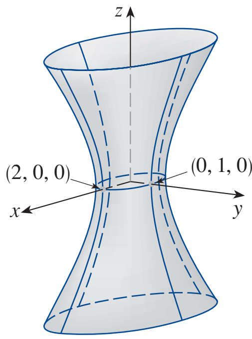


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Trace la superficie $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

SOLUCIÓN La traza en cualquier plano horizontal $z = k$ es la elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

pero las trazas en los planos xz y yz son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \quad x = 0$$

Esta superficie se llama **hiperboloide de una hoja** y se representa en la figura 9. ■

La idea de usar trazas para dibujar una superficie se emplea en el software de graficación tridimensional. En la mayoría de esos programas, las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores igualmente espaciados de k y partes de la gráfica se omiten usando la eliminación de líneas ocultas. La tabla 1 muestra gráficos elaborados en computadora de los seis tipos básicos de superficies cuádricas en forma estándar. Todas las superficies son simétricas con respecto al eje z. Si una superficie cuádrica es simétrica en relación con un eje diferente, su ecuación cambia en consecuencia.

Tabla 1 Gráficos de superficies cuádricas

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ Todas las trazas son elipses. Si $a = b = c$, el elipsoide es una esfera.	Cono	$\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x = k$ y $y = k$ son hipérbolas si $k \neq 0$, pero pares de rectas si $k = 0$.
Paraboloide elíptico	$\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico	$\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas. Se ilustra el caso en el que $c < 0$.	Hiperboloide de dos hojas	$-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas horizontales en $z = k$ son elipses si $k > c$ o $k < -c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

TEC En Module 12.6B puede ver cómo cambios en a, b y c en la tabla 1 afectan la forma de la superficie cuádrica.

EJEMPLO 7 Identifique y trace la superficie $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

SOLUCIÓN Dividiendo entre -4, primero se pone la ecuación en forma estándar:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Al comparar esta ecuación con la tabla 1, se ve que representa un hiperboloide de dos hojas, siendo la única diferencia que en este caso el eje del hiperboloide es el eje y. Las trazas en los planos xy y yz son las hipérbolas

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad z = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1 \qquad x = 0$$

Esta superficie no tiene ninguna traza en el plano xz, pero las trazas en los planos verticales $y = k$ para $|k| > 2$ son las elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1 \qquad y = k$$

las cuales pueden escribirse como

$$\frac{x^2}{\dfrac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\dfrac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$

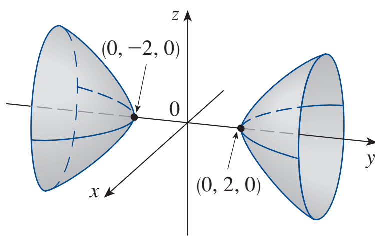


FIGURA 10
$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

Estas trazas se usan para hacer el diagrama de la figura 10. ■

EJEMPLO 8 Clasifique la superficie cuádrica $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

SOLUCIÓN Completando el cuadrado se reescribe la ecuación como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Al comparar esta ecuación con la tabla 1, vea que representa un paraboloide elíptico. Aquí, sin embargo, el eje del paraboloide es paralelo al eje y, y ha sido desplazado para que su vértice esté en el punto $(3, 1, 0)$. Las trazas en el plano $y = k$ $(k > 1)$ son las elipses

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

La traza en el plano xy es la parábola con la ecuación $y = 1 + (x - 3)^2$, $z = 0$. El paraboloide se representa en la figura 11.

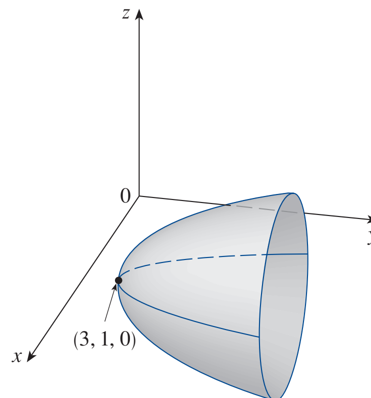


FIGURA 11
$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

■

Aplicaciones de las superficies cuádricas

Ejemplos de superficies cuádricas pueden hallarse en el mundo a nuestro alrededor. De hecho, el mundo mismo es un buen ejemplo. Aunque la Tierra es comúnmente modelada como una esfera, un modelo más acertado es una elipsoide, porque la rotación de la Tierra ha causado un aplanamiento en los polos. (Véase el ejercicio 49.)

Paraboloides circulares, obtenidas mediante rotación de una parábola alrededor de su eje, se usan para recolectar y reflejar luz, sonido y señales de radio y televisión. En un radiotelescopio, por ejemplo, señales de estrellas distantes que impactan la concavidad son reflejadas al receptor en el foco y, por tanto, amplificadas. (Esta idea se explica en el problema 22 de la página 273.) El mismo principio se aplica a los micrófonos y los platillos satelitales en forma de paraboloides.

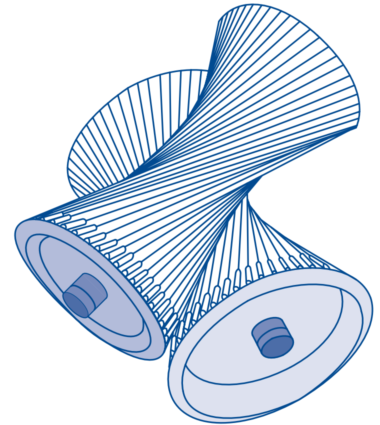
Las torres de enfriamiento de reactores nucleares suelen diseñarse en forma de hiperboloides de una hoja por razones de estabilidad estructural. Pares de hiperboloides se usan para transmitir movimiento rotacional entre ejes sesgados. (Las ruedas dentadas de los engranajes son las líneas generatrices de los hiperboloides. Véase el ejercicio 51.)



Un platillo satelital refleja señales al foco de un paraboloide.



Los reactores nucleares tienen torres de enfriamiento en forma de hiperboloides.



Hiperboloides producen la transmisión de engranajes.

12.6 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué representa la ecuación $y = x^2$ como una curva en $\mathbb{R}^2$?
(b) ¿Qué representa como una superficie en $\mathbb{R}^3$?
(c) ¿Qué representa la ecuación $z = y^2$?

2. (a) Trace la gráfica de $y = e^x$ como una curva en $\mathbb{R}^2$.
(b) Trace la gráfica de $y = e^x$ como una superficie en $\mathbb{R}^3$.
(c) Describa y trace la superficie $z = e^y$.

3-8 Describa y trace la superficie.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$

4. $z = 4 - x^2$

5. $z = 1 - y^2$

6. $y = z^2$

7. $xy = 1$

8. $z = \operatorname{sen} y$

9. (a) Determine e identifique las trazas de la superficie cuádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y explique por qué la gráfica se parece a la gráfica del hiperboloide de una hoja de la tabla 1.
(b) Si se cambia la ecuación del inciso (a) a $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, ¿cómo se ve afectada la gráfica?
(c) ¿Y si se cambiara la ecuación del inciso (a) a $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

10. (a) Determine e identifique las trazas de la superficie cuádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y explique por qué esta gráfica se parece a la gráfica del hiperboloide de dos hojas de la tabla 1.

(b) Si la ecuación del inciso (a) cambia a $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, ¿qué le sucede a la gráfica? Trace la nueva gráfica.

11-20 Use trazas para diagramar e identificar la superficie.

11. $x^2 = y^2 + 4z^2$

12. $4x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 36$

13. $x^2 = 4y^2 + z^2$

14. $z^2 - 4x^2 - y^2 = 4$

15. $9y^2 + 4z^2 = x^2 + 36$

16. $3x^2 + y + 3z^2 = 0$

17. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$

18. $3x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$

19. $y = z^2 - x^2$

20. $x = y^2 - z^2$

21-28 Asocie la ecuación con su gráfica (rotuladas I-VIII). Dé razones de su elección.

21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

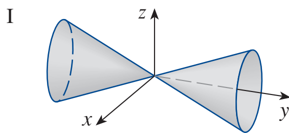
25. $y = 2x^2 + z^2$

26. $y^2 = x^2 + 2z^2$

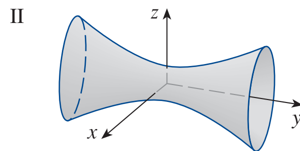
27. $x^2 + 2z^2 = 1$

28. $y = x^2 - z^2$

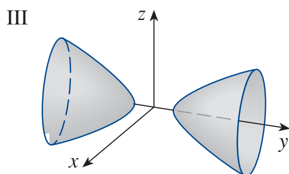
I



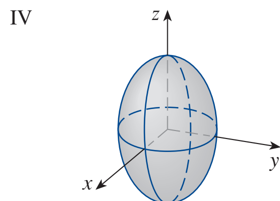
II



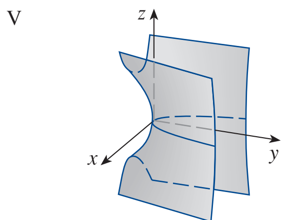
III



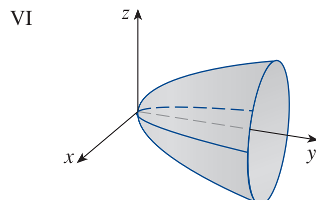
IV



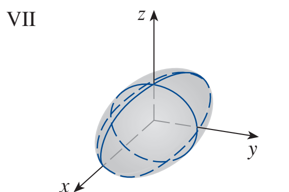
V



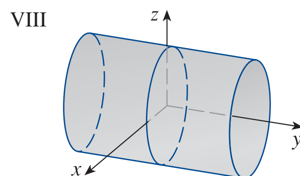
VI



VII

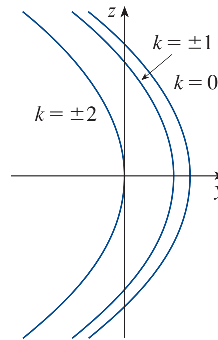


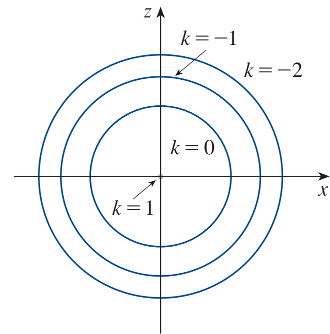
VIII



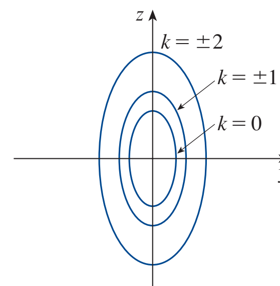
29-30 Dibuje e identifique una superficie cuádrica que pudiera tener las trazas mostradas.

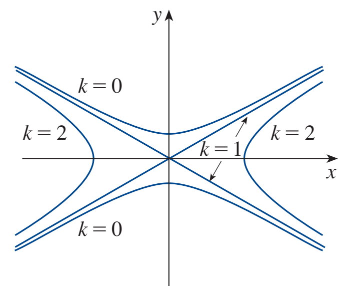
29. Trazas en $x = k$ Trazas en $y = k$





30. Trazas en $x = k$ Trazas en $z = k$





31-38 Reduzca la ecuación a una de las formas estándar, clasifique la superficie y trácela.

31. $y^2 = x^2 + \frac{1}{9}z^2$

32. $4x^2 - y + 2z^2 = 0$

33. $x^2 + 2y - 2z^2 = 0$

34. $y^2 = x^2 + 4z^2 + 4$

35. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - z + 10 = 0$

36. $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 2z + 3 = 0$

37. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0$

38. $4x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 8y + 4z + 55 = 0$

39-42 Use una computadora con software de graficación tridimensional para graficar la superficie. Experimente con puntos de vista y dominios para las variables hasta que obtenga una vista satisfactoria de la superficie.

39. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$

40. $x^2 - y^2 - z = 0$

41. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$

42. $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

43. Trace la región delimitada por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

44. Trace la región delimitada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

45. Determine una ecuación para la superficie obtenida de la rotación de la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x.

46. Determine una ecuación para la superficie obtenida de la rotación de la recta $z = 2y$ alrededor del eje z.

47. Determine una ecuación para la superficie que consta de todos los puntos equidistantes del punto $(-1, 0, 0)$ y del plano $x = 1$. Identifique la superficie.

48. Determine una ecuación para la superficie que consta de todos los puntos P para los que la distancia de P al eje x es dos veces la distancia de P al plano yz. Identifique la superficie.

49. Tradicionalmente, la superficie de la Tierra ha sido modelada como una esfera, pero el World Geodetic System of 1984 (WGS-84) usa una elipsoide como un modelo más acertado. Este coloca el centro de la Tierra en el origen y el polo norte en el eje z positivo. La distancia del centro a los polos es de 6356.523 km y la distancia a un punto en el ecuador de 6378.137 km.

(a) Determine una ecuación de la superficie de la Tierra tal como la usa WGS-84.

(b) Curvas de igual latitud son trazas en los planos $z = k$. ¿Cuál es la forma de estas curvas?

(c) Los meridianos (curvas de igual longitud) son trazas en los planos de la forma $y = mx$. ¿Cuál es la forma de estos meridianos?

50. Una torre de enfriamiento de un reactor nuclear debe construirse con la forma de un hiperboloide de una hoja (véase la foto de la página 839). El diámetro en la base es de 280 m y el diámetro mínimo, 500 m arriba de la base, es de 200 m. Halle una ecuación para la torre.

51. Demuestre que si el punto (a, b, c) está en el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, entonces las rectas con ecuaciones paramétricas $x = a + t, y = b + t, z = c + 2(b - a)t$ y $x = a + t, y = b - t, z = c - 2(b + a)t$ se ubican por completo en este paraboloide. (Esto muestra que el paraboloide hiperbólico es lo que se llama una **superficie reglada**; es decir, puede ser generado por el movimiento de una línea recta. De hecho, este ejercicio indica que a través de cada punto en el paraboloide hiperbólico hay dos líneas generatrices. Las otras superficies cuádricas que también son superficies regladas son los cilindros, los conos y los hiperboloides de una hoja.)

52. Demuestre que la curva de intersección de las superficies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ y $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ se ubica en un plano.

53. Grafique las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 1 - y^2$ en una pantalla común usando el dominio $|x| \leqslant 1.2, |y| \leqslant 1.2$ y observe la curva de intersección de estas superficies. Demuestre que la proyección de esta curva en el plano xy es una elipse.

12 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. ¿Cuál es la diferencia entre un vector y un escalar?

2. ¿Cómo se suman geométricamente dos vectores? ¿Cómo se suman algebraicamente?

3. Si **a** es un vector y c un escalar, ¿cómo se relaciona c**a** con **a** geométricamente? ¿Cómo se determina c**a** algebraicamente?

4. ¿Cómo se determina el vector de un punto a otro?

5. ¿Cómo se determina el producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dos vectores si se conocen sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Y si se conocieran sus componentes?

6. ¿Qué utilidad tienen los productos punto?

7. Escriba expresiones para las proyecciones escalar y vectorial de **b** en **a**. Ilustre con diagramas.

8. ¿Cómo se determina el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores si se conocen sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Y si se conocieran sus componentes?

9. ¿Qué utilidad tienen los productos cruz?

10. (a) ¿Cómo se establece el área del paralelogramo determinado por **a** y **b**?

(b) ¿Cómo se establece el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c**?

11. ¿Cómo se determina un vector perpendicular a un plano?

12. ¿Cómo se determina el ángulo entre dos planos intersecantes?

13. Escriba una ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas para una recta.

14. Escriba una ecuación vectorial y una ecuación escalar para un plano.

15. (a) ¿Cómo se sabe si dos vectores son paralelos?

(b) ¿Cómo se sabe si dos vectores son perpendiculares?

(c) ¿Cómo se sabe si dos planos son paralelos?

16. (a) Describa un método para determinar si tres puntos P, Q y R están en la misma recta.

(b) Describa un método para determinar si cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo plano.

17. (a) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a una recta?

(b) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a un plano?

(c) ¿Cómo se determina la distancia entre dos rectas?

18. ¿Cuáles son las trazas de una superficie? ¿Cómo se les determina?

19. Escriba ecuaciones en forma estándar de los seis tipos de superficies cuádricas.

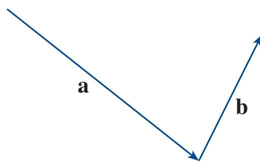
EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

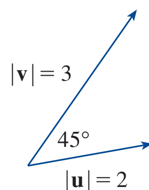
1. Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1 v_1, u_2 v_2 \rangle$.
2. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.
3. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.
4. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.
5. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
6. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
7. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$.
8. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3 y cualquier escalar k,
$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$
9. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3 y cualquier escalar k,
$$k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$$
10. Para cualesquiera vectores **u**, **v** y **w** en V_3,
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$
11. Para cualesquiera vectores **u**, **v** y **w** en V_3,
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$
12. Para cualesquiera vectores **u**, **v** y **w** en V_3,
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$
13. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$.
14. Para cualesquiera vectores **u** y **v** en V_3, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
15. El vector $\langle 3, -1, 2 \rangle$ es paralelo al plano
$$6x - 2y + 4z = 1$$
16. Una ecuación lineal $Ax + By + Cz + D = 0$ representa una recta en el espacio.
17. El conjunto de puntos $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es un círculo.
18. En $\mathbb{R}^3$ la gráfica de $y = x^2$ es un paraboloide.
19. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = 0$ o $\mathbf{v} = 0$.
20. Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = 0$ o $\mathbf{v} = 0$.
21. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = 0$ o $\mathbf{v} = 0$.
22. Si **u** y **v** están en V_3, entonces $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

EJERCICIOS

1. (a) Determine una ecuación de la esfera que pasa por el punto (6, –2, 3) y tiene centro (–1, 2, 1).
   (b) Determine la curva en la que esa esfera interseca el plano yz.
   (c) Determine el centro y radio de la esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z + 1 = 0$$
2. Copie los vectores en la figura y úselos para trazar cada uno de los vectores siguientes.
   (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (c) $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$ (d) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$



3. Si **u** y **v** son los vectores mostrados en la figura, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. ¿$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dirigida a la página o fuera de ella?



4. Calcule la cantidad dada si
$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$
   (a) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ (b) $|\mathbf{b}|$
   (c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
   (e) $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ (f) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
   (g) $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$ (h) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
   (i) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ (j) $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
   (k) El ángulo entre **a** y **b** (al grado más cercano)
5. Determine los valores de x tales que los vectores $\langle 3, 2, x \rangle$ y $\langle 2x, 4, x \rangle$ sean ortogonales.
6. Determine dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ como a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
7. Suponga que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2$. Determine
   (a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
   (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$
   (c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
   (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
8. Demuestre que si **a**, **b** y **c** están en V_3, entonces
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$$
9. Determine el ángulo agudo entre dos diagonales de un cubo.

10. Dados los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-1, 1, 4)$ y $D(0, 3, 2)$, encuentre el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes AB, AC y AD.

11. (a) Determine un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(1, 4, 3)$.
(b) Determine el área del triángulo ABC.

12. Una fuerza constante $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ mueve un objeto a lo largo del segmento de recta de $(1, 0, 2)$ a $(5, 3, 8)$. Determine el trabajo realizado si la distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

13. Un bote es tirado hacia la playa usando dos cuerdas, como se muestra en el diagrama. Si se necesita una fuerza de 255 N, determine la magnitud de la fuerza en cada cuerda.

14. Determine la magnitud del momento de torsión alrededor de P si una fuerza de 50 N se aplica como se muestra.

15-17 Determine ecuaciones paramétricas para la recta.

15. La recta que pasa por $(4, -1, 2)$ y $(1, 1, 5)$

16. La recta que pasa por $(1, 0, -1)$ y es paralela a la recta $\frac{1}{3}(x - 4) = \frac{1}{2}y = z + 2$

17. La recta que pasa por $(-2, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x - y + 5z = 12$

18-20 Determine una ecuación del plano.

18. El plano que pasa por $(2, 1, 0)$ y es paralelo a $x + 4y - 3z = 1$

19. El plano que pasa por $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ y $(6, 3, 1)$

20. El plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y que contiene la recta $x = 2t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + 3t$

21. Encuentre el punto en el que la recta con ecuaciones paramétricas $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 4t$ interseca el plano $2x - y + z = 2$.

22. Determine la distancia del origen a la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.

23. Determine si las rectas dadas por las ecuaciones simétricas

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4}$$

y
$$\frac{x + 1}{6} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 5}{2}$$

son paralelas, sesgadas o intersecantes.

24. (a) Demuestre que los planos $x + y - z = 1$ y $2x - 3y + 4z = 5$ no son paralelos ni perpendiculares.
(b) Determine, al grado más cercano, el ángulo entre esos planos.

25. Determine una ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$ y perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

26. (a) Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, -1, 10)$ y $C(1, 3, -4)$.
(b) Determine ecuaciones simétricas para la recta que pasa por B y que es perpendicular al plano del inciso (a).
(c) Un segundo plano pasa por $(2, 0, 4)$ y tiene vector normal $\langle 2, -4, -3 \rangle$. Demuestre que el ángulo agudo entre los planos es de aproximadamente 43°.
(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los dos planos.

27. Determine la distancia entre los planos $3x + y - 4z = 2$ y $3x + y - 4z = 24$.

28-36 Identifique y trace la gráfica de cada superficie.

28. $x = 3$

29. $x = z$

30. $y = z^2$

31. $x^2 = y^2 + 4z^2$

32. $4x - y + 2z = 4$

33. $-4x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

34. $y^2 + z^2 = 1 + x^2$

35. $4x^2 + 4y^2 - 8y + z^2 = 0$

36. $x = y^2 + z^2 - 2y - 4z + 5$

37. Una elipsoide se crea rotando la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ alrededor del eje x. Determine una ecuación del elipsoide.

38. Una superficie consta de todos los puntos P tales que la distancia de P al plano $y = 1$ es dos veces la distancia de P al punto $(0, -1, 0)$. Determine una ecuación para esta superficie e identifíquela.

Problemas adicionales

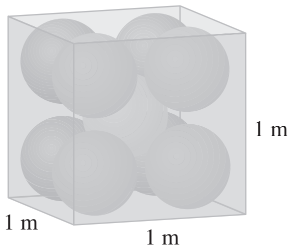


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. Cada arista de una caja cúbica tiene una longitud de 1 m. La caja contiene nueve pelotas esféricas con el mismo radio r. El centro de una pelota está en el centro del cubo y toca a las otras ocho. Cada una de estas otras toca tres lados de la caja. Así, las pelotas están ceñidamente empacadas en la caja (véase la figura). Determine r. (Si tiene dificultades con este problema, lea acerca de la estrategia para la resolución de problemas titulada *Utilice analogías* en la página 71.)

2. Sea B una caja sólida con longitud L, ancho W y altura H. Sea S el conjunto de todos los puntos que están a una distancia de a lo sumo 1 de algún punto de B. Exprese el volumen de S en términos de L, W y H.

3. Sea L la recta de intersección de los planos $cx + y + z = c$ y $x - cy + cz = -1$, donde c es un número real.
(a) Determine ecuaciones simétricas para L.
(b) Al variar el número c, la recta L se desplaza por una superficie S. Determine una ecuación para la curva de intersección de S con el plano horizontal $z = t$ (la traza de S en el plano $z = t$).
(c) Determine el volumen del sólido delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

4. Un aeroplano es capaz de volar con una rapidez de 180 km/h en aire quieto. El piloto despega de un campo de aviación y se dirige al norte de acuerdo con la brújula del avión. Después de 30 minutos de vuelo, el piloto se da cuenta de que, debido al viento, el avión ha recorrido en realidad 80 km en un ángulo de 5° este del norte.
(a) ¿Cuál es la velocidad del viento?
(b) ¿Qué dirección debería haber seguido el piloto para llegar al destino previsto?

5. Suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores con $|\mathbf{v}_1| = 2$, $|\mathbf{v}_2| = 3$ y $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 5$. Sea $\mathbf{v}_3 = \text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = \text{proy}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_5 = \text{proy}_{\mathbf{v}_3}\mathbf{v}_4$ y así sucesivamente. Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{v}_n|$.

6. Determine una ecuación de la esfera más grande que pasa por el punto (–1, 1, 4) y que es tal que cada uno de los puntos (x, y, z) dentro de la esfera satisface la condición

$$x^2 + y^2 + z^2 < 136 + 2(x + 2y + 3z)$$

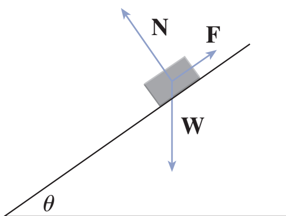


FIGURA PARA EL PROBLEMA 7

7. Suponga que un bloque de masa m se coloca en un plano inclinado, como se muestra en la figura. El descenso del bloque por el plano es retardado por la fricción; si θ no es demasiado grande, la fricción impedirá que el bloque se mueva en lo más mínimo. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son el peso $\mathbf{W}$, donde $|\mathbf{W}| = mg$ (g es la aceleración debida a la gravedad); la fuerza normal $\mathbf{N}$ (el componente normal de la fuerza de reacción del plano sobre el bloque), donde $|\mathbf{N}| = n$; y la fuerza $\mathbf{F}$ debida a la fricción, que actúa en paralelo con el plano inclinado, en oposición a la dirección del movimiento. Si el bloque está en reposo y θ aumenta, $|\mathbf{F}|$ también debe aumentar hasta que, en definitiva, $|\mathbf{F}|$ llegue a su máximo, más allá del cual el bloque comienza a deslizarse. En este ángulo θ_s se ha observado que $|\mathbf{F}|$ es proporcional a n. Así, cuando $|\mathbf{F}|$ llega a su máximo, puede decirse que $|\mathbf{F}| = \mu_s n$, donde μ_s se llama *coeficiente de fricción estática* y depende de los materiales que están en contacto.
(a) Observe que $\mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$ y deduzca que $\mu_s = \tan(\theta_s)$.
(b) Suponga que, para $\theta > \theta_s$, una fuerza externa adicional $\mathbf{H}$ se aplica al bloque, horizontalmente desde la izquierda, y sea $|\mathbf{H}| = h$. Si h es pequeña, el bloque puede deslizarse de todas maneras por el plano; si es lo bastante grande, el bloque subirá por el plano. Sea $h_{\text{mín}}$ el valor más pequeño de h que permite que el bloque permanezca inmóvil (de tal forma que $|\mathbf{F}|$ es máxima).

Eligiendo los ejes de coordenadas de tal modo que $\mathbf{F}$ se ubique a lo largo del eje x, resuelva cada fuerza en componentes paralelos y perpendiculares al plano inclinado y demuestre que

$$h_{\text{mín}} \operatorname{sen}\theta + mg\cos\theta = n \qquad \text{y} \qquad h_{\text{mín}}\cos\theta + \mu_s n = mg\operatorname{sen}\theta$$

(c) Demuestre que $$h_{\text{min}} = mg\tan(\theta - \theta_s)$$

¿Esta ecuación parece razonable? ¿Tiene sentido para $\theta = \theta_s$? ¿Tiene sentido conforme $\theta \to 90°$? Explique su respuesta.

(d) Sea $h_{máx}$ el valor más grande de h que permite que el bloque permanezca inmóvil. (¿Qué dirección sigue **F**?) Demuestre que

$$h_{max} = mg\tan(\theta + \theta_s)$$

¿Esta ecuación parece razonable? Explique su respuesta.

8. Un sólido tiene las propiedades siguientes. Cuando es iluminado por rayos paralelos al eje z, su sombra es un disco circular. Si los rayos son paralelos al eje y, su sombra es un cuadrado. Si los rayos son paralelos al eje x, su sombra es un triángulo isósceles. (En el ejercicio 12.1.48 se le pidió describir y trazar un ejemplo de un sólido como este, pero hay muchos sólidos de este tipo.) Suponga que la proyección en el plano xz es un cuadrado cuyos lados tienen longitud 1.

(a) ¿Cuál es el volumen del más grande de esos sólidos?

(b) ¿Hay un volumen al que se pueda calificar como el más reducido?

13 Funciones vectoriales



© Natalia Davydenko/Shutterstock.com

Las trayectorias de objetos que se mueven en el espacio, como los jets que aparecen aquí, pueden describirse con funciones vectoriales. En la sección 13.1 verá cómo usar estas funciones vectoriales para determinar si dos objetos así pueden chocar o no.

LAS FUNCIONES QUE SE HAN usado hasta aquí han sido funciones con valores reales. Ahora se estudiarán funciones cuyos valores son vectores porque tales funciones son necesarias para describir curvas y superficies en el espacio. También se usarán funciones con vectores como valores para describir el movimiento de objetos en el espacio. En particular, se emplearán para derivar las leyes del movimiento de los planetas de Kepler.

13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio

En general, una función es una regla que asigna a cada elemento en el dominio un elemento en el rango. Una **función con un vector como valor**, o **función vectorial**, es simplemente una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores. Interesan en particular las funciones vectoriales **r** cuyos valores son vectores tridimensionales. Esto significa que para cada número t en el dominio de **r** hay un vector único en V_3, denotado por $\mathbf{r}(t)$. Si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son los componentes del vector $\mathbf{r}(t)$, f, g y h son funciones de valores reales llamadas **funciones componentes** de **r** y se pueden escribir

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

Se usa la letra t para denotar la variable independiente porque representa el tiempo en la mayoría de las aplicaciones de funciones vectoriales.

EJEMPLO 1 Si

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t}\right\rangle$$

entonces las funciones componentes son

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

Por efecto de la convención usual, el dominio de **r** consta de todos los valores de t para los que se define la expresión $\mathbf{r}(t)$. Las expresiones t^3, $\ln(3 - t)$ y $\sqrt{t}$ se definen en su totalidad cuando $3 - t > 0$ y $t \geqslant 0$. Así, el dominio de **r** es el intervalo $[0, 3)$. ■

Límites y continuidad

El **límite** de una función vectorial **r** se define tomando los límites de sus funciones componentes como sigue.

Si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$, esta definición equivale a decir que la longitud y dirección del vector $\mathbf{r}(t)$ aproxima la longitud y dirección del vector **L**.

1 Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, entonces

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\right\rangle$$

siempre y cuando los límites de las funciones componentes existan.

En términos equivalentes, se podría haber usado una definición ε-δ (véase el ejercicio 54). Los límites de las funciones vectoriales obedecen las mismas reglas que los límites de funciones con valores reales (véase el ejercicio 53).

EJEMPLO 2 Determine $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$, donde $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición 1, el límite de **r** es el vector cuyos componentes son los límites de las funciones componentes de **r**:

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t\to 0} (1 + t^3)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \text{(por la ecuación 3.3.2)}$$ ■

Una función vectorial **r** es **continua en *a*** si

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

En vista de la definición 1, vemos que **r** es continua en *a* si, y solo si, sus funciones componentes *f*, *g* y *h* son continuas en *a*.

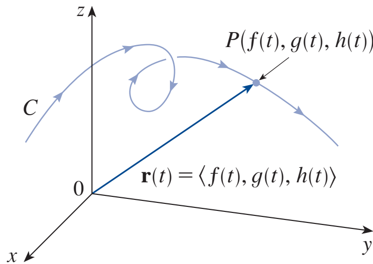


FIGURA 1

C es trazada por la punta de un vector de posición en movimiento **r**(*t*).

Curvas en el espacio

Existe una estrecha relación entre funciones vectoriales continuas y curvas en el espacio. Suponga que *f*, *g* y *h* son funciones continuas con valores reales en un intervalo *I*. Entonces el conjunto *C* de todos los puntos (x, y, z) en el espacio, donde

2 $$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

y *t* varía a todo lo largo del intervalo *I*, se llama una **curva en el espacio**. Las ecuaciones en (2) se llaman **ecuaciones paramétricas de *C*** y *t* se llama un **parámetro**. Se puede concebir *C* como trazada por una partícula en movimiento cuya posición en el tiempo *t* es $(f(t), g(t), h(t))$. Si se considera ahora la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, entonces $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición del punto $P(f(t), g(t), h(t))$ en *C*. Así, toda función vectorial continua **r** define una curva en el espacio *C* trazada por la punta del vector en movimiento $\mathbf{r}(t)$, como se muestra en la figura 1.

EJEMPLO 3 Describa la curva definida por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

las que con base en las ecuaciones 12.5.2 se reconocen como ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto (1, 2, –1) y paralela al vector ⟨1, 5, 6⟩. O bien, podría observar que la función puede escribirse como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, donde $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6 \rangle$, y esta es la ecuación vectorial de una recta dada por la ecuación 12.5.1. ■

TEC Visual 13.1A muestra varias curvas trazadas por vectores de posición, incluidas las de las figuras 1 y 2.

Curvas en un plano también pueden representarse en notación vectorial. Por ejemplo, la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 2t$ y $y = t + 1$ (véase el ejemplo 10.1.1) también podrían describirse con la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1 \rangle = (t^2 - 2t)\,\mathbf{i} + (t + 1)\,\mathbf{j}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$.

EJEMPLO 4 Trace la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas para esta curva son

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

Como $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ para todos los valores de *t*, la curva debe estar en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. El punto (x, y, z) se sitúa directamente arriba del punto $(x, y, 0)$, el cual se mueve a contrarreloj alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el plano *xy*. (La proyección de la curva en el plano *xy* tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 0 \rangle$. Véase el ejemplo 10.1.2.) Como $z = t$, la curva sube en espiral alrededor del cilindro al incrementarse *t*. Esta curva, la cual se muestra en la figura 2, se llama **hélice**. ■

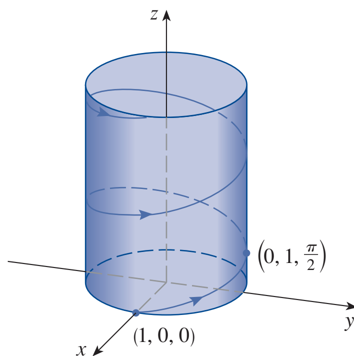


FIGURA 2



FIGURA 3

Una hélice doble

La forma de sacacorchos de la hélice del ejemplo 4 es conocida por su ocurrencia en resortes. También aparece en el modelo del ADN (ácido desoxirribonucleico, el material genético de las células vivas). En 1953 James Watson y Francis Crick demostraron que la estructura de la molécula del ADN es la de dos hélices paralelas y enlazadas como en la figura 3.

En los ejemplos 3 y 4 se dieron ecuaciones vectoriales de curvas y se pidió una descripción geométrica o diagrama. En los dos ejemplos siguientes se dará una descripción geométrica de una curva y se pedirá determinar ecuaciones paramétricas para la misma.

EJEMPLO 5 Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para el segmento de recta que une al punto $P(1, 3, -2)$ con el punto $Q(2, -1, 3)$.

SOLUCIÓN En la sección 12.5 se determinó una ecuación vectorial para el segmento de recta que une la punta del vector $\mathbf{r}_0$ con la punta del vector $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

La figura 4 muestra el segmento de recta PQ del ejemplo 5.

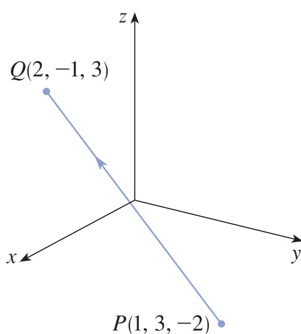


FIGURA 4

(Véase la ecuación 12.5.4) Aquí se toma $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2\rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3\rangle$ para obtener una ecuación vectorial del segmento de recta de P a Q:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 1, 3, -2\rangle + t\langle 2, -1, 3\rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

o

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t\rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$x = 1 + t \qquad y = 3 - 4t \qquad z = -2 + 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$ ■

EJEMPLO 6 Determine una función vectorial que represente la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 - 1$ y el plano $y + z = 2$.

SOLUCIÓN La figura 5 muestra cómo interesecan el plano y el cilindro, y la figura 6 la curva de intersección C, la cual es una elipse.

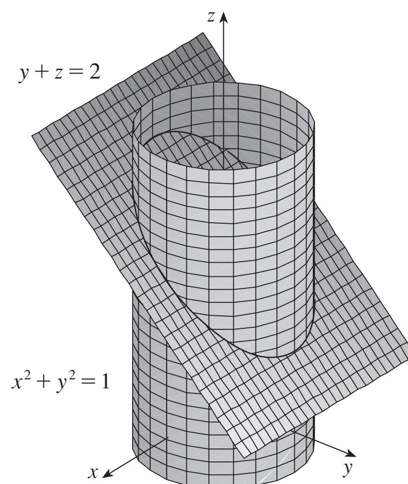


FIGURA 5

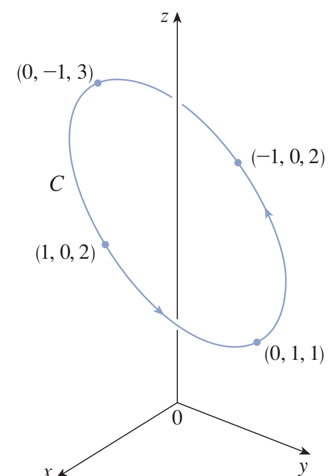


FIGURA 6

La proyección de C en el plano xy es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Así, por el ejemplo 10.1.2 se sabe que se puede escribir

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

De la ecuación del plano se tiene

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

Así, se puede escribir ecuaciones paramétricas para C como

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = 2 - \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

La ecuación vectorial correspondiente es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (2 - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Esta ecuación se llama *parametrización* de la curva C. Las flechas de la figura 6 indican la dirección en la que se traza C al incrementarse el parámetro t. ■

Uso de computadoras para trazar curvas en el espacio

Las curvas en el espacio son inherentemente más difíciles de trazar a mano que las curvas en un plano; para una acertada representación se debe usar tecnología. Por ejemplo, la figura 7 muestra una gráfica generada por computadora de la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = (4 + \operatorname{sen} 20t)\cos t \qquad y = (4 + \operatorname{sen} 20t)\operatorname{sen} t \qquad z = \cos 20t$$

Esta curva se llama **espiral toroidal** porque se sitúa en un toro. Otra curva interesante, el **nudo de trébol**, con ecuaciones

$$x = (2 + \cos 1.5t)\cos t \qquad y = (2 + \cos 1.5t)\operatorname{sen} t \qquad z = \operatorname{sen} 1.5t$$

se grafica en la figura 8. No sería fácil trazar a mano ninguna de estas curvas.

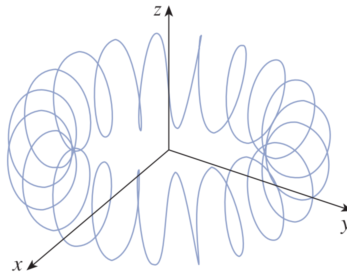


FIGURA 7

Una espiral toroidal

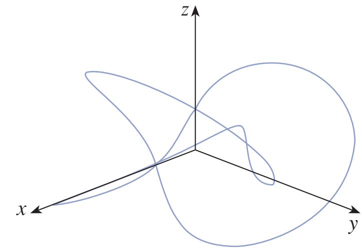


FIGURA 8

Un nudo de trébol

Aun cuando se usa una computadora para trazar una curva en el espacio, las ilusiones ópticas dificultan obtener una buena impresión de la apariencia verdadera de la curva. (Esto es especialmente cierto en la figura 8. Véase el ejercicio 52.) El ejemplo siguiente muestra cómo lidiar con este problema.

EJEMPLO 7 Use una computadora para trazar la curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Esta curva se llama **cúbica torcida** (también se conoce como cúbica alabeada).

SOLUCIÓN Se comienza usando la computadora para trazar la curva con ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z - t^3$ para $-2 \leqslant t \leqslant 2$. El resultado aparece en la figura 9(a), pero es difícil ver la verdadera naturaleza de la curva con base únicamente en esa gráfica. La mayoría de los programas de cómputo de graficación tridimensional

permiten al usuario encerrar una curva o superficie en una caja en lugar de exhibir los ejes de coordenadas. Cuando se examina la misma curva en una caja en la figura 9(b), se tiene una imagen mucho más clara de la curva. Se puede ver que sube de una de las esquinas inferiores de la caja a la esquina superior más cercana a la persona, y que se tuerce al subir.

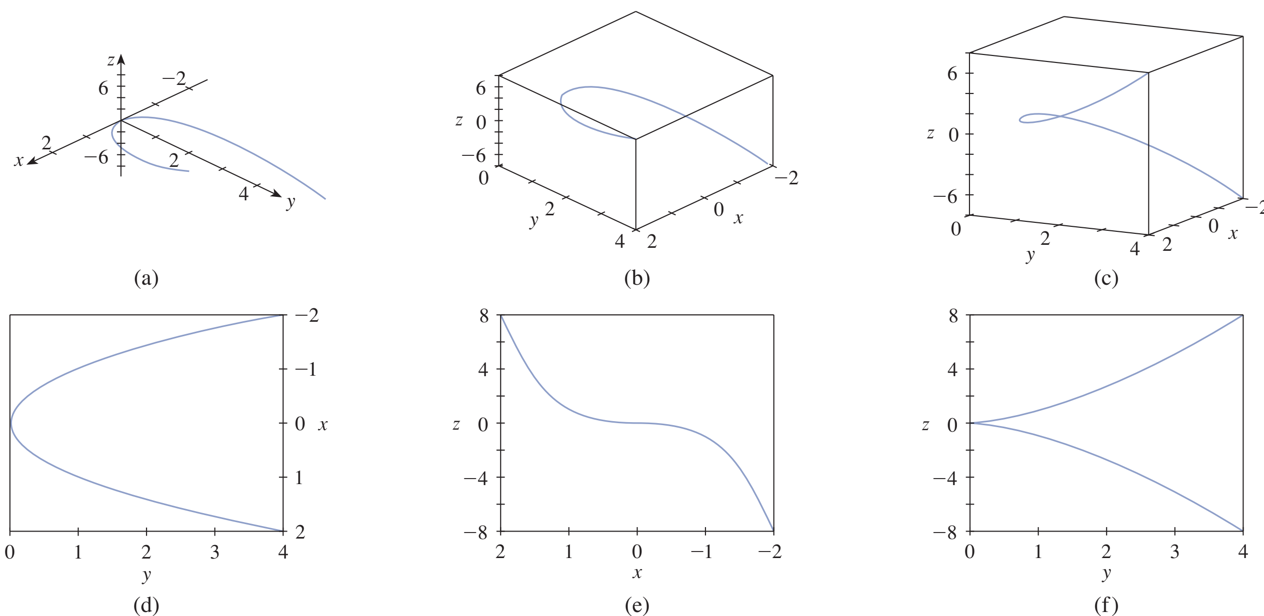


FIGURA 9

Vistas de la cúbica torcida

TEC En Visual 13.1B usted puede rotar la caja de la figura 9 para ver la curva desde cualquier punto de vista.

Se obtiene una idea todavía mejor de la curva cuando se ve desde diferentes perspectivas. La parte (c) muestra el resultado de rotar la caja para dar otro punto de vista. Las partes (d), (e) y (f) muestran las vistas que se obtiene cuando se examina directamente una de las caras de la caja. En particular, la parte (d) muestra la vista directa desde arriba de la caja. Esta es la proyección de la curva en el plano xy, es decir la parábola $y = x^2$. La parte (e) muestra la proyección en el plano xz, la curva cúbica $z = x^3$. Ahora es obvio por qué la curva dada se llama cúbica torcida. ■

Otro método para visualizar una curva en el espacio es dibujarla en una superficie. Por ejemplo, la cúbica torcida del ejemplo 7 se tiende en el cilindro parabólico $y = x^2$. (Elimine el parámetro de las dos primeras ecuaciones paramétricas, $x = t$ y $y = t^2$). La figura 10 muestra tanto el cilindro como la cúbica torcida, y se ve que la curva se mueve hacia arriba desde el origen a lo largo de la superficie del cilindro. También se utiliza este método en el ejemplo 4 para visualizar la hélice tendida en el cilindro circular (véase la figura 2).

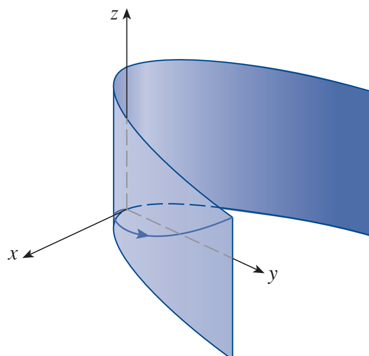


FIGURA 10

Un tercer método para visualizar la cúbica torcida es reparar en que también se tiende en el cilindro $z = x^3$. Así, puede verse como la curva de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. (Véase la figura 11.)

TEC Visual 13.1C muestra cómo surgen las curvas como intersecciones de superficies.

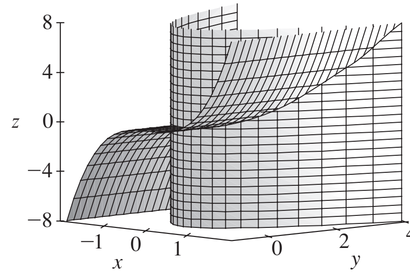
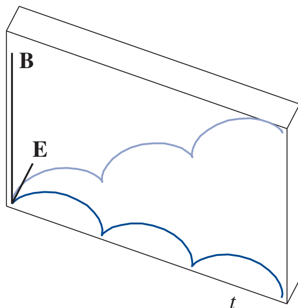


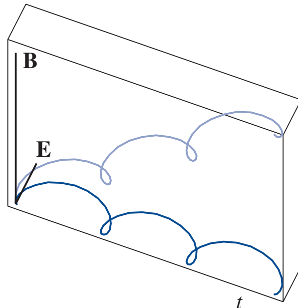
FIGURA 11

Se ha visto que una curva en el espacio interesante, la hélice, ocurre en el modelo del ADN. Otro ejemplo notable de una curva en espacio en la ciencia es la trayectoria de una partícula positivamente cargada en campos eléctrico y magnético ortogonalmente orientados **E** y **B**. Dependiendo de la velocidad inicial dada a la partícula en el origen, la trayectoria de la partícula es una curva en el espacio cuya proyección en el plano horizontal es el cicloide que se estudió en la sección 10.1 [figura 12(a)] o una curva cuya proyección es el trocoide que se investigó en el ejercicio 10.1.40 [figura 12(b)].

Algunos sistemas algebraicos por computadora brindan una imagen más clara de una curva en el espacio encerrándola en un tubo. Un diagrama así permite ver si una parte de una curva pasa al frente o por detrás de otra parte de la curva. Por ejemplo, la figura 13 muestra la curva de la figura 12(b) producida por el comando `tublepot` en Maple.



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t\rangle$



(b) $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2}\operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t\right\rangle$

FIGURA 12

Movimiento de una partícula cargada en campos eléctrico y magnético ortogonalmente orientados

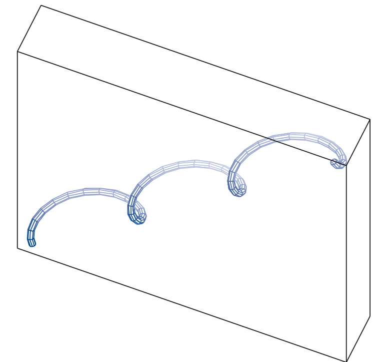


FIGURA 13

Para más detalles concernientes a la física implicada y la animación de las trayectorias de las partículas, véanse los siguientes sitios web:

- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/
- www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=36

13.1 EJERCICIOS

1-2 Determine el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t+1), \dfrac{t}{\sqrt{9-t^2}}, 2^t \right\rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{t-2}\mathbf{k}$

3-6 Determine el límite.

3. $\displaystyle \lim_{t\to 0}\left(e^{-3t}\,\mathbf{i} + \frac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}\right)$

4. $\displaystyle \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2 - t}{t-1}\mathbf{i} + \sqrt{t+8}\,\mathbf{j} + \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\ln t}\mathbf{k}\right)$

5. $\lim_{t\to\infty} \left\langle \frac{1+t^2}{1-t^2}, \tan^{-1}t, \frac{1-e^{-2t}}{t} \right\rangle$

6. $\lim_{t\to\infty} \left\langle te^{-t}, \frac{t^3+t}{2t^3-1}, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right\rangle$

7-14 Trace la curva con la ecuación vectorial dada. Indique con una flecha la dirección en la que se incrementa t.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t \rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1, t \rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2 - t, 2t \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle 3, t, 2 - t^2 \rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\, \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^6\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

15-16 Trace las proyecciones de la curva en los tres planos de coordenadas. Use estas proyecciones para trazar la curva.

15. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \operatorname{sen} t, 2 \cos t \rangle$

16. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, t^2 \rangle$

17-20 Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para el segmento de recta que une P con Q.

17. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$

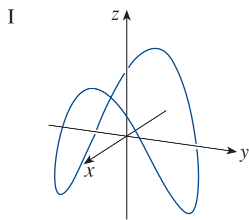
18. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$

19. $P(0, -1, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$

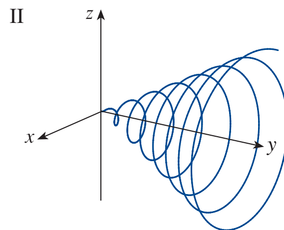
20. $P(a, b, c)$, $Q(u, v, w)$

21-26 Asocie las ecuaciones paramétricas con las gráficas (rotuladas I-VI). Dé razones de sus decisiones.

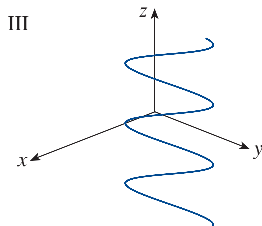
I



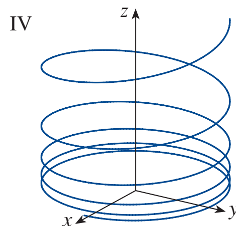
II



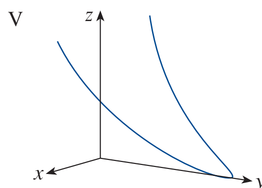
III



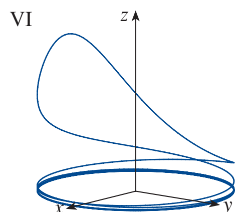
IV



V



VI



21. $x = t \cos t, \quad y = t, \quad z = t \operatorname{sen} t, \quad t \geqslant 0$

22. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 1/(1 + t^2)$

23. $x = t, \quad y = 1/(1 + t^2), \quad z = t^2$

24. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \cos 2t$

25. $x = \cos 8t, \quad y = \operatorname{sen} 8t, \quad z = e^{0.8t}, \quad t \geqslant 0$

26. $x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t, \quad z = t$

27. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = t \cos t$ $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ se sitúa en el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y use este hecho para trazar la curva.

28. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ es la curva de intersección de las superficies $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 1$. Use este hecho para trazar la curva.

29. Determine tres superficies diferentes que contengan la curva $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{2t}\,\mathbf{k}$.

30. Determine tres superficies diferentes que contengan la curva $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + (1/t)\,\mathbf{k}$.

31. ¿En qué puntos la curva $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (2t - t^2)\,\mathbf{k}$ interseca el paraboloide $z = x^2 + y^2$?

32. ¿En qué puntos la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ interseca la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

33-37 Use una computadora para graficar la curva con la ecuación vectorial dada. Cerciórese de elegir un dominio de parámetros y puntos de vista que revelen la verdadera naturaleza de la curva.

33. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t, \cos 2t \rangle$

34. $\mathbf{r}(t) = \langle te^t, e^{-t}, t \rangle$

35. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \operatorname{sen} 3t \cos t, \frac{1}{4}t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t \right\rangle$

36. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(8 \cos t) \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(8 \cos t) \operatorname{sen} t, \cos t \rangle$

37. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t \operatorname{sen} t, t \cos t \rangle$

38. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \cos 4t$. Explique su forma graficando sus proyecciones en los tres planos de coordenadas.

39. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = (1 + \cos 16t) \cos t$$
$$y = (1 + \cos 16t) \operatorname{sen} t$$
$$z = 1 + \cos 16t$$

Explique la apariencia de la gráfica al mostrar que se ubica en un cono.

40. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0.25 \cos^2 10t}\, \cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0.25 \cos^2 10t}\, \operatorname{sen} t$$
$$z = 0.5 \cos 10t$$

Explique la apariencia de la gráfica al mostrar que se ubica en una esfera.

41. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ pasa por los puntos (1, 4, 0) y (9, −8, 28), pero no por el punto (4, 7, –6).

42-46 Determine una función vectorial que represente la curva de intersección de las dos superficies.

42. El cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y la superficie $z = xy$

43. El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1 + y$

44. El paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ y el cilindro parabólico $y = x^2$

45. El hiperboloide $z = x^2 - y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

46. El semielipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $y \geqslant 0$, y el cilindro $x^2 + z^2 = 1$

---

47. Intente trazar a mano la curva de intersección del cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ y el cilindro parabólico $z = x^2$. Luego determine ecuaciones paramétricas para esta curva y use estas ecuaciones y una computadora para trazar la curva.

48. Intente trazar a mano la curva de intersección del cilindro parabólico $y = x^2$ y la mitad superior del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Luego determine ecuaciones paramétricas para esta curva y use estas ecuaciones y una computadora para graficar la curva.

49. Si dos objetos viajan por el espacio a lo largo de dos curvas diferentes, a menudo es importante saber si chocarán. (¿Un misil impactará su blanco móvil? ¿Dos aviones chocarán?) Las curvas podrían intersecar, pero se necesita saber si los objetos estarán en la misma posición al mismo tiempo. Suponga que las trayectorias de las dos partículas están dadas por las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geqslant 0$. ¿Las partículas chocarán?

50. Dos partículas viajan a lo largo de las curvas en el espacio

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

¿Las partículas chocarán? ¿Sus trayectorias intersecarán?

51. (a) Grafique la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = \tfrac{27}{26}\,\text{sen}\,8t - \tfrac{8}{39}\,\text{sen}\,18t$$
$$y = -\tfrac{27}{26}\cos 8t + \tfrac{8}{39}\cos 18t$$
$$z = \tfrac{144}{65}\,\text{sen}\,5t$$

(b) Demuestre que la curva se ubica en el hiperboloide de una hoja $144x^2 + 144y^2 - 25z^2 = 100$.

52. La vista del nudo de trébol mostrada en la figura 8 es exacta, pero no revela toda la historia. Use las ecuaciones paramétricas

$$x = (2 + \cos 1.5t)\cos t$$
$$y = (2 + \cos 1.5t)\,\text{sen}\,t$$
$$z = \text{sen}\,1.5t$$

para trazar a mano la curva vista desde arriba, con brechas que indiquen dónde pasa la curva sobre ella misma. Comience por demostrar que la proyección de la curva en el plano xy tiene coordenadas polares $r = 2 + \cos 1.5t$ y $\theta = t$, de manera que r varía entre 1 y 3. Después demuestre que z tiene valores máximo y mínimo cuando la proyección está a medio camino entre $r = 1$ y $r = 3$.



Al terminar su diagrama, use una computadora para trazar la curva con punto de vista directamente arriba y compárela con su diagrama. Use luego la computadora para trazar la curva desde otros puntos de vista. Podrá obtener una mejor impresión de la curva si traza un tubo con radio 0.2 alrededor de la curva. (Use el comando `tubeplot` en Maple o el comando `tubecurve` o `Tubecommand` en Mathematica.)

53. Suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales que fijan límites cuando $t \to a$ y sea c una constante. Compruebe las siguientes propiedades de los límites.

(a) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

54. Demuestre que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si} \quad 0 < |t - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales

Más adelante en este mismo capítulo se usarán funciones vectoriales para describir el movimiento de los planetas y otros objetos en el espacio. Aquí se preparará el camino desarrollando el cálculo de funciones vectoriales.

Derivadas

La derivada $\mathbf{r}'$ de una función vectorial $\mathbf{r}$ se define casi de la misma manera que las funciones con valores reales:

1
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

si este límite existe. La significación geométrica de esta definición aparece en la figura 1. Si los puntos P y Q tienen vectores de posición $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + h)$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ representa el vector $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$, el cual puede considerarse un vector secante. Si $h > 0$, el múltiplo escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$ tiene la misma dirección que $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Cuando $h \to 0$, parece que este vector se aproxima a un vector que está en la recta tangente. Por esta razón, el vector $\mathbf{r}'(t)$ se llama **vector tangente** a la curva definida por $\mathbf{r}$ en el punto P, siempre y cuando $\mathbf{r}'(t)$ exista y $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. La **recta tangente** a C en P se define como la recta que pasa por P paralela al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$. También se tendrá ocasión de considerar el **vector tangente unitario**, el cual es

Nótese que cuando $0 < h < 1$, multiplicar el vector secante por $1/h$ *alarga* el vector, como se muestra en la figura 1(b).

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

TEC Visual 13.2 muestra una animación de la figura 1.

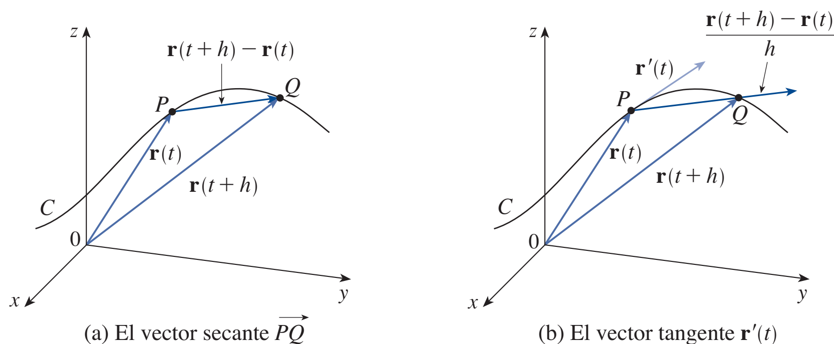


FIGURA 1

(a) El vector secante $\overrightarrow{PQ}$ (b) El vector tangente $\mathbf{r}'(t)$

El siguiente teorema da un método conveniente para calcular la derivada de una función vectorial $\mathbf{r}$: sencillamente se deriva cada componente de $\mathbf{r}$.

2 Teorema Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$, donde f, g, y h son funciones derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$

COMPROBACIÓN

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle$$

■

EJEMPLO 1
(a) Determine la derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \text{sen}\,2t\,\mathbf{k}$.
(b) Determine el vector tangente unitario en el punto donde $t = 0$.

SOLUCIÓN
(a) De acuerdo con el teorema 2, se deriva cada componente de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\,\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

(b) Como $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ y $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, el vector tangente unitario en el punto $(1, 0, 0)$ es

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}$$ ■

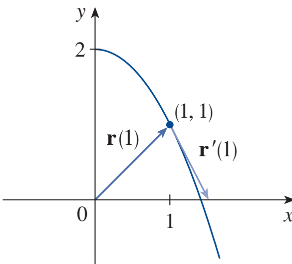


FIGURA 2

Nótese en la figura 2 que el vector tangente apunta en la dirección de t creciente. (Véase el ejercicio 58.)

EJEMPLO 2 Para la curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (2 - t)\,\mathbf{j}$, determine $\mathbf{r}'(t)$ y trace el vector de posición $\mathbf{r}(1)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(1)$.

SOLUCIÓN Se tiene

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

La curva es una curva en un plano y la eliminación del parámetro de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$, $y = 2 - t$ da $y = 2 - x^2$, $x \geqslant 0$. En la figura 2 se traza el vector de posición $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ a partir del origen y el vector tangente $\mathbf{r}'(1)$ a partir del punto correspondiente $(1, 1)$. ■

EJEMPLO 3 Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la hélice con ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t \qquad y = \text{sen}\,t \qquad z = t$$

en el punto $(0, 1, \pi/2)$.

SOLUCIÓN La ecuación vectorial de la hélice es $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \text{sen}\,t, t\rangle$, así que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2\,\text{sen}\,t, \cos t, 1\rangle$$

El valor del parámetro correspondiente al punto $(0, 1, \pi/2)$ es $t = \pi/2$ y, así que el vector tangente ahí es $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1\rangle$. La recta tangente es la recta que pasa por $(0, 1, \pi/2)$ paralela al vector $\langle -2, 0, 1\rangle$, de modo que por las ecuaciones 12.5.2 sus ecuaciones paramétricas son

$$x = -2t \qquad y = 1 \qquad z = \frac{\pi}{2} + t$$ ■

La hélice y la recta tangente del ejemplo 3 aparecen en la figura 3.

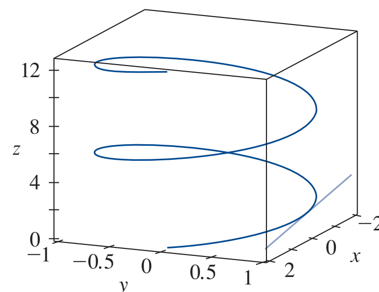


FIGURA 3

En la sección 13.4 se verá cómo $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ pueden interpretarse como los vectores de velocidad y aceleración de una partícula que se mueve en el espacio con un vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el momento t.

Igual que las funciones con valores reales, la **segunda derivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ es la derivada de $\mathbf{r}'$, es decir $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$. Por ejemplo, la segunda derivada de la función del ejemplo 3 es

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2\cos t, -\text{sen}\, t, 0\rangle$$

Reglas de derivación

El siguiente teorema demuestra que las fórmulas de derivación para funciones con valores reales tienen sus contrapartes para funciones con un vector como valor.

3 Teorema Suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales derivables, c un escalar y f una función con valores reales. Entonces

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

3. $\dfrac{d}{dt}[f(t)\,\mathbf{u}(t)] = f'(t)\,\mathbf{u}(t) + f(t)\,\mathbf{u}'(t)$

4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$ (regla de la cadena)

Este teorema puede comprobarse directamente de la definición 1 o usando el teorema 2 y las correspondientes fórmulas de derivación para funciones con valores reales. La comprobación de la fórmula 4 se da a continuación, las fórmulas restantes se dejan como ejercicios.

COMPROBACIÓN DE LA FÓRMULA 4 Sea

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle \qquad \mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t)\rangle$$

Entonces $$\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = f_1(t)\,g_1(t) + f_2(t)\,g_2(t) + f_3(t)\,g_3(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i(t)$$

así que la regla del producto ordinaria da

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i(t) = \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}[f_i(t)\,g_i(t)] \\
&= \sum_{i=1}^{3}[f_i'(t)\,g_i(t) + f_i(t)\,g_i'(t)] \\
&= \sum_{i=1}^{3} f_i'(t)\,g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t)\,g_i'(t) \\
&= \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Demuestre que si $|\mathbf{r}(t)| = c$ (una constante), entonces $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todas las t.

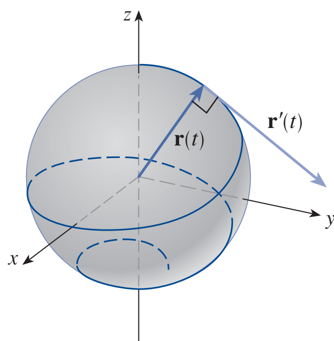


FIGURA 4

SOLUCIÓN Como

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

y c^2 es una constante, la fórmula 4 del teorema 3 da

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Así, $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$, lo que indica que $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

En términos geométricos, este resultado indica que si una curva está en una esfera con centro en el origen, el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ siempre es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$. (Véase la figura 4.) ■

Integrales

La **integral definida** de una función vectorial continua $\mathbf{r}(t)$ puede definirse casi igual que las funciones con valores reales, salvo que la integral es un vector. Pero entonces se puede expresar la integral de $\mathbf{r}$ en términos de las integrales de sus funciones componentes f, g y h como sigue. (Se usa la notación del capítulo 5.)

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}(t_i^*)\,\Delta t$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^n f(t_i^*)\,\Delta t\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^n g(t_i^*)\,\Delta t\right)\mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^n h(t_i^*)\,\Delta t\right)\mathbf{k}\right]$$

y por tanto

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

Esto significa que se puede evaluar una integral de una función vectorial integrando cada función componente.

Se puede extender el teorema fundamental del cálculo a las funciones vectoriales continuas como sigue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

donde $\mathbf{R}$ es una antiderivada de $\mathbf{r}$, es decir $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Se usa la notación $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para integrales indefinidas (antiderivadas).

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, entonces

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$ es una constante vectorial de integración y

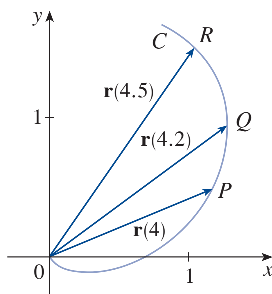
$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \Big[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}\Big]_0^{\pi/2} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\,\mathbf{k}$$ ■

13.2 EJERCICIOS

1. La figura muestra una curva C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.
(a) Trace los vectores $\mathbf{r}(4.5) - \mathbf{r}(4)$ y $\mathbf{r}(4.2) - \mathbf{r}(4)$.
(b) Trace los vectores

$$\frac{\mathbf{r}(4.5) - \mathbf{r}(4)}{0.5} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{r}(4.2) - \mathbf{r}(4)}{0.2}$$

(c) Escriba expresiones para $\mathbf{r}'(4)$ y el vector tangente unitario $\mathbf{T}(4)$.
(d) Trace el vector $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Haga un diagrama grande de la curva descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, y trace los vectores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1.1)$ y $\mathbf{r}(1.1) - \mathbf{r}(1)$.
(b) Trace el vector $\mathbf{r}'(1)$ a partir de (1, 1) y compárelo con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1.1) - \mathbf{r}(1)}{0.1}$$

Explique por qué estos vectores están tan cerca entre sí en longitud y dirección.

3-8
(a) Trace la curva en un plano con la ecuación vectorial dada.
(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$.
(c) Trace el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ para el valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1 \rangle$, $\quad t = -1$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle$, $\quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}$, $\quad t = 0$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$, $\quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - 2\cos t\,\mathbf{j}$, $\quad t = 3\pi/4$

8. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + 1)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - 1)\,\mathbf{j}$, $\quad t = -\pi/3$

9-16 Determine la derivada de la función vectorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{t-2}, 3, 1/t^2 \right\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t - t^3, \ln t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \cos(t^2)\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{1+t}\mathbf{i} + \dfrac{t}{1+t}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{1+t}\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t \cos t\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 at\,\mathbf{i} + te^{bt}\,\mathbf{j} + \cos^2 ct\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$

16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17-20 Determine el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ en el punto con el valor dado del parámetro t.

17. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2 - 2t, 1 + 3t, \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{2}t^2 \right\rangle$, $\quad t = 2$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle \tan^{-1} t, 2e^{2t}, 8te^t \rangle$, $\quad t = 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$, $\quad t = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4 \rangle$, $\quad t = 1$

21. Si $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, determine $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ y $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

22. Si $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ y $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23-26 Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva con las ecuaciones paramétricas dadas en el punto especificado.

23. $x = t^2 + 1$, $\quad y = 4\sqrt{t}$, $\quad z = e^{t^2 - t}$; $\quad (2, 4, 1)$

24. $x = \ln(t + 1)$, $\quad y = t\cos 2t$, $\quad z = 2^t$; $\quad (0, 0, 1)$

25. $x = e^{-t}\cos t$, $\quad y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, $\quad z = e^{-t}$; $\quad (1, 0, 1)$

26. $x = 1 + 2\sqrt{t}$, $\quad y = t^3 - t$, $\quad z = t^3 + t$; $\quad (3, 0, 2)$

27. Determine una ecuación vectorial para la recta tangente a la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 - 25$ y $y^2 + z^2 - 20$ en el punto (3, 4, 2).

28. Determine el punto en la curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2 \operatorname{sen} t, e^t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, donde la recta tangente es paralela al plano $\sqrt{3}x + y = 1$.

SAC **29-31** Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva con las ecuaciones paramétricas dadas en el punto especificado. Ilustre en una gráfica tanto la curva como la recta tangente en una pantalla común.

29. $x = t$, $\;y = e^{-t}$, $\;z = 2t - t^2$; $\quad (0, 1, 0)$

30. $x = 2\cos t$, $\;y = 2 \operatorname{sen} t$, $\;z = 4\cos 2t$; $\quad \left(\sqrt{3}, 1, 2\right)$

31. $x = t\cos t$, $\;y = t$, $\;z = t \operatorname{sen} t$; $\quad (-\pi, \pi, 0)$

32. (a) Determine el punto de intersección de las rectas tangentes a la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, 2 \operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t \rangle$ en los puntos donde $t = 0$ y $t = 0.5$.

(b) Ilustre en una gráfica la curva y ambas rectas tangentes.

33. Las curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) - \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t \rangle$ intersecan en el origen. Determine su ángulo de intersección al grado más cercano.

34. ¿En qué punto intersecan las curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$? Determine su ángulo de intersección al grado más cercano.

35-40 Evalúe la integral.

35. $\int_0^1 (6t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} - 8t^3\,\mathbf{k})\,dt$

36. $\int_1^4 \left(2t^{3/2}\,\mathbf{i} + (t + 1)\sqrt{t}\,\mathbf{k}\right)dt$

37. $\int_0^1 \left(\frac{1}{t + 1}\,\mathbf{i} + \frac{1}{t^2 + 1}\,\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\,\mathbf{k}\right)dt$

38. $\int_0^{\pi/4} (\sec t \tan t\,\mathbf{i} + t \cos 2t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 2t \cos 2t\,\mathbf{k})\,dt$

39. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

40. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

---

41. Determine $\mathbf{r}(t)$ si $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} - 8t\,\mathbf{j} + 8t^3\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(1) = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$.

42. Determine $\mathbf{r}(t)$ si $\mathbf{r}'(t) = 2 \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + 3 \cos 3t\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/6) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

43. Compruebe la fórmula 1 del teorema 3.

44. Compruebe la fórmula 3 del teorema 3.

45. Compruebe la fórmula 5 del teorema 3.

46. Compruebe la fórmula 6 del teorema 3.

47. Si $\mathbf{u}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$ use la fórmula 4 del teorema 3 para determinar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

48. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son las funciones vectoriales del ejercicio 47, use la fórmula 5 del teorema 3 para determinar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

49. Determine $f'(2)$, donde $f(t) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{u}(2) = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{u}'(2) = \langle 3, 0, 4 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

50. Si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son las funciones vectoriales del ejercicio 49, determine $\mathbf{r}'(2)$.

51. Si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \operatorname{sen} t\, \omega t$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores constantes, demuestre que $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \omega \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

52. Si $\mathbf{r}$ es la función vectorial del ejercicio 51, demuestre que $\mathbf{r}''(t) + \omega^2 \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$.

53. Demuestre que si $\mathbf{r}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{r}''$ existe, entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

54. Determine una expresión para $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

55. Si $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, demuestre que $\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \frac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

[*Sugerencia*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

56. Si una curva tiene la propiedad de que el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ siempre es perpendicular al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$, demuestre que la curva está en una esfera con centro en el origen.

57. Si $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, demuestre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

58. Demuestre que el vector tangente a una curva definida por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ apunta en la dirección de t creciente. [*Sugerencia*: Remítase a la figura 1 y considere los casos $h > 0$ y $h < 0$ por separado.]

13.3 Longitud de arco y curvatura

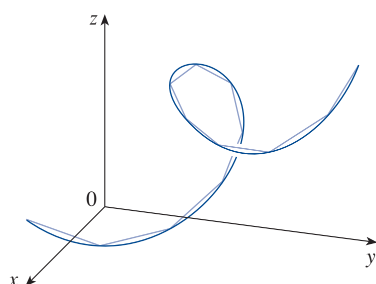


FIGURA 2

La longitud de una curva en el espacio es el límite de las longitudes de los polígonos inscritos.

Longitud de una curva

En la sección 10.2 se definió la longitud de una curva en un plano con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, como el límite de longitudes de polígonos inscritos, y para el caso donde f' y g' son continuas, se arriba a la fórmula

1 $$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

La longitud de una curva en el espacio se define exactamente de la misma manera (véase la figura 1). Suponga que la curva tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, $a \leqslant t \leqslant b$ o, en términos equivalentes, las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, donde f', g' y h' son continuas. Si la curva es recorrida exactamente una vez cuando t se incrementa de a a b, es posible demostrar que su longitud es

2
$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Nótese que ambas fórmulas de longitud de arco (1) y (2) pueden ponerse en la forma más compacta

En la siguiente sección se verá que si r(t) es el vector de posición de un objeto en movimiento en el momento t, $\mathbf{r}'(t)$ es el vector de velocidad y $|\mathbf{r}'(t)|$ la rapidez. Así, la ecuación 3 indica que para calcular la distancia recorrida se integra la rapidez.

3
$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

porque para curvas en un plano $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

y para curvas en el espacio $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

La figura 2 muestra el arco de la hélice cuya longitud se calcula en el ejemplo 1.

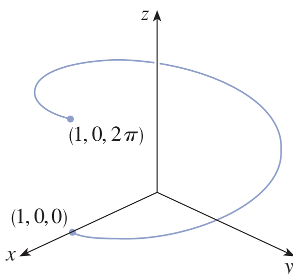


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Determine la longitud del arco de la hélice circular con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ del punto $(1, 0, 0)$ al punto $(1, 0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN Como $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, se tiene

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

El arco de $(1, 0, 0)$ a $(1, 0, 2\pi)$ es descrito por el intervalo paramétrico $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y por tanto de la fórmula 3 se obtiene

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi$$ ■

Una curva C puede representarse con más de una función vectorial. Por ejemplo, la cúbica torcida

4 $$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2$$

también podría representarse con la función

5 $$\mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \qquad 0 \leqslant u \leqslant \ln 2$$

donde la relación entre los parámetros t y u está dada por $t = e^u$. Se dice que las ecuaciones 4 y 5 son **parametrizaciones** de la curva C. Si se debería usar la ecuación 3 para calcular la longitud de C se obtendría la misma respuesta que usando las ecuaciones 4 y 5. En general, puede demostrarse que cuando se usa la ecuación 3 para calcular la longitud de arco, la respuesta es independiente de la parametrización utilizada.

La función longitud de arco

Suponga ahora que C es una curva dada por una función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

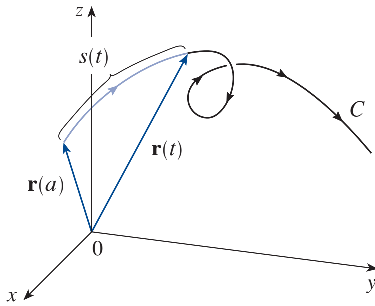


FIGURA 2

donde $\mathbf{r}'$ es continua y C es recorrida exactamente una vez al incrementarse t de a a b. Se define su **función longitud de arco** s con

$$\boxed{6} \qquad s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du$$

Así, $s(t)$ es la longitud de la parte de C entre $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$. (Véase la figura 3.) Si se derivan ambos miembros de la ecuación 6 usando la parte 1 del teorema fundamental del cálculo, se obtiene

$$\boxed{7} \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

Suele ser útil **parametrizar una curva con respecto a la longitud de arco** porque la longitud de arco se desprende naturalmente de la forma de la curva y no depende de un sistema de coordenadas particular. Si una curva $\mathbf{r}(t)$ ya está dada en términos de un parámetro t y $s(t)$ es la función longitud de arco dada por la ecuación 6, se puede despejar t como función de s: $t = t(s)$. La curva puede reparametrizarse entonces en términos de s sustituyendo t: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$. Así, si $s = 3$ por ejemplo, $\mathbf{r}(t(3))$ es el vector de posición del punto 3 unidades de longitud a lo largo de la curva desde su punto de partida.

EJEMPLO 2 Reparametrice la hélice $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$ con respecto a la longitud de arco medida desde (1, 0, 0) en la dirección de t creciente.

SOLUCIÓN El punto inicial (1, 0, 0) corresponde al valor paramétrico $t = 0$. Del 1 se tiene

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

así que

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_0^t \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\, t$$

Por tanto $t = s/\sqrt{2}$ y la reparametrización requerida se obtiene sustituyendo t:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos\left(s/\sqrt{2}\right) \mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(s/\sqrt{2}\right) \mathbf{j} + \left(s/\sqrt{2}\right) \mathbf{k} \qquad \blacksquare$$

Curvatura

TEC Visual 13.3A muestra vectores tangentes unitarios animados, como los de la figura 4, para varias curvas en un plano y curvas en el espacio.

Una parametrización $\mathbf{r}(t)$ se llama **suave** en un intervalo I si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ en I. Una curva se llama **suave** si tiene una parametrización suave. Una curva suave no tiene esquinas agudas o cúspides; cuando el vector tangente gira, lo hace continuamente.

Si C es una curva suave definida por la función vectorial $\mathbf{r}$, recuerde que el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ está dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

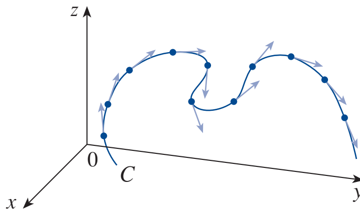


FIGURA 4

Vectores tangentes unitarios en puntos igualmente espaciados en C

e indica la dirección de la curva. En la figura 4 puede verse que $\mathbf{T}(t)$ cambia de dirección muy lentamente cuando C es casi recta, pero cambia de dirección más rápido cuando C se dobla o tuerce en forma más pronunciada.

La curvatura de C en un punto dado es una medida de lo rápido que la curva cambia de dirección en ese punto. Específicamente, se define como la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario con respecto a la longitud de arco. (Se usa la longitud de arco para que la curvatura sea independiente de la parametrización.) Como el vector tangente unitario tiene longitud constante, solo cambios en dirección contribuyen a la razón de cambio de $\mathbf{T}$.

8 **Definición** La **curvatura** de una curva es

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

donde **T** es el vector tangente unitario.

La curvatura es más fácil de calcular si se expresa en términos del parámetro t que en s, así que se usa la regla de la cadena (teorema 13.2.3, fórmula 6) para escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \text{y} \qquad \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

Pero $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$ de la ecuación 7, de modo que

9
$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

EJEMPLO 3 Demuestre que la curvatura de un círculo de radio a es $1/a$.

SOLUCIÓN Se puede suponer que el círculo tiene su centro en el origen y entonces una parametrización es

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$$

Por tanto $\qquad \mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$

así que $\qquad \mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}$

y $\qquad \mathbf{T}'(t) = -\cos t\, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$

Esto da $|\mathbf{T}'(t)| = 1$, de manera que usando la fórmula 9 se tiene

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$ ■

El resultado del ejemplo 3 muestra que círculos reducidos tienen una gran curvatura y que círculos grandes tienen una curvatura reducida, de acuerdo con la intuición. Se puede ver directamente de la definición de curvatura que la curvatura de una línea recta es siempre de 0, porque el vector tangente es constante.

Aunque la fórmula 9 puede usarse en todos los casos para calcular la curvatura, la fórmula dada por el teorema siguiente suele ser más fácil de aplicar.

10 **Teorema** La curvatura de la curva dada por la función vectorial **r** es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

COMPROBACIÓN Como $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ y $|\mathbf{r}'| = ds/dt$, se tiene

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

así que la regla del producto (teorema 13.2.3, fórmula 3) da

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

Al usar el hecho de que $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = 0$ (véase el ejemplo 12.4.2) se tiene

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Ahora $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todas las t, así que $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ son ortogonales por el ejemplo 13.2.4. En consecuencia, por el teorema 12.4.9,

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}'|$$

Así
$$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

y
$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$ ■

EJEMPLO 4 Determine la curvatura de la cúbica torcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ en un punto general y en (0, 0, 0).

SOLUCIÓN Primero se calculan los ingredientes requeridos:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

El teorema 10 da entonces

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

En el origen, donde $t = 0$, la curvatura es $\kappa(0) = 2$. ■

Para el caso especial de una curva en un plano con ecuación $y = f(x)$, se elige a x como el parámetro y se escribe $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$. Entonces $\mathbf{r}'(x) - \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}$. Como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$, de esto se sigue que $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}$. También se tiene $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y por tanto, por el teorema 10,

11
$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

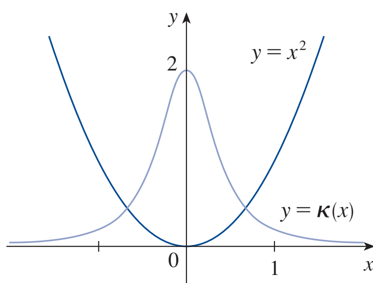


FIGURA 5

La parábola $y = x^2$ y su función curvatura

EJEMPLO 5 Determine la curvatura de la parábola $y = x^2$ en los puntos (0, 0), (1, 1) y (2, 4).

SOLUCIÓN Como $y' = 2x$ $y'' = 2$, la fórmula 11 da

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

La curvatura en (0, 0) es $\kappa(0) = 2$. En (1, 1), es $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0.18$. En (2, 4) es $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0.03$. Se observa en la expresión para $\kappa(x)$ o en la gráfica de κ en la figura 5 que $\kappa(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \pm\infty$. Esto se corresponde con el hecho de que la parábola parece aplanarse cuando $x \longrightarrow \pm\infty$. ■

Los vectores normal y binormal

En un punto dado en una curva suave en el espacio $\mathbf{r}(t)$, hay muchos vectores que son ortogonales al vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$. Se destacará uno observando que, como $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para todas las t, se tiene $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$ por el ejemplo 13.2.4, así que $\mathbf{T}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Adviértase que, por lo general, $\mathbf{T}'(t)$ no es en sí mismo un vector unitario. Pero en cualquier punto donde $\kappa \neq 0$ se puede definir el **vector normal unitario principal** $\mathbf{N}(t)$ (o simplemente **normal unitario**) como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

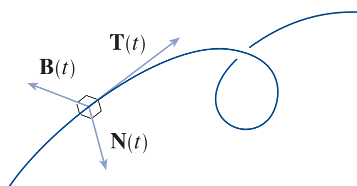


FIGURA 6

El vector normal unitario puede concebirse como indicación de la dirección en la que gira la curva en cada punto. El vector $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ se llama **vector binormal**. Es perpendicular tanto a $\mathbf{T}$ como a $\mathbf{N}$ y es también un vector unitario. (Véase la figura 6.)

La figura 7 ilustra el ejemplo 6 mostrando los vectores **T**, **N** y **B** en dos lugares en la hélice. En general, los vectores **T**, **N** y **B**, que parten de diversos puntos en una curva, forman un conjunto de vectores ortogonales llamado la estructura **TNB**, que se mueve a lo largo de la curva al variar t. Esta estructura **TNB** desempeña un importante papel en la rama de las matemáticas conocida como geometría diferencial y en sus aplicaciones al movimiento de naves espaciales.

EJEMPLO 6 Determine los vectores normal y binormal unitarios para la hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Primero se calculan los ingredientes necesarios para el vector normal unitario:

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle$$

Esto demuestra que el vector normal en cualquier punto en la hélice es horizontal y apunta al eje z. El vector binormal es

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle$$ ■

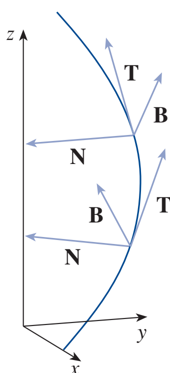


FIGURA 7

TEC Visual 13.3B muestra cómo la estructura **TNB** se mueve a lo largo de varias curvas.

El plano determinado por los vectores normal y binormal **N** y **B** en el punto P en una curva C se llama **plano normal** de C en P. Consta de todas las rectas ortogonales al vector tangente **T**. El plano determinado por los vectores **T** y **N** se llama **plano osculador** de C en P. Este nombre procede del latín *osculum*, que significa "beso". Es el plano que está más cerca de contener la parte de la curva próxima a P. (Para una curva en un plano, el plano osculador es simplemente el plano que contiene la curva.)

El círculo que se ubica en el plano osculador de C en P tiene la misma tangente que C en P, se ubica en el lado cóncavo de C (hacia el que apunta **N**) y tiene radio $\rho = 1/\kappa$ (la recíproca de la curvatura) se llama **círculo osculador** (o **círculo de curvatura**) de C en P. Es el círculo que describe mejor la forma en que se comporta C cerca de P; comparte la misma tangente, normal y curvatura de P.

La figura 8 muestra la hélice y el plano osculador del ejemplo 7.

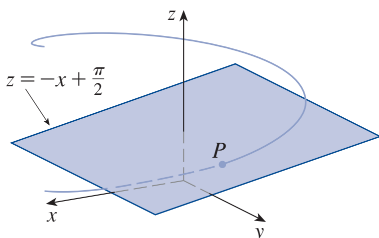


FIGURA 8

EJEMPLO 7 Determine ecuaciones del plano normal y el plano osculador de la hélice del ejemplo 6 en el punto $P(0, 1, \pi/2)$.

SOLUCIÓN El punto P corresponde a $t = \pi/2$ y el plano normal ahí tiene vector normal $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1\rangle$, así que una ecuación es

$$-1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad z = x + \frac{\pi}{2}$$

El plano osculador en P contiene los vectores **T** y **N**, así que su vector normal es $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$. Del ejemplo 6 se obtiene

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle \qquad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

Un vector normal más simple es $\langle 1, 0, 1\rangle$, de manera que una ecuación del plano osculador es

$$1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad z = -x + \frac{\pi}{2}$$ ■

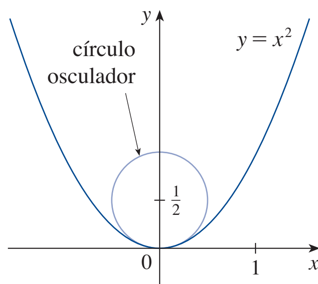


FIGURA 9

Nótese que el círculo y la parábola parecen doblarse en forma similar en el origen.

EJEMPLO 8 Determine y grafique el círculo osculador de la parábola $y = x^2$ en el origen.

SOLUCIÓN Con base en el ejemplo 5, la curvatura de la parábola en el origen es $\kappa(0) = 2$. Así, el radio del círculo osculador en el origen es $1/\kappa = \frac{1}{2}$ y su centro es $(0, \frac{1}{2})$. Su ecuación es entonces

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

Para la gráfica de la figura 9 se usa ecuaciones paramétricas de este círculo:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$$ ■

TEC Visual 13.3C muestra cómo cambia el círculo osculador cuando un punto se mueve a lo largo de una curva.

Aquí se resumen las fórmulas para los vectores tangente unitario, normal unitario y binormal y para la curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

13.3 EJERCICIOS

1-6 Determine la longitud de la curva.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \sqrt{5}\,t, 2\,\text{sen}\,t\rangle, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$
2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, 6t, 3t^2\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$
3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$
4. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$
5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$
6. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 9t\,\mathbf{j} + 4t^{3/2}\,\mathbf{k}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

7-9 Determine la longitud de la curva con cuatro decimales. (Use una calculadora para aproximar la integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3, t^4\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$
8. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{t}, t, t^2\right\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$
9. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t, 2t, \text{sen}\,2\pi t\rangle$, de $(1, 0, 0)$ a $(1, 4, 0)$



10. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = \text{sen}\,t$, $y = \text{sen}\,2t$, $z = \text{sen}\,3t$. Determine la longitud total de esta curva con cuatro decimales.

11. Sea C la curva de intersección del cilindro parabólico $x^2 = 2y$ y la superficie $3z = xy$. Determine la longitud exacta de C del origen al punto $(6, 18, 36)$.

12. Determine con cuatro decimales la longitud de la curva de intersección del cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ y el plano $x + y + z = 2$.

13-14 (a) Halle la función longitud de arco para la curva medida desde el punto P en la dirección de t creciente y después reparametrice la curva con respecto a la longitud de arco a partir de P, y (b) determine el punto 4 unidades a lo largo de la curva (en la dirección de t creciente) desde P.

13. $\mathbf{r}(t) = (5 - t)\,\mathbf{i} + (4t - 3)\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}, \quad P(4, 1, 3)$
14. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + e^t\cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,e^t\,\mathbf{k}, \quad P\left(0, 1, \sqrt{2}\right)$

15. Suponga que parte del punto $(0, 0, 3)$ y se mueve 5 unidades a lo largo de la curva $x = 3\,\text{sen}\,t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ en la dirección positiva. ¿Dónde se encuentra ahora?

16. Reparametrice la curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2+1}\,\mathbf{j}$$

con respecto a la longitud de arco medida desde el punto $(1, 0)$ en la dirección de t creciente. Exprese la reparametrización en su forma más simple. ¿Qué puede concluir acerca de la curva?

17-20
(a) Determine los vectores tangente unitario y normal unitario $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.
(b) Use la fórmula 9 para determinar la curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3\cos t, 3\,\text{sen}\,t\rangle$
18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \text{sen}\,t - t\cos t, \cos t + t\,\text{sen}\,t\rangle, \quad t > 0$
19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{2}\,t, e^t, e^{-t}\right\rangle$
20. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \tfrac{1}{2}t^2, t^2\right\rangle$

21-23 Use el teorema 10 para determinar la curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$
22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$
23. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{6}\,t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 2t^3\,\mathbf{k}$

24. Halle la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\,t, t\rangle$ en el punto $(1, 0, 0)$.

25. Determine la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ en el punto $(1, 1, 1)$.



26. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, $z = \text{sen}\,5t$ y determine la curvatura en el punto $(1, 0, 0)$.

27-29 Use la fórmula 11 para determinar la curvatura.

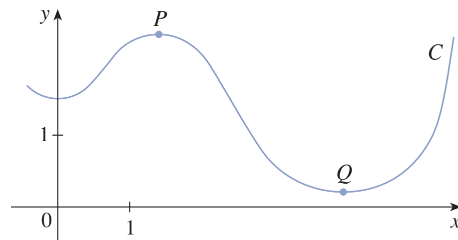
27. $y = x^3$ 28. $y = \cos x$ 29. $y = x\ln x$

30-31 ¿En qué punto la curva tiene máxima curvatura? ¿Qué sucede con la curvatura cuando $x \to \infty$?

30. $y = \ln x$ 31. $y = e^x$

32. Determine una ecuación de una parábola con curvatura 4 en el origen.

33. (a) ¿La curvatura de la curva C mostrada en la figura es mayor en P o en Q? Explique su respuesta.
(b) Estime la curvatura en P y en Q trazando los círculos osculadores en esos puntos.



34-35 Use una calculadora graficadora o una computadora para graficar tanto la curva como su función curvatura $\kappa(x)$ en la misma pantalla. ¿La gráfica de κ es la que usted esperaría?

34. $y = x^4 - 2x^2$ **35.** $y = x^{-2}$

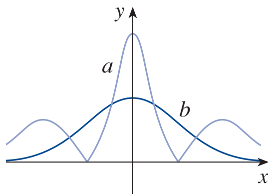
36-37 Trace la curva en el espacio y su función curvatura $\kappa(t)$. Comente cómo refleja la curvatura la forma de la curva.

36. $\mathbf{r}(t) = \langle t - \text{sen}\, t, 1 - \cos t, 4\cos(t/2)\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 8\pi$

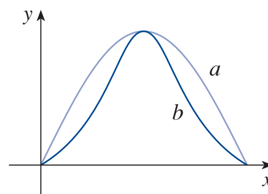
37. $\mathbf{r}(t) = \langle te^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t\rangle, \quad -5 \leqslant t \leqslant 5$

38-39 Se muestran dos gráficas, a y b. Una es una curva $y = f(x)$ y la otra la gráfica de su función curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada curva y explique sus decisiones.

38.



39.



40. (a) Grafique la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, 3t, \text{sen}\, 2t, \text{sen}\, 3t\rangle$. ¿En cuántos puntos en la curva parece que la curvatura tiene un máximo local o absoluto?
(b) Use un SAC para determinar y graficar la función curvatura. ¿Esta gráfica confirma su conclusión del inciso (a)?

41. La gráfica de $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2}\,\text{sen}\, t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t\rangle$ se muestra en la figura 13.1.12(b). ¿Dónde piensa usted que la curvatura es mayor? Use un SAC para determinar y graficar la función curvatura. ¿Para cuáles valores de t la curvatura es mayor?

42. Use el teorema 10 para demostrar que la curvatura de una curva paramétrica en un plano $x = f(t)$, $y = g(t)$ es

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a t.

43-45 Use la fórmula del ejercicio 42 para determinar la curvatura.

43. $x = t^2, \quad y = t^3$

44. $x = a\cos\omega t, \quad y = b\,\text{sen}\,\omega t$

45. $x = e^t\cos t, \quad y = e^t\,\text{sen}\, t$

46. Considere la curvatura en $x = 0$ para cada miembro de la familia de funciones $f(x) = e^{cx}$. ¿Para cuáles miembros $\kappa(0)$ es mayor?

47-48 Determine los vectores **T**, **N** y **B** en el punto dado.

47. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t\rangle, \quad (1, \frac{2}{3}, 1)$

48. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \text{sen}\, t, \ln\cos t\rangle, \quad (1, 0, 0)$

49-50 Determine ecuaciones del plano normal y el plano osculador de la curva en el punto dado.

49. $x = \text{sen}\, 2t, \; y = -\cos 2t, \; z = 4t; \quad (0, 1, 2\pi)$

50. $x = \ln t, \; y = 2t, \; z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

51. Determine ecuaciones de los círculos osculadores de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ en los puntos (2, 0) y (0, 3). Use una calculadora graficadora o computadora para graficar la elipse y ambos círculos osculadores en la misma pantalla.

52. Determine ecuaciones de los círculos osculadores de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ en los puntos (0, 0) y $(1, \frac{1}{2})$. Grafique ambos círculos osculadores y la parábola en la misma pantalla.

53. ¿En qué punto en la curva $x = t^3$, $y = 3t$, $z = t^4$ el plano normal es paralelo al plano $6x + 6y - 8z = 1$?

54. ¿Hay un punto en la curva del ejercicio 53 donde el plano osculador sea paralelo al plano $x + y + z = 1$? [Nota: Necesitará un SAC para derivar, simplificar y calcular un producto cruz.]

55. Halle ecuaciones de los planos normal y osculador de la curva de intersección de los cilindros parabólicos $x = y^2$ y $z = x^2$ en el punto (1, 1, 1).

56. Demuestre que el plano osculador en cada punto en la curva $\mathbf{r}(t) = \langle t + 2, 1 - t, \frac{1}{2}t^2\rangle$ es el mismo plano. ¿Qué puede concluir acerca de la curva?

57. Demuestre que en cada punto en la curva

$$\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\, t, e^t\rangle$$

el ángulo entre el vector tangente unitario y el eje z es el mismo. Luego demuestre que el mismo resultado es válido para los vectores normal unitario y binormal.

58. El *plano rectificante* de una curva en un punto es el plano que contiene los vectores **T** y **B** en ese punto. Determine el plano rectificante de la curva $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \tan t\,\mathbf{k}$ en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$.

59. Demuestre que la curvatura κ está relacionada con los vectores tangente y normal por la ecuación

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

60. Demuestre que la curvatura de una curva en un plano es $\kappa = |d\phi/ds|$, donde ϕ es el ángulo entre **T** e **i**; es decir, ϕ es el ángulo de inclinación de la recta tangente. (Esto demuestra que la definición de curvatura es congruente con la definición de curvas en un plano dada en el ejercicio 10.2.69.)

61. (a) Demuestre que $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{B}$.
(b) Demuestre que $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{T}$.
(c) Deduzca de los incisos (a) y (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para algún número $\tau(s)$ llamado la **torsión** de la curva. (La torsión mide el grado de giro de una curva.)
(d) Demuestre que para una curva en un plano la torsión es $\tau(s) = 0$.

62. Las fórmulas siguientes, llamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, son de importancia fundamental en la geometría diferencial:

1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$
2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$
3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$

(La fórmula 1 procede del ejercicio 59 y la fórmula 3 del ejercicio 61). Use el hecho de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deducir la fórmula 2 de las fórmulas 1 y 3.

63. Use las fórmulas de Frenet-Serret para comprobar cada una de las ecuaciones siguientes. (Las primas denotan derivadas con respecto a t. Comience como en la comprobación del teorema 10.)

(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$
(b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$
(d) $\tau = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

64. Demuestre que la hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt\rangle$, donde a y b son constantes positivas, tiene curvatura constante y torsión constante. [Use el resultado del ejercicio 63(d).]

65. Use la fórmula del ejercicio 63(d) para determinar la torsión de la curva $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\rangle$.

66. Determine la curvatura y torsión de la curva $x = \operatorname{senh} t$, $y = \cosh t$, $z = t$ en el punto $(0, 1, 0)$.

67. La molécula del ADN tiene la forma de una hélice doble (véase la figura 3 de la página 850). El radio de cada hélice es de alrededor de 10 ángstroms (1 Å $= 10^{-8}$ cm). Cada hélice se eleva alrededor de 34 Å durante cada vuelta completa, y hay unas 2.9×10^8 vueltas completas. Estime la longitud de cada hélice.

68. Considere el problema de diseñar un riel de ferrocarril para hacer una transición suave entre secciones de vías rectas. Rieles existentes a lo largo del eje x negativo deberán unirse armoniosamente con un riel a lo largo de la línea $y = 1$ para $x \geqslant 1$.
(a) Determine un polinomio $P = P(x)$ de grado 5 tal que la función F definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \leqslant 0 \\ P(x) & \text{Si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{Si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

sea continua y tenga pendiente continua y curvatura continua.

(b) Grafique F.

13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración

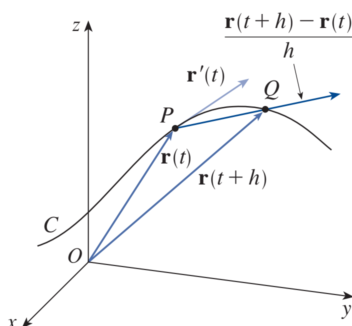


FIGURA 1

En esta sección se mostrará cómo las ideas de vectores tangente y normal y de curvatura pueden usarse en física para estudiar el movimiento de un objeto, incluidas su velocidad y aceleración, a lo largo de una curva en el espacio. En particular, se seguirán los pasos de Newton al usar estos métodos para derivar la primera ley del movimiento de los planetas de Kepler.

Suponga que una partícula se mueve en el espacio de tal forma que su vector de posición en el momento t es $\mathbf{r}(t)$. Nótese en la figura 1 que, para valores reducidos de h, el vector

1 $$\frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

aproxima la dirección de la partícula que se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t)$. Su magnitud mide el tamaño del vector de desplazamiento por unidad de tiempo. El vector (1) da la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo de longitud h y su límite es el **vector velocidad** $\mathbf{v}(t)$ en el tiempo t:

2 $$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)$$

Así, el vector velocidad es también el vector tangente y apunta en la dirección de la recta tangente.

La **rapidez** de la partícula en el momento t es la magnitud del vector velocidad, es decir $|\mathbf{v}(t)|$. Esto es apropiado porque de (2) y de la ecuación 13.3.7 se deduce que

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{razón de cambio de la distancia respecto al tiempo}$$

Como en el caso del movimiento unidimensional, la **aceleración** de la partícula se define como la derivada de la velocidad:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

EJEMPLO 1 El vector de posición de un objeto que se mueve en un plano está dado por $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Determine su velocidad, rapidez y aceleración cuando $t = 1$ e ilustre geométricamente.

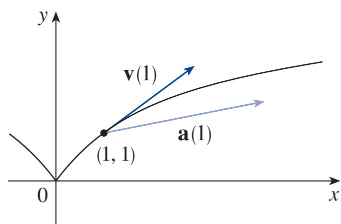


FIGURA 2

SOLUCIÓN La velocidad y aceleración en el momento t son

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

y la rapidez es

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

TEC Visual 13.4 muestra vectores velocidad y aceleración animados para objetos que se mueven a lo largo de varias curvas.

Cuando $t = 1$, se tiene

$$\mathbf{v}(1) = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a}(1) = 6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$$

Estos vectores velocidad y aceleración se muestran en la figura 2. ■

La figura 3 muestra la trayectoria de la partícula del ejemplo 2 con los vectores velocidad y aceleración cuando $t = 1$.

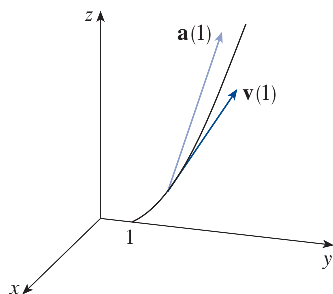


FIGURA 3

EJEMPLO 2 Determine la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con vector de posición $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1 + t)e^t \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2 + t)e^t \rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1 + t)^2 e^{2t}}$$ ■

Las integrales vectoriales que se introdujeron en la sección 13.2 pueden usarse para encontrar vectores de posición cuando los vectores velocidad o aceleración son conocidos, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Una partícula en movimiento parte de una posición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$, con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Su aceleración es $a(t) = 4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Halle su velocidad y posición en el momento t.

SOLUCIÓN Como $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, se tiene

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$$

$$= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Para determinar el valor del vector constante $\mathbf{C}$ se usa el hecho de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. La ecuación precedente da $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$, así que $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y

$$\mathbf{v}(t) = 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= (2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}$$

La expresión para $\mathbf{r}(t)$ que se obtuvo en el ejemplo 3 se usó para trazar la trayectoria de la partícula en la figura 4 para $0 \leqslant t \leqslant 3$.

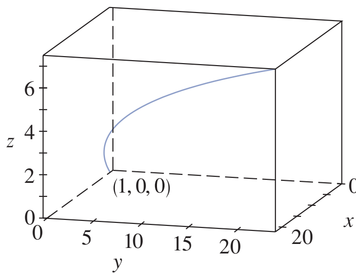


FIGURA 4

Como $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t)\,dt \\ &= \int [(2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}]\,dt \\ &= \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k} + \mathbf{D}\end{aligned}$$

Con $t = 0$, se descubre que $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$, así que la posición en el momento t está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$$ ■

En general, las integrales vectoriales permiten recuperar la velocidad cuando se conoce la aceleración y la posición cuando se conoce la velocidad:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(u)\,du \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)\,du$$

Si se conoce la fuerza que actúa sobre una partícula, la aceleración puede determinarse a partir de la **segunda ley del movimiento de Newton**. La versión vectorial de esta ley establece que si en cualquier momento t una fuerza $\mathbf{F}(t)$ actúa sobre un objeto de masa m y produce una aceleración $\mathbf{a}(t)$, entonces

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

EJEMPLO 4 Un objeto con masa m que se mueve en una trayectoria circular con rapidez angular constante ω tiene el vector de posición $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$. Determine la fuerza que actúa sobre el objeto y demuestre que se dirige al origen.

El objeto en movimiento con posición P tiene rapidez angular $\omega = d\theta/dt$, donde θ es el ángulo que se muestra en la figura 5.

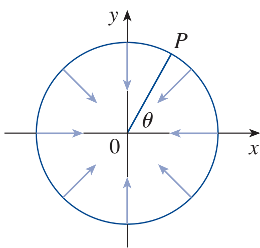


FIGURA 5

SOLUCIÓN Para determinar la fuerza, primero se debe conocer la aceleración:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - a\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

Por tanto, la segunda ley de Newton da la fuerza como

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j})$$

Nótese que $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2\,\mathbf{r}(t)$. Esto demuestra que la fuerza actúa en la dirección opuesta al vector radio $\mathbf{r}(t)$ y que por tanto apunta al origen (véase la figura 5). A una fuerza así se le conoce como fuerza *centrípeta* (que busca el centro). ■

Movimiento de proyectiles

EJEMPLO 5 Un proyectil es disparado con un ángulo de elevación α y velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. (Véase la figura 6.) Suponiendo que la resistencia del viento es insignificante y que la única fuerza externa se debe a la gravedad, determine la función posición $\mathbf{r}(t)$ del proyectil. ¿Qué valor de α maximiza el rango (la distancia horizontal recorrida)?

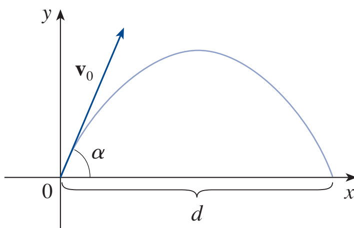


FIGURA 6

SOLUCIÓN Se establecen los ejes de tal manera que el proyectil parta del origen. Como la fuerza debida a la gravedad actúa hacia abajo, se tiene

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{j}$$

donde $g = |\mathbf{a}| < 9.8 \text{ m/s}^2$. Así

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$, se tiene

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \text{C}$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Por tanto

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Integrando otra vez, se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

Pero $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, así que el vector de posición del proyectil está dado por

3 $$\mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0$$

Se escribe $|\mathbf{v}_0| = \mathbf{v}_0$ (la rapidez inicial del proyectil), entonces

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$$

y la ecuación 3 se convierte en

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos\alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son entonces

Si se elimina t de las ecuaciones 4, se verá que y es una función cuadrática de x. Así, la trayectoria del proyectil forma parte de una parábola.

4 $$x = (v_0 \cos\alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

La distancia horizontal d es el valor de x cuando $y = 0$. Si se establece $y = 0$, se obtiene $t = 0$ o $t = (2v_0 \operatorname{sen}\ \alpha)/g$. Este segundo valor de t da entonces

$$d = x = (v_0 \cos\alpha)\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2(2 \operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Es evidente que d alcanza su valor máximo cuando sen $2\alpha = 1$, es decir $\alpha = 45°$. ■

EJEMPLO 6 Un proyectil es disparado con una rapidez de cañón de 150 m/s y un ángulo de elevación de 45° desde una posición de 10 m sobre la superficie. ¿Dónde impacta el proyectil la superficie y con qué rapidez?

SOLUCIÓN Si se coloca el origen en la superficie, la posición inicial del proyectil es (0, 10), así que se debe ajustar las ecuaciones 4 sumando 10 a la expresión para y. Con $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45°$ y $g = 9.8\ m/\text{s}^2$, se tiene

$$x = 150\cos(45°)t = 75\sqrt{2}\,t$$

$$y = 10 + 150 \operatorname{sen}(45°)t - \tfrac{1}{2}(9.8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}\,t - 4.9t^2$$

El impacto ocurre cuando $y = 0$, es decir $4.9t^2 - 75\sqrt{2}\,t - 10 = 0$. Al usar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación (y tomar solo el valor positivo de t), se obtiene

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11250 + 196}}{9.8} \approx 21.74$$

Entonces $x \approx 75\sqrt{2}\,(21.74) \approx 2306$, así que el proyectil impacta la superficie a una distancia de alrededor de 2306 m.

La velocidad del proyectil es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(75\sqrt{2} - 9.8t\right)\mathbf{j}$$

Así, su rapidez en el impacto es

$$|\mathbf{v}(21.74)| = \sqrt{\left(75\sqrt{2}\right)^2 + \left(75\sqrt{2} - 9.8 \cdot 21.74\right)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$ ■

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Cuando se estudia el movimiento de una partícula, suele ser útil resolver la aceleración en dos componentes, uno en la dirección de la tangente y otro en la dirección de la normal. Si se escribe $v = |\mathbf{v}|$ para la rapidez de la partícula, entonces

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

así que $$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

Si se derivan ambos miembros de esta ecuación con respecto a t se obtiene

5 $$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$$

Si se usa la expresión para la curvatura dada por la ecuación 13.3.9 se tiene

6 $$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \quad \text{así que} \quad |\mathbf{T}'| = \kappa v$$

El vector normal unitario fue definido en la sección precedente como $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$, de modo que (6) da

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v\mathbf{N}$$

y la ecuación 5 se convierte en

7 $$\boxed{\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}}$$

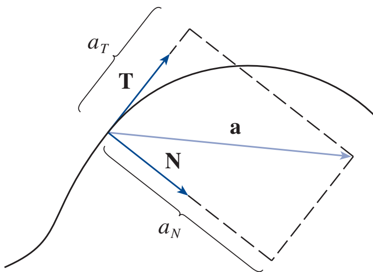


FIGURA 7

Al escribir a_T y a_N para los componentes tangencial y normal de la aceleración se tiene

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

donde

8 $$a_T = v' \qquad \text{y} \qquad a_N = \kappa v^2$$

Esta resolución se ilustra en la figura 7.

Se examinará qué indica la fórmula 7. Lo primero por notar es que el vector binormal **B** está ausente. Sin importar cómo se mueva un objeto en el espacio, su aceleración siempre reside en el plano de **T** y **N** (el plano osculador). (Recuérdese que **T** da la dirección del movimiento y **N** apunta en la dirección de giro de la curva.) Se advierte después que el componente tangencial de la aceleración es v', la razón de cambio de la rapidez, y que el componente normal de la aceleración es κv^2, la curvatura multiplicada por el cuadrado de la rapidez. Esto tiene sentido si se piensa en un pasajero en un automóvil; una vuelta pronunciada en una calle significa un valor grande de la curvatura κ, así que el componente de la aceleración perpendicular al movimiento es grande y el pasajero es arrojado contra la puerta del auto. Una rapidez alta al dar la vuelta tiene el mismo efecto; de hecho, si se duplica la rapidez, a_N aumenta en un factor de 4.

Aunque se tienen expresiones para los componentes tangencial y normal de la aceleración en las ecuaciones 8, es deseable tener expresiones que solo dependan de $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}''$. Con este fin se toma el producto punto de $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con $\mathbf{a}$ como dado por la ecuación 7:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} &= v\mathbf{T} \cdot (v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}) \\ &= vv'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa v^3 \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \\ &= vv' \qquad (\text{ya que } \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \text{ y } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0) \end{aligned}$$

Por tanto

9 $$a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Usando la fórmula para la curvatura dada por el teorema 13.3.10, se tiene

10 $$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}|\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

EJEMPLO 7 Una partícula se mueve con una función posición $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$. Determine los componentes tangencial y normal de la aceleración.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= t^2\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}'(t) &= 2t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}''(t) &= 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k} \\ |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{8t^2 + 9t^4} \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación 9 da el componente tangencial como

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Dado que $$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t^2\,\mathbf{j}$$

la ecuación 10 da el componente normal como

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}\,t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$ ■

Leyes del movimiento de los planetas de Kepler

Ahora se describirá uno de los grandes logros del cálculo mostrando cómo el material de este capítulo puede usarse para comprobar las leyes del movimiento de los planetas de Kepler. Después de 20 años de estudiar las observaciones astronómicas del astrónomo danés Tycho Brahe, el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) formuló las tres leyes siguientes.

Leyes de Kepler

1. Un planeta gira alrededor del sol en una órbita elíptica con el sol en un foco.
2. La recta que une al sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

En su libro *Principia Mathematica* de 1687, Sir Isaac Newton fue capaz de demostrar que estas tres leyes son consecuencia de dos de sus propias leyes, la segunda ley del movimiento y la ley de la gravitación universal. En lo que se sigue comprobará la primera ley de Kepler. Las leyes restantes se dejan como ejercicios (con sugerencias).

Como la fuerza gravitacional del sol sobre un planeta es mucho mayor que las fuerzas ejercidas por otros cuerpos celestes, se puede ignorar sin riesgo todos los cuerpos en el universo excepto el sol y un planeta que gira alrededor de él. Se usa un sistema de coordenadas con el sol en el origen y se concede que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es el vector de posición del planeta. (En forma igualmente satisfactoria, $\mathbf{r}$ podría ser el vector de posición de la luna o un satélite que se mueve alrededor de la Tierra o un cometa que se mueve alrededor de una estrella.) El vector velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ y el vector aceleración es $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$. Se usan las siguientes leyes de Newton:

Segunda ley del movimiento: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Ley de la gravitación: $\mathbf{F} = -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = -\dfrac{GMm}{r^2}\mathbf{u}$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza gravitacional sobre el planeta, m y M las masas del planeta y del sol, G la constante gravitacional, $r = |\mathbf{r}|$ y $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

Primero se demostrará que el planeta se mueve en un plano. Igualando las expresiones para $\mathbf{F}$ en las dos leyes de Newton, se determina que

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

así que $\mathbf{a}$ es paralela a $\mathbf{r}$. De esto se sigue que $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Se usa la fórmula 5 del teorema 13.2.3 para escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}' \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Por tanto $$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

donde $\mathbf{h}$ es un vector constante. (Se podría suponer que $\mathbf{h} \neq 0$; es decir, que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos.) Esto significa que el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{h}$ para todos los valores de t, así que el planeta siempre se ubica en el plano que pasa por el origen perpendicular a $\mathbf{h}$. De este modo, la órbita del planeta es una curva en un plano.

Para comprobar la primera ley de Kepler se reescribe el vector $\mathbf{h}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})' \\ &= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \\ &= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \frac{-GM}{r^2} \mathbf{u} \times (r^2 \mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM \, \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

$$= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \qquad \text{(por el teorema 12.4.11, propiedad 6)}$$

Pero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$, y como $|\mathbf{u}(t)| = 1$, del ejemplo 13.2.4 se sigue que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$$

En consecuencia

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM \, \mathbf{u}'$$

así que

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM \, \mathbf{u}'$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación se obtiene

11
$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM \, \mathbf{u} + \mathbf{c}$$

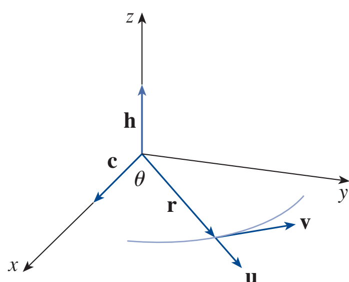


FIGURA 8

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante.

En este punto es conveniente elegir los ejes de coordenadas de tal manera que el vector de base estándar $\mathbf{k}$ apunte en la dirección del vector $\mathbf{h}$. Entonces, el planeta se mueve en el plano xy. Puesto que tanto $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ como $\mathbf{u}$ son perpendiculares a $\mathbf{h}$, la ecuación 11 indica que $\mathbf{c}$ se tiende en el plano xy. Esto significa que se puede elegir los ejes x y y de tal forma que el vector $\mathbf{i}$ se tienda en la dirección de $\mathbf{c}$, como se muestra en la figura 8.

Si θ es el ángulo entre $\mathbf{c}$ y $\mathbf{r}$, entonces $(\mathbf{r}, \theta)$ son las coordenadas polares del planeta. De la ecuación 11 se obtiene que

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot (GM \, \mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM \, \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$

$$= GMr \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}|\cos\theta = GMr + rc\cos\theta$$

donde $c = |\mathbf{c}|$. Entonces

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM} \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta}$$

donde $e = c/(GM)$. Pero

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

donde $h = |\mathbf{h}|$. Así

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

Al escribir $d = h^2/c$ se obtiene la ecuación

12
$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Al comparar con el teorema 10.6.6, se ve que la ecuación 12 es la ecuación polar de una sección cónica con foco en el origen y excentricidad e. Se sabe que la órbita de un planeta es una curva cerrada y por tanto que la cónica debe ser una elipse.

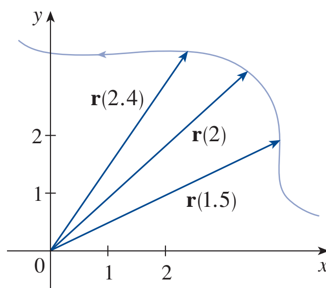
Esto completa la derivación de la primera ley de Kepler. Se guiará en la derivación de la segunda y tercera leyes en el proyecto de aplicación de la página 880. Las comprobaciones de estas tres leyes muestran que los métodos de este capítulo brindan una herramienta eficaz para describir algunas de las leyes de la naturaleza.

13.4 EJERCICIOS

1. La tabla da las coordenadas de una partícula que se mueve en el espacio a lo largo de una curva suave.
(a) Determine las velocidades promedio durante los intervalos de tiempo [0, 1], [0.5, 1], [1, 2] y [1, 1.5].
(b) Estime la velocidad y rapidez de la partícula en $t = 1$.

t	x	y	z
0	2.7	9.8	3.7
0.5	3.5	7.2	3.3
1.0	4.5	6.0	3.0
1.5	5.9	6.4	2.8
2.0	7.3	7.8	2.7

2. La figura muestra la trayectoria de una partícula que se mueve con un vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el momento t.
(a) Dibuje un vector que represente la velocidad promedio de la partícula en el intervalo de tiempo $2 \leqslant t \leqslant 2.4$.
(b) Dibuje un vector que represente la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $1.5 \leqslant t \leqslant 2$.
(c) Escriba una expresión para el vector velocidad $\mathbf{v}(2)$.
(d) Dibuje una aproximación al vector $\mathbf{v}(2)$ y estime la rapidez de la partícula en $t = 2$.



3-8 Determine la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función posición dada. Trace la trayectoria de la partícula y dibuje los vectores velocidad y aceleración para el valor especificado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle -\frac{1}{2}t^2, t \rangle, \quad t = 2$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 1/t^2 \rangle, \quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\, \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}, \quad t = \pi/3$

6. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 - t, 4\sqrt{t} \rangle, \quad t = 1$

7. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 2\, \mathbf{k}, \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{k}, \quad t = 0$

9-14 Determine la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función posición dada.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, t^3, t^2 - 1 \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 3t, 2 \operatorname{sen} t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\, t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\, \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j} + \ln t\, \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k})$

14. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + t \cos t\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$

15-16 Determine los vectores velocidad y posición de una partícula con la aceleración dada y la velocidad y posición inicial dada.

15. $\mathbf{a}(t) = 2\, \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = 3\, \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

16. $\mathbf{a}(t) = \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + 6t\, \mathbf{k}$,
$\mathbf{v}(0) = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - 4\, \mathbf{k}$

17-18
(a) Halle el vector de posición de una partícula con la aceleración dada y la velocidad y posición inicial especificada.
(b) Use una computadora para graficar la trayectoria de la partícula.

17. $\mathbf{a}(t) = 2t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \cos 2t\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. La función posición de una partícula está dada por $\mathbf{r}(t) - \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$. ¿En qué momento su rapidez alcanza un valor mínimo?

20. ¿Qué fuerza se requiere para que una partícula de masa m tenga la función posición $\mathbf{r}(t) = t^3\, \mathbf{i} + t^2\, \mathbf{j} + t^3\, \mathbf{k}$?

21. Una fuerza con magnitud 20 N actúa directamente hacia arriba del plano xy sobre un objeto con masa 4 kg. El objeto parte del origen con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Determine su función posición y su rapidez en el momento t.

22. Demuestre que si una partícula se mueve con una rapidez constante, los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

23. Un proyectil es disparado con una rapidez inicial de 200 m/s y un ángulo de elevación de 60°. Determine (a) el rango del proyectil, (b) la altura máxima alcanzada y (c) la rapidez en el impacto.

24. Repita el ejercicio 23 si el proyectil es disparado desde una posición de 100 m sobre la superficie.

25. Una pelota es lanzada en un ángulo de 45° a la superficie. Si aterriza a una distancia de 90 m, ¿cuál fue su rapidez inicial?

26. Un proyectil es disparado de un tanque con rapidez inicial de 400 m/s. Determine dos ángulos de elevación que pueden usarse para impactar un blanco a una distancia de 3000 m.

27. Un arma se dispara con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuál es la rapidez de cañón si la altura máxima de la bala es de 500 m?

28. Un bateador golpea una pelota 3 pies sobre la superficie hacia la cerca del jardín central, la cual tiene 10 pies de altura y se encuentra a 400 pies de *home*. La pelota se separa del bate con una rapidez de 115 pies/s y un ángulo de 50° sobre la horizontal. ¿Es un jonrón? (En otras palabras, ¿la pelota cruza la cerca?)

29. Una ciudad medieval tiene la forma de un cuadrado y está protegida por murallas con una longitud de 500 m y una altura de 15 m. Usted es el comandante de un ejército agresor y lo más que puede acercarse a la muralla son 100 m. Su plan es prender fuego a la ciudad catapultando rocas incandescentes sobre la muralla (con una rapidez inicial de 80 m/s). ¿A qué rango de ángulos debe ordenar a sus hombres colocar la catapulta? (Suponga que la trayectoria de las rocas es perpendicular a la muralla.)

30. Demuestre que un proyectil llega a tres cuartos de su altura máxima en la mitad del tiempo necesario para alcanzar su altura máxima.

31. Una pelota es lanzada al aire en dirección al este desde el origen (en la dirección del eje x positivo). La velocidad inicial es $50\,\mathbf{i} + 80\,\mathbf{k}$, con rapidez medida en metros por segundo. El giro de la pelota resulta en una aceleración al sur de 4 m/s^2, de modo que el vector aceleración es $\mathbf{a} = -4\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$. ¿Dónde aterrizará la pelota y con qué rapidez?

32. Una pelota con masa 0.8 kg es lanzada al aire con dirección al sur y una velocidad de 30 m/s en un ángulo de 30°. Un viento del oeste aplica una fuerza constante de 4 N sobre la pelota en dirección al este. ¿Dónde aterriza la pelota y con qué velocidad?

33. Agua que corre a lo largo de una porción recta de un río normalmente lo hace más rápido en medio, y la rapidez se reduce a casi cero en las orillas. Considere un trecho largo y recto de un río que corre al norte con orillas paralelas a 40 m de distancia entre sí. Si la rapidez máxima del agua es de 3 m/s, se puede usar una función cuadrática como un modelo básico para la razón de flujo del agua a x unidades de la orilla oeste: $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$.

(a) Un bote avanza a una rapidez constante de 5 m/s desde un punto A en la orilla oeste mientras mantiene una dirección perpendicular a la orilla. ¿A qué distancia río abajo en la orilla opuesta tocará tierra? Grafique la trayectoria del bote.

(b) Suponga que se quiere pilotar el bote a tierra en el punto B de la orilla este, directamente frente a A. Si se mantiene una rapidez constante de 5 m/s y una dirección constante, determine el ángulo en el que el bote debería orientarse. Luego grafique la trayectoria efectiva que sigue el bote. ¿La trayectoria parece realista?

34. Otro modelo razonable para la rapidez del agua del río del ejercicio 33 es una función seno: $f(x) = 3\,\text{sen}(\pi x/40)$. Si un barquero quisiera cruzar el río de A a B con dirección constante y una rapidez constante de 5 m/s, determine el ángulo en el que el bote debería orientarse.

35. Una partícula tiene una función posición $\mathbf{r}(t)$. Si $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{c} \times \mathbf{r}(t)$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante, describa la trayectoria de la partícula.

36. (a) Si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, ¿qué podría decir usted sobre su vector aceleración?

(b) Si una partícula se mueve con una rapidez constante a lo largo de una curva, ¿qué podría decir usted sobre su vector aceleración?

37-40 Determine los componentes tangencial y normal del vector aceleración.

37. $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}, \quad t \geqslant 0$

38. $\mathbf{r}(t) = 2t^2\,\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t\right)\mathbf{j}$

39. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

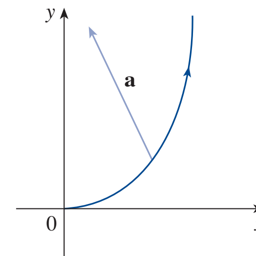
40. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2e^t\,\mathbf{j} + e^{2t}\,\mathbf{k}$

41-42 Determine los componentes tangencial y normal del vector aceleración en el punto dado.

41. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + (t^2 + 3t)\,\mathbf{j} + 4\sqrt{t}\,\mathbf{k}, \quad (0, 4, 4)$

42. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{t}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\,\mathbf{j} + \dfrac{1}{t^3}\,\mathbf{k}, \quad (1, 1, 1)$

43. La magnitud del vector aceleración $\mathbf{a}$ es 10 cm/s^2. Use la figura para estimar los componentes tangencial y normal de $\mathbf{a}$.



44. Si una partícula con masa m se mueve con un vector de posición $\mathbf{r}(t)$, su cantidad de **movimiento angular** se define como $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ y su **momento de torsión** como $\boldsymbol{\tau}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$. Demuestre que $\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$. Deduzca que si $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0}$ para todas las t, entonces $\mathbf{L}(t)$ es constante. (Esta es la *ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular*.)

45. La función posición de una nave espacial es

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\,\mathbf{i} + (2 + \ln t)\,\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

y las coordenadas de una estación espacial son (6, 4, 9). El capitán desea que la nave se deslice hasta la estación espacial. ¿En qué momento deberían apagarse los motores?

46. Un cohete que consume su combustible a bordo al moverse en el espacio tiene una velocidad $\mathbf{v}(t)$ y una masa $m(t)$ en el momento t. Si los gases escapan con una velocidad $\mathbf{v}_e$ en relación con el cohete, de la segunda ley del movimiento de Newton puede deducirse que

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

(a) Demuestre que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln\dfrac{m(0)}{m(t)}\mathbf{v}_e$.

(b) Para que el cohete acelere en una línea recta desde su estado de reposo hasta dos veces la velocidad de sus gases de escape, ¿qué fracción de su masa inicial tendría que consumir como combustible?

PROYECTO DE APLICACIÓN LEYES DE KEPLER

Johannes Kepler enunció las siguientes tres leyes del movimiento de los planetas sobre la base de inmensas cantidades de datos acerca de las posiciones de los planetas en diversos momentos.

Leyes de Kepler

1. Un planeta gira alrededor del sol en una órbita elíptica con el sol en un foco.
2. La recta que une al sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

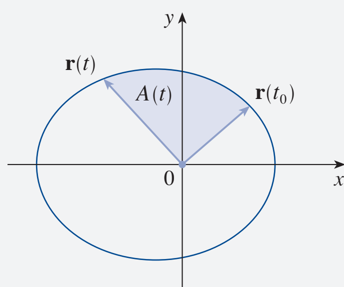
Kepler formuló estas leyes porque se ajustaban a los datos astronómicos. No fue capaz de ver por qué eran ciertas o cómo se relacionaban entre sí. Pero Sir Isaac Newton, en su *Principia Mathematica* de 1687, mostró cómo deducir las tres leyes de Kepler de dos de sus propias leyes, la segunda ley del movimiento y la ley de la gravitación universal. En la sección 13.4 se comprueba la primera ley de Kepler usando el cálculo de funciones vectoriales. En este proyecto será guiado por las comprobaciones de la segunda y tercera leyes de Kepler y se explorarán algunas de sus consecuencias.

1. Siga los pasos que se indican a continuación para comprobar la segunda ley de Kepler. La notación es la misma que la de la comprobación de la primera ley en la sección 13.4. En particular, use coordenadas polares para que $\mathbf{r} = (r\cos\theta)\,\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\,\mathbf{j}$.

(a) Demuestre que $\mathbf{h} = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$.

(b) Deduzca que $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = h$.

(c) Si $A = A(t)$ es el área recorrida por el vector radio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$, como en la figura, demuestre que



$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

(d) Deduzca que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}h = \text{constante}$$

Esto indica que la razón en la que se recorre A es constante y comprueba la segunda ley de Kepler.

2. Sea T el período de un planeta alrededor del sol; es decir, T es el tiempo requerido para que recorra una vez su órbita elíptica. Suponga que las longitudes del eje mayor y menor de la elipse son $2a$ y $2b$.

(a) Use el inciso (d) del problema 1 para demostrar que $T = 2\pi ab/h$.

(b) Demuestre que $\dfrac{h^2}{GM} = ed = \dfrac{b^2}{a}$.

(c) Use los incisos (a) y (b) para demostrar que $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}a^3$.

Esto comprueba la tercera ley de Kepler. [Nótese que la constante de proporcionalidad $4\pi^2/(GM)$ es independiente del planeta.]

3. El período de la órbita de la Tierra es de aproximadamente 365.25 días. Use este hecho y la tercera ley de Kepler para encontrar la longitud del eje mayor de la órbita terrestre. Necesitará la masa del sol, $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg, y la constante gravitacional, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$.

4. Es posible poner un satélite en órbita alrededor de la Tierra para que permanezca fijo sobre un lugar dado en el ecuador. Calcule la altitud necesaria para ese satélite. La masa de la Tierra es 5.98×10^{24} kg y su radio 6.37×10^{6} m. (Esta órbita se llama órbita geoestacionaria Clarke, en honor a Arthur C. Clarke, quien fue el primero en proponer esta idea, en 1945. El primer satélite de este tipo, Syncom II, se lanzó en julio de 1963.)

13 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. ¿Qué es una función vectorial? ¿Cómo se encuentra su derivada y su integral?

2. ¿Cuál es la relación entre funciones vectoriales y curvas en el espacio?

3. ¿Cómo se determina el vector tangente a una curva suave en un punto? ¿Cómo se determina la recta tangente? ¿El vector tangente unitario?

4. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales derivables, c un escalar y f una función con valores reales, escriba las reglas para derivar las siguientes funciones vectoriales.

(a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$ (b) $c\mathbf{u}(t)$ (c) $f(t)\,\mathbf{u}(t)$
(d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ (e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ (f) $\mathbf{u}(f(t))$

5. ¿Cómo se determina la longitud de una curva en el espacio dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$?

6. (a) ¿Cuál es la definición de curvatura?
(b) Escriba una fórmula para la curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$.
(c) Escriba una fórmula para la curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.
(d) Escriba una fórmula para la curvatura de una curva en un plano con ecuación $y = f(x)$.

7. (a) Escriba fórmulas para los vectores normal unitario y binormal de una curva suave en el espacio $\mathbf{r}(t)$.
(b) ¿Qué es el plano normal de una curva en un punto? ¿Qué es el plano osculador? ¿Qué es el círculo osculador?

8. (a) ¿Cómo se determina la velocidad, rapidez y aeleración de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio?
(b) Escriba la aceleración en términos de sus componentes tangencial y normal.

9. Enuncie las leyes de Kepler.

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. La curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + 2t^3\,\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$ es una recta.

2. La curva $\mathbf{r}(t) = \langle 0, t^2, 4t \rangle$ es una parábola.

3. La curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, 3 - t, 0 \rangle$ es una recta que pasa por el origen.

4. La derivada de una función vectorial se obtiene derivando cada función componente.

5. Si $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son funciones vectoriales derivables, entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

6. Si $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial derivable, entonces

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$

7. Si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario de una curva suave, la curvatura es $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$.

8. El vector binomial es $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$.

9. Suponga que f es dos veces continuamente derivable. En un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$, la curvatura es 0.

10. Si $\kappa(t) = 0$ para todas las t, la curva es una línea recta.

11. Si $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todas las t, $|\mathbf{r}'(t)|$ es una constante.

12. Si $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todas las t, $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todas las t.

13. El círculo osculador de una curva C en un punto tiene el mismo vector tangente, vector normal y curvatura que C en ese punto.

14. Diferentes parametrizaciones de la misma curva resultan en vectores tangentes idénticos en un punto dado en la curva.

EJERCICIOS

1. (a) Trace la curva con función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k} \qquad t \geqslant 0$$

(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$

2. Sea $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{2-t}, (e^t - 1)/t, \ln(t+1) \right\rangle$
(a) Determine el dominio de $\mathbf{r}$.
(b) Determine $\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$.
(c) Determine $\mathbf{r}'(t)$.

3. Encuentre una función vectorial que represente la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y el plano $x + z = 5$.

 **4.** Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} 2t$, $z = 2 \operatorname{sen} 3t$ en el punto $(1, \sqrt{3}, 2)$. Grafique la curva y la recta tangente en una pantalla común.

5. Si $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\mathbf{k}$, evalúe $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt$.

6. Sea C la curva con ecuaciones $x = 2 - t^3$, $y = 2t - 1$, $z = \ln t$. Determine (a) el punto donde C interseca el plano xz, (b) ecuaciones paramétricas de la recta tangente en $(1, 1, 0)$ y (c) una ecuación del plano normal a C en $(1, 1, 0)$.

7. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud del arco de la curva con ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$ $0 \leqslant t \leqslant 3$.

8. Determine la longitud de la curva $\mathbf{r}(t) - \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

9. La hélice $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ interseca la curva $\mathbf{r}_2(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ en el punto $(1, 0, 0)$. Determine el ángulo de intersección de estas curvas.

10. Reparametrice la curva $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t \cos t\,\mathbf{k}$ con respecto a la longitud de arco medida desde el punto $(1, 0, 1)$ en la dirección de t creciente.

11. Para la curva dada por $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen}^3 t, \cos 3t, \operatorname{sen}^2 t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, determine
(a) el vector tangente unitario,
(b) el vector normal unitario,
(c) el vector binormal unitario y
(d) la curvatura.

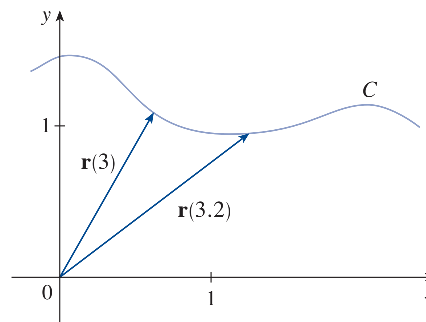
12. Halle la curvatura de la elipse $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ en los puntos $(3, 0)$ y $(0, 4)$.

13. Halle la curvatura de la curva $y = x^4$ en el punto $(1, 1)$.

 **14.** Halle una ecuación del círculo osculador de la curva $y = x^4 - x^2$ en el origen. Grafique tanto la curva como su círculo osculador.

15. Determine una ecuación del plano osculador de la curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = t$, $z = \cos 2t$ en el punto $(0, \pi, 1)$.

16. La figura muestra la curva C trazada por una partícula con vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el momento t.
(a) Dibuje un vector que represente la velocidad promedio de la partícula en el intervalo de tiempo $3 \leqslant t \leqslant 3.2$.
(b) Escriba una expresión para la velocidad $\mathbf{v}(3)$.
(c) Escriba una expresión para el vector tangente unitario $\mathbf{T}(3)$ y dibújela.



17. Una partícula se mueve con función posición $\mathbf{r}(t) = t \ln t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$. Determine la velocidad, rapidez y aceleración de la partícula.

18. Determine la velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en movimiento con función posición $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 3)\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$. Trace la trayectoria de la partícula y dibuje los vectores de posición, velocidad y aceleración para $t = 1$.

19. Una partícula parte del origen con velocidad inicial $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Su aceleración es $\mathbf{a}(t) = 6t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j} - 6t\,\mathbf{k}$. Determine su función posición.

20. Un atleta realiza un lanzamiento a un ángulo de 45° con la horizontal y una rapidez inicial de 13 m/s. Este se separa de su mano 2 m arriba de la superficie.
(a) ¿Dónde está el lanzamiento 2 segundos después?
(b) ¿Qué tan alto llegará el lanzamiento?
(c) ¿Dónde aterrizará el lanzamiento?

21. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial de 40 m/s desde el piso de un túnel cuya altura es de 30 m. ¿Qué ángulo de elevación debería usarse para alcanzar el máximo rango horizontal posible del proyectil? ¿Cuál es el rango máximo?

22. Determine los componentes tangencial y normal del vector aceleración de una partícula con función posición

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$$

23. Un disco de radio 1 rota en dirección a contrarreloj a una rapidez angular constante de ω. Una partícula parte del centro del disco y se mueve hacia el extremo a lo largo de un radio fijo de tal manera que su posición en el momento t, $t \geqslant 0$, está dada por

$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{R}(t)$, donde

$$\mathbf{R}(t) = \cos \omega t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

(a) Demuestre que la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula es

$$\mathbf{v} = \cos \omega t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_d$$

donde $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$ es la velocidad de un punto en el extremo del disco.

(b) Demuestre que la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula es

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_d + t\,\mathbf{a}_d$$

donde $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$ es la aceleración de un punto en el extremo de disco. El término extra $2\mathbf{v}_d$ se llama *aceleración de Coriolis*; es resultado de la interacción de la rotación del disco y el movimiento de la partícula. Es posible obtener una demostración física de esta aceleración caminando hacia el extremo de un carrusel en movimiento.

(c) Determine la aceleración de Coriolis de una partícula que se mueve en un disco en rotación de acuerdo con la ecuación

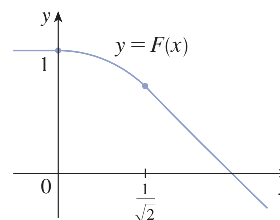
$$\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos \omega t\, \mathbf{i} + e^{-t} \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

24. Al diseñar *curvas de transferencia* para unir secciones de rieles de ferrocarril rectos, es importante comprender que la aceleración del tren debe ser continua para que la fuerza reactiva ejercida por el tren sobre el riel también sea continua. A causa de las fórmulas para los componentes de la aceleración en la sección 13.4, este será el caso si la curvatura varía continuamente.

(a) Un candidato lógico para que una curva de transferencia una rieles existentes dado por $y = 1$ para $x \leqslant 0$ y $\sqrt{2} - x$ para $x \geqslant 1/\sqrt{2}$ podría ser la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $0 < x < 1/\sqrt{2}$, cuya gráfica es el arco de un círculo mostrado en la figura. Esto parece razonable a primera vista. Demuestre que la función

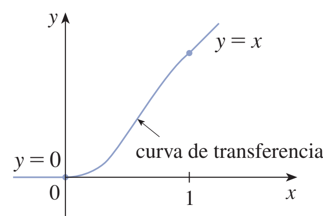
$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - x & \text{si } x \geqslant 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

es continua y tiene pendiente continua, pero no curvatura continua. Así, f no es una curva de transferencia apropiada.





(b) Determine un polinomio de quinto grado que sirva como curva de transferencia entre los siguientes segmentos de recta: $y = 0$ para $x \leqslant 0$ y $y = x$ para $x \geqslant 1$. ¿Esto podría hacerse con un polinomio de cuarto grado? Use una calculadora graficadora o computadora para trazar la gráfica de la función "conectada" y compruebe que luzca como la de la figura.



Problemas adicionales

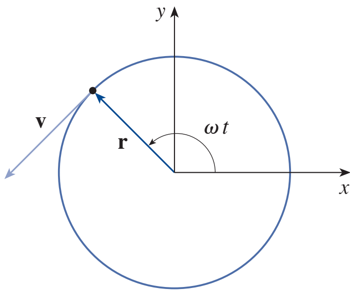


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. Una partícula P se mueve con rapidez angular constante ω alrededor de un círculo cuyo centro está en el origen y cuyo radio es R. Se dice que esta partícula está en *movimiento circular uniforme*. Suponga que el movimiento es a contrarreloj y que la partícula está en el punto $(R, 0)$ cuando $t = 0$. El vector de posición en el momento $t \geqslant 0$ es $\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t\, \mathbf{i} + R \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$.

(a) Determine el vector velocidad $\mathbf{v}$ y demuestre que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$. Concluya que $\mathbf{v}$ es tangente al círculo y apunta en la dirección del movimiento.

(b) Demuestre que la rapidez $|\mathbf{v}|$ de la partícula es la constante ωR. El *período* T de la partícula es el tiempo requerido para una revolución completa. Concluya que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(c) Determine el vector aceleración $\mathbf{a}$. Demuestre que es proporcional a $\mathbf{r}$ y que apunta al origen. Una aceleración con esta propiedad se llama *aceleración centrípeta*. Demuestre que la magnitud del vector aceleración es $|\mathbf{a}| = R\omega^2$.

(d) Suponga que la partícula tiene masa m. Demuestre que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ que se requiere para producir este movimiento, llamada *fuerza centrípeta*, es

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$

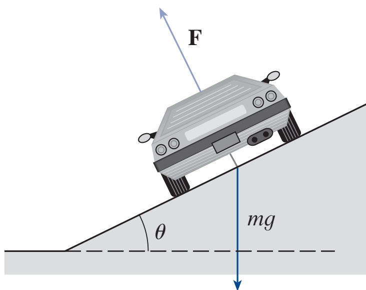


FIGURA PARA EL PROBLEMA 2

2. Una curva circular de radio R sobre una autopista está peraltada en un ángulo θ de manera que un automóvil puede recorrer la curva sin riesgo a derrapar cuando no hay fricción entre el pavimento y las llantas. La pérdida de fricción podría ocurrir, por ejemplo, si el pavimento estuviera cubierto por una capa fina de agua o hielo. La rapidez de régimen v_R de la curva es la rapidez máxima que un auto puede alcanzar sin derrapar. Suponga que un auto de masa m recorre la curva a la rapidez de régimen v_R. Dos fuerzas actúan sobre el vehículo: la fuerza vertical, mg, debida al peso del automóvil, y una fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por, y normal a, el camino (véase la figura).

El componente vertical de $\mathbf{F}$ balancea el peso del auto, de manera que $|\mathbf{F}| \cos \theta = mg$. El componente horizontal de $\mathbf{F}$ produce una fuerza centrípeta sobre el auto, así que, por la segunda ley de Newton y el inciso (d) del problema 1,

$$|\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta = \frac{m v_R^2}{R}$$

(a) Demuestre que $v_R^2 = Rg \tan \theta$.

(b) Determine la rapidez de régimen de una curva circular con radio 120 m peraltada en un ángulo de 12°.

(c) Suponga que los ingenieros diseñadores desean mantener el peralte en 12°, pero quieren aumentar la rapidez de régimen en 50%. ¿Cuál debería ser el radio de la curva?

3. Un proyectil es disparado desde el origen con ángulo de elevación α y rapidez inicial v_0. Suponiendo que la resistencia del aire es insignificante y que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la gravedad, g, en el ejemplo 13.4.5 se demostró que el vector de posición del proyectil es

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\, \mathbf{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right] \mathbf{j}$$

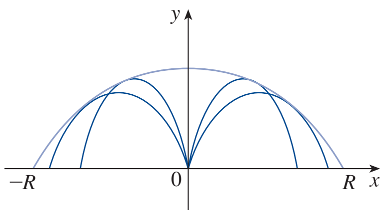


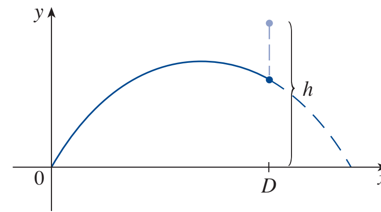
FIGURA PARA EL PROBLEMA 3

También se demostró que la distancia horizontal máxima del proyectil se alcanza cuando $\alpha = 45°$ y que en este caso el rango es $R = v_0^2/g$.

(a) ¿En qué ángulo debería dispararse el proyectil para alcanzar su altura máxima y cuál es la altura máxima?

(b) Fije la rapidez inicial v_0 y considere la parábola $x^2 + 2Ry - R^2 = 0$, cuya gráfica aparece en la figura de la izquierda. Demuestre que el proyectil puede impactar cualquier blanco dentro de o en la frontera de la región delimitada por la parábola y el eje x, y que no puede impactar ningún blanco fuera de esta región.

(c) Suponga que el arma es elevada a un ángulo de inclinación α a fin de apuntar a un objetivo suspendido a una altura h directamente sobre un punto D unidades bajo el rango (véase la figura inferior). El objetivo es liberado en el instante en que se dispara el arma. Demuestre que el proyectil siempre impacta el objetivo, sea cual fuere el valor de v_0, a condición de que el proyectil no impacte la superficie "antes" que D.



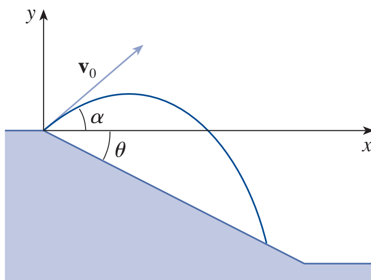


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

4. (a) Un proyectil es disparado desde el origen por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El ángulo de elevación del arma y la rapidez inicial del proyectil son α y v_0, respectivamente. Halle el vector de posición del proyectil y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil como funciones del tiempo t. (Ignore la resistencia del aire.)

(b) Demuestre que el ángulo de elevación α que maximizará el rango de descenso es el ángulo a medio camino entre el plano y la vertical.

(c) Suponga que el proyectil es disparado hacia arriba en un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación es θ. Demuestre que, a fin de maximizar el rango (de ascenso), el proyectil debería dispararse en la dirección a medio camino entre el plano y la vertical.

(d) En un trabajo presentado en 1686, Edmond Halley resumió las leyes de la gravedad y el movimiento de proyectiles y las aplicó a la artillería. Uno de los problemas que planteó implicaba disparar un proyectil para que impactara a un objetivo a una distancia R en lo alto de un plano inclinado. Demuestre que el ángulo en que el proyectil debería dispararse para impactar el objetivo usando el menor monto de energía es el mismo que en el inciso (c). (Use el hecho de que la energía necesaria para disparar el proyectil es proporcional al cuadrado de la rapidez inicial, de manera que minimizar la energía equivale a minimizar la rapidez inicial.)

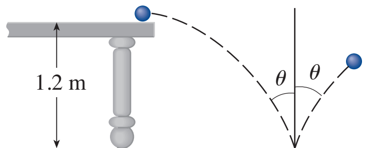


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. Una pelota rueda desde una mesa con una rapidez de 0.5 m/s. La mesa es de 1.2 m de alto.

(a) Determine el punto en el que la pelota alcanza el suelo y determine su rapidez en el instante del impacto.

(b) Encuentre el ángulo θ entre la trayectoria de la pelota y la recta vertical que pasa por el punto de impacto (véase la figura).

(c) Suponga que la pelota rebota desde el suelo en el mismo ángulo con que lo alcanzó, pero pierde 20% de su rapidez debido a la energía absorbida por la pelota en el impacto. ¿Dónde alcanzará la pelota el suelo en el segundo golpe?

6. Halle la curvatura de la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta \qquad y = \int_0^t \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta$$

7. Si un proyectil se dispara con ángulo de elevación α y rapidez inicial v, entonces las ecuaciones paramétricas para esta trayectoria son

$$x = (v \cos \alpha)t \qquad y = (v \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

(Véase el ejemplo 13.4.5.) Se sabe que el rango (distancia horizontal recorrida) se maximiza cuando $\alpha = 45°$. ¿Qué valor de α maximiza la distancia total recorrida por el proyectil? (Enuncie su respuesta al grado más cercano.)

8. Un cable tiene radio r y longitud L y se enrolla en un carrete con radio R sin empalmar. ¿Cuál es la longitud más corta a lo largo del carrete cubierto por el cable?

9. Demuestre que la curva con ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle a_1t^2 + b_1t + c_1, a_2t^2 + b_2t + c_2, a_3t^2 + b_3t + c_3\rangle$$

reside en un plano y determine una ecuación del plano.

14 Derivadas parciales



Cortesía de © Speedo y ANSYS, Inc.

En 2008 Speedo lanzó el LZR Racer, que al reducir la fricción en el agua, logró romper muchos récords de natación. En el proyecto de la página 936 se usarán derivadas parciales para explicar cómo una pequeña reducción de la fricción puede mejorar el desempeño.

HASTA ESTE CAPÍTULO SE HA ABORDADO el cálculo de las funciones de una variable. En el mundo real, las cantidades físicas dependen a menudo de dos o más variables. Este capítulo se enfocará en las funciones de diversas variables y se ampliarán las nociones básicas del cálculo diferencial a esas funciones.

14.1 Funciones de varias variables

En esta sección se estudiarán funciones de dos o más variables desde cuatro puntos de vista:

- verbalmente, mediante una descripción
- numéricamente con una tabla de valores
- algebraicamente mediante una fórmula explícita
- visualmente con una gráfica o curvas de nivel

Funciones de dos variables

La temperatura T en un punto en la superficie de la Tierra en cualquier momento dado depende de la longitud x y la latitud y del punto. T puede concebirse entonces como una función de dos variables, x y y, o una función del par (x, y). Se indica esta dependencia funcional escribiendo $T = f(x, y)$.

El volumen V de un cilindro circular depende de su radio r y su altura h. De hecho, se sabe que $V = \pi r^2 h$. Se dice que V es una función de r y h y se escribe $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definición Una **función f de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) en un conjunto D un número real único denotado por $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que f adopta, es decir $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

A menudo se escribe $z = f(x, y)$ para explicitar el valor adoptado por f en el punto general (x, f). Las variables x y y son **variables independientes** y z es la **variable dependiente**. [Compare con la notación $y = f(x)$ para funciones de una sola variable.]

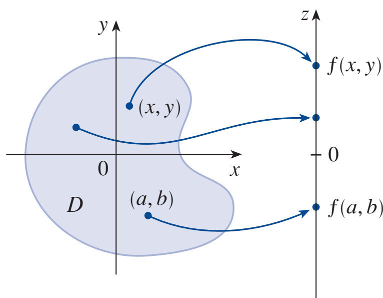


FIGURA 1

Una función de dos variables es sencillamente una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una manera de visualizar una función de este tipo es por medio de un diagrama con flechas (véase la figura 1), donde el dominio D es representado como un subconjunto del plano xy y el rango como un conjunto de números en una recta real, mostrada como eje z. Por ejemplo, si $f(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y) en una placa metálica plana en forma de D, el eje z puede concebirse como un termómetro que presenta las temperaturas registradas.

Si una función f es dada por una fórmula y no se especifica ningún dominio, se entiende que el dominio de f es el conjunto de todos los pares (x, y) para los cuales la expresión dada es un número real satisfactoriamente definido.

EJEMPLO 1 Para cada una de las funciones siguientes, evalúe $f(3, 2)$; determine y trace el dominio.

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ (b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x$

SOLUCIÓN

(a) $f(3, 2) = \dfrac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

La expresión para f tiene sentido si el denominador no es 0 y la cantidad bajo el signo de raíz cuadrada es no negativa. Así, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0,\ x \neq 1\}$$

La desigualdad $x + y + 1 \geqslant 0$, o $y \geqslant -x - 1$ describe los puntos que se encuentran en o

sobre la recta $y = -x - 1$, mientras que $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ deben excluirse del dominio. (Véase la figura 2.)

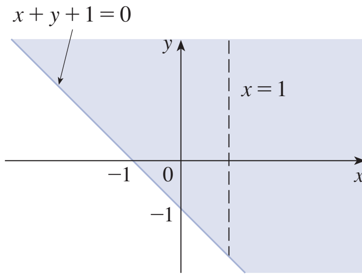


FIGURA 2

Dominio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

(b) $$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Como $\ln(y^2 - x)$ se define solo cuando $y^2 - x > 0$, es decir $x < y^2$, el dominio de f es $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Este es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$. (Véase la figura 3.) ■

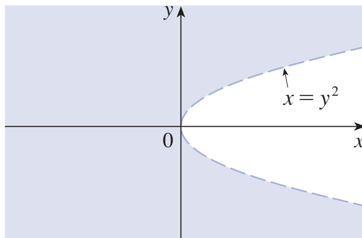


FIGURA 3

Dominio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

El índice de viento-frío

El índice de viento-frío mide cómo se siente el frío cuando hay viento, basándose en un modelo que calcula la rapidez con que un rostro humano pierde calor. El modelo se desarrolló mediante pruebas clínicas en las que voluntarios se expusieron a varias temperaturas y a velocidades del viento en un túnel aerodinámico refrigerado.

No todas las funciones pueden representarse con fórmulas explícitas. La función en el ejemplo siguiente se describe verbalmente y mediante estimaciones numéricas de sus valores.

EJEMPLO 2 En regiones con clima severo en invierno, el *índice de viento-frío* suele usarse para describir la aparente severidad del frío. Este índice W es una temperatura subjetiva que depende de la temperatura real T y la velocidad del viento v. Así, W es una función de T y v, y se puede escribir $W = f(T, v)$. La tabla 1 registra valores de W compilados por el US National Weather Service y el Meteorological Service of Canada.

Tabla 1 Índice de viento-frío como función de temperatura del aire y velocidad del viento

Velocidad del aire (km/h); filas: Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por ejemplo, la tabla muestra que si la temperatura es de –5 °C y la velocidad del viento de 50 km/h, subjetivamente se sentirá frío y una temperatura cercana a –15 °C sin viento. Así,

$$f(-5, 50) = -15$$ ■

EJEMPLO 3 En 1928 Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el que expusieron el crecimiento de la economía estadounidense durante el período 1899-1922. Consideraron una visión simplificada de la economía en la que la producción es determinada por la cantidad de mano de obra implicada y la cantidad de capital invertido. Aunque también muchos factores afectan el desempeño económico, este modelo resultó notablemente atinado. La función que esos autores usaron para establecer la producción fue de la forma

1 $$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

donde P es la producción total (el valor monetario de todos los bienes producidos en un año), L la cantidad de mano de obra (el número total de horas-hombre trabajadas en

Tabla 2

Año	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

un año) y K la cantidad de capital invertido (el valor monetario de toda la maquinaria, equipo y edificios involucrados). En la sección 14.3 se mostrará cómo la forma de la ecuación 1 se desprende de ciertos supuestos económicos.

Cobb y Douglas usaron datos económicos publicados por el gobierno para obtener la tabla 2. Tomaron el año 1899 como línea base y a P, L y K se les asignó el valor de 100 para ese año. Los valores para los demás años se expresaron como porcentajes de las cifras de 1899.

Cobb y Douglas usaron el método de mínimos cuadrados para ajustar los datos de la tabla 2 a la función

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25} \tag{2}$$

(Véase el ejercicio 81 para más detalles.)

Si se usa el modelo dado por la función de la ecuación 2 para calcular la producción de los años 1910 y 1920, se obtienen los valores

$$P(147, 208) = 1.01(147)^{0.75}(208)^{0.25} \approx 161.9$$
$$P(194, 407) = 1.01(194)^{0.75}(407)^{0.25} \approx 235.8$$

los cuales están muy cerca de los valores reales, 159 y 231.

La función de producción (1) se ha usado subsecuentemente en muchos campos, desde empresas particulares hasta la economía global, y se le conoce como **función de producción de Cobb-Douglas**. Su dominio es $\{(L, K) \mid L \geqslant 0, K \geqslant 0\}$ porque L y K representan mano de obra y capital y por tanto nunca son negativas. ■

EJEMPLO 4 Determine el dominio y el rango de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN El dominio de g es

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

el cual es un disco con centro (0, 0) y radio 3. (Véase la figura 4.) El rango de g es

$$\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\}$$

Como z es una raíz cuadrada positiva, $z \geqslant 0$. Asimismo, como $9 - x^2 - y^2 \leqslant 9$, se tiene

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

Así, el rango es

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$ ■

Gráficas

Otra manera de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica.

Definición Si f es una función de dos variables con dominio D, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x, y)$ y (x, y) esté en D.

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S con ecuación $z = f(x, y)$. Se puede visualizar la gráfica S de f como tendida directamente arriba o abajo de su dominio D en el plano xy (véase la figura 5).

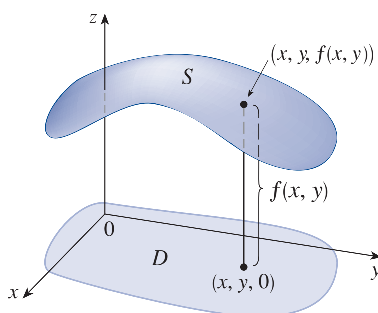


FIGURA 5

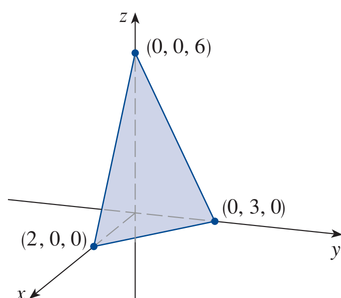


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUCIÓN La gráfica de f tiene la ecuación $z = 6 - 3x - 2y$, o $3x + 2y + z = 6$, que representa un plano. Para graficar el plano se determinan primero las intersecciones. Si $y = z = 0$, en la ecuación se obtiene $x = 2$ como la intersección en x. De igual forma, la intersección en y es 3 y la intersección en z es 6. Esto ayuda a trazar la porción de la gráfica que reside en el primer octante de la figura 6. ■

La función del ejemplo 5 es un caso especial de la función

$$f(x, y) = ax + by + c$$

la cual se llama **función lineal**. La gráfica de esa función tiene la ecuación

$$z = ax + by + c \qquad \text{o} \qquad ax + by - z + c = 0$$

que es un plano. Así como las funciones lineales de una variable son importantes en el cálculo de una variable, se verá que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel central en el cálculo de múltiples variables.

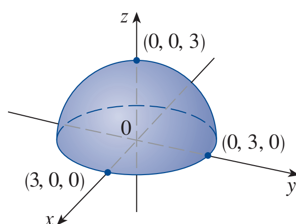


FIGURA 7
Gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN La gráfica tiene la ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Eleve al cuadrado ambos miembros de esta ecuación para obtener $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, o $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, la cual se reconoce como una ecuación de la esfera con centro en el origen y radio 3. Pero como $z \geqslant 0$, la gráfica de g es solo la mitad superior de esta esfera (véase la figura 7). ■

NOTA Una esfera entera no puede representarse con una sola función de x y y. Como se vio en el ejemplo 6, el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ es representado por la función $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. El hemisferio inferior está representado por la función $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

EJEMPLO 7 Use una computadora para dibujar la gráfica de la función de producción de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

SOLUCIÓN La figura 8 muestra la gráfica de P para valores de la mano de obra L y el capital K, que se ubican entre 0 y 300. La computadora ha dibujado la superficie diagramando trazas verticales. De estas trazas se deduce que el valor de la producción P aumenta cuando L o K aumenta, como se preveía.

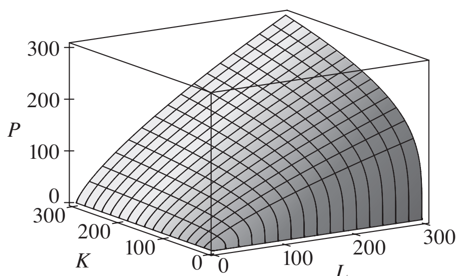


FIGURA 8 ■

EJEMPLO 8 Determine el dominio y el rango y trace la gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Nótese que $h(x, y)$ se define para todos los posibles pares ordenados de números reales (x, y), así que el dominio es $\mathbb{R}^2$, la totalidad del plano xy. El rango de h es el conjunto $(0, \infty)$ de todos los números reales no negativos. [Nótese también que $x^2 \geqslant 0$ y $y^2 \geqslant 0$, así que $h(x, y) \geqslant 0$ para todas las x y y.] La gráfica de h tiene la ecuación

$z = 4x^2 + y^2$, que es el paraboloide elíptico que se trazó en el ejemplo 12.6.4. Las trazas horizontales son elipses y las verticales parábolas (véase la figura 9). ■

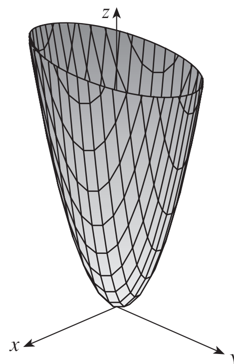
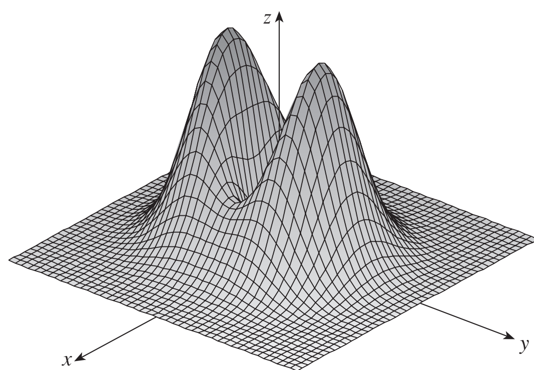


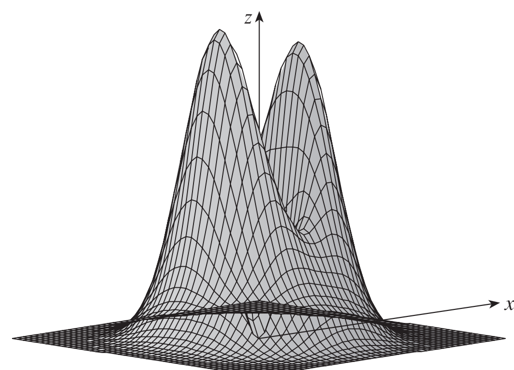
FIGURA 9
Gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

Es fácil conseguir programas de cómputo para graficar funciones de dos variables. En la mayoría de estos, las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores igualmente espaciados de k y partes de la gráfica son omitidas usando la eliminación de líneas ocultas.

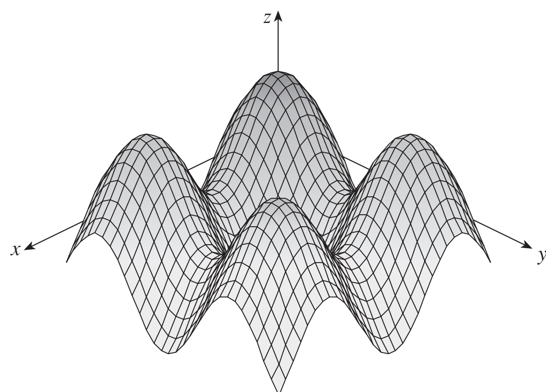
La figura 10 muestra gráficas generadas por computadora de varias funciones. Observe la imagen completa de una función cuando puede rotarse y mostrar diferentes perspectivas.



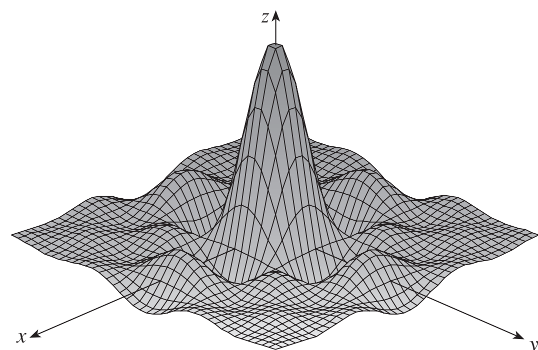
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(c) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$



(d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

FIGURA 10

En las partes (a) y (b) la gráfica de f es muy plana y está cerca del plano xy, excepto cerca del origen; esto se debe a que $e^{-x^2-y^2}$ es muy reducida cuando x o y tienen valores grandes.

Curvas de nivel

Hasta aquí dispone de dos métodos para visualizar funciones: diagramas con flechas y gráficas. Un tercer método, tomado de los cartógrafos, es un mapa de contorno en el que puntos de elevación constante se unen para formar *curvas de contorno* o *curvas de nivel*.

Definición Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas con ecuaciones $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en los que f adopta un valor k dado. En otras palabras, muestra dónde la gráfica de f tiene altura k.

En la figura 11 se observa la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel $f(x, y) = k$ son las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy. Si se dibujan las curvas de nivel de una función para visualizarlas en la altura indicada, es posible crearse una imagen de la gráfica. La superficie es pronunciada donde las curvas de nivel se juntan y es más plana donde están separadas.

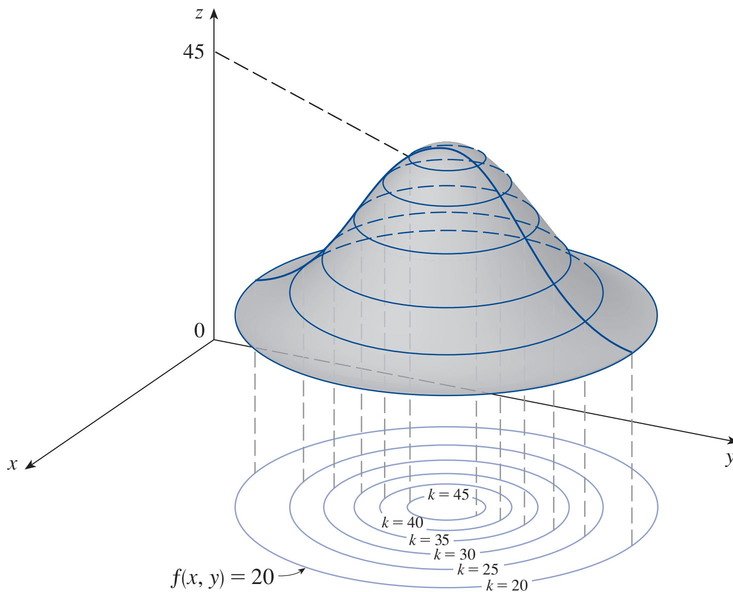


FIGURA 11

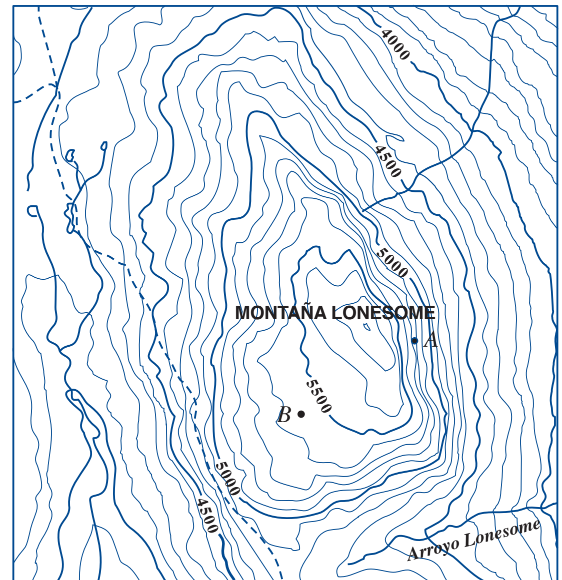


FIGURA 12

TEC Visual 14.1A anima la figura 11 mostrando las curvas de nivel correspondientes a las gráficas de funciones.

Un ejemplo común de curvas de nivel se observa en mapas topográficos de regiones montañosas, como el mapa de la figura 12. Las curvas de nivel son curvas de elevación constante sobre el nivel del mar. Si se recorre una de esas líneas de contorno, no se asciende ni desciende. Otro ejemplo común es la función temperatura que se presentó al principio de esta sección. En este caso, las curvas de nivel se llaman **isotermas** y unen

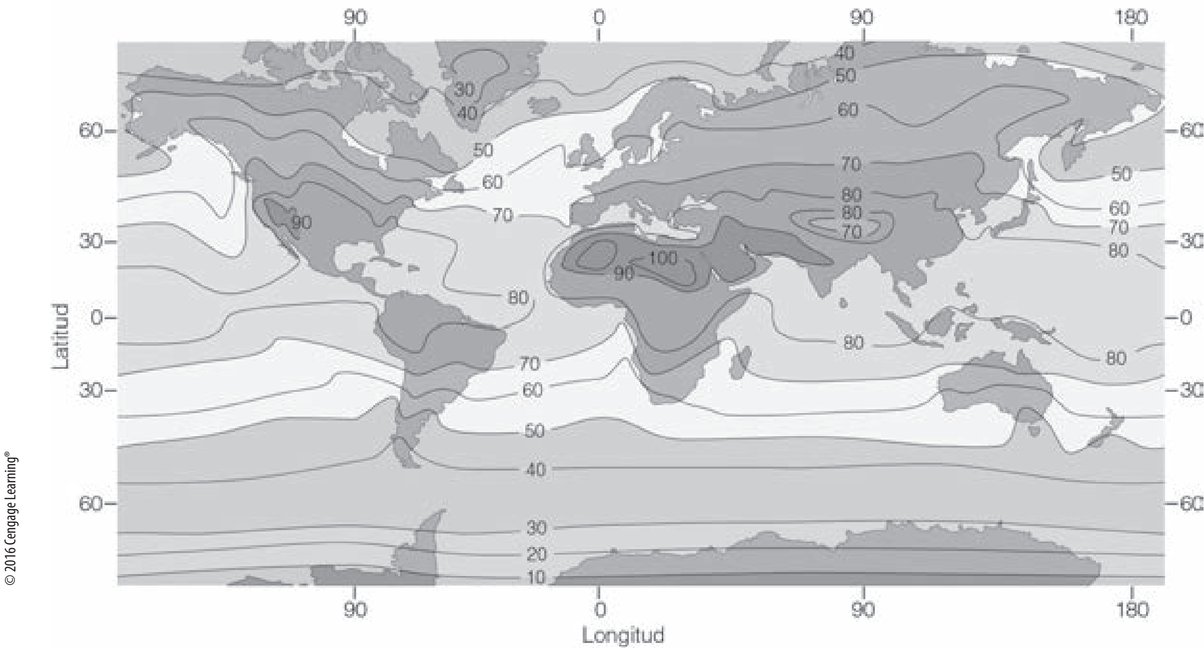


FIGURA 13 Temperatura promedio del aire cerca del nivel del mar en julio (°F)

90° 80° 70° 60° 50° 40° 30° 20° 10° 0° 10° 20° 30° 40° 50°

ACOTACIONES

Precipitación (cm/año)

Menos de 25	50 a 100	200 a 250
25 a 50	100 a 200	Más de 250

FIGURA 14
Precipitación

lugares con la misma temperatura. La figura 13 es un mapa de climas del mundo con las temperaturas promedio en julio. Las isotermas son las curvas que separan las bandas de distinto tono.

En mapas de climas de presión atmosférica, como función de la longitud y la latitud, las curvas de nivel se llaman **isobaras** y unen lugares con la misma presión. (Véase el ejercicio 34.) Los vientos superficiales tienden a fluir desde áreas de alta presión a lo largo de las isobaras hacia áreas de baja presión, y son más fuertes donde las isobaras están más estrechamente ceñidas entre sí.

En el mapa de contorno de la precipitación mundial (véase la figura 14), las curvas de nivel no están rotuladas, pero distinguen las regiones con distintas tonalidades de gris y la cantidad de precipitación se indica en las acotaciones.

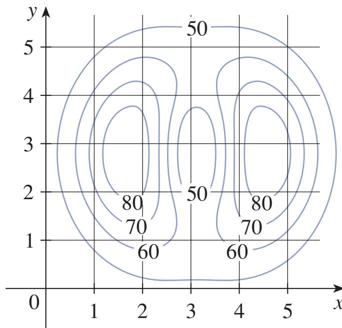


FIGURA 15

EJEMPLO 9 En la figura 15 se muestra un mapa de contorno para una función f. Estime los valores de $f(1, 3)$ y $f(4, 5)$.

SOLUCIÓN El punto (1, 3) se ubica en parte entre las curvas de nivel con valores de z de 70 y 80. Se estima que

$$f(1, 3) \approx 73$$

De igual manera, se estima que $\quad f(4, 5) \approx 56$ ■

EJEMPLO 10 Trace las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para los valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$6 - 3x - 2y = k \qquad \text{o} \qquad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Esta es una familia de rectas con pendiente $-\frac{3}{2}$. Las cuatro curvas de nivel particulares con $k = –6, 0, 6$ y 12 son $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$, y $3x + 2y + 6 = 0$. Y están trazadas en la figura 16. Las curvas de nivel son rectas paralelas igualmente espaciadas porque la gráfica de f es un plano (véase la figura 6).

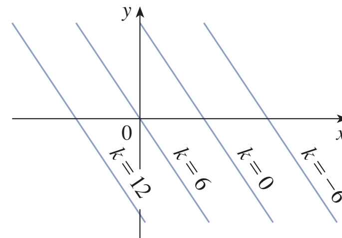


FIGURA 16
Mapa de contorno de
$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

■

EJEMPLO 11 Trace las curvas de nivel de la función

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Esta es una familia de círculos concéntricos con centro (0, 0) y radio $\sqrt{9 - k^2}$. Los casos $k = 0, 1, 2, 3$ se muestran en la figura 17. Intente visualizar estas curvas de nivel

elevándolas para formar una superficie y compárelas con la gráfica de g (hemisferio) de la figura 7. (Véase TEC Visual 14.1A.)

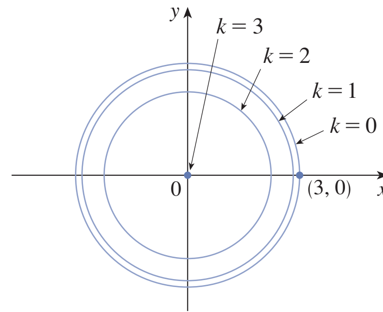


FIGURA 17
Mapa de contorno de
$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

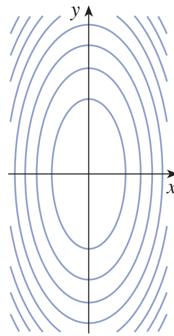
EJEMPLO 12 Trace algunas curvas de nivel de la función $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

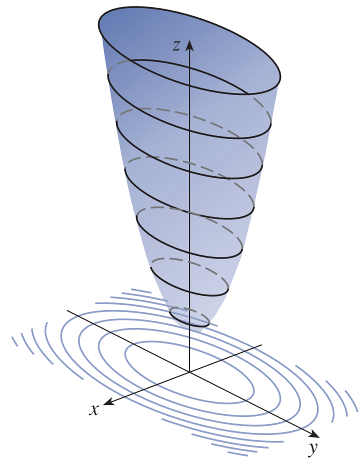
$$4x^2 + y^2 + 1 = k \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

lo que, para $k > 1$, describe una familia de elipses con semiejes $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ y $\sqrt{k-1}$. La figura 18(a) muestra un mapa de contorno de h dibujado en computadora. La figura 18(b) muestra estas curvas de nivel elevadas para componer la gráfica de h (un paraboloide elíptico), donde se convierten en trazas horizontales. Se ve en la figura 18 cómo la gráfica de h se forma a partir de las curvas de nivel.

TEC Visual 14.1B demuestra la relación entre superficies y sus mapas de contorno.



(a) Mapa de contorno



(b) Las trazas horizontales son curvas de nivel elevadas

FIGURA 18
La gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ se forma elevando las curvas de nivel.

EJEMPLO 13 Trace curvas de nivel para la función de producción de Cobb-Douglas del ejemplo 3.

SOLUCIÓN En la figura 19 se usa una computadora para dibujar un diagrama de contorno para la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

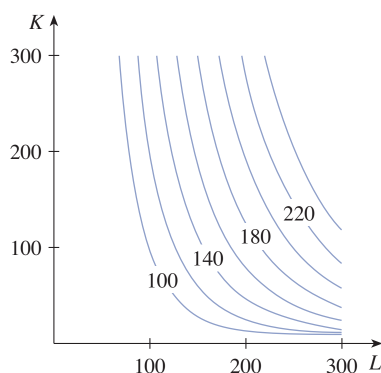
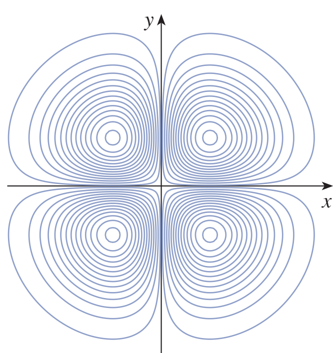


FIGURA 19

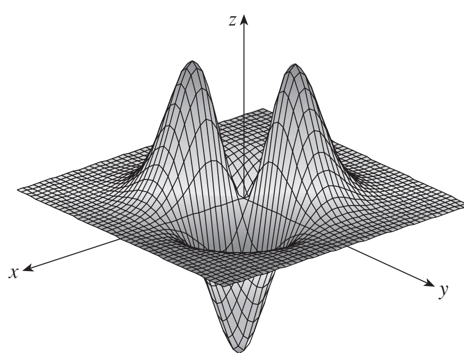
Las curvas de nivel se han rotulado con el valor de la producción P. Por ejemplo, la curva de nivel señalada como 140 muestra todos los valores de la mano de obra L y la inversión de capital K que resultan en una producción de $P = 140$. Se ve que, para un valor fijo de P, cuando L aumenta, K disminuye y viceversa. ■

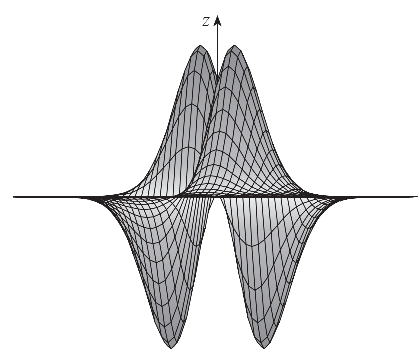
Para algunos propósitos, un mapa de contorno es más útil que una gráfica, como en el ejemplo 13. (Compare la figura 19 con la figura 8.) Y también para estimar valores de funciones, como en el ejemplo 9.

La figura 20 muestra algunas curvas de nivel generadas por computadora y sus correspondientes gráficas. Nótese que las curvas de nivel de la parte (c) se apilan cerca del origen debido a que la gráfica en la parte (d) es más pronunciada al acercase a ese punto.

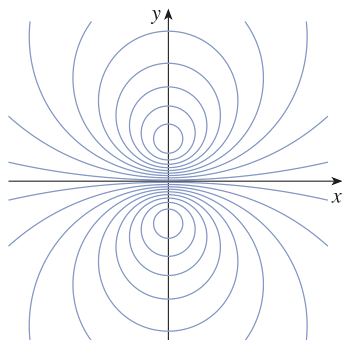


(a) Curvas de nivel de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

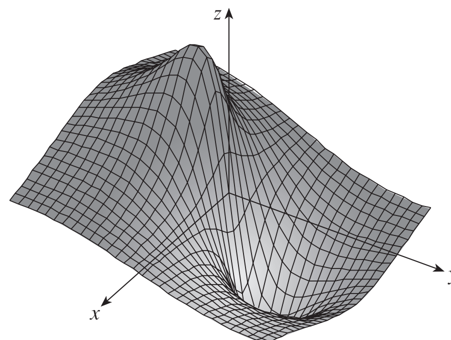




(b) Dos vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(c) Curvas de nivel de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



(d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

FIGURA 20

Funciones de tres o más variables

Una **función de tres variables**, f, es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un número real único denotado por $f(x, y, z)$. Por ejemplo, la temperatura T en un punto de la superficie terrestre depende de la longitud x y la latitud y del punto y del momento t, así que se puede escribir $T = f(x, y, t)$.

EJEMPLO 14 Determine el dominio de f si

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUCIÓN La expresión para $f(x, y, z)$ está definida mientras $z - y > 0$, así que el dominio de f es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Este es un **semiespacio** que consta de todos los puntos que se ubican arriba del plano $z = y$. ■

Una función f de tres variables es difícil de visualizar porque su gráfica tendría que representarse en un espacio tetradimensional. Sin embargo, se hará una idea de f examinando sus **superficies de nivel**, las cuales son las superficies con ecuaciones $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante. Si el punto (x, y, z) se mueve a lo largo de una superficie de nivel, el valor de $f(x, y, z)$ se mantiene fijo.

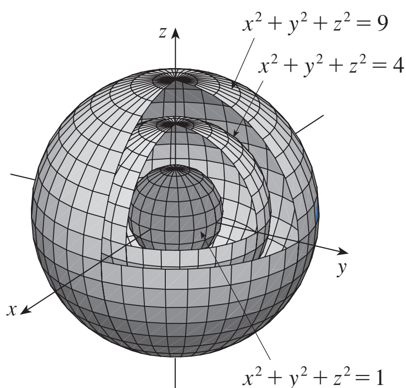


FIGURA 21

EJEMPLO 15 Determine las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUCIÓN Las superficies de nivel son $x^2 + y^2 + z^2 = k$, donde $k \geqslant 0$. Estas forman una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$. (Véase la figura 21.) Así, cuando (x, y, z) varía en cualquier esfera con centro O, el valor de $f(x, y, z)$ se mantiene fijo. ■

Las funciones pueden tener cualquier número de variables. Una **función de n variables** es una regla que asigna un número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a una n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales. Se denota con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas esas n-adas. Por ejemplo, si una compañía usa n ingredientes diferentes para hacer un producto alimenticio, c_i es el costo por unidad del i-ésimo ingrediente y x_i son las unidades usadas del ingrediente i-ésimo, de modo que el costo total C de los ingredientes es una función de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\boxed{3} \qquad C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

La función f es una función con valores reales cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A veces se usará la notación vectorial para escribir tales funciones en forma más compacta: si $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, a menudo se escribe $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Con esta notación se puede reescribir la función definida en la ecuación 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota el producto punto de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$ en V_n.

En vista de la correspondencia inyectiva entre los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y sus vectores de posición $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ en V_n, se tienen tres maneras de considerar una función f definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como una función de n variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. Como una función de una variable puntual $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3. Como una función de una variable vectorial $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Verá que estos tres puntos de vista son igualmente útiles.

14.1 EJERCICIOS

1. En el ejemplo 2 se consideró la función $W = f(T, v)$, donde W es el índice de viento-frío; T, la temperatura real y v, la velocidad del viento. En la tabla 1 de la página 889 se ofrece una representación numérica.
(a) ¿Cuál es el valor de $f(-15, 40)$? ¿Cuál es su significado?
(b) Explique el significado de la pregunta "¿Para qué valor de v es $f(-20, v) = -30$?" Después responda la pregunta.
(c) Explique el significado de la pregunta "¿Para qué valor de T es $f(T, 20) = -49$?" Después responda la pregunta.
(d) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(-5, v)$? Describa el comportamiento de esta función.
(e) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(T, 50)$? Describa el comportamiento de esta función.

2. El *índice I de temperatura-humedad*, o *humidex*, es la temperatura del aire percibida cuando la temperatura real es T y la humedad relativa es h, de modo que se puede escribir $I = f(T, h)$. La tabla de valores de I siguiente es un fragmento de una tabla compilada por Environment Canada.

Tabla 3 Temperatura aparente como una función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°C): T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) ¿Cuál es el valor de $f(35, 60)$? ¿Cuál es su significado?
(b) ¿Para qué valor de h es $f(30, h) = 36$?
(c) ¿Para qué valor de T es $f(T, 40) = 42$?
(d) ¿Cuáles son los significados de las funciones $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare el comportamiento de estas dos funciones de h.

3. Un fabricante ha planeado su función de producción anual P (el valor monetario de su producción entera en millones de dólares) como una función de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$$

donde L es el número de horas de trabajo (en miles) y K el capital invertido (en millones de dólares). Determine $P(120, 20)$ e interprétela.

4. Verifique la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

explicada en el ejemplo 3 que la producción se duplicará si se duplica tanto la cantidad de mano de obra como la cantidad de capital. Determine si esto también se aplica a la función de producción general

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

5. Un modelo para el área de un cuerpo humano está dado por la función

$$S = f(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$$

donde w es el peso (en libras), h la altura (en pulgadas) y S se mide en pies cuadrados.
(a) Encuentre $f(160, 70)$ e interprétela.
(b) ¿Cuál es el área de su propio cuerpo?

6. El índice de viento-frío W expuesto en el ejemplo 2 ha sido modelado para la función siguiente:

$$W(T, v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

Compruebe cuánto coincide este modelo con los valores de la tabla 1 para algunos valores de T y v.

7. La altura de las olas h en mar abierto depende de la velocidad v del viento y el tiempo t durante el cual el viento ha soplado a esa velocidad. Valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en metros en la tabla 4.
(a) ¿Cuál es el valor de $f(80, 15)$? ¿Cuál es su significado?
(b) ¿Cuál es el significado de la función $h = f(60, t)$? Describa el comportamiento de esta función.
(c) ¿Cuál es el significado de la función $h = f(v, 30)$? Describa el comportamiento de esta función.

Tabla 4

Duración (horas)

Velocidad del viento (km/h): v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
30	1.2	1.3	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6
40	1.5	2.2	2.4	2.5	2.7	2.8	2.8
60	2.8	4.0	4.9	5.2	5.5	5.8	5.9
80	4.3	6.4	7.7	8.6	9.5	10.1	10.2
100	5.8	8.9	11.0	12.2	13.8	14.7	15.3
120	7.4	11.3	14.4	16.6	19.0	20.5	21.1

8. Una compañía fabrica cajas de cartón de tres tamaños: chica, mediana y grande con un costo de \$2.50,

\$4.00 y \$4.50, respectivamente. Los costos fijos son de \$8 000.
(a) Exprese el costo de fabricar x cajas chicas, y cajas medianas y z cajas grandes como una función de tres variables: $C = f(x, y, z)$.
(b) Determine $f(3\,000, 5\,000, 4\,000)$ e interprétela.
(c) ¿Cuál es el dominio de f?

9. Sea $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.
(a) Evalúe $g(2, -1)$.
(b) Determine el dominio de g.
(c) Determine el rango de g.

10. Sea $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.
(a) Evalúe $F(3, 1)$.
(b) Determine y trace el dominio de F.
(c) Determine el rango de F.

11. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Evalúe $f(1, 1, 1)$.
(b) Determine y describa el dominio de f.

12. Sea $g(x, y, z) = x^3y^2z\sqrt{10 - x - y - z}$.
(a) Evalúe $g(1, 2, 3)$.
(b) Determine y describa el dominio de g.

13-22 Determine y trace el dominio de la función.

13. $f(x, y) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{y - 1}$

14. $f(x, y) = \sqrt[4]{x - 3y}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

17. $g(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

18. $g(x, y) = \dfrac{\ln(2 - x)}{1 - x^2 - y^2}$

19. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x + y)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2} + \sqrt{1 - z^2}$

22. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

23-31 Trace la gráfica de la función.

23. $f(x, y) = y$

24. $f(x, y) = x^2$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = \cos y$

27. $f(x, y) = \operatorname{sen} x$

28. $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$

29. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 1$

30. $f(x, y) = e^{-y}$

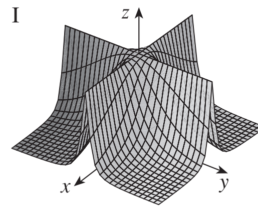
31. $f(x, y) = y^2 + 1$

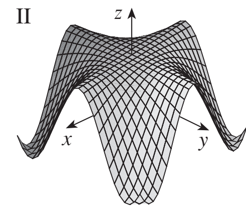
32. Asocie la función con la gráfica que le corresponde. Argumente sus decisiones.

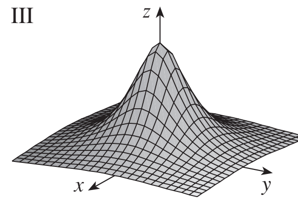
(a) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ (b) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2y^2}$

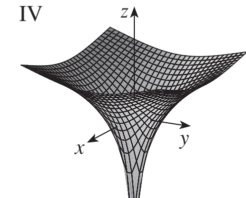
(c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ (d) $f(x, y) = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$

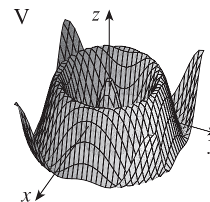
(e) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$ (f) $f(x, y) = \cos(xy)$

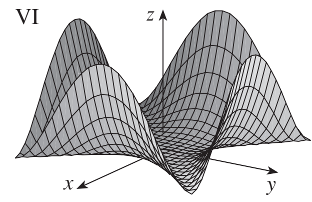
I


II


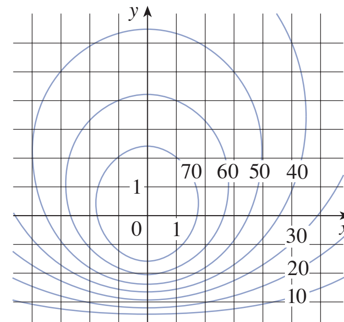
III


IV


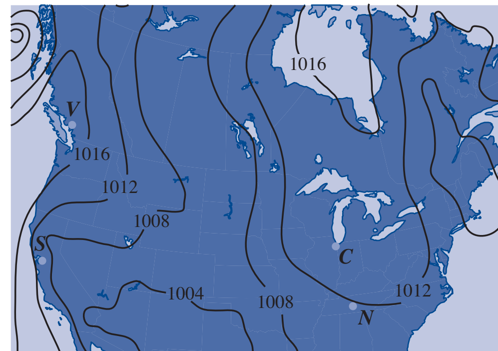
V


VI


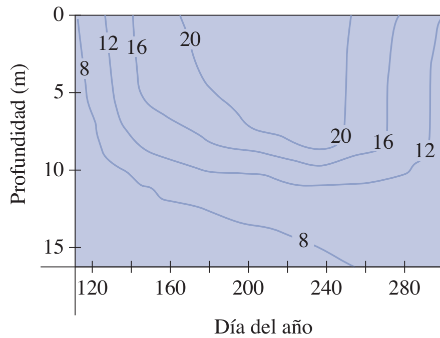
33. A continuación se muestra el mapa de contorno para una función f. Úselo para estimar los valores de $f(-3, 3)$ y $f(3, -2)$. Explique la forma de la gráfica.



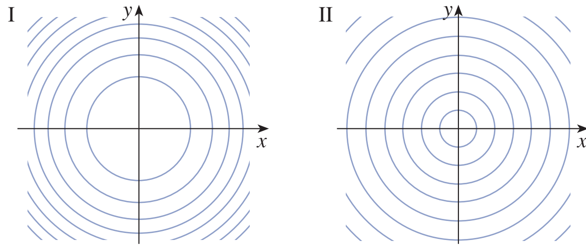
34. En las curvas de nivel, llamadas isobaras, representadas en el mapa de contorno de presión atmosférica en América del Norte del 12 de agosto de 2008, la presión se señala en milibaras (mb).
(a) Estime la presión en C (Chicago), N (Nashville), S (San Francisco) y V (Vancouver).
(b) ¿En cuál de esos lugares los vientos fueron más fuertes?



35. Las curvas de nivel (isotermas) para la temperatura habitual del agua (en °C) en Long Lake, Minnesota, representan una función de la profundidad y el momento del año. Estime la temperatura del lago el 9 de junio (día 160) a una profundidad de 10 m y el 29 de junio (día 180) a una profundidad de 5 m.

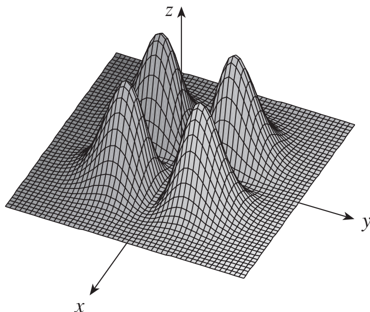


36. Observe los dos mapas de contorno. Uno es para una función f cuya gráfica es un cono. El otro es para una función g cuya gráfica es un paraboloide. ¿Cuál corresponde a cada función y por qué?



37. Localice los puntos A y B en el mapa de la Montaña Lonesome (figura 12). ¿Cómo describiría el terreno que se forma cerca de A? ¿Cerca de B?

38. Haga un diagrama de un mapa de contorno para la función que se representa en la gráfica siguiente.



39. El *índice de masa corporal* (IMC) de una persona se calcula con

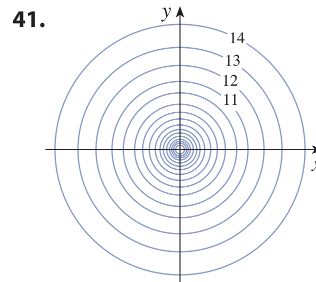
$$B(m, h) = \frac{m}{h^2}$$

donde m es la masa de la persona en kilogramos y h la altura en metros. Dibuje las curvas de nivel $B(m, h) = 18.5$, $B(m, h) = 25$, $B(m, h) = 30$, $B(m, h) = 40$. Una pauta es que una persona tiene bajo peso si su IMC es menor que 18.5; se encuentra en un estado óptimo si su IMC está entre 18.5 y 25; tiene sobrepeso si su IMC está entre 25 y 30, y es obesa si su IMC excede de 30. Sombree la región correspondiente al IMC óptimo. ¿Si una persona pesa 62 kg y mide 152 cm pertenece a esta categoría?

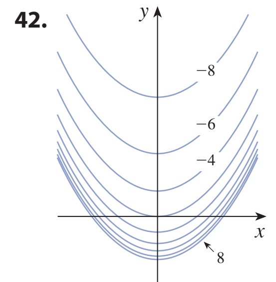
40. La fórmula para el cálculo del índice de masa corporal se localiza en el ejercicio 39. Dibuje la curva de nivel de esta función para una persona que mide 2 metros de altura y 80 kg de peso. Determine el peso y la altura de otras dos personas con esa misma curva de nivel.

41-44 Use el mapa de contorno de una función para hacer un diagrama de la gráfica de f.

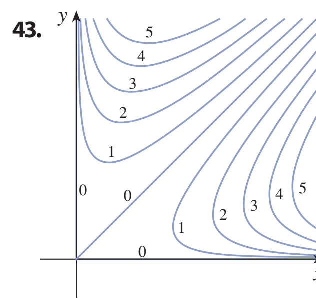
41.



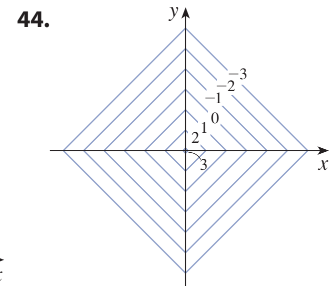
42.



43.



44.



45-52 Dibuje un mapa de contorno de la función que muestre varias curvas de nivel.

45. $f(x, y) = x^2 - y^2$

46. $f(x, y) = xy$

47. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

48. $f(x, y) = x^3 - y$

49. $f(x, y) = ye^x$

50. $f(x, y) = y - \arctan x$

51. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

52. $f(x, y) = y \sec x$

53-54 Trace un mapa de contorno y una gráfica de la función y compárelos.

53. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

54. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

55. Una placa metálica delgada, localizada en el plano xy, tiene temperatura $T(x,y)$ en el punto (x, y). Trace algunas curvas de nivel (isotermas) si la función temperatura está dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

56. Si $V(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) en el plano xy, las curvas de nivel de V se llaman *curvas equipotenciales*, porque en todos los puntos sobre una de esas curvas el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales si $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, donde c es una constante positiva.

57-60 Grafique la función siguiente usando varios dominios y distintas perspectivas. Imprima la que considere tiene mejor visibilidad. Si con su software puede crear curvas de nivel, trace algunas líneas de contorno de la misma función y compárelas con la gráfica.

57. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (silla de mono)

58. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (silla de perro)

59. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\text{sen}(x^2) + \cos(y^2))$

60. $f(x, y) = \cos x \cos y$

61-66 Asocie la función (a) con su gráfica (figuras A a la F) y (b) con su mapa de contorno (dibujos I-VI). Explique sus decisiones.

61. $z = \text{sen}(xy)$

62. $z = e^x \cos y$

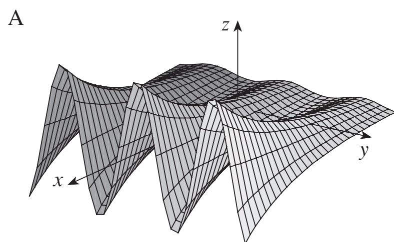
63. $z = \text{sen}(x - y)$

64. $z = \text{sen}\, x - \text{sen}\, y$

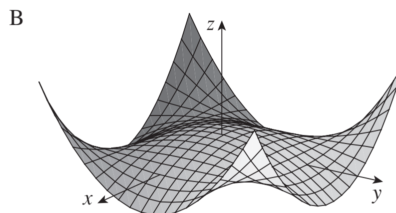
65. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

66. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

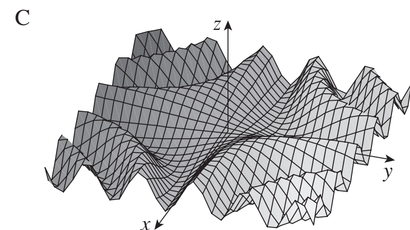
A



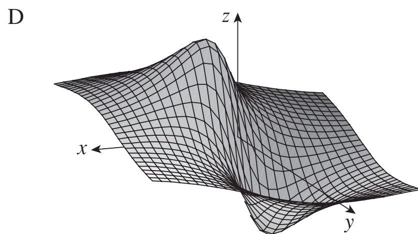
B



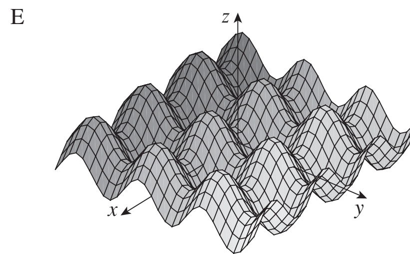
C



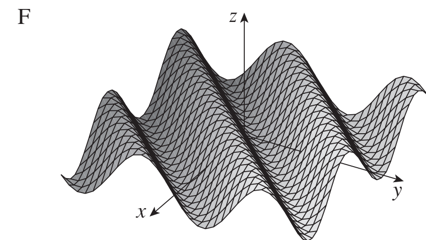
D



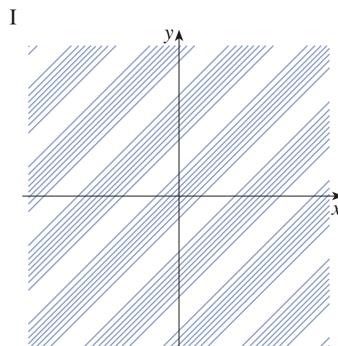
E



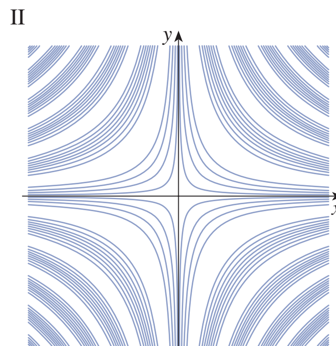
F



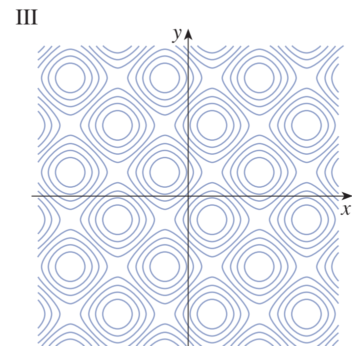
I



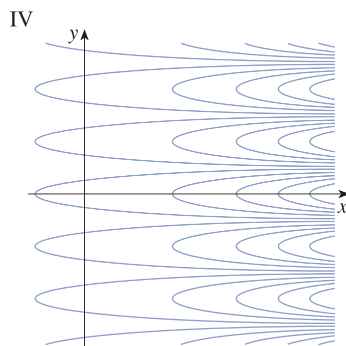
II



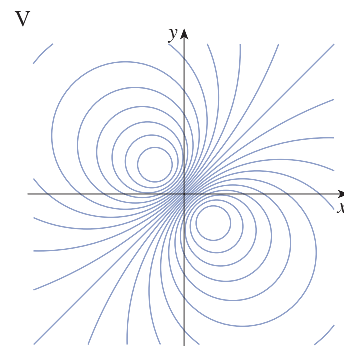
III



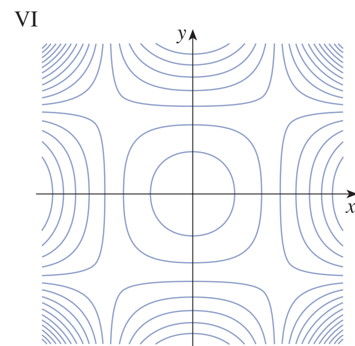
IV



V



VI



67-70 Describa las superficies de nivel de cada función.

67. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

68. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

69. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

70. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

71-72 Describa cómo la gráfica de g se obtiene de la gráfica de f.

71. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$
(b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$
(d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

72. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$
(b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

73-74 Grafique una función en computadora usando varios dominios y perspectivas. Imprima la que ofrezca una mejor visibilidad de los "picos y valles". ¿Puede afirmarse que la función tiene un valor máximo? ¿Puede identificar puntos en la gráfica que fuera posible considerar "puntos máximos locales"? ¿Y "puntos mínimos locales"?

73. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

74. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

75-76 Grafique la función usando varios dominios y perspectivas. Comente el comportamiento de la función para situaciones límite. ¿Qué sucede cuando tanto x como y se incrementan indefinidamente? ¿Qué sucede cuando (x, y) se aproxima al origen?

75. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

76. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

77. Investigue la familia de funciones $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. ¿Cómo depende de c la forma de la gráfica?

78. Use una computadora para investigar la familia de superficies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

¿Cómo varía la forma de la gráfica con los números a y b?

79. Use una computadora para investigar cuál es la familia de superficies de $z = x^2 + y^2 + cxy$. En particular, determine los valores de transición de c para los que la superficie cambia de un tipo de superficie cuadrática a otro.

80. Grafique las funciones.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

y

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En general, si g es una función de una variable, ¿cómo se obtiene la gráfica de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

de la gráfica de g?

81. (a) Demuestre con logaritmos que la función general de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ puede expresarse como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Si se concede que $x = \ln(L/K)$ y $y = \ln(P/K)$, la ecuación del inciso (a) se convierte en la ecuación lineal $y = \alpha x + \ln b$. Use la tabla 2 del ejemplo 3 para hacer una tabla de valores de $\ln(L/K)$ y $\ln(P/K)$ para los años 1899-1922. Use una calculadora graficadora o computadora para determinar la línea de regresión de mínimos cuadrados que pasa por los puntos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduzca que la función de producción de Cobb-Douglas es $P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

14.2 Límites y continuidad

Compare el comportamiento de las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

cuando x y y se aproximan a 0 [y por tanto el punto (x, y) se aproxima al origen].

Las tablas 1 y 2 muestran valores de $f(x, y)$ y $g(x, y)$ con tres decimales para los puntos (x, y) cerca del origen. (Nótese que ninguna función está definida en el origen.)

Tabla 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

Tabla 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Parece que cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$, los valores de $f(x, y)$ se aproximan a 1, mientras que los valores de $g(x, y)$ no se acercan a ningún número. Estas suposiciones basadas en la evidencia numérica son correctas, y se escribe que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{no existen}$$

En general, se usa la notación

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

para indicar que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) se aproxima al punto (a, b) a lo largo de cualquier trayectoria que permanezca en el dominio de f. En otras palabras, se puede hacer que los valores de $f(x, y)$ se acerquen a los de L tanto como se quiera tomando el punto (x, y) lo suficientemente cerca del punto (a, b), pero no igual a (a, b). A continuación se ofrece una definición más precisa.

1 Definición Sea f una función de dos variables cuyo dominio D incluye puntos arbitrariamente cerca de (a, b). Se dice entonces que el **límite de (x, y) cuando (x, y) se aproxima a (a, b)** es L y se escribe

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad (x, y) \in D \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Otras notaciones para el límite de la definición 1 son

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = L \qquad \text{y} \qquad f(x, y) \to L \text{ cuando } (x, y) \to (a, b)$$

Nótese que $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L, y que $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) y el punto (a, b). Así, la definición 1 indica que la distancia entre $f(x, y)$ y L puede reducirse arbitrariamente volviendo la distancia de (x, y) a (a, b) lo suficientemente pequeña (pero diferente de 0). La figura 1

ilustra la definición 1 por medio de un diagrama con flechas. Si cualquier intervalo reducido $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ se da alrededor de L, se puede determinar un disco D_δ con centro (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que f mande todos los puntos en D_δ [con la posible excepción de (a, b)] en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

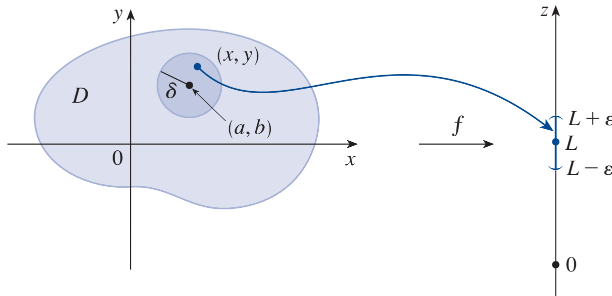


FIGURA 1

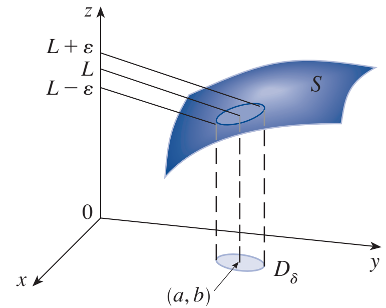


FIGURA 2

Otra ilustración de la definición 1 se da en la figura 2, donde la superficie S es la gráfica de f. Si se da $\varepsilon > 0$, se puede determinar $\delta > 0$ tal que si (x, y) se restringe a residir en el disco D_δ y $(x, y) \neq (a, b)$, entonces la parte correspondiente de S resida entre los planos horizontales $z = L - \varepsilon$ y $z = L + \varepsilon$.

Para funciones de una variable, cuando se permite que x se aproxime a a, solo hay dos posibles direcciones de aproximación, desde la izquierda o desde la derecha. Recuerde del capítulo 2 que si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

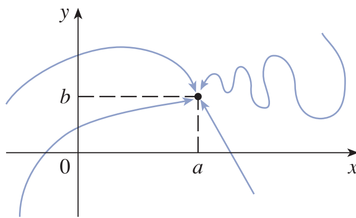


FIGURA 3

Para funciones de dos variables no es tan sencillo, porque (x, y) puede aproximarse a (a, b) desde un número infinito de direcciones en cualquier trayectoria (véase la figura 3) mientras (x, y) permanezca en el dominio de f.

La definición 1 indica que la distancia entre $f(x, y)$ y L puede reducirse de manera arbitraria volviendo la distancia de (x, y) a (a, b) lo suficientemente pequeña (pero diferente de 0). Esta definición solo se refiere a la *distancia* entre (x, y) y (a, b), no a la dirección de la aproximación. Por tanto, si el límite existe, $f(x, y)$ debe aproximarse al mismo límite sin importar cómo se aproxime (x, y) a (a, b). Así, si se puede determinar dos diferentes trayectorias de aproximación a lo largo de las cuales la función $f(x, y)$ tiene diferentes límites, entonces se concluye que $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ no existe.

> Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1 y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ a lo largo de una trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 1 Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primero aproxime (0, 0) a lo largo del eje x. Entonces $y = 0$ da $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todas las $x \neq 0$, de manera que

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ a lo largo del eje } x$$

Ahora aproxime a lo largo del eje y poniendo $x = 0$. Entonces $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para todas las $y \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ a lo largo del eje } y$$

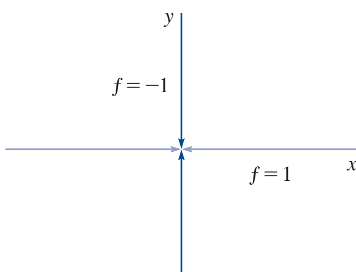


FIGURA 4

(Véase la figura 4.) Como f tiene dos diferentes límites a lo largo de dos rectas diferentes, el límite dado no existe. (Esto confirma la conjetura hecha con base en la evidencia numérica al principio de esta sección.) ■

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, ¿existe el $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Si $y = 0$, entonces $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Por tanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \quad \text{a lo largo del eje } x$$

Si $x = 0$, entonces $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, así que

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ a lo largo del eje } y$$

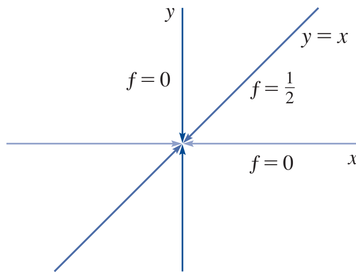


FIGURA 5

Aunque se han obtenido límites idénticos a lo largo de los ejes, eso no demuestra que el límite dado sea de 0. Aproxime ahora (0, 0) a lo largo de otra recta, por decir $y = x$. Para todas las $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ y a lo largo de $y - x$

(Véase la figura 5.) Como se han obtenido límites diferentes a lo largo de trayectorias diferentes, el límite dado no existe. ■

En la figura 6 se explica con más claridad el ejemplo 2. La cresta que se forma arriba de la recta $y = x$ se corresponde con el hecho de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos los puntos (x, y) en esa recta, excepto en el origen.

TEC En Visual 14.2, una recta giratoria sobre la superficie de la figura 6 muestra límites diferentes en el origen desde direcciones distintas.

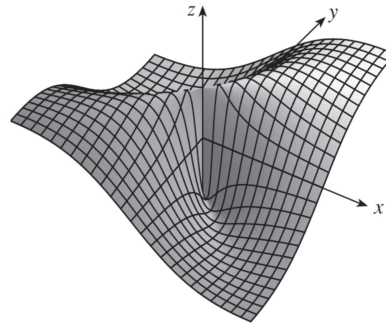


FIGURA 6
$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, ¿existe $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Con la solución del ejemplo 2 en mente, intente ahorrar tiempo permitiendo que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier recta que pasa por el origen. Si la recta no es el eje y, entonces $y = mx$, donde m es la pendiente, y

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

$$\text{Así} \qquad f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ a lo largo de } y = mx$$

Se obtiene el mismo resultado que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $x = 0$. Así, f tiene el mismo valor límite a lo largo de todas las rectas que pasan por el origen. Sin

La figura 7 muestra la gráfica de la función del ejemplo 3. Nótese la cresta arriba de la parábola $x = y^2$.

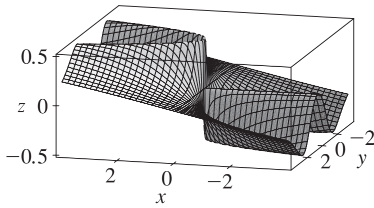


FIGURA 7

embargo, eso no demuestra que el límite dado sea de 0, porque si ahora se permite que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la parábola $x = y^2$, se tiene

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

de manera $f(x, y) \to \frac{1}{2}$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de $x = y^2$

Como trayectorias distintas conducen a valores límite diferentes, el límite dado no existe. ■

Considere ahora los límites que *sí* existen. Igual que en el caso de las funciones de una variable, el cálculo de límites para funciones de dos variables puede simplificarse mucho mejor usando propiedades de los límites. Las leyes de los límites que se enlistaron en la sección 2.3 pueden prolongarse a las funciones de dos variables: el límite de una suma es la suma de los límites, el límite de un producto es el producto de los límites y así sucesivamente. En particular, las ecuaciones siguientes son verdaderas.

2 $$\lim_{(x, y)\to(a, b)} x = a \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} c = c$$

El teorema de compresión también es válido.

EJEMPLO 4 Determine si existe $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, se podría demostrar que el límite a lo largo de cualquier recta que pasa por el origen es 0. Esto no prueba que el límite dado sea de 0, pero los límites a lo largo de las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ también resultan ser de 0, de manera que empiece a sospechar que ese límite sí existe y es igual a 0.

Sea $\varepsilon > 0$. Se quiere encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\text{es decir que si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Pero $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ ya que $y^2 \geqslant 0$, de modo que $x^2/(x^2 + y^2) \leqslant 1$ y por tanto

3 $$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leqslant 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Así, si elige $\delta = \varepsilon/3$ y considera $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

De ahí que, por la definición 1,

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$ ■

Otra manera de resolver el ejemplo 4 es usar el teorema de compresión en vez de la definición 1. De (2) se sigue que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} 3|y| = 0$$

así que la primera desigualdad en (3) indica que el límite dado es 0.

Continuidad

Recuerde que evaluar límites de funciones *continuas* de una variable es fácil. Eso puede hacerse mediante sustitución directa, porque la propiedad definitoria de una función conti-

nua es $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Las funciones continuas de dos variables también se definen mediante la propiedad de sustitución directa.

4 Definición Una función f de dos variables se llama **continua en** (a, b) si

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Se dice que f es **continua en D** si f es continua en cada punto (a, b) en D.

El significado intuitivo de la continuidad es que si el punto (x, y) cambia un poco, el valor de $f(x, y)$ cambia también solo un poco. Esto significa que una superficie con la gráfica de una función continua no tiene agujeros ni quiebres.

Usando las propiedades de los límites se puede observar que las sumas, diferencias, productos y cocientes de las funciones continuas son continuos en sus dominios. Use este hecho para ejemplificar funciones continuas.

Una **función polinomial de dos variables** (o polinomio para abreviar) es una suma de términos de la forma $cx^m y^n$, donde c es una constante y m y n son enteros no negativos. Una **función racional** es una razón de polinomios. Por ejemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

es un polinomio, mientras que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

es una función racional.

Los límites en (2) indican que las funciones $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$, y $h(x, y) = c$ son continuas. Como cualquier polinomio puede basarse en funciones simples f, g y h por multiplicación y adición, se sabe que *todos los polinomios son continuos* en $\mathbb{R}^2$. De igual manera, toda función racional es continua en su dominio, porque es un cociente de funciones continuas.

EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{(x, y) \to (1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUCIÓN Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ es un polinomio, es continuo en todas partes, así que se puede determinar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{(x, y) \to (1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$ ■

EJEMPLO 6 ¿Dónde es continua la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

SOLUCIÓN La función f es discontinua en $(0, 0)$ porque no está definida ahí. Como f es una función racional, es continua en su dominio, el cual es el conjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$. ■

EJEMPLO 7 Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aquí g se define en (0, 0), pero g sigue siendo discontinua ahí porque $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} g(x, y)$ no existe (véase el ejemplo 1). ■

La figura 8 muestra la gráfica de la función continua del ejemplo 8.

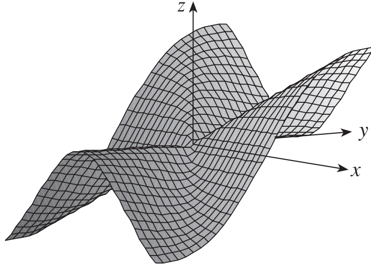


FIGURA 8

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se sabe que f es continua para $(x, y) \neq (0, 0)$, ya que ahí es igual a una función racional. Asimismo, del ejemplo 4 se tiene

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Por tanto, f es continua en (0, 0), y en consecuencia es continua en $\mathbb{R}^2$. ■

Al igual que en las funciones de una variable, la composición es otra manera de combinar dos funciones continuas para obtener una tercera. De hecho, puede demostrarse que si f es una función continua de dos variables y g es una función continua de una variable definida en el rango de f, la función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es también una función continua.

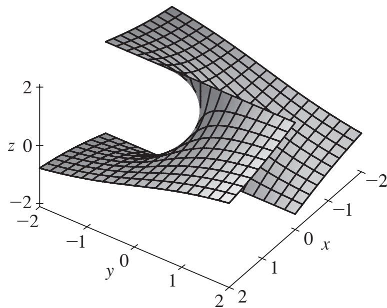


FIGURA 9
La función $h(x, y) = \arctan(y/x)$ es discontinua en $x = 0$.

EJEMPLO 9 ¿Dónde es continua la función $h(x, y) = \arctan(y/x)$?

SOLUCIÓN La función $f(x, y) = y/x$ es una función racional, y por tanto continua excepto en la recta $x = 0$. La función $g(t) = \arctan t$ es continua en todas partes. Así, la función compuesta

$$g(f(x, y)) = \arctan(y/x) = h(x, y)$$

es continua excepto en $x = 0$. La gráfica de la figura 9 muestra la interrupción en la gráfica de h arriba del eje y. ■

Funciones de tres o más variables

Todo lo realizado en esta sección puede aplicarse a funciones de tres o más variables. La notación

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que los valores de $f(x, y, z)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y, z) se aproxima al punto (a, b, c) a lo largo de cualquier trayectoria en el dominio de f. Como la distancia entre dos puntos (x, y, z) y (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ está dada por $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, se puede escribir una definición precisa como la siguiente: para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } (x, y, z) \text{ está en el dominio de } f \text{ y } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$$

$$\text{entonces } |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

La función f es **continua** en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z)\to(a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por ejemplo, la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

es una función racional de tres variables y, por tanto, es continua en cualquier punto en $\mathbb{R}^3$ excepto donde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En otras palabras, es discontinua en la esfera con centro en el origen y radio 1.

Si se usa la notación vectorial que se presentó al final de la sección 14.1, pueden escribirse las definiciones de un límite para funciones de dos o tres variables en una forma compacta, como se muestra a continuación.

5 Teorema Si f se define en un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad \mathbf{x} \in D \quad \text{y} \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Obsérvese que si $n = 1$, entonces $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{a} = a$, y (5) es solo la definición de un límite para funciones de una variable. Para el caso $n = 2$, se tiene $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$ y $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de manera que (5) se convierte en la definición 1. Si $n = 3$, entonces $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$ y (5) se convierte en la definición de un límite de una función de tres variables. En cada caso, la definición de continuidad puede escribirse así

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 EJERCICIOS

1. Suponga que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x, y) = 6$. ¿Qué puede decir sobre el valor de $f(3, 1)$? ¿Y si f fuera continua?

2. Explique por qué cada función es continua o discontinua.
   (a) La temperatura ambiente como una función de la longitud, la latitud y el tiempo
   (b) La elevación (altura sobre el nivel del mar) como una función de la longitud, la latitud y el tiempo
   (c) El costo de un viaje en taxi como una función de la distancia recorrida y el tiempo

3-4 Use una tabla de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) cerca del origen para hacer una conjetura sobre el valor del límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Luego explique por qué su suposición es correcta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$

4. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5-22 Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (x^2y^3 - 4y^2)$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\pi/2)} y \operatorname{sen}(x - y)$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} e^{\sqrt{2x-y}}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2 \cos y}{x^2 + y^4}$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^4 + y^4}$

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

19. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2} \tan(xz)$

20. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

21. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

22. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

23-24 Elabore una gráfica en computadora de la función para explicar por qué el límite no existe.

23. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ **24.** $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25-26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ y el conjunto de puntos en el que h es continua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t, \quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27-28 Grafique la función y observe dónde es discontinua. Use después la fórmula para explicar lo que observó.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$ **28.** $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29-38 Determine el conjunto de puntos en el que la función es continua.

29. $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$ **30.** $F(x, y) = \cos\sqrt{1 + x - y}$

31. $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$ **32.** $H(x, y) = \dfrac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33. $G(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

34. $G(x, y) = \ln(1 + x - y)$

35. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

36. $G(x, y) = \tan^{-1}\left((x + y)^{-2}\right)$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39-41 Use coordenadas polares para encontrar el límite. [Si (r, θ) son coordenadas polares del punto (x, y), con $r \geqslant 0$, advierta que $r \to 0^+$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

41. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. Al comienzo de esta sección se consideró la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

y se supuso, con base en la evidencia numérica, que $f(x, y) \to 1$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Emplee coordenadas polares para confirmar el valor del límite. Después grafique la función.

43. Grafique y valore la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

44. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Demuestre que $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier trayectoria que pasa por $(0, 0)$ de la forma $y = mx^a$ con $0 < a < 4$.

(b) Independientemente del inciso (a), demuestre que f es discontinua en $(0, 0)$.

(c) Demuestre que f es discontinua en dos curvas enteras.

45. Demuestre que la función f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ es continua en $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia:* considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Si $\mathbf{c} \in V_n$, demuestre que la función f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas parciales

En un día caluroso, la humedad extrema hace creer que la temperatura es más alta de lo que realmente es, mientras que en un día muy seco se percibe que la temperatura es inferior a lo que indica el termómetro. El Meteorological Service of Canada inventó el *humidex* o índice de temperatura-humedad para describir los efectos combinados de la temperatura y la humedad. El humidex I es la temperatura del aire percibida cuando la temperatura real es

T y la humedad relativa es H. Así, I es una función de T y H y se puede escribir $I = f(T, H)$. La tabla de valores de I que se muestra a continuación es un fragmento de una tabla compilada por el Meteorological Service.

Tabla 1 Índice de calor I como una función de la temperatura y la humedad

Temperatura real (°C)		Humedad relativa (%)								
	T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Si se considera en la columna destacada de esta tabla, que corresponde a la humedad relativa de $H = 60\%$, el humidex como una función de la variable T para un valor fijo de H. Escriba $g(T) = f(T, 60)$. Entonces, $g(T)$ describe cómo aumenta el índice de calor I cuando la temperatura real T aumenta en un momento en que la humedad relativa es de 60%. La derivada de g cuando $T = 30$ °C es la razón de cambio de I con respecto a T cuando $T = 30$ °C:

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Es posible aproximar $g'(30)$ usando los valores de la tabla 1 y tomando $h = 2$ y – 2:

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1.5$$

Al promediar estos valores se puede decir que la derivada $g'(30)$ es de aproximadamente 1.75. Esto significa que cuando la temperatura real es de 30 °C y la humedad relativa es de 60%, ¡la temperatura aparente (humidex) aumenta alrededor de 1.75 °C por cada grado que aumenta la temperatura real!

Analice ahora la fila destacada de la tabla 1, que corresponde a una temperatura fija de $T = 30$ °C. Los números de esta fila son valores de la función $G(H) = f(30, H)$, que describe cómo aumenta el humidex cuando aumenta la humedad relativa H en un momento en que la temperatura real es de $T = 30$ °C. La derivada de esta función cuando $H = 60\%$ es la razón de cambio de I con respecto a H cuando $H = 60\%$:

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

Si se toma $h = 5$ y -5, aproxime $G'(60)$ usando los valores tabulares:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0.4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0.2$$

Al promediar estos valores se obtiene la estimación $G'(60) \approx 0.3$. Esto indica que cuando la temperatura es de 30 °C y la humedad relativa es de 60%, el humidex aumenta alrededor de 0.3 °C por cada punto porcentual en que aumenta la humedad relativa.

En general, si f es una función de dos variables x y y, suponga que *per se* permite que solo x varíe mientras se mantiene fija a y, por ejemplo $y = b$, donde b es una constante. En realidad se está considerando una función de una variable x, a saber $g(x) = f(x, b)$. Si g tiene una derivada en a, se llama **derivada parcial de f con respecto a x en (a, b)** y se denota con $f_x(a, b)$. Así,

1 $$f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{donde} \qquad g(x) = f(x, b)$$

Por la definición de una derivada, se tiene

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

de manera que la ecuación 1 se convierte en

2 $$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

De igual forma, **la derivada parcial de f con respecto a y en (a, b)**, denotada por $f_y(a, b)$, se obtiene manteniendo fija a x ($x = a$) y determinando la derivada ordinaria en b de la función $G(y) = f(a, y)$:

3 $$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Con esta notación para las derivadas parciales se puede escribir las razones de cambio del índice de calor I con respecto a la temperatura real T y la humedad relativa H cuando $T = 96$ °F y $H = 70\%$ como sigue:

$$f_T(96, 70) \approx 3.75 \qquad\qquad f_H(96, 70) \approx 0.9$$

Si ahora concede que el punto (a, b) varía en las ecuaciones 2 y 3, f_x y f_y se convierten en funciones de dos variables.

4 Si f es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Hay muchas notaciones alternativas para derivadas parciales. Por ejemplo, en lugar de f_x se puede escribir f_1 o $D_1 f$ para indicar derivación con respecto a la *primera* variable, o $\partial f/\partial x$. Pero aquí $\partial f/\partial x$ no puede interpretarse como una razón de diferenciales.

Notaciones para derivadas parciales Si $z = f(x, y)$, se escribe

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular derivadas parciales, todo lo que se tiene que hacer es recordar de la ecuación 1 que la derivada parcial con respecto a x es sencillamente la derivada *ordinaria* de la función g de una variable que se obtiene manteniendo fija y. Así se tiene la regla siguiente.

Regla para determinar derivadas parciales de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, considere a y como una constante y derive $f(x, y)$ con respecto a x.

2. Para determinar f_y, considere a x como una constante y derive $f(x, y)$ con respecto a y.

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.

SOLUCIÓN Manteniendo constante a y y derivando con respecto a x, se obtiene

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

de manera que

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Manteniendo constante a x y derivando con respecto a y, se obtiene

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$



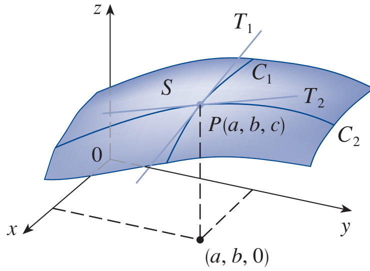


FIGURA 1
Las derivadas parciales de f en (a, b) son las pendientes de las tangentes a C_1 y C_2.

Interpretaciones de las derivadas parciales

Para dar una interpretación geométrica de las derivadas parciales, recuerde que la ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie S (la gráfica de f). Si $f(a,b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ está en S. Fijando $y = b$, restrinja su atención a la curva C_1 en la que el plano vertical $y = b$ interseca S. (En otras palabras, C_1 es la traza de S en el plano $y = b$.) De igual manera, el plano vertical $x = a$ interseca S en una curva C_2. Ambas curvas C_1 y C_2 pasan por el punto P. (Véase la figura 1.)

Nótese que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$, así que la pendiente de su tangente T_1 en P es $g'(a) = f_x(a, b)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $G(y) = f(a, y)$, de manera que la pendiente de su tangente T_2 en P es $G'(b) = f_y(a, b)$.

Así, las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ pueden interpretarse geométricamente como las pendientes de las rectas tangentes en $P(a, b, c)$ a las trazas C_1 y C_2 en los planos $y = b$ y $x = a$.

Como se vio en el caso de la función del índice de calor, las derivadas parciales también pueden interpretarse como *razones de cambio*. Si $z = f(x, y)$, entonces $\partial z/\partial x$ representa la razón de cambio de z con respecto a x cuando y es fija. De igual manera, $\partial z/\partial y$ representa la razón de cambio de z con respecto a y cuando x es fija.

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, encuentre $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$ e interprete estos números como pendientes.

SOLUCIÓN Tiene

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

La gráfica de f es el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano vertical $y = 1$ la interseca en la parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Al igual que en el análisis precedente, se llama C_1 en la figura 2.) La pendiente de la recta tangente a esta parábola en el punto $(1, 1, 1)$ es $f_x(1, 1) = -2$. De igual forma, la curva C_2 en la que el plano $x = 1$ interseca el paraboloide es la parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $(1, 1, 1)$ es $f_y(1, 1) = -4$. (Véase la figura 3.)

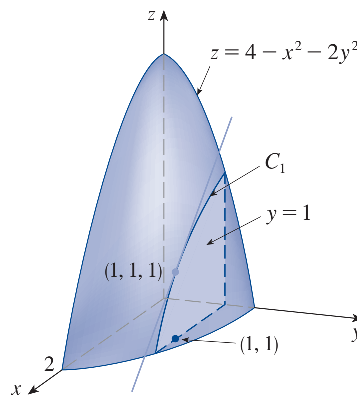


FIGURA 2

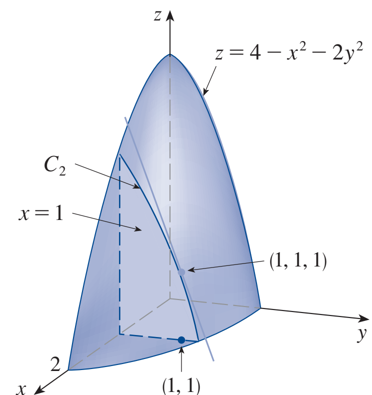


FIGURA 3 ■

La figura 4 es una contraparte dibujada en computadora de la figura 2. La parte (a) muestra el plano $y = 1$ que interseca la superficie para formar la curva C_1 y la parte (b) muestra C_1 y T_1. [Se han usado las ecuaciones vectoriales $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1 y $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1.] De igual modo, la figura 5 corresponde a la figura 3.

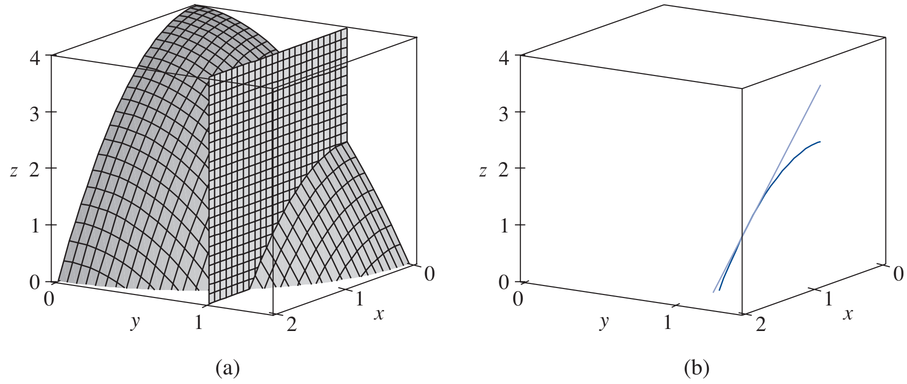


FIGURA 4

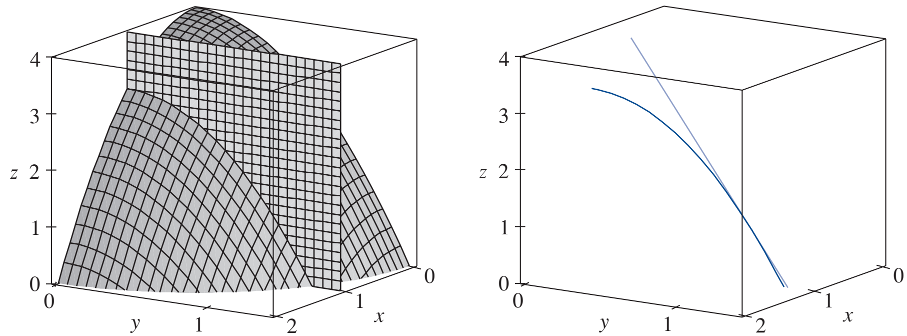


FIGURA 5

EJEMPLO 3 En el ejercicio 14.1.39 se definió el índice de masa corporal de una persona como

$$B(m, h) = \frac{m}{h^2}$$

Calcule las derivadas parciales de B para un joven con $m = 64$ kg y $h = 1.68$ m e interprételas.

SOLUCIÓN Considerando a h como una constante, vea que la derivada parcial con respecto a m es

$$\frac{\partial B}{\partial m}(m, h) = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m}{h^2}\right) = \frac{1}{h^2}$$

así que
$$\frac{\partial B}{\partial m}(64, 1.68) = \frac{1}{(1.68)^2} \approx 0.35 \ (\text{kg/m}^2)/\text{kg}$$

Este es el índice al que aumenta el IMC de este hombre con respecto a su peso cuando pesa 64 kg y su altura es de 1.68 m. Así, si su peso aumenta en una cantidad reducida, un kilogramo por ejemplo, y su altura se mantiene sin cambios, su IMC aumentará alrededor de 0.35.

Considere ahora a m como constante. La derivada parcial con respecto a h es

$$\frac{\partial B}{\partial h}(m, h) = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{m}{h^2}\right) = m\left(-\frac{2}{h^3}\right) = -\frac{2m}{h^3}$$

así que
$$\frac{\partial B}{\partial h}(64, 1.68) = -\frac{2 \cdot 64}{(1.68)^3} \approx -27\ (\text{kg/m}^2)/\text{m}$$

Este es el índice al que aumenta el IMC de este hombre con respecto a su altura cuando pesa 64 kg y su altura es de 1.68 m. Así, si este hombre sigue creciendo y su peso se mantiene sin cambios mientras su altura se incrementa en una cantidad reducida, por decir 1 cm, su IMC *decrecerá* alrededor de 27(0.01) = 0.27. ■

EJEMPLO 4 Si $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1 + y}\right)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN Usando la regla de la cadena para funciones de una variable, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}$$ ■

Algunos programas de computación pueden trazar superficies definidas por ecuaciones implícitas en tres variables. La figura 6 muestra un diagrama de ese tipo de la superficie definida por la ecuación del ejemplo 5.



FIGURA 6

EJEMPLO 5 Determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si z es implícitamente definida como una función de x y y por la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUCIÓN Para determinar $\partial z/\partial x$, se deriva implícitamente con respecto a x, teniendo el cuidado de tratar a y como constante:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si se despeja $\partial z/\partial x$ en esta ecuación se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

De igual forma, la derivación implícita con respecto a y da

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$ ■

Funciones de más de dos variables

Las derivadas parciales también pueden definirse para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x, y y z, su derivada parcial con respecto a x se define como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

y se determina considerando a y y a z como constantes y derivando $f(x, y, z)$ con respecto a x. Si $w = f(x, y, z)$, entonces $f_x = \partial w/\partial x$ puede interpretarse como la razón de cambio

de w con respecto a x cuando y y z se mantienen fijas. Pero no se puede interpretar esto geométricamente, porque la gráfica de f reside en el espacio tetradimensional.

En general, si u es una función de n variables, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, su derivada parcial con respecto a la variable de i-ésima x_i, es

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

y también se escribe

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EJEMPLO 6 Determine f_x, f_y, y f_z si $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUCIÓN Manteniendo constantes a y y z y derivando con respecto a x se tiene

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

De igual manera, $\quad f_y = xe^{xy} \ln z \quad$ y $\quad f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$ ■

Derivadas de orden superior

Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables, así que se pueden considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, y $(f_y)_y$, llamadas **segundas derivadas parciales** de f. Si $z = f(x, y)$, se usa la notación siguiente:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Así, la notación f_{xy} (o $\partial^2 f/\partial y\, \partial x$) significa que primero se deriva con respecto a x y después con respecto a y, mientras que al calcular f_{yx} el orden se invierte.

EJEMPLO 7 Determine las segundas derivadas parciales de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 se encontró que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Por tanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$ ■

La figura 7 muestra la gráfica de la función f del ejemplo 7 y las gráficas de sus derivadas parciales de primer y segundo orden para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Nótese que estas gráficas son congruentes con nuestras interpretaciones de f_x y f_y como pendientes de las rectas tangentes a las trazas de la gráfica de f. Por ejemplo, la gráfica de f decrece si se parte de $(0, -2)$ y se mueve en la dirección de x positiva. Esto se refleja en los valores negativos de f_x. Usted debería comparar las gráficas de f_{yx} y f_{yy} con la gráfica de f_y para ver las relaciones.

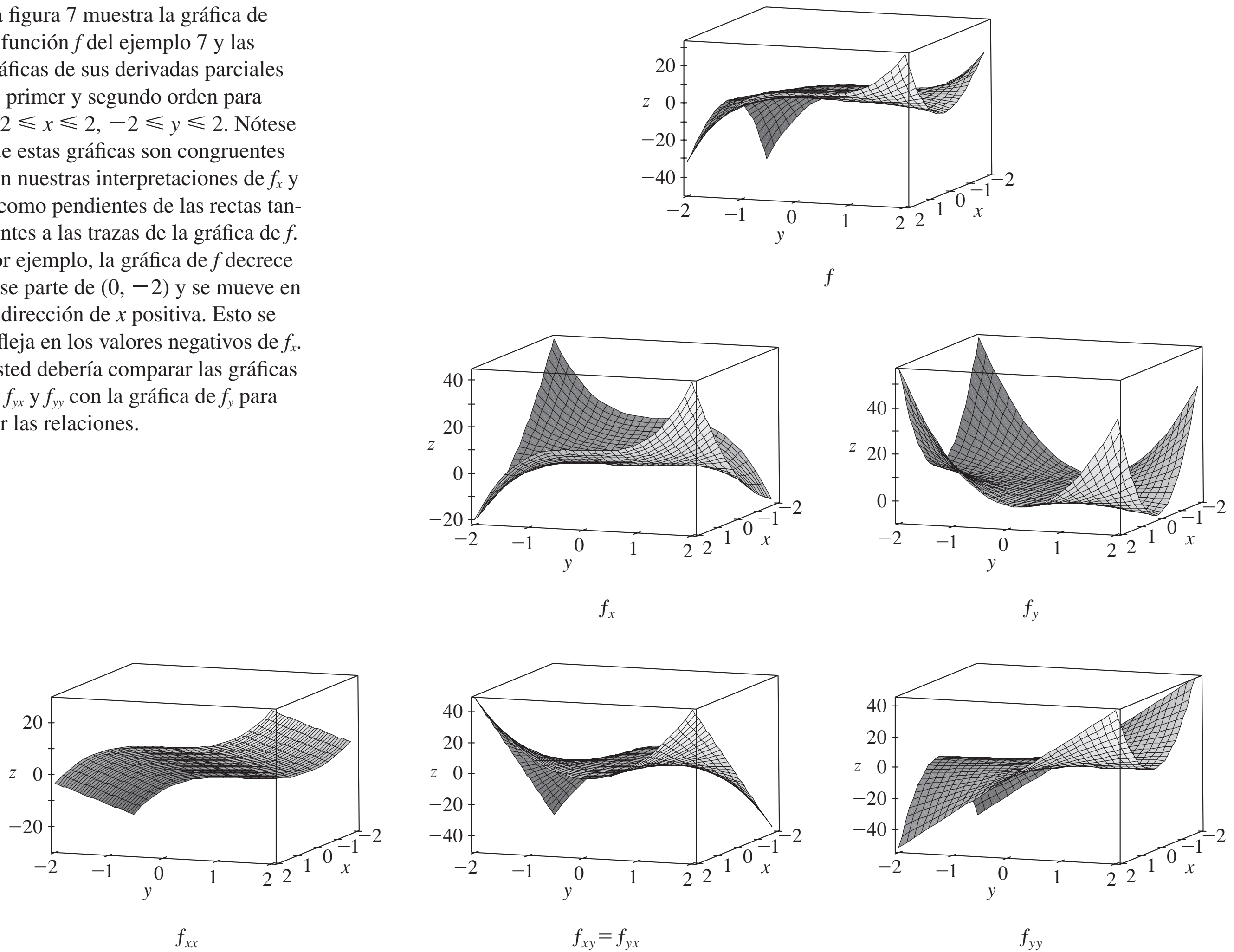


FIGURA 7

Obsérvese que $f_{xy} = f_{yx}$ en el ejemplo 7. Esto no es mera coincidencia. Resulta que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales para la mayoría de las funciones que se encuentran en la práctica. El teorema siguiente, descubierto por el matemático francés Alexis Clairaut (1713-1765), establece condiciones bajo las cuales puede afirmarse que $f_{xy} = f_{yx}$. La comprobación se encuentra en el apéndice F.

Clairaut
Alexis Clairaut fue un niño prodigio en matemáticas: leyó el libro de texto de cálculo de L´Hôpital cuando tenía diez años y presentó un trabajo sobre geometría a la Academia Francesa de Ciencias cuando tenía 13. A los 18 publicó Recherches sur les courbes à double courbure, el primer tratado sistemático de geometría analítica tridimensional, el cual incluía el cálculo de curvas en el espacio.

Teorema de Clairaut Suponga que f es definida en un disco D que contiene el punto (a, b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en D, entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Derivadas parciales de orden 3 o superior también pueden definirse. Por ejemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

y usando el teorema de Clairaut puede demostrarse que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ si estas funciones son continuas.

EJEMPLO 8 Calcule f_{xxyz} si $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(3x + yz)$.

SOLUCIÓN

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$
$$f_{xx} = -9\operatorname{sen}(3x + yz)$$
$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$
$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\operatorname{sen}(3x + yz)$$

■

Ecuaciones diferenciales parciales

Las derivadas parciales ocurren en *ecuaciones diferenciales parciales* que expresan ciertas leyes físicas. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama **ecuación de Laplace**, en honor a Pierre Laplace (1749-1827). Las soluciones de esta ecuación se llaman **funciones armónicas**; desempeñan un papel en problemas de conducción de calor, circulación de fluidos y potencial eléctrico.

EJEMPLO 9 Demuestre que la función $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ es una solución de la ecuación de Laplace.

SOLUCIÓN Primero se calculan las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

$$u_x = e^x \operatorname{sen} y \qquad u_y = e^x \cos y$$
$$u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y \qquad u_{yy} = -e^x \operatorname{sen} y$$

De esta manera, $$u_{xx} + u_{yy} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$$

Por tanto, u satisface la ecuación de Laplace. ■

La **ecuación de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

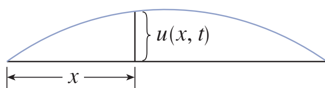


FIGURA 8

describe el movimiento en forma de onda, por ejemplo, una ola marina, una onda sonora, una onda luminosa o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante. Es decir, si $u(x, t)$ representa el desplazamiento de una cuerda vibrante de violín en el momento t y a una distancia x de un extremo de la cuerda (como en la figura 8), entonces $u(x, t)$ satisface la ecuación de onda. Aquí la constante a depende de la densidad de la cuerda y la tensión en ella.

EJEMPLO 10 Verifique que la función $u(x, t) = \operatorname{sen}(x - at)$ satisface la ecuación de onda.

SOLUCIÓN

$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_t = -a\cos(x - at)$$
$$u_{xx} = -\operatorname{sen}(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2 \operatorname{sen}(x - at) = a^2 u_{xx}$$

Así, u satisface la ecuación de onda. ■

Las ecuaciones diferenciales parciales que implican funciones de tres variables también son muy importantes en las ciencias y la ingeniería. La ecuación tridimensional de Laplace es

$$\boxed{5} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

y uno de los campos en los que ocurre es el de la geofísica. Si $u(x, y, z)$ representa la fuerza de campo magnético en la posición (x, y, z), satisface la ecuación 5. La fuerza del campo magnético indica la distribución de minerales ricos en hierro y refleja diferentes tipos de rocas y la ubicación de fallas. La figura 9 muestra un mapa del contorno del campo magnético de la Tierra registrado con un magnetómetro desde una aeronave que volaba a 200 m sobre la superficie. Este mapa de contorno ha sido mejorado con codificación de color de las regiones entre las curvas de nivel.

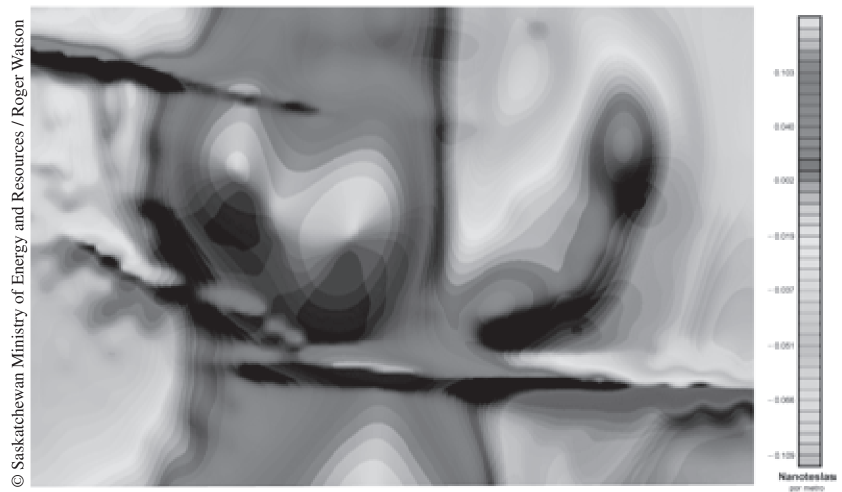


FIGURA 9
Fuerza del campo magnético de la Tierra

La figura 10 muestra un mapa de contorno para la derivada parcial de segundo orden de u en la dirección vertical, es decir u_{zz}. Resulta que los valores de las derivadas parciales u_{xx} y u_{yy} son relativamente fáciles de medir a partir de un mapa del campo magnético. Entonces, los valores de u_{zz} pueden calcularse con base en la ecuación de Laplace (5).

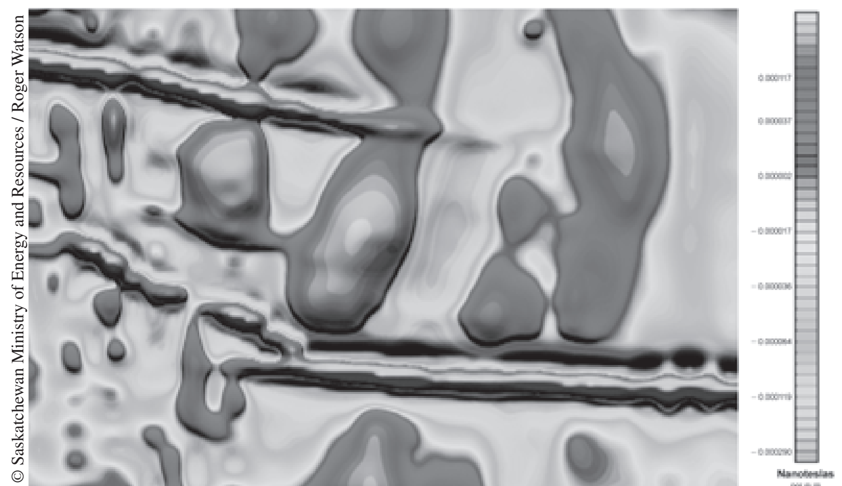


FIGURA 10
Segunda derivada vertical del campo magnético

La función de producción de Cobb-Douglas

En el ejemplo 14.1.3 se describió el trabajo de Cobb y Douglas de modelar la producción total P de un sistema económico como una función de la cantidad de mano de obra L y la inversión de capital K. Aquí se usarán derivadas parciales para demostrar cómo la forma particular de su modelo se desprende de ciertos supuestos que ellos hicieron sobre la economía.

Si la función de producción se denota con $P = P(L, K)$, la derivada parcial $\partial P/\partial L$ es la razón en la que cambia la producción con respecto a la cantidad de mano de obra. Los economistas lo llaman producción marginal con respecto a la mano de obra, o **productividad marginal del trabajo**. De igual manera, la derivada parcial $\partial P/\partial K$ es la razón de cambio de la producción con respecto al capital y se llama **productividad marginal del capital**. En estos términos, los supuestos que hicieron Cobb y Douglas pueden enunciarse como sigue.

(i) Si el trabajo o el capital desaparece, lo mismo ocurrirá con la producción.
(ii) La productividad marginal del trabajo es proporcional a la cantidad de producción por unidad de trabajo.
(iii) La productividad marginal del capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital.

Como la producción por unidad de trabajo es P/L, el supuesto (ii) indica que

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguna constante α. Si se mantiene constante a K ($K = K_0$), su ecuación diferencial parcial se convierte en una ecuación diferencial ordinaria:

6 $$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

Si esa ecuación diferencial separable se resuelve con los métodos de la sección 9.3 (véase también el ejercicio 85), se obtiene

7 $$P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$$

Nótese que se ha escrito la constante C_1 como una función de K_0, porque podría depender del valor de K_0.

De igual forma, el supuesto (iii) indica que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

y se puede resolver esta ecuación diferencial para obtener

8 $$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta}$$

Al comparar las ecuaciones 7 y 8 se tiene

9 $$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

donde b es una constante independiente tanto de L como de K. El supuesto (i) muestra que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Adviértase en la ecuación 9 que si tanto el trabajo como el capital aumentan en un factor m, entonces

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, entonces $P(mL, mK) = mP(L, K)$, lo que significa que la producción también aumenta en un factor de m. Por eso Cobb y Douglas supusieron que $\alpha + \beta = 1$, y por tanto

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Esta es la función de producción de Cobb-Douglas que se explicó en la sección 14.1.

14.3 EJERCICIOS

1. La temperatura T (en °C) en una localidad del hemisferio norte depende de la longitud x, la latitud y y el tiempo t, así que se puede escribir $T = f(x, y, t)$. Mida el tiempo en horas desde principios de enero.

(a) ¿Qué significan las derivadas parciales $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ y $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulú tiene una longitud de 158 °W y una latitud de 21 °N. Suponga que a las nueve de la mañana del 1º de enero el viento sopla aire caliente hacia el noreste, de manera que el aire al oeste y el sur es templado y el aire del norte y el este es fresco. ¿Se esperaría que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$, y $f_t(158, 21, 9)$ fueran positivas o negativas? Explique su respuesta.

2. Al principio de esta sección se analizó la función $I = f(T, H)$, donde I es el humidex, T la temperatura y H la humedad relativa. Use la tabla 1 para estimar $f_T(34, 75)$ y $f_H(34, 75)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

3. El índice de viento-frío W es la temperatura percibida cuando la temperatura real es T y la velocidad del viento v, así que se puede escribir $W = f(T, v)$. La tabla de valores siguiente es un fragmento de la tabla 1 de la sección 14.1.

Velocidad del viento (km/h)

Temperatura real (°C): T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

(a) Estime los valores de $f_T(-15, 30)$ y $f_v(-15, 30)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

(b) En general, ¿qué puede decirse sobre los signos de $\partial W/\partial T$ y $\partial W/\partial v$?

(c) ¿Cuál será el valor del límite siguiente?

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. La altura de las olas h en mar abierto depende de la velocidad v del viento y el tiempo t durante el cual el viento ha soplado a esa velocidad. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en metros en la tabla siguiente.

Duración (horas)

Velocidad del viento (km/h): v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
30	1.2	1.3	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6
40	1.5	2.2	2.4	2.5	2.7	2.8	2.8
60	2.8	4.0	4.9	5.2	5.5	5.8	5.9
80	4.3	6.4	7.7	8.6	9.5	10.1	10.2
100	5.8	8.9	11.0	12.2	13.8	14.7	15.3
120	7.4	11.3	14.4	16.6	19.0	20.5	21.1

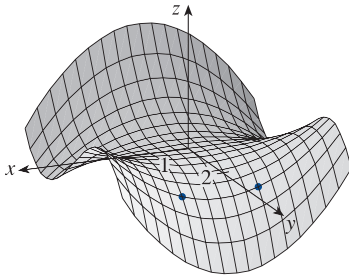
(a) ¿Qué significan las derivadas parciales $\partial h/\partial v$ y $\partial h/\partial t$?

(b) Estime los valores de $f_v(80, 15)$ y $f_t(80, 15)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

(c) ¿Cuál será el valor del límite siguiente?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5-8 Determine los signos de las derivadas parciales para la función f de la gráfica siguiente.



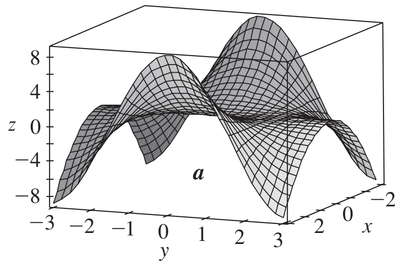
5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

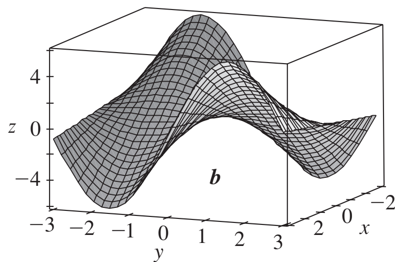
6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

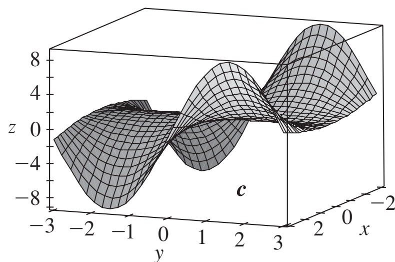
7. (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{yy}(-1, 2)$

8. (a) $f_{xy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

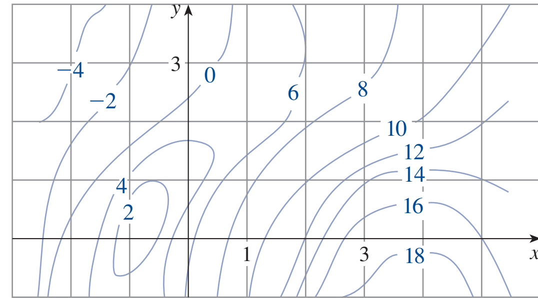
9. Las superficies a, b y c son gráficas de una función f y sus derivadas parciales f_x y f_y. Identifique cada superficie y argumente sus decisiones.







10. Con el mapa de contorno para una función f siguiente estime $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.



11. Si $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, encuentre $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con un dibujo a mano o un diagrama en computadora.

12. Si $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, encuentre $f_x(1, 0)$ y $f_y(1, 0)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con un dibujo a mano o un diagrama en computadora.

13-14 Determine f_x y f_y y grafique f, f_x y f_y con dominios y puntos de vista que le permitan ver las relaciones entre ellas.

13. $f(x, y) = x^2y^3$

14. $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$

15-40 Determine las primeras derivadas parciales de la función.

15. $f(x, y) = x^4 + 5xy^3$

16. $f(x, y) = x^2y - 3y^4$

17. $f(x, t) = t^2e^{-x}$

18. $f(x, t) = \sqrt{3x + 4t}$

19. $z = \ln(x + t^2)$

20. $z = x \operatorname{sen}(xy)$

21. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

22. $f(x, t) = \sqrt{x} \ln t$

23. $f(x, t) = e^{-t} \cos \pi x$

24. $z = \tan xy$

25. $z = (2x + 3y)^{10}$

26. $f(x, t) = \arctan\left(x\sqrt{t}\right)$

27. $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

28. $f(x, y) = x^y$

29. $F(x, y) = \displaystyle\int_y^x \cos(e^t)\, dt$

30. $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\, dt$

31. $f(x, y, z) = x^3yz^2 + 2yz$

32. $f(x, y, z) = xy^2e^{-xz}$

33. $w = \ln(x + 2y + 3z)$

34. $w = y \tan(x + 2z)$

35. $u = xy \operatorname{sen}^{-1}(yz)$

36. $u = x^{y/z}$

37. $h(x, y, z, t) = x^2y \cos(z/t)$

38. $\phi(x, y, z, t) = \dfrac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$

39. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

40. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

41-44 Determine la derivada parcial indicada.

41. $R(s, t) = te^{s/t}$; $R_t(0, 1)$

42. $f(x, y) = y \operatorname{sen}^{-1}(xy); \quad f_y\left(1, \frac{1}{2}\right)$

43. $f(x, y, z) = \ln \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad f_y(1, 2, 2)$

44. $f(x, y, z) = x^{yz}; \quad f_z(e, 1, 0)$

45-46 Use la definición de derivadas parciales como límites (4) para hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

45. $f(x, y) = xy^2 - x^3y$

46. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

47-50 Use la derivación implícita para determinar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$

47. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

48. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

49. $e^z = xyz$

50. $yz + x \ln y = z^2$

51-52 Determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

51. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

52. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

53-58 Determine todas las segundas derivadas parciales.

53. $f(x, y) = x^4y - 2x^3y^2$

54. $f(x, y) = \ln(ax + by)$

55. $z = \dfrac{y}{2x + 3y}$

56. $T = e^{-2r} \cos \theta$

57. $v = \operatorname{sen}(s^2 - t^2)$

58. $w = \sqrt{1 + uv^2}$

59-62 Verifique que la conclusión del teorema de Clairaut es válida, es decir que $u_{xy} = u_{yx}$.

59. $u = x^4y^3 - y^4$

60. $u = e^{xy} \operatorname{sen} y$

61. $u = \cos(x^2y)$

62. $u = \ln(x + 2y)$

63-70 Determine las derivadas parciales indicadas.

63. $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y; \quad f_{xxx}, \quad f_{xyx}$

64. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y); \quad f_{yxy}$

65. $f(x, y, z) = e^{xyz^2}; \quad f_{xyz}$

66. $g(r, s, t) = e^r \operatorname{sen}(st); \quad g_{rst}$

67. $W = \sqrt{u + v^2}; \quad \dfrac{\partial^3 W}{\partial u^2 \, \partial v}$

68. $V = \ln(r + s^2 + t^3); \quad \dfrac{\partial^3 V}{\partial r \, \partial s \, \partial t}$

69. $u = e^{r\theta} \operatorname{sen} \theta; \quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \, \partial \theta}$

70. $z = u\sqrt{v - w}; \quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial u \, \partial v \, \partial w}$

71. Si $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{z}\right)$, halle f_{xzy}. [*Sugerencia*: ¿cuál orden de derivación es el más fácil?]

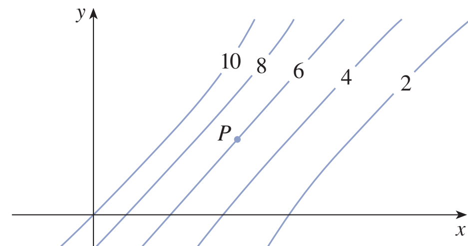
72. Si $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$, halle g_{xyz}. [*Sugerencia*: use un orden de derivación diferente para cada término.]

73. Use la tabla de valores de $f(x, y)$ para estimar los valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2.2)$, y $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1.8	2.0	2.2
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

74. Se muestran curvas de nivel para una función f. Determine si las derivadas parciales siguientes son positivas o negativas en el punto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
(d) f_{xy} (e) f_{yy}



75. Verifique que la función $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ es una solución de la *ecuación de conducción de calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

76. Determine si cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
(f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

77. Verifique que la función $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es una solución de la ecuación tridimensional de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

78. Demuestre que cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2u_{xx}$.

(a) $u = \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(akt)$ (b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

79. Si f y g son funciones dos veces derivables de una variable, demuestre que la función

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda dada en el ejercicio 78.

80. Si $u = e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}$, donde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

81. La *ecuación de difusión*

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

donde D es una constante positiva, describe la difusión de calor a través de un sólido, o la concentración de un contaminante en el momento t a una distancia x de la fuente de contaminación, o la invasión por una especie extraña de un nuevo hábitat. Verifique que la función

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-x^2/(4Dt)}$$

es una solución de la ecuación de difusión.

82. La temperatura en un punto (x, y) en una placa metálica plana está dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, donde T se mide en °C y x, y en metros. Encuentre la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en el punto (2, 1) en (a) la dirección de x y (b) la dirección de y.

83. La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2, R_3 conectadas en un circuito eléctrico paralelo está dada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

84. Demuestre que la función de producción de Cobb-Douglas $P - bL^\alpha K^\beta$ satisface la ecuación

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

85. Demuestre que la función de producción de Cobb-Douglas satisface $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Véase la ecuación 6.)

86. Cobb y Douglas usaron la ecuación $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ para modelar la economía estadounidense de 1899 a 1922, donde L es la cantidad de mano de obra y K la cantidad de capital. (Véase el ejemplo 14.1.3.)

(a) Calcule P_L y P_K.

(b) Determine la productividad marginal del trabajo y la productividad marginal de capital en el año 1920, cuando $L = 194$ y $K = 407$ (en comparación con los valores asignados $L = 100$ y $K = 100$ en 1899). Interprete los resultados.

(c) En el año 1920, ¿qué habría beneficiado más a la producción: un aumento en la inversión de capital o un aumento en el gasto de mano de obra?

87. La *ecuación de Van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V el volumen y T la temperatura del gas. La constante R es la constante de gas universal y a y b son constantes positivas características de un gas particular. Calcule $\partial T/\partial P$ y $\partial P/\partial V$.

88. La ley del gas para una masa fija m de un gas ideal a temperatura T, presión P y volumen absolutos V es $PV = mRT$, donde R es la constante de gas. Demuestre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

89. Para el gas ideal del ejercicio 88, demuestre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

90. El índice de viento-frío es modelado por la función

$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (°C) y v la velocidad del viento (km/h). Cuando $T = -15$ °C y $v = 30$ km/h, ¿cuánto se esperaría que se reduzca la temperatura aparente W si la temperatura real disminuye 1 °C? ¿Y si la velocidad del viento aumenta 1 km/h?

91. Un modelo para el área de un cuerpo humano está dado por la función

$$S = f(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$$

donde w es el peso en libras, h la altura en pulgadas y S se mide en pies cuadrados. Calcule e interprete las derivadas parciales.

(a) $\dfrac{\partial S}{\partial w}(160, 70)$ (b) $\dfrac{\partial S}{\partial h}(160, 70)$

92. Una de las leyes de Poiseuille establece que la resistencia a la circulación de la sangre por una arteria es

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L y r son la longitud y radio de la arteria y C una constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre. Calcule $\partial R/\partial L$ y $\partial R/\partial r$ e interprételas.

93. En el proyecto de la página 344 se expresa la fuerza que necesita un ave durante su modo de aleteo como

$$P(v, x, m) = Av^3 + \frac{B(mg/x)^2}{v}$$

donde A y B son constantes específicas de una especie de ave, v la velocidad del ave, m la masa del ave y x la fracción del tiempo de vuelo pasada utilizado en modo de aleteo. Calcule $\partial P/\partial v$, $\partial P/\partial x$, y $\partial P/\partial m$ e interprételas.

94. La energía promedio E (en kcal) que necesita un lagarto para caminar o correr una distancia de un kilómetro ha sido modelada por la ecuación

$$E(m, v) = 2.65m^{0.66} + \frac{3.5m^{0.75}}{v}$$

donde m es la masa corporal del lagarto en gramos y v su velocidad en km/h. Calcule $E_m(400, 8)$ y $E_v(400, 8)$ e interprete sus respuestas.
Fuente: C. Robbins, *Wildlife Feeding and Nutrition*, 2a. ed. (San Diego, Academic Press, 1993).

95. La energía cinética de un cuerpo con masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

96. Si a, b, c son los lados de un triángulo y A, B, C los ángulos opuestos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$, $\partial A/\partial c$ por derivación implícita de la ley de los cosenos.

97. Se dice que hay una función f cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$ y $f_y(x, y) = 3x - y$. ¿Debería creerlo?

98. El paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ interseca el plano $x = 1$ en una parábola. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a esta parábola en el punto $(1, 2, -4)$. Use una computadora para graficar el paraboloide, la parábola y la recta tangente en la misma pantalla.

99. El elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ interseca el plano $y = 2$ en una elipse. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 2)$.

100. En un estudio de penetración de la escarcha se descubrió que la temperatura T en el tiempo t (medido en días) a una profundidad x (medida en metros) puede modelarse con la función

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x}\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

donde $\omega = 2\pi/365$ y λ es una constante positiva.

(a) Encuentre $\partial T/\partial x$. ¿Cuál es su significado físico?

(b) Encuentre $\partial T/\partial t$. ¿Cuál es su significado físico?

(c) Demuestre que T satisface la ecuación de calor $T_t = kT_{xx}$ para cierta constante k.



(d) Si $\lambda = 0.2$, $T_0 = 0$, y $T_1 = 10$, use una computadora para graficar $T(x, t)$.

(e) ¿Cuál es el significado físico del término $-\lambda x$ en la expresión $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

101. Use el teorema de Clairaut para demostrar que si las derivadas parciales de tercer orden de f son continuas, entonces

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

102. (a) ¿Cuántas derivadas parciales de n-ésimo orden tiene una función de dos variables?

(b) Si todas esas derivadas parciales son continuas, ¿cuántas de ellas pueden ser distintas?

(c) Responda la pregunta del inciso (a) para una función de tres variables.

103. Si

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2 y)}$$

determine $f_x(1, 0)$. [*Sugerencia*: en lugar de determinar primero $f_x(x, y)$, advierta que es más fácil usar la ecuación 1 o la ecuación 2.]

104. Si $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

105. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



(a) Use una computadora para graficar f.

(b) Determine $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ cuando $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Determine $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ usando las ecuaciones 2 y 3.

(d) Demuestre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ y $f_{yx}(0, 0) = 1$.

SAC (e) ¿El resultado del inciso (d) contradice el teorema de Clairaut? Use gráficas de f_{xy} y f_{yx} para ilustrar su respuesta.

14.4 Planos tangentes y aproximaciones lineales

Una de las ideas más importantes en el cálculo de una variable es que al acercarse a un punto en la gráfica de una función derivable, la gráfica se vuelve indistinguible de su recta tangente y se puede aproximar la función mediante una función lineal. (Véase la sección 3.10.) Aquí se desarrollarán ideas similares en tres dimensiones. Al acercarse a un punto en una superficie que es la gráfica de una función derivable de dos variables, la superficie parece cada vez más un plano (su plano tangente) y se puede aproximar la función mediante una función lineal de dos variables. También se prolonga esta idea de una diferencial a funciones de dos o más variables.

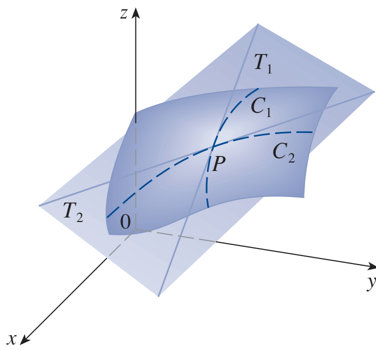


FIGURA 1
El plano tangente contiene las rectas tangentes T_1 y T_2.

Planos tangentes

Suponga que una superficie S tiene la ecuación $z = f(x, y)$, donde f tiene primeras derivadas parciales continuas y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Como en la sección precedente, sean C_1 y C_2 las curvas obtenidas de la intersección de los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie S. Así, el punto P reside tanto en C_1 como en C_2. Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces el **plano tangente** a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene a ambas rectas tangentes T_1 y T_2. (Véase la figura 1.)

En la sección 14.6 se verá que si C es cualquier otra curva que reside en la superficie S y pasa por P, su recta tangente en P también reside en el plano tangente. Por tanto, el plano tangente a S en P puede concebirse como compuesto por todas las posibles rectas tangentes en P a curvas que residen en S y pasan por P. El plano tangente en P es el plano que aproxima más certeramente la superficie S cerca del punto P.

Se sabe por la ecuación 12.5.7 que cualquier plano que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Al dividir esta ecuación entre C y conceder que $a = -A/C$ y $b = -B/C$, se puede escribir en la forma

$$\boxed{1} \qquad z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Si la ecuación 1 representa el plano tangente en P, su intersección con el plano $y = y_0$ debe ser la recta tangente T_1. La inclusión de $y = y_0$ en la ecuación 1 da

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad \text{donde } \ y = y_0$$

y se reconoce esta como la ecuación (en forma punto-pendiente) de una recta con pendiente a. Pero por la sección 14.3 se sabe que la pendiente de la tangente T_1 es $f_x(x_0, y_0)$. Por tanto, $a = f_x(x_0, y_0)$.

De igual forma, si se traslada $x = x_0$ en la ecuación 1 se obtiene $z - z_0 = b(y - y_0)$, lo que debe representar a la recta tangente T_2, así que $b = f_y(x_0, y_0)$.

Nótese la semejanza entre la ecuación de un plano tangente y la ecuación de una recta tangente:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

2 Suponga que f tiene derivadas parciales continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

EJEMPLO 1 Determine el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3).

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Entonces,

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Así, (2) da la ecuación del plano tangente en (1, 1, 3) como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

o

$$z = 4x + 2y - 3$$

■

La figura 2(a) muestra el paraboloide elíptico y su plano tangente en (1, 1, 3) que se halla en el ejemplo 1. En las partes (b) y (c) se acerca al punto (1, 1, 3) restringiendo el

TEC Visual 14.4 muestra una animación de las figuras 2 y 3.

dominio de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que cuanto más se acerca, más plana parece la gráfica y más se asemeja a su plano tangente.

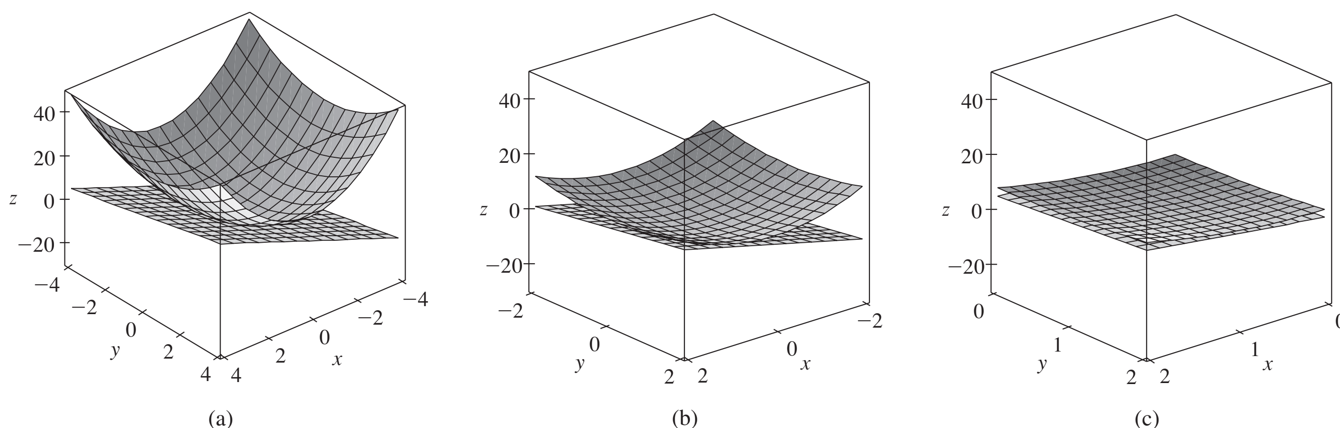


FIGURA 2 El paraboloide elíptico parece coincidir con su plano tangente cuando se acerca a (1, 1, 3).

En la figura 3 se corrobora esta impresión al acercarse al punto (1, 1) en un mapa de contorno de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Adviértase que cuanto más se acerca, las curvas de nivel se parecen cada vez más a rectas paralelas igualmente espaciadas, lo cual es característico de un plano.

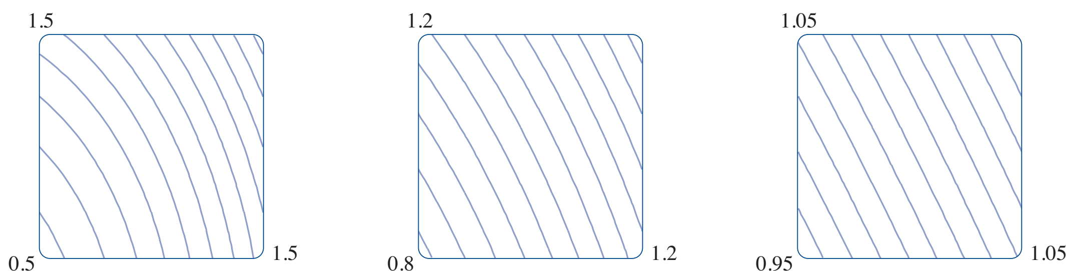


FIGURA 3 Acercamiento a (1, 1) en un mapa de contorno de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

Aproximaciones lineales

En el ejemplo 1 se determinó que una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3) es $z = 4x + 2y - 3$. Por tanto, en vista de la evidencia visual en las figuras 2 y 3, la función lineal de dos variables

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

es una aproximación satisfactoria a $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de (1, 1). La función L se llama *linealización* de f en (1, 1) y la aproximación

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

se llama *aproximación lineal* o *aproximación del plano tangente* de f en (1, 1).

Por ejemplo, en el punto (1.1, 0.95) la aproximación lineal da

$$f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$$

lo cual está muy cerca del valor real de $f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$. Pero se toma un punto más alejado de (1, 1), como (2, 3), ya no se obtiene una aproximación satisfactoria. De hecho, $L(2, 3) = 11$, mientras que $f(2, 3) = 17$.

En general, se sabe por (2) que una ecuación del plano tangente a la gráfica de una función f de dos variables en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La función lineal cuya gráfica es este plano tangente, a saber

$$\boxed{3} \qquad L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **linealización** de f en (a, b) y la aproximación

$$\boxed{4} \qquad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **aproximación lineal** o **aproximación del plano tangente** de f en (a, b).

Se han definido planos tangentes para superficies $z = f(x, y)$, donde f tiene primeras derivadas parciales continuas. ¿Qué sucede si f_x y f_y no son continuas? La figura 4 presenta esa función; su ecuación es

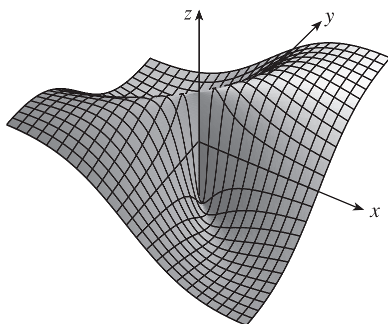


FIGURA 4

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$,
$f(0, 0) = 0$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se puede verificar (véase el ejercicio 46) que sus derivadas parciales existen en el origen y que, de hecho, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$, pero que f_x y f_y no son continuas. La aproximación lineal sería $f(x, y) \approx 0$, pero $f(x, y) = \frac{1}{2}$ en todos los puntos en la recta $y = x$. Así, una función de dos variables puede desviarse pese a que sus dos derivadas parciales existan. Para eliminar este comportamiento, formule la idea de una función derivable de dos variables.

Recuérdese que para una función de una variable, $y = f(x)$, si x cambia de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

En el capítulo 3 se demostró que si f es derivable en a, entonces

Esta es la ecuación 3.4.7.

$$\boxed{5} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde } \varepsilon \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

Considérese ahora una función de dos variables, $z = f(x, y)$, y suponga que x cambia de a a $a + \Delta x$ y que y cambia de b a $b + \Delta y$. El **incremento** de z correspondiente es

$$\boxed{6} \qquad \Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Así, el incremento Δz representa el cambio de valor de f cuando (x, y) cambia de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Por analogía con (5), se define la derivabilidad de una función de dos variables como sigue.

7 Definición Si $z = f(x, y)$, f **es derivable en** (a, b) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

La definición 7 establece que una función derivable es aquella para la que la aproximación lineal (4) es una aproximación satisfactoria cuando (x, y) está cerca de (a, b). Es decir, el plano tangente aproxima la gráfica de f muy cerca del punto de tangencia.

A veces es difícil usar la definición 7 directamente para comprobar la derivabilidad de una función, pero el teorema siguiente ofrece una condición cómoda suficiente para la derivabilidad.

El teorema 8 se demuestra en el apéndice F.

8 Teorema Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es derivable en (a, b).

EJEMPLO 2 Demuestre que $f(x, y) = xe^{xy}$ es derivable en (1, 0) y determine su linealización ahí. Luego úsela para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

La figura 5 muestra las gráficas de la función f y la linealización L usadas en el ejemplo 2.

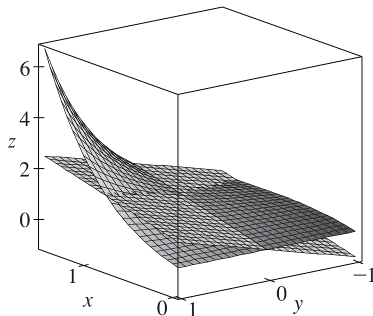


FIGURA 5

SOLUCIÓN Las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$
$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Tanto f_x y como f_y son funciones continuas, así que f es derivable por el teorema 8. La linealización es

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0)$$
$$= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y$$

La correspondiente aproximación lineal es

$$xe^{xy} \approx x + y$$

así que

$$f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$$

Compare esto con el valor real de $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$. ■

EJEMPLO 3 Al principio de la sección 14.3 se analizó el humidex (temperatura percibida) I como una función de la temperatura real T y la humedad relativa H y se formuló la tabla de valores siguiente.

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°C) — T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Determine una aproximación lineal para el humidex $I = f(T, H)$ cuando T está cerca de 30 °C y H de 60%. Úsela para estimar el humidex cuando la temperatura es de 31 °C y la humedad relativa de 62%.

SOLUCIÓN En la tabla se lee que $f(30, 60) = 38$. En la sección 14.3 se usaron los valores tabulares para estimar que $f_T(30, 60) \approx 1.75$ y $f_H(30, 60) \approx 0.3$. (Véase las páginas 912-913.) Así, la aproximación lineal es

$$f(T, H) \approx f(30, 60) + f_T(30, 60)(T - 30) + f_H(30, 60)(H - 60)$$
$$\approx 38 + 1.75(T - 30) + 0.3(H - 60)$$

En particular,

$$f(31, 62) \approx 38 + 1.75(1) + 0.3(2) = 40.35$$

Por tanto, cuando $T = 31$ °C y $H = 62\%$, el humidex es

$$I \approx 40.4\,°\text{C}$$

Diferenciales

Para una función derivable de una variable, $y = f(x)$, se define la diferencial dx como la variable independiente; es decir, dx puede tener el valor de cualquier número real. La diferencial de y se define entonces como

9 $$dy = f'(x)\,dx$$

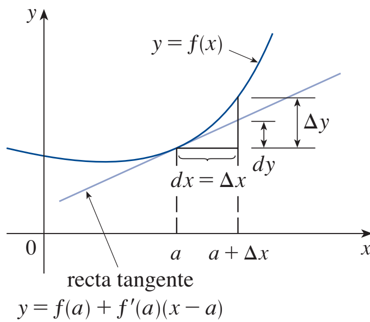


FIGURA 6

(Véase la sección 3.10.) La figura 6 muestra la relación entre el incremento Δy y la diferencial dy: Δy representa el cambio de altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa el cambio de altura de la recta tangente cuando x cambia por una cantidad $dx = \Delta y$.

Para una función derivable de dos variables, $z = f(x, y)$, se definen las **diferenciales** dx y dy como las variables independientes; es decir, pueden recibir cualquier valor. Entonces la **diferencial** dz, también llamada **diferencial total**, se define mediante

10 $$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

(Compare con la ecuación 9.) A veces se usa la notación df en lugar de dz.

Si se toma $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$ de la ecuación 10, la diferencial de z es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Así, en la notación de las diferenciales, la aproximación lineal (4) puede escribirse como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

La figura 7 es la contraparte tridimensional de la figura 6 y muestra la interpretación geométrica de la diferencial dz y el incremento Δz: dz representa el cambio de altura del plano tangente, mientras que Δz representa el cambio de altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) cambia de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

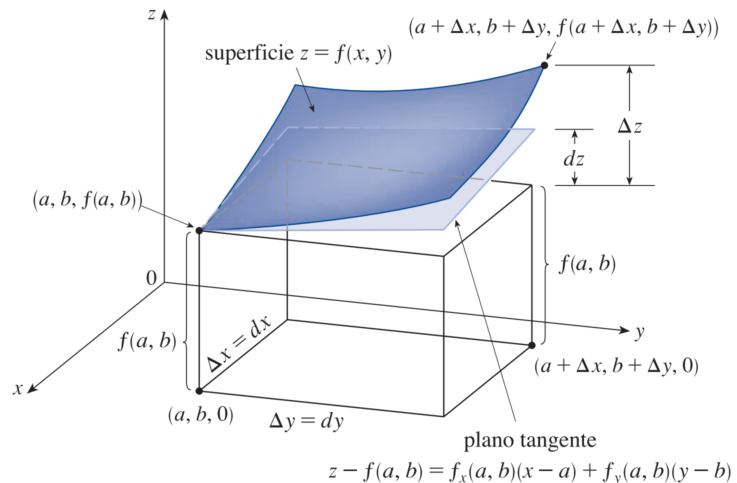


FIGURA 7

EJEMPLO 4
(a) Si $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine la diferencial dz.
(b) Si x cambia de 2 a 2.05 y y cambia de 3 a 2.96, compare los valores de Δz y dz.

SOLUCIÓN
(a) La definición 10 da

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

En el ejemplo 4, dz está cerca de Δz porque el plano tangente es una aproximación satisfactoria de la superficie $z = x^2 + 3xy - y^2$ cerca de (2, 3, 13). (Véase la figura 8.)

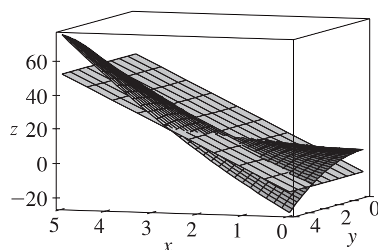


FIGURA 8

(b) Al poner $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$, y $dy = \Delta y = -0.04$ se obtiene

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

El incremento de z es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3)\\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]\\ &= 0.6449\end{aligned}$$

Nótese que $\Delta z \approx dz$, pero dz es más fácil de calcular. ■

EJEMPLO 5 El radio de la base y la altura de un cono circular recto se miden como 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error de medición de hasta 0.1 cm en cada uno. Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado del cono.

SOLUCIÓN El volumen V de un cono con radio de la base r y altura h es $V = \pi r^2 h/3$. Así, la diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = \frac{2\pi rh}{3}\,dr + \frac{\pi r^2}{3}\,dh$$

Como cada error es a lo sumo de 0.1 cm, se tiene $|\Delta r| \leqslant 0.1$, $|\Delta h| \leqslant 0.1$. Para estimar el mayor error en el volumen se toma el error mayor en la medición de r y h. Así, se toma $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$ junto con $r = 10$, $h = 25$. Esto da

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Así, el error máximo en el volumen calculado es de alrededor de 20π cm$^3 \approx 63$ cm^3. ■

■ Funciones de tres o más variables

Aproximaciones lineales, derivabilidad y diferenciales pueden definirse en forma similar para funciones de más de dos variables. Una función derivable se define mediante una expresión similar a la de la definición 7. Para esas funciones la **aproximación lineal** es

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

y la linealización $L(x, y, z)$ es el miembro derecho de esta expresión.

Si $w = f(x, y, z)$, el **incremento** de w es

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

La **diferencial** dw se define en términos de las diferenciales dx, dy y dz de las variables independientes mediante

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

EJEMPLO 6 Las dimensiones de una caja rectangular se miden en 75 cm, 60 cm y 40 cm y cada medida es correcta con un margen de error de 0.2 cm. Use diferenciales para estimar el mayor error posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de estas medidas.

SOLUCIÓN Si las dimensiones de la caja son x, y y z, su volumen es $V = xyz$, así que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Se dio que $|\Delta x| \leqslant 0.2$, $|\Delta y| \leqslant 0.2$, y $|\Delta z| \leqslant 0.2$. Para estimar el mayor error en el volumen, se usa por tanto $dx = 0.2$, $dy = 0.2$ y $dz = 0.2$ junto con $x = 75$, $y = 60$ y $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2) = 1980$$

Así, un error de solo 0.2 cm en la medición de cada dimensión podría conducir a ¡un error de aproximadamente 1 980 cm^3 en el volumen calculado! Este podría parecer un error considerable, pero es de apenas alrededor de 1% del volumen de la caja. ■

14.4 EJERCICIOS

1-6 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1. $z = 2x^2 + y^2 - 5y$, $(1, 2, -4)$
2. $z = (x + 2)^2 - 2(y - 1)^2 - 5$, $(2, 3, 3)$
3. $z = e^{x-y}$, $(2, 2, 1)$
4. $z = x/y^2$, $(-4, 2, -1)$
5. $z = \sqrt{xy}$, $(1, 1, 1)$
6. $z = xe^{xy}$, $(2, 0, 2)$

7-8 Grafique la superficie y el plano tangente en el punto dado. (Elija el dominio y punto de vista de tal forma que obtenga una vista satisfactoria tanto de la superficie como del plano tangente.) Acérquese después hasta que la superficie y el plano tangente se vuelvan indistinguibles.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$
8. $z = \sqrt{9 + x^2y^2}$, $(2, 2, 5)$

SAC **9-10** Dibuje la gráfica de f y su plano tangente en el punto dado. (Use su sistema algebraico computacional tanto para calcular las derivadas parciales como para graficar la superficie y su plano tangente.) Acérquese después hasta que la superficie y el plano tangente se vuelvan indistinguibles.

9. $f(x, y) = \dfrac{1 + \cos^2(x - y)}{1 + \cos^2(x + y)}$, $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7}{4}\right)$
10. $f(x, y) = e^{-xy/10}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}\right)$, $(1, 1, 3e^{-0.1})$

11-16 Explique por qué la función es derivable en el punto dado. Determine después la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.

11. $f(x, y) = 1 + x\ln(xy - 5)$, $(2, 3)$
12. $f(x, y) = \sqrt{xy}$, $(1, 4)$
13. $f(x, y) = x^2e^y$, $(1, 0)$
14. $f(x, y) = \dfrac{1 + y}{1 + x}$, $(1, 3)$
15. $f(x, y) = 4\arctan(xy)$, $(1, 1)$
16. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $(3, 0)$

17-18 Verifique la aproximación lineal en $(0, 0)$.

17. $e^x\cos(xy) \approx x + 1$
18. $\dfrac{y - 1}{x + 1} \approx x + y - 1$

19. Dado que f es una función derivable con $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$, y $f_y(2, 5) = -1$, use una aproximación lineal para estimar $f(2.2, 4.9)$.

20. Halle la aproximación lineal de la función $f(x, y) = 1 - xy \cos \pi y$ en (1, 1) y úsela para aproximar $f(1.02, 0.97)$. Ilustre graficando f y el plano tangente.

21. Halle la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en (3, 2, 6) y úsela para aproximar el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

22. La altura de las olas h en mar abierto depende de la velocidad v del viento y el tiempo t durante el cual el viento ha soplado a esa velocidad. Valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en metros en la tabla siguiente. Use la tabla para determinar una aproximación lineal de la función de altura de las olas cuando v está cerca de 80 km/h y t está cerca de 20 horas. Luego estime la altura de las olas cuando el viento ha soplado durante 24 horas a 84 km/h.

Duración (horas)

Velocidad del viento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1.5	2.2	2.4	2.5	2.7	2.8	2.8
60	2.8	4.0	4.9	5.2	5.5	5.8	5.9
80	4.3	6.4	7.7	8.6	9.5	10.1	10.2
100	5.8	8.9	11.0	12.2	13.8	14.7	15.3
120	7.4	11.3	14.4	16.6	19.0	20.5	21.1

23. Use la tabla del ejemplo 3 para determinar una aproximación lineal de la función de humidex cuando la temperatura se acerca a los 32 °C y la humedad relativa es cercana a 65%. Estime después el humidex cuando la temperatura es de 33 °C y la humedad relativa de 63%.

24. El índice de viento-frío W es la temperatura percibida cuando la temperatura real es T y la velocidad del viento es v, así que se puede escribir $W = f(T, v)$. La tabla de valores siguiente es un fragmento de la tabla 1 de la sección 14.1. Úsela para determinar una aproximación lineal de la función del índice de viento-frío cuando T se acerca a –15 °C y v se acerca a 50 km/h. Estime después el índice de viento-frío cuando la temperatura es de –17 °C y la velocidad del viento es de 55 km/h.

Velocidad del viento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

25-30 Determine la diferencial de las siguientes funciones.

25. $z = e^{-2x} \cos 2\pi t$

26. $u = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \gamma$

30. $L = xze^{-y^2 - z^2}$

31. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x, y) cambia de (1, 2) a (1.05, 2.1), compare los valores de Δz y dz.

32. Si $z = x^2 - xy + 3y^2$ y (x, y) cambia de (3, –1) a (2.96, –0.95), compare los valores de Δz y dz.

33. La longitud y ancho de un rectángulo se miden como 30 cm y 24 cm, respectivamente, con un error de medición de, a lo sumo, 0.1 cm en cada uno. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo.

34. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada de 10 cm de alto y 4 cm de diámetro si el metal en la tapa y el fondo es de 0.1 cm de grosor y el metal en los lados es de 0.05 cm de grosor.

35. Use diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada con diámetro de 8 cm y altura de 12 cm si el estaño es de 0.04 cm de grosor.

36. El índice de viento-frío es modelado por la función

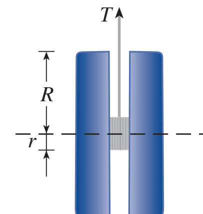
$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (en °C) y v la velocidad del viento (en km/h). La velocidad del viento se mide en 26 km/h, con un posible error de ± 2 km/h, y la temperatura se mide en –11 °C, con un posible error de ± 1 °C. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de W debido a los errores de medición en T y v.

37. La tensión T en la cuerda del yo-yo de la figura es

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

donde m es la masa del yo-yo y g la aceleración ejercida por la gravedad. Use diferenciales para estimar el cambio en la tensión si R aumenta de 3 cm a 3.1 cm y r aumenta de 0.7 cm a 0.8 cm. ¿La tensión aumenta o disminuye?



38. La presión, volumen y temperatura de un mol de un gas ideal están relacionados por la ecuación $PV = 8.31T$, donde P se mide en kilopascales, V en litros y T en grados Kelvin. Use diferenciales para hallar el cambio aproximado en la presión si el volumen aumenta de 12 L a 12.3 L y la temperatura disminuye de 310 K a 305 K.

39. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si las resistencias se miden en ohms como $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, y $R_3 = 50\ \Omega$, con un posible error de 0.5% en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

40. Un modelo para el área de un cuerpo humano está dado por $S = 72.09w^{0.425}h^{0.725}$, donde w es el peso (en kilogramos), h la altura (en centímetros) y S se mide en centímetros cuadrados. Si los errores de medición de w y h son a lo sumo de 2%, use diferenciales para estimar el máximo error porcentual en el área calculada.

41. En el ejercicio 14.1.39 y el ejemplo 14.3.3, el índice de masa corporal de una persona se definió como $B(m, h) = m/h^2$, donde m es la masa en kilogramos y h la altura en metros.

(a) ¿Cuál es la aproximación lineal de $B(m, h)$ para un niño con masa de 23 kg y altura de 1.10 m?

(b) Si la masa del niño aumenta 1 kg y la altura 3 cm, use la aproximación lineal para estimar el nuevo IMC. Compare con el nuevo IMC real.

42. Suponga que debe conocer una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 1, 3)$. No tiene una ecuación para S, pero sabe que las curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2 \rangle$$
$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1 \rangle$$

residen en S. Determine una ecuación del plano tangente en P.

43-44 Demuestre que la función es derivable encontrando valores de ε_1 y ε_2 que satisfagan la definición 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **44.** $f(x, y) = xy - 5y^2$

---

45. Compruebe que si f es una función de dos variables derivable en (a, b), f es continua en (a, b).
Sugerencia: demuestre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

fue graficada en la figura 4. Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen pero que f no es derivable en $(0, 0)$. [*Sugerencia*: use el resultado del ejercicio 45.]

(b) Explique por qué f_x y f_y no son continuas en $(0, 0)$.

PROYECTO DE APLICACIÓN EL SPEEDO LZR RACER

Muchos avances tecnológicos han ocurrido en los deportes que han contribuido a un mejor desempeño atlético. Uno de los más conocidos es el lanzamiento, en 2008, del Speedo LZR Racer. Se dijo entonces que este traje de baño de cuerpo entero reducía la fricción de un nadador en el agua. La figura 1 muestra el número de récords mundiales rotos en eventos de natación de estilo libre y carrera larga para hombres y mujeres entre 1990 y 2011.[1] El drástico incremento en 2008, cuando se lanzó ese traje de baño, llevó a algunas personas a sostener que esos trajes eran una forma de doping tecnológico. Como consecuencia, todos los trajes de baño de cuerpo entero fueron prohibidos en competencias a partir de 2010.

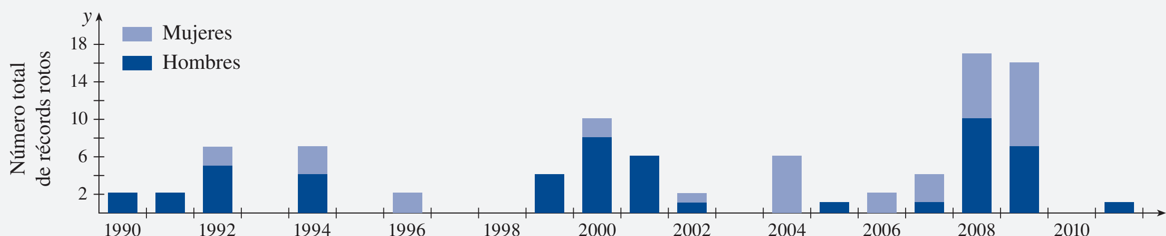


FIGURA 1 Número de récords mundiales impuestos en eventos de natación de estilo libre y carrera larga para hombres y mujeres, 1990-2011

Quizá sorprenda que una simple reducción de fricción pueda tener un efecto tan importante en el rendimiento. Para hacernos una idea, se puede usar un modelo matemático simple.[2]

---

1. L. Foster *et al*. "Influence of Full Body Swimsuits on Competitive Performance", *Procedia Engineering* 34 (2012): 712-717.
2. Adaptado de http://plus.maths.org/content/swimming.


Cortesía de © Speedo y ANSYS, Inc.

La velocidad v de un objeto propulsado en el agua está dada por

$$v(P, C) = \left(\frac{2P}{kC}\right)^{1/3}$$

donde P es la potencia usada para propulsar el objeto, C el coeficiente de fricción y k una constante positiva. Así, los atletas pueden aumentar su velocidad al nadar aumentando su potencia o reduciendo sus coeficientes de fricción. Pero, ¿qué tan efectivo es cada uno de estos factores?

Para comparar el efecto de aumentar la potencia contra el de reducir la fricción, es necesario comparar de alguna manera ambos factores en unidades comunes. El enfoque más común es determinar el cambio porcentual en velocidad que resulta de un cambio porcentual dado en potencia y fricción.

Si se trabaja con porcentajes como fracciones, cuando la potencia cambia en una fracción x (con x correspondiendo a $100x$ por ciento), P cambia de P a $P + xP$. De igual forma, si el coeficiente de fricción cambia en una fracción y, esto significa que ha cambiado de C a $C + yC$. Por último, el cambio fraccional en velocidad resultante de ambos efectos es

$$\boxed{1} \qquad \frac{v(P + xP, C + yC) - v(P, C)}{v(P, C)}$$

1. La expresión 1 da el cambio fraccional en velocidad que resulta de un cambio x en potencia y un cambio y en fricción. Demuestre que esto se reduce a la función

$$f(x, y) = \left(\frac{1 + x}{1 + y}\right)^{1/3} - 1$$

Dado el contexto, ¿cuál es el dominio de f?

2. Suponga que los posibles cambios en potencia x y fricción y son pequeños. Determine la aproximación lineal de la función $f(x, y)$. ¿Qué puede decirse de esa aproximación sobre el efecto de un aumento reducido en potencia contra una disminución reducida en fricción?

3. Calcule $f_{xx}(x, y)$ y $f_{yy}(x, y)$. Con base en los signos de estas derivadas, ¿la aproximación lineal del problema 2 resulta en una sobrestimación o una subestimación para un aumento en potencia? ¿Y para una disminución en fricción? Use su respuesta para explicar por qué, para cambios en potencia o fricción no muy pequeños una disminución en fricción es más efectiva.

4. Grafique las curvas de nivel de $f(x, y)$. Explique cómo se relacionan las formas de estas curvas con sus respuestas a los problemas 2 y 3.

14.5 La regla de la cadena

Recuerde que la regla de la cadena para funciones de una variable da la regla para derivar una función compuesta: si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde f y g son funciones derivables, entonces y es indirectamente una función derivable de t y

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para funciones con más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de las cuales da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión (teorema 2) se refiere al caso donde $z = f(x, y)$ y cada una de las variables x y y es a su vez una función de una variable t. Esto significa que z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$ y la regla de la cadena da una fórmula para derivar z como

una función de t. Suponga que f es derivable (definición 14.4.7). Recuerde que este es el caso cuando f_x y f_y son continuas (teorema 14.4.8).

2 La regla de la cadena (caso 1) Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones derivables de t. Entonces, z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

COMPROBACIÓN Un cambio de Δt en t produce cambios de Δx en x y de Δy en y. Esto produce a su vez un cambio de Δz en z, y por la definición 14.4.7 se tiene

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. [Si las funciones ε_1 y ε_2 no están definidas en (0, 0), puede definirlas como 0 ahí.] Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre Δt, se tiene

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si ahora se permite que $\Delta t \to 0$, entonces $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$, porque g es derivable y por tanto continua. De igual forma, $\Delta y \to 0$. Esto significa a su vez que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$, así que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

■

Como se suele escribir $\partial z/\partial x$ en vez de $\partial f/\partial x$, se puede reescribir la regla de la cadena en la forma

Nótese la semejanza con la definición de diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

EJEMPLO 1 Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \text{sen } 2t$, y $y = \cos t$ determine dz/dt cuando $t = 0$.

SOLUCIÓN La regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\text{sen } t)\end{aligned}$$

No es necesario sustituir las expresiones para x y y en términos de t. Simplemente observe que cuando $t = 0$, se tiene $x = \operatorname{sen} 0 = 0$ y $y = \cos 0 = 1$. En consecuencia,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos 0) + (0 + 0)(-\operatorname{sen} 0) = 6$$ ■

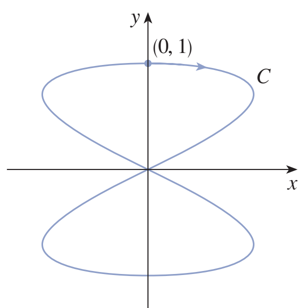


FIGURA 1 La curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$

La derivada del ejemplo 1 puede interpretarse como la razón de cambio de z con respecto a t cuando el punto (x, y) se mueve a lo largo de la curva C con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$. (Véase la figura 1.) En particular, cuando $t = 0$, el punto (x, y) es $(0, 1)$ y $dz/dt = 6$ es la razón de incremento cuando se mueve a lo largo de la curva C que pasa por $(0, 1)$. Si, por ejemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representa la temperatura en el punto (x, y), la función compuesta $z = T(\operatorname{sen} 2t, \cos t)$ representa la temperatura en los puntos en C y la derivada dz/dt representa la razón en la que la temperatura cambia a lo largo de C.

EJEMPLO 1 La presión P (en kilopascales), volumen V (en litros) y temperatura T (en grados Kelvin) de un mol de un gas ideal se relacionan por la ecuación $PV = 8.31T$. Determine la razón a la que cambia la presión cuando la temperatura es de 300 K y aumenta a razón de 0.1 K/s y el volumen es 100 L y aumenta a razón de 0.2 L/s.

SOLUCIÓN Si t representa el tiempo transcurrido en segundos, en el instante dado se tiene $T = 300$, $dT/dt = 0.1$, $V = 100$, $dV/dt = 0.2$. Puesto que

$$P = 8.31\frac{T}{V}$$

la regla de la cadena da

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{8.31}{100}(0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2}(0.2) = -0.04155$$

La presión baja a razón de alrededor de 0.042 kPa/s. ■

Considere ahora la situación en la que $z = f(x, y)$, pero en la que tanto x como y son una función de dos variables s y t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces, z es indirectamente una función de s y t y se desea encontrar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. Recuerde que al calcular $\partial z/\partial t$ se mantiene fija s y se calcula la derivada ordinaria de z con respecto a t. Por tanto, se puede aplicar el teorema 2 para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Un argumento similar es válido para $\partial z/\partial s$, así que se ha comprobado la versión siguiente de la regla de la cadena.

3 **La regla de la cadena (caso 2)** Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Así pues,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EJEMPLO 3 Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, determine $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

SOLUCIÓN Aplicando el caso 2 de la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$
$$= t^2e^{st^2}\operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$
$$= 2ste^{st^2}\operatorname{sen}(s^2t) + s^2e^{st^2}\cos(s^2t)$$ ■

El caso 2 de la regla de la cadena contiene tres tipos de variables: s y t son variables **independientes**, x y y se llaman variables **intermedias** y z es la variable **dependiente**. Nótese que el teorema 3 tiene un término para cada variable intermedia y que cada uno de estos términos se asemeja a la regla de la cadena unidimensional de la ecuación 1.

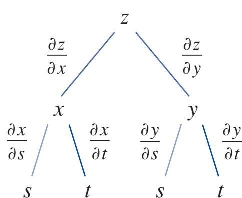


FIGURA 2

Para recordar la regla de la cadena serviría dibujar el **diagrama de árbol** de la figura 2. Se trazan ramas de la variable dependiente z a las variables intermedias x y y para indicar que z es una función de x y y. Luego se trazan ramas de x y y a las variables independientes s y t. En cada rama se escribe la correspondiente derivada parcial. Para hallar $\partial z/\partial s$, se encuentra el producto de las derivadas parciales a lo largo de cada trayectoria de z a s y después se suman esos productos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

En forma similar, se hallan $\partial z/\partial t$ usando las trayectorias de z a t.

Considere ahora la situación general en la que una variable dependiente u es una función de n variables intermedias $x_1, \ldots, x_n$, cada una de las cuales es a su vez una función de m variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Nótese que hay n términos, uno para cada variable intermedia. La comprobación es similar a la del caso 1.

4 La regla de la cadena (versión general) Suponga que u es una función derivable de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y que cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, tm$. Entonces, u es una función de $t_1, t_2, \ldots, tm$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

EJEMPLO 4 Escriba la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.

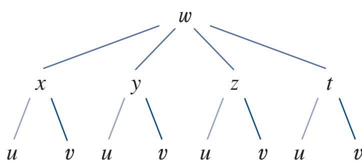


FIGURA 3

SOLUCIÓN Se aplica el teorema 4 con $n = 4$ y $m = 2$. La figura 3 muestra el diagrama de árbol. Aunque no se han escrito las derivadas en las ramas, se entiende que si una rama lleva de y a u, la derivada parcial de esa rama es $\partial y/\partial u$. Con la ayuda del diagrama de árbol, se pueden escribir ahora las expresiones requeridas:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$ ■

EJEMPLO 5 Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, y $z = r^2s$ sen t, determine el valor de $\partial u/\partial s$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

SOLUCIÓN Con la ayuda del diagrama de árbol de la figura 4 se tiene

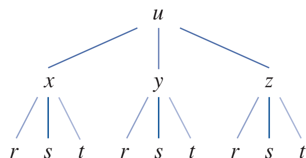


FIGURA 4

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)\end{aligned}$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$, se tiene $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, así que

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$ ■

EJEMPLO 6 Si $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ y f es derivable, demuestre que g satisface la ecuación

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUCIÓN Sea $x = s^2 - t^2$ y $y = t^2 - s^2$. Entonces, $g(s, t) = f(x, y)$ y la regla de la cadena da

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Por tanto,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$ ■

EJEMPLO 7 Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, encuentre (a) $\partial z/\partial r$ y (b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUCIÓN
(a) La regla de la cadena da

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

(b) Al aplicar la regla del producto a la expresión del inciso (a), se obtiene

5
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

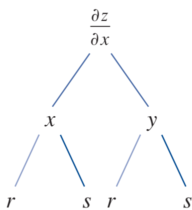


FIGURA 5

Pero usando de nuevo la regla de la cadena (véase la figura 5) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

Al poner estas expresiones en la ecuación 5 y usar la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

■

Derivación implícita

La regla de la cadena puede usarse para obtener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita que se presentó en las secciones 3.5 y 14.3. Se supone que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función derivable de x, es decir $y = f(x)$, donde $F(x, f(x)) = 0$ para todas las x en el dominio de f. Si F es derivable, se puede aplicar el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $dx/dx = 1$, así que si $\partial F/\partial y \neq 0$ se despeja dy/dx y se obtiene

6
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Para derivar esta ecuación suponga que $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función de x. El **teorema de la función implícita**, comprobado en el cálculo avanzado, establece condiciones en las cuales este supuesto es válido: sostiene que si F se define en un disco que contiene (a, b), donde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$, y F_x y F_y son continuas en el disco, la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función de x cerca del punto (a, b) y la derivada de esta función está dada por la ecuación 6.

EJEMPLO 8 Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUCIÓN La ecuación dada puede escribirse como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

así que la ecuación 6 da

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

■

La solución del ejemplo 8 debería compararse con la del ejemplo 3.5.2.

Ahora suponga que z es dada implícitamente como una función $z = f(x, y)$ por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todas las (x, y) en el dominio de f. Si F y f son derivables se puede usar la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

así que esta ecuación se convierte en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, despeje $\partial z/\partial x$ y obtenga la primera fórmula en las ecuaciones 7. La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene de forma similar.

7
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

De nueva cuenta, una versión del **teorema de la función implícita** estipula condiciones en las cuales nuestro supuesto es válido: si F se define dentro de una esfera que contiene a (a, b, c), donde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, y F_x, F_y, y F_z son continuas dentro de la esfera, la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función de x y y cerca del punto (a, b, c) y esta función es derivable, con derivadas parciales dadas por (7).

EJEMPLO 9 Encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUCIÓN Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Entonces, por las ecuaciones 7 se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$ ■

La solución del ejemplo 9 debería compararse con la del ejemplo 14.3.5.

14.5 EJERCICIOS

1-6 Use la regla de la cadena para determinar dz/dt o dw/dt.

1. $z = xy^3 - x^2y, \quad x = t^2 + 1, \quad y = t^2 - 1$

2. $z = \dfrac{x - y}{x + 2y}, \quad x = e^{\pi t}, \quad y = e^{-\pi t}$

3. $z = \text{sen } x \cos y, \quad x = \sqrt{t}, \quad y = 1/t$

4. $z = \sqrt{1 + xy}, \quad x = \tan t, \quad y = \arctan t$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $z = \tan^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$

7-12 Use la regla de la cadena para determinar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

7. $z = (x - y)^5, \quad x = s^2t, \quad y = st^2$

8. $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2), \quad x = s \ln t, \quad y = te^s$

9. $z = \ln(3x + 2y)$, $x = s \operatorname{sen} t$, $y = t \cos s$

10. $z = \sqrt{x}\, e^{xy}$, $x = 1 + st$, $y = s^2 - t^2$

11. $z = e^r \cos\theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$

---

13. Sea $p(t) = f(g(t), h(t))$, donde f es derivable, $g(2) = 4$, $g'(2) = -3$, $h(2) = 5$, $h'(2) = 6$, $f_x(4, 5) = 2$, $f_y(4, 5) = 8$. Determine $p'(2)$.

14. Sea $R(s, t) = G(u(s, t), v(s, t))$, donde G, u y v son derivables, $u(1, 2) = 5$, $u_s(1, 2) = 4$, $u_t(1, 2) = -3$, $v(1, 2) = 7$, $v_s(1, 2) = 2$, $v_t(1, 2) = 6$, $G_u(5, 7) = 9$, $G_v(5, 7) = -2$. Determine $R_s(1, 2)$ y $R_t(1, 2)$.

15. Suponga que f es una función derivable de x y y, y $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Use la tabla de valores para calcular $g_u(0, 0)$ y $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponga que f es una función derivable de x y y, y $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use la tabla de valores del ejercicio 15 para calcular $g_r(1, 2)$ y $g_s(1, 2)$.

17-20 Use un diagrama de árbol para escribir la regla de la cadena para el caso dado. Suponga que todas las funciones son derivables.

17. $u = f(x, y)$, donde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $w = f(x, y, z)$, donde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$

19. $T = F(p, q, r)$, donde $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$, $r = r(x, y, z)$

20. $R = F(t, u)$ donde $t = t(w, x, y, z)$, $u = u(w, x, y, z)$

21-26 Use la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$;
$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ cuando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $r = y + x\cos t$, $s = x + y \operatorname{sen} t$;
$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ cuando $x = 1$, $y = 2$, $t = 0$

23. $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = r\theta$;
$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ cuando $r = 2$, $\theta = \pi/2$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = xe^y$, $v = ye^x$, $w = e^{xy}$;
$\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ cuando $x = 0$, $y = 2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}$, $p = u + vw$, $q = v + uw$, $r = w + uv$;
$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ cuando $u = 2$, $v = 3$, $w = 4$

26. $u = xe^{ty}$, $x = \alpha^2\beta$, $y = \beta^2\gamma$, $t = \gamma^2\alpha$;
$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}$ cuando $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

27-30 Use la ecuación 6 para hallar dy/dx.

27. $y\cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} y$

29. $\tan^{-1}(x^2 y) = x + xy^2$

30. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

31-34 Use las ecuaciones 7 para hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x\ln y = z^2$

---

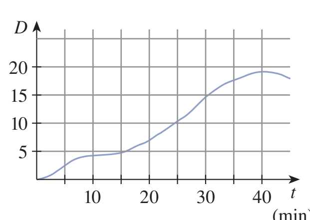
35. La temperatura en el punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados Celsius. Un bicho se arrastra de tal manera que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y se miden en centímetros. La función de temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido aumenta la temperatura en la trayectoria del bicho después de 3 segundos?

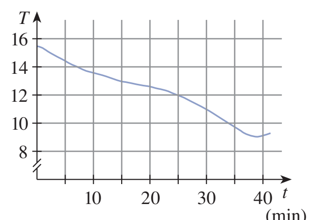
36. La producción de trigo W en un año dado depende de la temperatura promedio T y la precipitación anual R. Científicos estiman que la temperatura promedio aumenta a razón de 0.15 °C/año y la precipitación disminuye a razón de 0.1 cm/año. También estiman que a los niveles de producción corrientes, $\partial W/\partial T = -2$ y $\partial W/\partial R = 8$.
(a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?
(b) Estime la razón de cambio corriente de la producción de trigo, dW/dt.

37. La velocidad del sonido que viaja a través de aguas oceánicas con salinidad de 35 partes por millar se forma por la ecuación

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T la temperatura (en grados Celsius) y D la profundidad bajo la superficie del océano (en metros). Un buzo inició una inmersión recreativa en aguas marinas; su profundidad y la temperatura del agua circundante con el paso del tiempo se registran en las gráficas siguientes. Estime la razón de cambio (con respecto al tiempo) de la velocidad del sonido a través de agua marina, experimentada por el buzo luego de 20 minutos de inmersión. ¿Cuáles son las unidades?





38. El radio de un cono circular recto aumenta a razón de 4.6 cm/s mientras su altura disminuye a razón de 6.5 cm/s. ¿A qué razón cambia el volumen del cono cuando el radio es de 300 cm y la altura de 350 cm?

39. La longitud ℓ, ancho w y altura h de una caja cambian con el tiempo. En cierto instante las dimensiones son $\ell = 1$ m y $w = h = 2$ m, y ℓ y w aumentan a razón de 2 m/s mientras que h disminuye a razón de 3 m/s. Determine en ese instante las razones a las que cambian las cantidades siguientes.
(a) El volumen
(b) El área
(c) La longitud de una diagonal

40. El voltaje V en un circuito eléctrico simple disminuye lentamente conforme se agota la batería. La resistencia R se reduce con lentitud conforme el resistor se calienta. Use la ley de Ohm, $V = IR$, para determinar cómo cambia la corriente I en el momento en que $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08$ A, $dV/dt = -0.01$ V/s, y $dR/dt = 0.03\ \Omega$/s.

41. La presión de 1 mol de un gas ideal aumenta a razón de 0.05 kPa/s y la temperatura aumenta a razón de 0.15 K/s. Use la ecuación $PV = 8.31T$ del ejemplo 2 para hallar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de 20 kPa y la temperatura de 320 K.

42. Un fabricante ha modelado su función de producción anual P (el valor de su producción entera, en millones de dólares) como una función de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$$

donde L es el número de horas de trabajo (en miles) y K el capital invertido (en millones de dólares). Suponga que cuando $L = 30$ y $K = 8$, la fuerza de trabajo disminuye a razón de 2 000 horas de trabajo al año y el capital aumenta a razón de $500 000 al año. Determine la razón de cambio de la producción.

43. Un lado de un triángulo aumenta a razón de 3 cm/s y un segundo lado disminuye a razón de 2 cm/s. Si el área del triángulo se mantiene constante, ¿a qué razón cambia el ángulo entre los lados cuando el primer lado es de 20 cm de largo, el segundo de 30 cm y el ángulo es de $\pi/6$?

44. Un sonido con frecuencia f_s es producido por una fuente que viaja a lo largo de una línea con velocidad v_s. Si un observador viaja con velocidad v_o a lo largo de la misma línea en la dirección opuesta a la fuente, la frecuencia del sonido escuchado por el observador es

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

donde c es la velocidad del sonido, de alrededor de 332 m/s. (Este es el **efecto Doppler**.) Suponga que, en un momento dado, usted viaja en un tren a 34 m/s que acelera a 1.2 m/s^2. Un tren se acerca a usted desde la dirección opuesta en la otra vía a 40 m/s y acelera a 1.4m/s^2 y hace sonar su silbato, que tiene una frecuencia de 460 Hz. En ese instante, ¿cuál es la frecuencia percibida que usted oye y qué tan rápido cambia?

45-48 Suponga que todas las funciones dadas son derivables.

45. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$, (a) encuentre $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial$ y θ y (b) demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Si $z = f(x, y)$, donde $x = s + t$ y $y = s - t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

47. Si $z = \frac{1}{x}[f(x - y) + g(x + y)]$, demuestre que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

48. Si $z = \frac{1}{y}[f(ax + y) + g(ax - y)]$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

49-54 Suponga que todas las funciones dadas tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

49. Demuestre que cualquier función de la forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Sugerencia*: sea $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s\cos t$ y $y = e^s \operatorname{sen} t$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. (Compare con el ejemplo 7.)

52. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r$ sen, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$, y (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r$ sen, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponga que $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$.
(a) Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine una fórmula similar para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Una función f se llama **homogénea de grado *n*** si satisface la ecuación

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para todas las t, donde n es un entero positivo y f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden.

(a) Verifique que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ es homogénea de grado 3.

(b) Demuestre que si f es homogénea de grado n, entonces

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Sugerencia*: use la regla de la cadena para derivar $f(tx, ty)$ con respecto a t.]

56. Si f es homogénea de grado n, demuestre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x, y)$$

57. Si f es homogénea de grado n, demuestre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a cada una de las tres variables x, y y z como funciones de las otras dos: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Si F es derivable y F_x, F_y, y F_z son diferentes de cero, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. La ecuación 6 es una fórmula para la derivada dy/dx de una función definida implícitamente por una ecuación $F(x, y) = 0$, siempre y cuando F sea derivable y $F_y \neq 0$. Compruebe que si F tiene segundas derivadas continuas, una fórmula para la segunda derivada de y es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

14.6 Derivadas direccionales y el vector gradiente

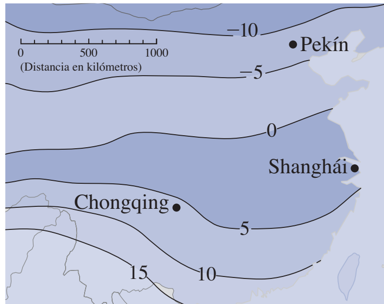


FIGURA 1

El mapa meteorológico de la figura 1 muestra un mapa de contorno de la función de temperatura $T(x, y)$ para China a las tres de la tarde del 28 de diciembre de 2004. Las curvas de nivel, o isotermas, unen lugares con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Chongqing es la razón de cambio de temperatura con respecto a la distancia si se viaja al este desde Chongqing; T_y es la razón de cambio de temperatura si se viaja al norte. Pero, ¿y si se quiere conocer la razón de cambio de temperatura cuando se viaja al sureste o en alguna otra dirección? En esta sección se presentará un tipo de derivada llamada *derivada direccional*, que permite determinar la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

Derivadas direccionales

Recuerde que si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se definen como

1

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y representan las razones de cambio de z en las direcciones de x y y, es decir en las direcciones de los vectores unitarios **i** y **j**.

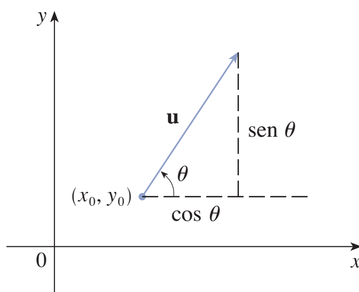


FIGURA 2
Un vector unitario
$\mathbf{u} = \langle a, b\rangle = \langle \cos u, \text{sen}\, u\rangle$

Suponga que ahora desea determinar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$. (Véase la figura 2.) Para hacer esto se considera la superficie S con la ecuación $z = f(x, y)$ (la gráfica de f) y se concede que $z_0 = f(x_0, y_0)$. Entonces, el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ reside en S. El plano vertical que pasa por P en la dirección

de **u** interseca S en una curva C. (Véase la figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de **u**.

TEC Visual 14.6A anima la figura 3 rotando **u**, y por tanto T.

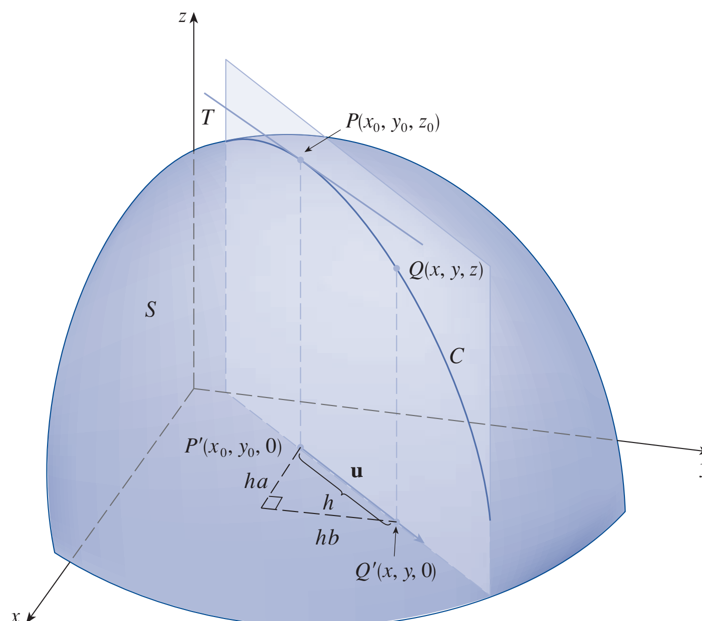


FIGURA 3

Si $Q(x, y, z)$ es otro punto en C y P', Q' son las proyecciones de P, Q en el plano xy, el vector $\overrightarrow{P'Q'}$ es paralelo a **u** y por tanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algún escalar h. Así, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, de modo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si toma el límite cuando $h \to 0$, se obtiene la razón de cambio de z (con respecto a la distancia) en la dirección de **u**, la cual se llama derivada direccional de f en la dirección de **u**.

2 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Al comparar la definición 2 con las ecuaciones 1 se puede ver que si $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ y que si $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. En otras palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son sencillamente casos especiales de la derivada direccional.

EJEMPLO 1 Use el mapa meteorológico de la figura 1 para estimar el valor de la derivada direccional de la función de temperatura en Chongqing en la dirección suroeste.

SOLUCIÓN El vector unitario dirigido al suroeste es $\mathbf{u} = -(\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$, pero no necesitará usar esta expresión. Comience dibujando una recta que pase por Chongqing hacia el suroeste (véase la figura 4).

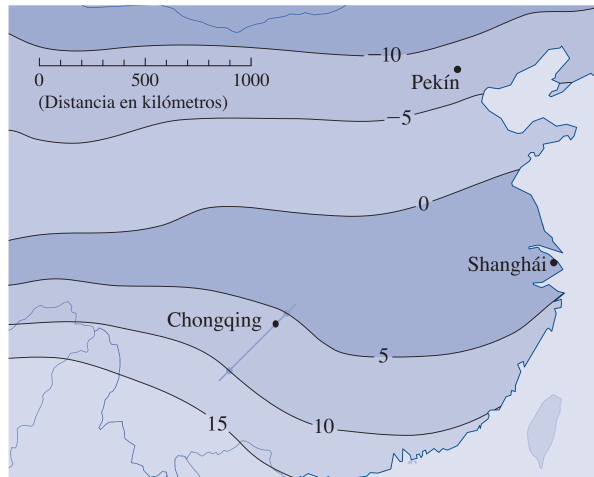


FIGURA 4

Aproxime la derivada direccional $D_u T$ mediante la razón de cambio promedio de la temperatura entre los puntos donde esta recta interseca las isotermas $T = 5$ y $T = 10$. La temperatura en el punto suroeste de Chongqing es $T = 10$ °C y la temperatura en el punto noreste de Chongqing es $T = 5$ °C. La distancia entre estos puntos parece ser alrededor de 380 km. Así, la razón de cambio de la temperatura en la dirección suroeste es

$$D_{\mathbf{u}} T \approx \frac{10 - 5}{380} = \frac{5}{380} \approx 0.013 \text{ °C/km}$$ ■

Cuando se calcula la derivada direccional de una función definida por una fórmula, suele emplearse el teorema siguiente.

3 Teorema Si f es una función derivable de x y y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

COMPROBACIÓN Si se define una función g de la variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

por la definición de una derivada se tiene

4
$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Por otro lado, se puede escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de forma que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b$$

Si se pone ahora $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$ y

5 $$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

Al comparar las ecuaciones 4 y 5 se observa que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$ ■

Si el vector unitario **u** forma un ángulo θ con el eje x positivo (como en la figura 2), se puede escribir $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$ y la fórmula del teorema 3 se convierte en

6 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

La derivada direccional $D_u f(1,2)$ del ejemplo 2 representa la razón de cambio de z en la dirección de **u**. Esta es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ y el plano vertical que pasa por (1, 2, 0) en la dirección de **u** mostrada en la figura 5.

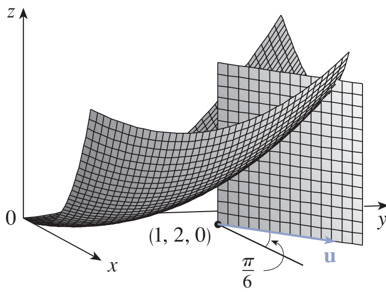


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Determine la derivada direccional $D_u f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y **u** es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Qué es $D_u f(1, 2)$?

SOLUCIÓN La fórmula 6 da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right] \end{aligned}$$

Por tanto,

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$ ■

■ El vector gradiente

Nótese en el teorema 3 que la derivada direccional de una función derivable puede escribirse como el producto punto de dos vectores:

7 $$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle \cdot \langle a, b\rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

El primer vector en este producto punto no solo ocurre en el cálculo de derivadas direccionales, sino también en muchos otros contextos. Así, se le da un nombre especial (el *gradiente* de f) y una notación especial (**grad** f o ∇f, que se lee "del f").

8 Definición Si f es una función de dos variables x y y, entonces el gradiente de f es la función vector ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$, entonces

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

y

$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

■

Con esta notación para el vector gradiente se puede reescribir la ecuación 7 para la derivada direccional de una función derivable como

9
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Esto expresa la derivada direccional en la dirección de un vector unitario **u** como la proyección escalar del vector gradiente en **u**.

El vector gradiente $\nabla f(2, -1)$ del ejemplo 4 se muestra en la figura 6 con punto inicial (2, –1). También se muestra el vector **v** que da la dirección de la derivada direccional. Estos dos vectores se sobreimponen en un mapa de contorno de la gráfica de f.

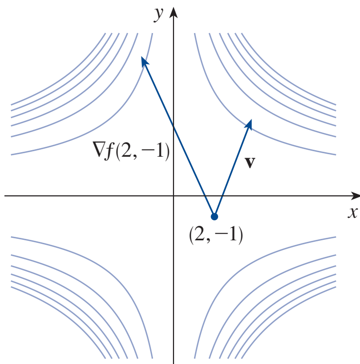


FIGURA 6

EJEMPLO 4 Determine la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto (2, –1) en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN Primero se calcula el vector gradiente en (2, –1):

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Nótese que **v** no es un vector unitario, pero como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, el vector unitario en la dirección de **v** es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}$$

Así, por la ecuación 9 se tiene

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}\right)$$

$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

■

Funciones de tres variables

Para funciones de tres variables se pueden definir derivadas direccionales en forma similar. De nueva cuenta, $D_u f(x, y, z)$ puede interpretarse como la razón de cambio de la función en la dirección de un vector unitario **u**.

10 Definición La derivada direccional de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si este límite existe.

Si se usa la notación vectorial, pueden escribirse ambas definiciones (2 y 10) de la derivada direccional en la forma compacta

11
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

donde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0\rangle$ si $n = 2$ y $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ si $n = 3$. Esto es razonable porque la ecuación vectorial de la recta que pasa por x_0 en la dirección del vector $\mathbf{u}$ está dada por $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ (ecuación 12.5.1), y por tanto $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa el valor de f en un punto en esta recta.

Si $f(x, y, z)$ es derivable y $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$, el mismo método que se usó para comprobar el teorema 3 puede emplearse para demostrar que

12
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\, a + f_y(x, y, z)\, b + f_z(x, y, z)\, c$$

Para una función f de tres variables, el vector **gradiente**, denotado por ∇f o **grad** f, es

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle$$

o, para abreviar,

13
$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Entonces, lo mismo que en el caso de funciones de dos variables, la fórmula 12 para la derivada direccional puede reescribirse como

14
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

EJEMPLO 5 Si $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, (a) determine el gradiente de f y (b) determine la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN

(a) El gradiente de f es

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz\rangle\end{aligned}$$

(b) En (1, 3, 0) se tiene $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3\rangle$. El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Por tanto, la ecuación 14 da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

■

Maximización de la derivada direccional

Suponga que tiene una función f de dos o tres variables y considere todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto dado. Estas dan las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Entonces, se pueden hacer estas preguntas: ¿en cuál de esas direcciones cambia más rápido f y cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas se dan en el teorema siguiente.

TEC Visual 14.6B ofrece una confirmación visual del teorema 15.

15 Teorema Suponga que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_u f(x)$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y ocurre cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

COMPROBACIÓN De la ecuación 9 o 14 se tiene

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$. El valor máximo de $\cos\theta$ es 1 y ocurre cuando $\theta = 0$. Por tanto, el valor máximo de $D_u f$ es $|\nabla f|$ y sucede cuando $\theta = 0$, es decir cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f. ■

EJEMPLO 6

(a) Si $f(x, y) = xe^{y}$, determine la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P to $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) ¿En qué dirección tiene f la máxima razón de cambio? ¿Cuál es la máxima razón de cambio?

SOLUCIÓN

(a) Primero se calcula el vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle e^y, xe^y\rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$$

El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ} = \langle -\frac{3}{2}, 2 \rangle$ es $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$, así que la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

(b) De acuerdo con el teorema 15, f aumenta más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. La máxima razón de cambio es

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$ ■

En (2, 0) la función del ejemplo 6 aumenta más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. Nótese en la figura 7 que este vector parece ser perpendicular a la curva de nivel que pasa por (2, 0). La figura 8 muestra la gráfica de f y el vector gradiente.

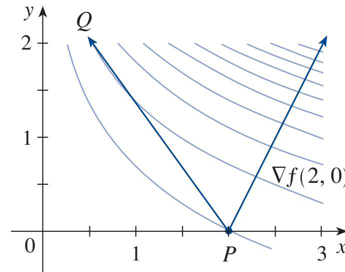


FIGURA 7

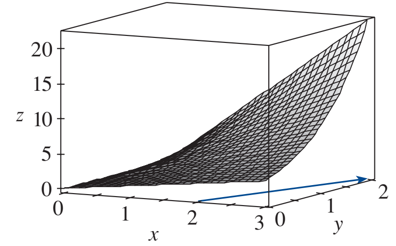


FIGURA 8

EJEMPLO 7 Suponga que la temperatura en el punto (x, y, z) en el espacio está dada por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, donde T se mide en grados Celsius y x, y, z en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en el punto (1, 1, –2)? ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

SOLUCIÓN El gradiente de T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k})$$

En el punto (1, 1, –2) el vector gradiente es

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Por el teorema 15 la temperatura aumenta más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ o, en forma equivalente, en la dirección de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ o el vector unitario $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. La razón de incremento máxima es la longitud del vector gradiente:

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Por tanto, la razón de incremento máxima de la temperatura es $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4\,°\text{C/m}$. ■

Planos tangentes a superficies de nivel

Suponga que S es una superficie con ecuación $F(x, y, z) = k$, es decir, que es una superficie de nivel de una función F de tres variables, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Sea C cualquier curva residente en la superficie S y que pasa por el punto P. Recuerde de la sección 13.1 que la curva C es descrita por una función vectorial continua $r(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Sea t_0 el valor paramétrico correspondiente a P; es decir, $r(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Como C reside en S, cualquier punto $(x(t), y(t), z(t))$, debe satisfacer la ecuación de S, es decir

16 $$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Si x, y y z son funciones derivables de t y F también es derivable, se puede usar la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación 16 como sigue:

17 $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Pero como $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z\rangle$ y $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$, la ecuación 17 puede escribirse en términos de un producto punto como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

En particular, cuando $t = t_0$ se tiene $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, así que

18 $$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

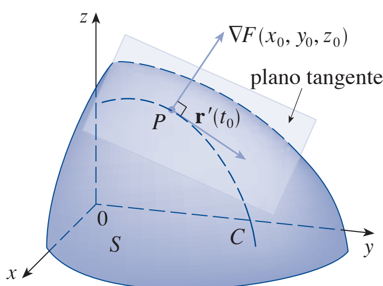


FIGURA 9

La ecuación 18 establece que *el vector gradiente en* P, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, *es perpendicular al vector tangente* $\mathbf{r}'(t_0)$ *a cualquier curva* C *en* S *que pase por* P. (Véase la figura 9.) Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, es natural entonces definir el plano **tangente a la superficie de nivel** $F(x, y, z) = k$ **en** $P(x_0, y_0, z_0)$ como el plano que pasa por P y tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Usando la ecuación estándar de un plano (ecuación 12.5.7), se puede escribir la ecuación de este plano tangente como

19 $$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

La **recta normal** a S en P es la recta que pasa por P y perpendicular al plano tangente. La dirección de la recta normal está dada entonces por el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, así que, por la ecuación 12.5.3, sus ecuaciones simétricas son

20 $$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

En el caso especial en el que la ecuación de una superficie S es de la forma $z = f(x, y)$ (es decir, S es la gráfica de una función f de dos variables), es posible reescribir la ecuación como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

y considerar a S como una superficie de nivel (con $k = 0$) de F. Así pues,

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$
$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$
$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

de manera que la ecuación 19 se convierte en

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

lo cual es equivalente a la ecuación 14.4.2. Así, esta nueva y más general definición de un plano tangente es congruente con la definición que se dio para el caso especial de la sección 14.4.

EJEMPLO 8 Determine las ecuaciones del plano tangente y la recta normal en el punto (–2, 1, –3) al elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

La figura 10 muestra el elipsoide, plano tangente y recta normal del ejemplo 8.

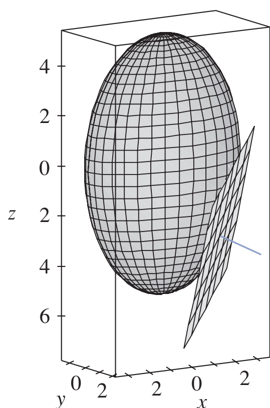


FIGURA 10

SOLUCIÓN El elipsoide es la superficie de nivel (con $k = 3$) de la función

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Por tanto, se tiene

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Así, la ecuación 19 da la ecuación del plano tangente en (–2, 1, –3) como

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

lo que se simplifica en $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Por la ecuación 20, ecuaciones simétricas de la recta normal son

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

■

Importancia del vector gradiente

Ahora se resumirán las formas en que el vector gradiente es significativo. Primero considere una función f de tres variables y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en su dominio. Por una parte, por el teorema 15 se sabe que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección del incremento más rápido de f. Por otra, se sabe que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel S de f que pasa por P. (Remítase a la figura 9.) Estas dos propiedades son muy compatibles intuitivamente, porque a medida que se aleja de P en la superficie de nivel S, el valor de f no cambia en absoluto. Así, parece razonable que si se mueve en la dirección perpendicular, se obtiene el incremento máximo.

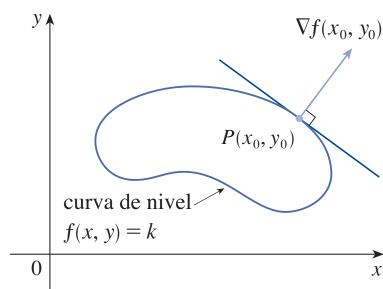


FIGURA 11

De igual manera, considere una función f de dos variables y un punto $P(x_0, y_0)$ en su dominio. También esta vez el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ da la dirección del incremento más rápido de f. Asimismo, por consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P. Esto es, de nuevo, intuitivamente verosímil, porque los valores de f se mantienen constantes conforme se mueve a lo largo de la curva. (Véase la figura 11.)

Si considera un mapa topográfico de una colina y concede que $f(x, y)$ representa la altura sobre el nivel del mar en un punto con coordenadas (x, y), una curva de ascenso muy pronunciado puede dibujarse como en la figura 12 volviéndola perpendicular a todas

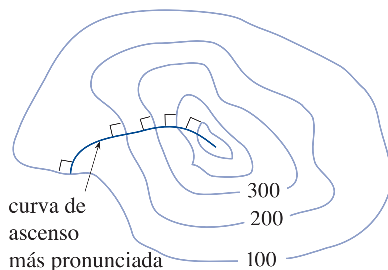


FIGURA 12

las rectas de contorno. Este fenómeno también puede percibirse en la figura 14.1.12, donde el río Lonesome sigue una curva de descenso muy pronunciada.

Sistemas algebraicos computacionales tienen comandos que trazan vectores gradiente de muestra. Cada vector gradiente $\nabla f(a, b)$ se traza a partir del punto (a, b). La figura 13 muestra un diagrama de ese tipo (llamado *campo de vectores gradiente*) para la función $f(a, b) = x^2 - y^2$ sobreimpuesta a un mapa de contorno de f. Como era de esperarse, los vectores gradiente apuntan "colina arriba" y son perpendiculares a las curvas de nivel.

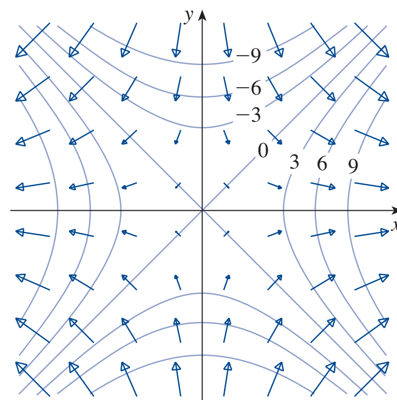
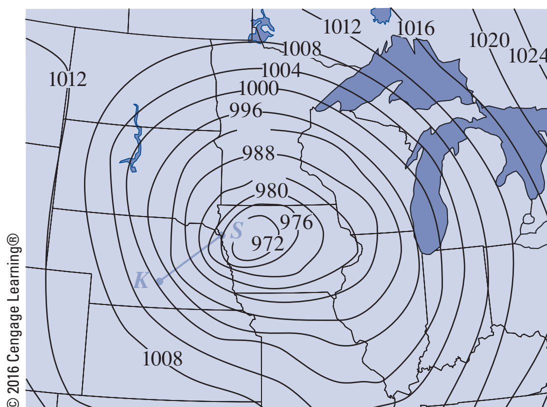


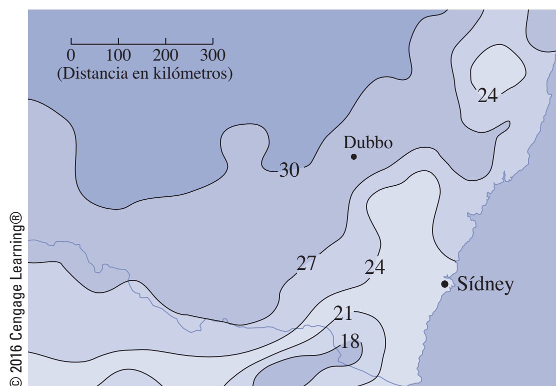
FIGURA 13

14.6 EJERCICIOS

1. Se muestran curvas de nivel para la presión barométrica (en milibaras) a las seis de la mañana de un día de noviembre. Una profunda depresión con presión de 972 mb se mueve sobre el noreste de Iowa. La distancia a lo largo de la recta azul de K (Kearney, Nebraska) a S (Sioux City, Iowa) es de 300 km. Estime el valor de la derivada direccional de la función de presión en Kearney en la dirección de Sioux City. ¿Cuáles son las unidades de la derivada direccional?



2. El mapa de contorno muestra la temperatura máxima promedio para noviembre de 2004 (en °C). Estime el valor de la derivada direccional de esta función de temperatura en Dubbo, Nueva Gales del Sur, en la dirección de Sídney. ¿Cuáles son las unidades?



3. Una tabla de valores para el índice de viento-frío $W = f(T, v)$ se da en el ejercicio 14.3.3, en la página 923. Use esa tabla para estimar el valor de $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4-6 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección indicada por el ángulo θ.

4. $f(x, y) = xy^3 - x^2$, $(1, 2)$, $\theta = \pi/3$

5. $f(x, y) = y\cos(xy)$, $(0, 1)$, $\theta = \pi/4$

6. $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}$, $(3, 1)$, $\theta = -\pi/6$

7-10
(a) Determine el gradiente de *f*.
(b) Evalúe el gradiente en el punto *P*.
(c) Determine la razón de cambio de *f* en *P* en la dirección del vector **u**.

7. $f(x, y) = x/y$, $P(2, 1)$, $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

8. $f(x, y) = x^2 \ln y$, $P(3, 1)$, $\mathbf{u} = -\frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11-17 Halle la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector **v**.

11. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$

12. $g(r, s) = \tan^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

13. $g(s, t) = s\sqrt{t}$, $(2, 4)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

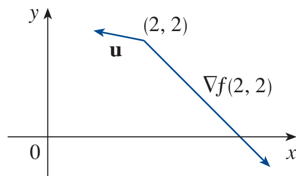
14. $g(u, v) = u^2 e^{-v}$, $(3, 0)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z$, $(1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = xy^2 \tan^{-1} z$, $(2, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

17. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

18. Use la figura para estimar $D_{\mathbf{u}} f(2, 2)$.



19. Determine la derivada direccional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ at $P(2, 8)$ en $P(2, 8)$ en la dirección de $Q(5, 4)$.

20. Determine la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2z^3$ en $P(2, 1, 1)$ en la dirección de $Q(0, -3, 5)$.

21-26 Determine la máxima razón de cambio de *f* en el punto dado y la dirección en la que ocurre.

21. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $(4, 1)$

22. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = x\ln(yz)$, $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$

25. $f(x, y, z) = x/(y + z)$, $(8, 1, 3)$

26. $f(p, q, r) = \arctan(pqr)$, $(1, 2, 1)$

27. (a) Demuestre que una función derivable *f* disminuye de manera más rápida en $\mathbf{x}$ en la dirección opuesta al vector gradiente, es decir, en la dirección de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
(b) Use el resultado del inciso (a) para determinar la dirección en la que la función $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ disminuye a máxima velocidad en el punto $(2, -3)$.

28. Encuentre las direcciones en las que la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + xy^3$ en el punto $(2, 1)$ tiene el valor 2.

29. Encuentre todos los puntos en los que la dirección del cambio más rápido de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. Cerca de una boya, la profundidad de un lago en el punto con coordenadas (x, y) es $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, donde *x*, *y* y *z* se miden en metros. Un pescador en un pequeño bote parte del punto (80, 60) y se mueve hacia la boya, la cual se localiza en (0, 0). ¿El agua bajo el bote es más profunda o más superficial cuando él parte? Explique su respuesta.

31. La temperatura *T* en una pelota de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la pelota, que se toma como el origen. La temperatura en el punto (1, 2, 2) es de 120°.
(a) Determine la razón de cambio de *T* en (1, 2, 2) en dirección al punto (2, 1, 3).
(b) Demuestre que en cualquier punto en la pelota la dirección de mayor incremento en temperatura está dada por un vector que apunta al origen.

32. La temperatura en un punto (x, y, z) está dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

donde *T* se mide en °C y *x*, *y*, *z* en metros.
(a) Determine la razón de cambio de temperatura en el punto $P(2, -1, 2)$ en dirección al punto $(3, -3, 3)$.
(b) ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en *P*?
(c) Determine la razón de incremento máxima en *P*.

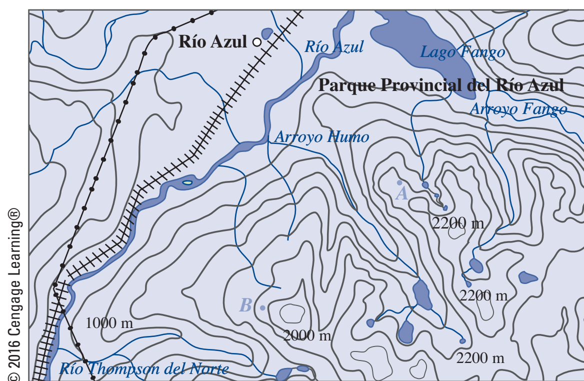
33. Suponga que en cierta región del espacio el potencial eléctrico *V* está dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Encuentre la razón de cambio de potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) ¿En qué dirección cambia más rápido *V* en *P*?
(c) ¿Cuál es la máxima razón de cambio en *P*?

34. Suponga que sube una colina cuya forma está dada por la ecuación $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$, donde *x*, *y* y *z* se miden en metros, y que usted se encuentra en un punto con coordenadas (60, 40, 966). El eje *x* positivo apunta al este y el eje *y* positivo al norte.
(a) Si camina hacia el sur, ¿empezará a ascender o a descender? ¿A qué razón?

(b) Si camina al noreste, ¿comenzará a ascender o a descender? ¿A qué razón?
(c) ¿En qué dirección la pendiente es mayor? ¿Cuál es la razón de ascenso en esa dirección? ¿A qué ángulo sobre la horizontal comienza la trayectoria en esa dirección?

35. Sea f una función de dos variables que tiene derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Determine la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

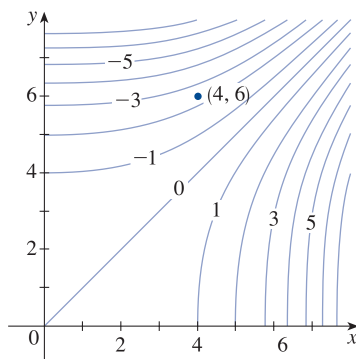
36. Se muestra un mapa topográfico del Parque Provincial del Río Azul, en la Columbia Británica. Dibuje las curvas de descenso más pronunciado desde el punto A (descenso al Lago Fango) y desde el punto B.



37. Demuestre que la operación de tomar un gradiente de una función tiene la propiedad dada. Suponga que u y v son funciones derivables de x y y y que a, b son constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$
(b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$
(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$
(d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Trace el vector gradiente $\nabla f(4, 6)$ para la función f cuyas curvas de nivel se muestran. Explique cómo determinó la dirección y longitud de este vector.



39. La **segunda derivada direccional** de $f(x, y)$ es

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) = D_{\mathbf{u}}[D_{\mathbf{u}} f(x, y)]$$

Si $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$ y $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, calcule $D_{\mathbf{u}}^2 f(2, 1)$.

40. (a) Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ es un vector unitario y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}a^2 + 2f_{xy}ab + f_{yy}b^2$$

(b) Encuentre la segunda derivada direccional de $f(x, y) = xe^{2y}$ en la dirección de $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle$.

41-46 Encuentre ecuaciones de (a) el plano tangente y (b) la recta normal a la superficie dada, en el punto especificado.

41. $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10, \quad (3, 3, 5)$

42. $x = y^2 + z^2 + 1, \quad (3, 1, -1)$

43. $xy^2z^3 = 8, \quad (2, 2, 1)$

44. $y = x^2 - z^2, \quad (4, 7, 3)$

45. $xyz^2 = 6, \quad (3, 2, 1)$

46. $x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2y^2z^2, \quad (1, 1, 1)$

47-48 Use una computadora para graficar la superficie, el plano tangente y la recta normal en la misma pantalla. Elija cuidadosamente el dominio para que evite planos verticales extraños. Seleccione el punto de vista de tal manera que obtenga una vista óptima de los tres objetos.

47. $xy + yz + zx = 3, \quad (1, 1, 1)$

48. $xyz = 6, \quad (1, 2, 3)$

---

49. Si $f(x, y) = xy$, determine el vector gradiente $\nabla f(3, 2)$ y úselo para hallar la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 6$ en el punto $(3, 2)$. Trace la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

50. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, determine el vector gradiente $\nabla g(1, 2)$ y úselo para hallar la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 1$ en el punto $(1, 2)$. Trace la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

51. Demuestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

52. Determine la ecuación del plano tangente el hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ en (x_0, y_0, z_0) y exprésela en una forma similar a la del ejercicio 51.

53. Demuestre que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede escribirse como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

54. ¿En qué punto en el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + z = 1$?

55. ¿Hay puntos en el hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente sea paralelo al plano $z = x + y$?

56. Demuestre que el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ son tangentes entre sí en el punto (1, 1, 2). (Esto significa que tienen un plano tangente común en este punto.)

57. Demuestre que todos los planos tangentes al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasan por el origen.

58. Demuestre que todas las rectas normales a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pasan por el centro de la esfera.

59. ¿Dónde interseca la recta normal al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 2) con el paraboloide por segunda vez?

60. ¿En qué puntos la recta normal que pasa por el punto (1, 2, 1) en el elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ interseca la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 102$?

61. Demuestre que la suma de las intersecciones en x, y y z de todos los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ es una constante.

62. Demuestre que las pirámides separadas del primer octante por cualquier plano tangente a la superficie $xyz = 1$ en puntos en el primer octante deben tener el mismo volumen.

63. Determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 9$ en el punto (–1, 1, 2).

64. (a) El plano $y + z = 3$ interseca el cilindro $x^2 + y^2 = 5$ en una elipse. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente a esta elipse en el punto (1, 2, 1).

(b) Grafique el cilindro, el plano y la recta tangente en la misma pantalla.

65. ¿Dónde interseca la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, t \rangle$ el paraboloide $z = x^2 + y^2$? ¿Cuál es el ángulo de intersección entre la hélice y el paraboloide? (Este es el ángulo entre el vector tangente a la curva y el plano tangente al paraboloide.)

66. La hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(\pi t/2), \operatorname{sen}(\pi t/2), t \rangle$ interseca la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ en dos puntos. Determine el ángulo de intersección en cada punto.

67. (a) Dos superficies se llaman **ortogonales** en un punto de intersección si sus rectas normales son perpendiculares en ese punto. Demuestre qué superficies, con las ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en un punto P donde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ y $\nabla G \neq \mathbf{0}$ si, y solo si

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0 \quad \text{en } P$$

(b) Use el inciso (a) para demostrar que las superficies $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ son ortogonales en todos los puntos de intersección. ¿Puede ver por qué esto es cierto sin usar el cálculo?

68. (a) Demuestre que la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ es continua y que las derivadas parciales f_x y f_y existen en el origen pero que las derivadas direccionales en todas las demás direcciones no existen.

(b) Grafique f cerca del origen y comente cómo esta gráfica confirma el inciso (a).

69. Suponga que las derivadas direccionales de $f(x, y)$ son conocidas en un punto dado en dos direcciones no paralelas dadas por los vectores unitarios **u** y **v**. ¿Es posible determinar Δf en este punto? De ser así, ¿cómo lo haría?

70. Demuestre que si $z = f(x, y)$ es derivable en $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Sugerencia*: use directamente la definición 14.4.7.]

14.7 Valores máximos y mínimos

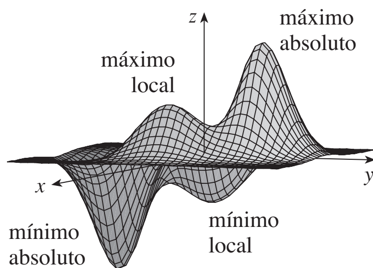


FIGURA 1

Como se vio en el capítulo 4, uno de los principales usos de las derivadas ordinarias es encontrar valores máximos y mínimos (valores extremos). En esta sección se verá cómo usar derivadas parciales para localizar máximos y mínimos de funciones de dos variables. En particular, en el ejemplo 6 se verá cómo maximizar el volumen de una caja sin tapa si tiene una cantidad fija de cartón para trabajar.

Examine las cumbres y valles de la gráfica de f que aparece en la figura 1. Hay dos puntos (a, b) donde f tiene un *máximo local*, es decir, donde (a, b) es mayor que los valores cercanos de $f(x, y)$. El mayor de esos dos valores es el *máximo absoluto*. De igual manera, f tiene dos *mínimos locales*, donde (a, b) es menor que los valores cercanos. El menor de estos dos valores es el *mínimo absoluto*.

1 Definición Una función de dos variables tiene un **máximo local** en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b). [Esto significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en algún disco con centro (a, b).] El número $f(a, b)$ se llama **valor máximo local**. Si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b), f tiene un **mínimo local** en (a, b) y $f(a, b)$ es un **valor mínimo local**.

Si las desigualdades de la definición 1 son válidas para todos los puntos (x, y) en el dominio de f, entonces f tiene un **máximo absoluto** (o **mínimo absoluto**) en (a, b).

Nótese que la conclusión del teorema 2 puede enunciarse en la notación de vectores gradiente como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

2 Teorema Si f tiene un máximo o mínimo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f no existen, $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

COMPROBACIÓN Sea $g(x) = f(x, b)$. Si f tiene un máximo (o mínimo) local en (a, b), g tiene un máximo (o mínimo) local en a, así que $g'(a) = 0$ por el teorema de Fermat (véase al teorema 4.1.4). Pero $g'(a) = f_x(a, b)$ (véase la ecuación 14.3.1), de manera que $f_x(a, b) = 0$. De igual forma, al aplicar el teorema de Fermat a la función $G(y) = f(a, y)$ se obtiene $f_y(a, b) = 0$. ■

Si se pone $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación de un plano tangente (ecuación 14.4.2), se obtiene $z = z_0$. Así, la interpretación geométrica del teorema 2 es que, si la gráfica de f tiene un plano tangente en un máximo o mínimo local, el plano tangente debe ser horizontal.

Un punto (a, b) se llama **punto crítico** (o *punto estacionario*) de f si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de estas derivadas parciales no existe. El teorema 2 indica que si f tiene un máximo o mínimo local en (a, b), entonces (a, b) es un punto crítico de f. Sin embargo, como en el cálculo de una variable, no todos los puntos críticos dan origen a máximos o mínimos. En un punto crítico, una función podría tener un máximo local o un mínimo local, o ninguno de ellos.

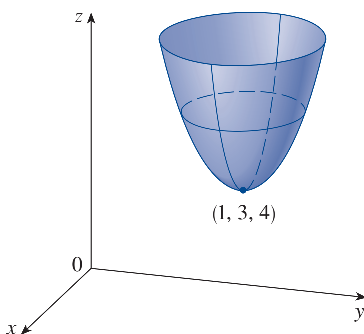


FIGURA 2
$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Entonces,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Estas derivadas parciales son iguales a 0 cuando $x = 1$ y $y = 3$, así que el único punto crítico es $(1, 3)$. Al completar el cuadrado se descubre que

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Como $(x - 1)^2 \geqslant 0$ y $(y - 3)^2 \geqslant 0$, se tiene $f(x, y) \geqslant 4$ para todos los valores de x y y. Por tanto, $f(1, 3) = 4$ es un mínimo local, y de hecho es el mínimo absoluto de f. Esto puede confirmarse geométricamente en la gráfica de f, que es el paraboloide elíptico con vértice $(1, 3, 4)$ que aparece en la figura 2. ■

EJEMPLO 2 Determine los valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

SOLUCIÓN Como $fx = -2x$ y $f_y = 2y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Nótese que para puntos en el eje x se tiene $y = 0$, y $= 0$, así que $f(x, y) = -x^2, < 0$ (si $x \neq 0$). Sin embargo, para puntos en el eje y se tiene $x = 0$, así que $f(x, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). En consecuencia, todos los discos con centro $(0, 0)$ contienen puntos donde f adopta valores positivos, así como puntos en los que f adopta valores negativos. Por tanto, $f(0, 0) = 0$ no puede ser un valor extremo para f, por lo que f no tiene ningún valor extremo. ■

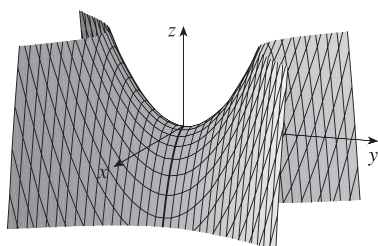


FIGURA 3
$z = y^2 - x^2$

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que una función no necesariamente debe tener un valor máximo o mínimo en un punto crítico. La figura 3 muestra cómo es posible esto. La gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que tiene un plano tangente horizontal ($z = 0$) en el origen. Puede verse que $f(0, 0) = 0$ es un máximo en la dirección del eje x pero un mínimo en la dirección del eje y. Cerca del origen, la gráfica tiene la forma de una silla de montar, y por eso (0, 0) se llama un *punto silla* de f.

Un paso de montaña también tiene forma de silla de montar. Como lo ilustra la fotografía de la formación geológica, para quienes escalan en una dirección, el punto silla es el punto más bajo en su ruta, mientras que para quienes viajan en una dirección diferente el punto silla es el punto más alto.



Fotografía de Stan Wagon, Macalester College

Debe ser capaz de determinar si una función tiene o no un valor extremo en un punto crítico. La prueba siguiente, que se comprobará al final de esta sección, es análoga a la prueba de la segunda derivada para funciones de una variable.

3 **Prueba de la segunda derivada** Suponga que las segundas derivadas parciales de f son continuas en un disco con centro (a, b) y que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ [es decir, que (a, b) es un punto crítico de f]. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

(b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces, $f(a, b)$ es un máximo local.

(c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo ni un mínimo local.

NOTA 1 En el caso (c), el punto (a, b) se llama **punto silla** de f y la gráfica de f cruza su plano tangente en (a, b).

NOTA 2 Si $D = 0$, la prueba no aporta ninguna información: f podría tener un máximo local o mínimo local en (a, b), o (a, b) podría ser un punto silla de f.

NOTA 3 Para recordar la fórmula para D, es útil escribirla como una determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

EJEMPLO 3 Encuentre los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUCIÓN Primero se localizan los puntos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Al igualar con 0 estas derivadas parciales, se obtienen las ecuaciones

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^3 - x = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, se sustituye $y = x_3$ de la primera ecuación en la segunda. Esto da

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

de manera que hay tres raíces reales: $x = 0, 1, -1$. Los tres puntos críticos son (0, 0), (1, 1) y (–1, –1).

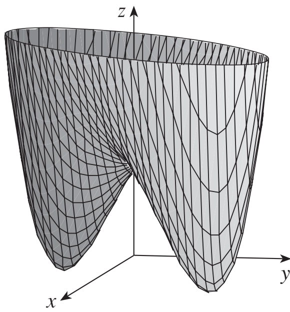


FIGURA 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Un mapa de contorno de la función f del ejemplo 3 se muestra en la figura 5. Las curvas de nivel cerca de (1, 1) y (–1, –1) son de forma ovalada e indican que conforme se alejan de (1, 1) o (–1, –1) en cualquier dirección, los valores de f aumentan. Las curvas de nivel cerca de (0, 0) parecen hipérbolas. Revelan que conforme se alejan del origen (donde el valor de f es 1), los valores de f disminuyen en algunas direcciones pero aumentan en otras. Así, el mapa de contorno sugiere la presencia de los mínimos y el punto silla que se determinaron en el ejemplo 3.

Luego se calculan las segundas derivadas parciales y $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como $D(0, 0) = -16 < 0$, del caso (c) de la prueba de la segunda derivada se sigue que el origen es un punto silla; es decir, que f no tiene ningún máximo ni mínimo local en (0, 0). Como $D(1, 1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, con base en el caso (a) de la prueba se advierte que $f(1, 1) = -1$ es un mínimo local. De igual forma, se tiene $D(-1, -1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, así que $f(-1, -1) = -1$ también es un mínimo local.

La gráfica de f aparece en la figura 4. ■

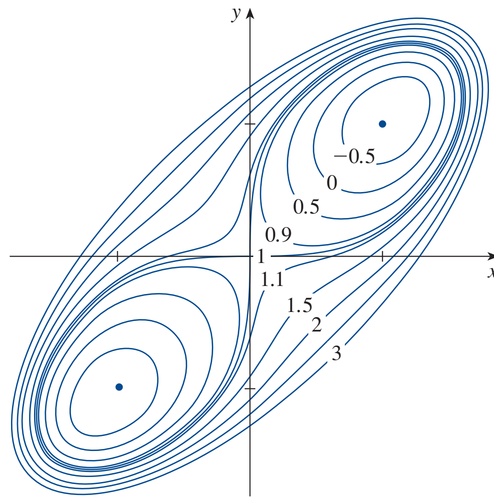


FIGURA 5

EJEMPLO 4 Determine y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Determine igualmente el punto más alto en la gráfica de f.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales de primer orden son

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \qquad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

TEC En el Módulo 14.7 pueden usarse mapas de contorno para estimar las ubicaciones de puntos críticos.

Así, para determinar los puntos críticos se deben resolver las ecuaciones

4 $$2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$$

5 $$5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

En la ecuación 4 se ve que

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

En el primer caso ($x = 0$), la ecuación 5 se convierte en $-4y(1 + y^2) = 0$, así que $y = 0$ y se tiene el punto crítico (0, 0).

En el segundo caso ($10y - 5 - 2x^2 = 0$), se obtiene

$$\boxed{6} \qquad x^2 = 5y - 2.5$$

y al poner esto en la ecuación 5 se tiene $25y - 12.5 - 4y - 4y^3 = 0$. Así, se debe resolver la ecuación cúbica

$$\boxed{7} \qquad 4y^3 - 21y + 12.5 = 0$$

Usando una calculadora graficadora o computadora para graficar la función

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12.5$$

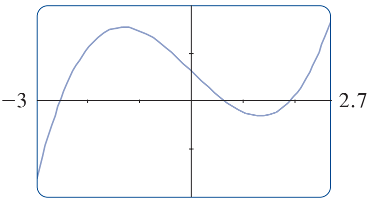


FIGURA 6

como en la figura 6, se advierte que la ecuación 7 tiene tres raíces reales. Al acercarse, se puede determinar las raíces con cuatro decimales:

$$y \approx -2.5452 \qquad y \approx 0.6468 \qquad y \approx 1.8984$$

(O bien, es posible haber usado el método de Newton o resuelto numéricamente con una calculadora o computadora para localizar esas raíces.) Con base en la ecuación 6, los correspondientes valores x están dados por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2.5}$$

Si $y \approx -2.5452$, x no tiene valores reales correspondientes. Si $y \approx 0.6468$, entonces $x \approx \pm 0.8567$. Si $y \approx 1.8984$, entonces $x \approx \pm 2.6442$. Así, hay un total de cinco puntos críticos, los cuales se analizan en la tabla siguiente. Todas las cantidades se redondearon a dos decimales.

Punto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusión
$(0, 0)$	0.00	−10.00	80.00	máximo local
$(\pm 2.64, 1.90)$	8.50	−55.93	2488.72	máximo local
$(\pm 0.86, 0.65)$	−1.48	−5.87	−187.64	punto silla

Las figuras 7 y 8 muestran dos vistas de la gráfica de f y se ve que la superficie se abre hacia abajo. [Esto también puede verse en la expresión para $f(x, y)$: los términos dominantes son $-x^4 - 2y^4$ cuando $|x|$ y $|y|$ son grandes.] Al comparar los valores de f en sus puntos máximos locales, se advierte que el valor máximo absoluto de f es $f(\pm 2.64, 1.90) \approx 8.50$. En otras palabras, los puntos más altos en la gráfica de f son $f(\pm 2.64, 1.90, 8.50)$.

TEC Visual 14.7 muestra varias familias de superficies. La superficie en las figuras 7 y 8 es miembro de una de esas familias.

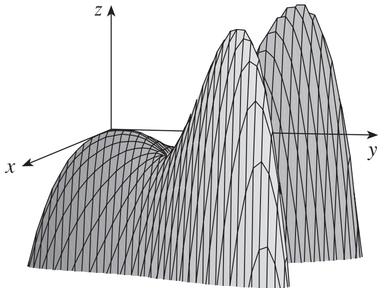


FIGURA 7

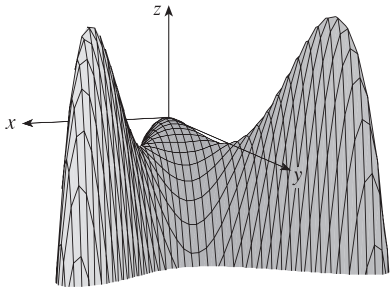


FIGURA 8 ■

Los cinco puntos críticos de la función f del ejemplo 4 aparecen en negro en el mapa de contorno de f de la figura 9.

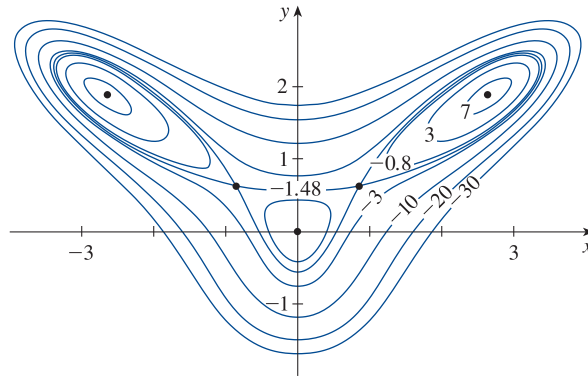


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Determine la distancia más corta del punto (1, 0, –2) al plano $x + 2y + z = 4$.

SOLUCIÓN La distancia desde cualquier punto (x, y, z) al punto (1, 0, –2) es

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2}$$

pero si (x, y, z) reside en el plano $x + 2y + z = 4$, entonces $z = 4 - x - 2y$ y entonces se tiene $d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$. Se puede minimizar d minimizando la expresión, más simple,

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Al resolver las ecuaciones

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

se descubre que el único punto crítico es $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Como $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$, y $f_{yy} = 10$, se tiene $D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ y $f_{xx} > 0$, así que por la prueba de la segunda derivada f tiene un mínimo local en $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Intuitivamente, es posible ver que este mínimo local es en realidad un mínimo absoluto porque debe haber un punto en el plano dado que sea el más cercano a (1, 0, –2). Si $x = \frac{11}{6}$ y $y = \frac{5}{3}$, entonces

El ejemplo 5 también podría resolverse usando vectores. Compare con los métodos de la sección 12.5.

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6} \quad \blacksquare$$

La distancia más corta de (1, 0 –2) al plano $x + 2y + z = 4$ es $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

EJEMPLO 6 Una caja rectangular sin tapa debe hacerse con 12 m^2 de cartón. Determine el volumen máximo de esa caja.

SOLUCIÓN Sean la longitud, ancho y alto de la caja (en metros) x, y y z, como se muestra en la figura 10. Entonces el volumen de la caja es

$$V = xyz$$

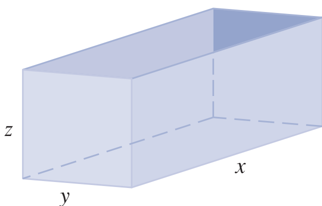


FIGURA 10

Se puede expresar V como una función de solo dos variables x y y usando el hecho de que el área de los cuatro lados y el fondo de la caja es

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Al despejar z en esta ecuación se obtiene $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, de modo que la expresión para V se convierte en

$$V = xy\,\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calcule las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Si V es un máximo, entonces $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, pero $x = 0$ o $y = 0$ da $V = 0$, así que se deben resolver las ecuaciones

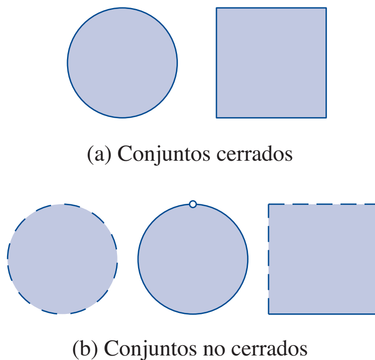
$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Estas implican que $x^2 = y^2$, y por tanto $x = y$. (Obsérvese que x y y deben ser positivas en este problema.) Si se pone $x = y$ en cualquier ecuación se obtiene $12 - 3x^2 = 0$, lo que da $x = 2$, $y = 2$ y $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

Se podría usar la prueba de la segunda derivada para demostrar que esto da un máximo local de V, o simplemente es posible argumentar, con base en la naturaleza física de este problema, que debe haber un volumen máximo absoluto, el cual debe ocurrir en un punto crítico de V, de manera que debe ocurrir cuando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Entonces $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, así que el volumen máximo de la caja es 4 m^3. ■

Valores máximos y mínimos absolutos

Para una función f de una variable, el teorema de los valores extremos establece que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, f tiene un valor mínimo absoluto y un valor máximo absoluto. De acuerdo con el método del intervalo cerrado de la sección 4.1, esos valores se determinan evaluando f no solo en los números críticos, sino también en los puntos extremos a y b.



(a) Conjuntos cerrados

(b) Conjuntos no cerrados

FIGURA 11

Existe una situación similar para funciones de dos variables. Así como un intervalo cerrado contiene sus puntos extremos, un **conjunto cerrado** en $\mathbb{R}^2$ es aquel que contiene todos sus puntos frontera. [Un punto frontera de D es un punto (a, b) tal que todos los discos con centro (a, b) contienen puntos en D y también ningún punto en D.] Por ejemplo, el disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

que consta de todos los puntos en o dentro del círculo $x^2 + y^2 = 1$, es un conjunto cerrado porque contiene todos sus puntos frontera (los cuales son los puntos en el círculo $x^2 + y^2 = 1$). Pero si se omitiera incluso un solo punto en la curva frontera, el conjunto no sería cerrado. (Véase la figura 11.)

Un **conjunto acotado** en $\mathbb{R}^2$ es aquel que está contenido en un disco. En otras palabras, es de extensión finita. Así, en términos de conjuntos cerrados y acotados, se puede enunciar la contraparte del teorema de los valores extremos en dos dimensiones.

8 Teorema de valores extremos para funciones de dos variables Si f es continua en un conjunto cerrado y acotado D en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.

Para hallar los valores extremos garantizados por el teorema 8, hay que señalar que, por el teorema 2, si f tiene un valor extremo en (x_1, y_1), entonces (x_1, y_1) es un punto crítico de f o un punto acotado de D. Así, se tiene la extensión del método del intervalo cerrado siguiente.

9 Para determinar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua f en un conjunto cerrado y acotado D:

1. Determine los valores de f en los puntos críticos de f en D.
2. Determine los valores extremos de f en la frontera de D.
3. El mayor de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el menor de esos valores es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 7 Halle los valores máximo y mínimo absoluto de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ en el rectángulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUCIÓN Como f es una polinomial, es continua en el rectángulo cerrado y acotado D, así que el teorema 8 dice que hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. De acuerdo con el paso 1 en (9), primero se determinan los puntos críticos. Estos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

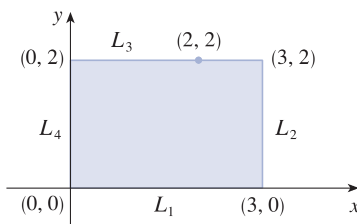


FIGURA 12

así que el único punto crítico es $(1, 1)$, y el valor de f ahí es $f(1, 1) = 1$.

En el paso 2 se examinan los valores de f en la frontera de D, los que constan de los cuatro segmentos de recta L_1, L_2, L_3, L_4 que aparecen en la figura 12. En L_1 se tiene $y = 0$ y

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Esta es una función creciente de x, de manera que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(3, 0) = 9$. En L_2 hay $x = 3$ y

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Esta es una función decreciente de y, así que su valor máximo es $f(3, 0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3, 2) = 1$. En L_3 se tiene $y = 2$ y

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Por los métodos del capítulo 4, o simplemente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, se advierte que el valor mínimo de esta función es $f(2, 2) = 0$ y el valor máximo es $f(0, 2) = 4$. Por último, en L_4 hay $x = 0$ y

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

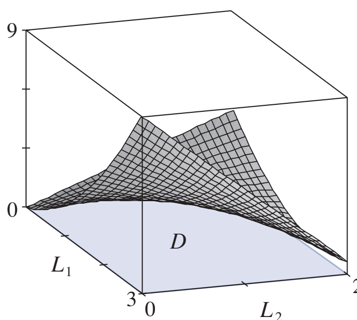


FIGURA 13
$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

con valor máximo $f(0, 2) = 4$ y valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Así, en la frontera, el valor mínimo de f es 0 y el máximo es 9.

En el paso 3 se comparan estos valores con el valor $f(1, 1) = 1$ en el punto crítico y se concluye que el valor máximo absoluto de f en D es $f(3, 0) = 9$ y el valor mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. La figura 13 muestra la gráfica de f. ■

Finaliza esta sección con una comprobación de la primera parte de la prueba de la segunda derivada. La parte (b) tiene una prueba similar.

COMPROBACIÓN DEL TEOREMA 3, PARTE (a) Calcule la derivada direccional de segundo orden de f en la dirección de $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$. La derivada de primer orden está dada por el teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}} f = f_x h + f_y k$$

Al aplicar este teorema por segunda vez se tiene

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) = \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k$$

$$= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k$$

$$= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \qquad \text{(por el teorema de Clairaut)}$$

Si se completa el cuadrado en esta expresión se obtiene

10
$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Se dio que $f_{xx}(a, b) > 0$ y $D(a, b) > 0$. Pero f_{xx} y $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ son funciones continuas, así que existe un disco B con centro (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ y $D(x, y) > 0$ siempre que (x, y) está en B. Por tanto, al examinar la ecuación 10 se advierte que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ cada vez que (x, y) está en B. Esto significa que si C es la curva obtenida de la intersección de la gráfica de f con el plano vertical que pasa por $P(a, b, f(a, b))$ en la dirección de $\mathbf{u}$, C es cóncava hacia arriba en un intervalo de longitud 2δ. Esto es cierto en la dirección de todos los vectores $\mathbf{u}$, de modo que si se restringe (x, y) a B, la gráfica de f reside arriba de su plano tangente horizontal en P. Así, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cada vez que (x, y) está en B. Esto demuestra que $f(a, b)$ es un mínimo local. ■

14.7 EJERCICIOS

1. Suponga que (1, 1) es un punto crítico de una función f con segundas derivadas continuas. En cada caso, ¿qué puede decirse acerca de f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponga que (0, 2) es un punto crítico de una función g con segundas derivadas continuas. En cada caso, ¿qué puede decir usted acerca de g?

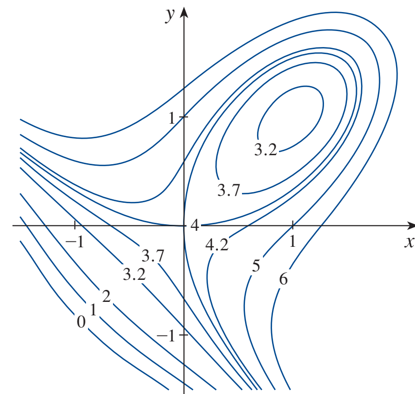
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

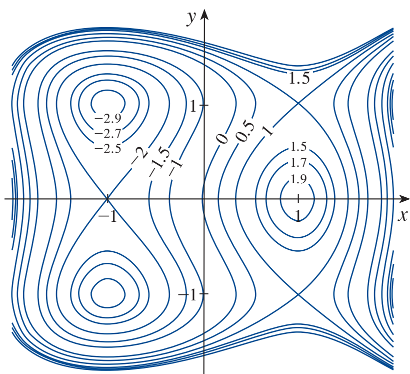
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3-4 Use las curvas de nivel en la figura para predecir la ubicación de los puntos críticos de f y si f tiene un punto silla o un máximo o mínimo local en cada punto crítico. Explique su razonamiento. Use después la prueba de la segunda derivada para confirmar sus predicciones.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5-20 Determine los valores máximos y mínimos locales y el punto o puntos silla de la función. Si tiene software de graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y punto de vista que revelen todos los aspectos importantes de la función.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

8. $f(x, y) = y(e^x - 1)$

9. $f(x, y) = x^2 + y^4 + 2xy$

10. $f(x, y) = 2 - x^4 + 2x^2 - y^2$

11. $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$

12. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$

13. $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$

14. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

15. $f(x, y) = e^x \cos y$

16. $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

17. $f(x, y) = xy + e^{-xy}$

18. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$

19. $f(x, y) = y^2 - 2y\cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

20. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

21. Demuestre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tiene un número infinito de puntos críticos y que $D = 0$ en cada uno. Luego demuestre que f tiene un mínimo local (y absoluto) en cada punto crítico.

22. Demuestre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ tiene valores máximos en $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ y valores mínimos en $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Demuestre también que f tiene una infinidad de puntos críticos adicionales y que $D = 0$ en cada uno de ellos. ¿Cuáles dan origen a valores máximos? ¿A valores mínimos? ¿A puntos silla?

23-26 Use una gráfica o curvas de nivel o ambos para estimar los valores máximos y mínimos locales y el punto o puntos silla de la función. Luego use cálculo para determinar precisamente esos valores.

23. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

24. $f(x, y) = (x - y)e^{-x^2-y^2}$

25. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

26. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

27-30 Use un dispositivo de graficación como en el ejemplo 4 (o el método de Newton, o resuelva numéricamente usando una calculadora o computadora) para determinar los puntos críticos de f con tres decimales. Clasifique después los puntos críticos y halle los puntos más altos o más bajos en la gráfica, si los hay.

27. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y + 2y$

28. $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

29. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

30. $f(x, y) = 20e^{-x^2-y^2} \operatorname{sen} 3x \cos 3y, \quad |x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1$

31-38 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de f en el conjunto D.

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, D es la región triangular cerrada con vértices (2, 0), (0, 2) y (0, –2)

32. $f(x, y) = x + y - xy$, D es la región triangular cerrada con vértices (0, 0), (0, 2) y (4, 0).

33. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

34. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6y$,
$D = \{(x, y) \mid -3 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

35. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 1$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

36. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

37. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

38. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D es el cuadrilátero cuyos vértices son (–2, 3), (2, 3), (2, 2) y (–2, –2).

39. Para funciones de una variable es imposible que una función continua tenga dos máximos locales y ningún mínimo local. Pero para funciones de dos variables tales funciones existen. Demuestre que la función

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

solo tiene dos puntos críticos, pero tiene máximos locales en ambos. Use después una computadora para producir una gráfica con un dominio y punto de vista cuidadosamente elegidos para ver cómo es posible esto.

40. Si una función de una variable es continua en un intervalo y solo tiene un número crítico, un máximo local debe ser un máximo absoluto. Pero esto no es cierto para funciones de dos variables. Demuestre que la función

$$f(x, y) = 3xe^{y} - x^{3} - e^{3y}$$

tiene exactamente un punto crítico, y que f tiene un máximo local ahí que no es un máximo absoluto. Use después una computadora para producir una gráfica con dominio y punto de vista cuidadosamente elegidos para ver cómo es posible esto.

41. Encuentre la distancia más corta del punto (2, 0, –3) al plano $x + y + z = 1$.

42. Encuentre el punto en el plano $x - 2y + 3z = 6$ más cercano al punto (0, 1, 1).

43. Encuentre los puntos en el cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto (4, 2, 0).

44. Encuentre los puntos en la superficie $y^2 = 9 + xz$ más cercanos al origen.

45. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea un máximo.

46. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 12 y la suma de cuyos cuadrados sea lo más reducida posible.

47. Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en una esfera de radio r.

48. Encuentre las dimensiones de la caja con volumen 1000 cm^3 que tiene área mínima.

49. Encuentre el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos de coordenadas y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

50. Encuentre las dimensiones de la caja rectangular con el volumen más grande si el área total está dada como 64 cm^2.

51. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo tal que la suma de las longitudes de sus doce aristas sea una c constante.

52. La base de una pecera con volumen dado V está hecha de pizarra y los lados están hechos de vidrio. Si la pizarra cuesta cinco veces más (por unidad de área) que el vidrio, encuentre las dimensiones de la pecera que minimicen el costo de los materiales.

53. Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de 32 000 cm^3. Encuentre las dimensiones que minimicen la cantidad de cartón usado.

54. Un edificio rectangular se diseña para minimizar la pérdida de calor. Las paredes este y oeste pierden calor a razón de 10 unidades/m^2 al día, las paredes norte y sur a razón de 8 unidades/m^2 al día, el piso a razón de 1 unidad/m^2 al día y el techo a razón de 5 unidades/m^2 al día. Cada pared debe ser de al menos 30 m de largo, la altura debe ser de al menos 4 m y el volumen debe ser de exactamente 4000 m^3.

(a) Determine y trace el dominio de la pérdida de calor como una función de las longitudes de los lados.

(b) Determine las dimensiones que minimicen la pérdida de calor. (Verifique tanto los puntos críticos como los puntos en la frontera del dominio.)

(c) ¿Podría diseñar un edificio con aún menos pérdida de calor si las restricciones de las longitudes de las paredes fueran eliminadas?

55. Si la longitud de la diagonal de una caja rectangular debe ser L, ¿cuál es el mayor volumen posible?

56. Un modelo para el rendimiento Y de un cultivo agrícola como una función del nivel de nitrógeno N y el nivel de fósforo P en la tierra (medidos en las unidades apropiadas) es

$$Y(N, P) = kNPe^{-N-P}$$

donde k es una constante positiva. ¿Qué niveles de nitrógeno y fósforo resultan en el mejor rendimiento?

57. El índice de Shannon (también llamado índice de Shannon-Wiener o índice de Shannon-Weaver) es una medida de la diversidad en un ecosistema. Para el caso de tres especies, se define como

$$H = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3$$

donde p_i es la proporción de especies i en el ecosistema.

(a) Exprese H como una función de dos variables usando el hecho de que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

(b) ¿Cuál es el dominio de H?

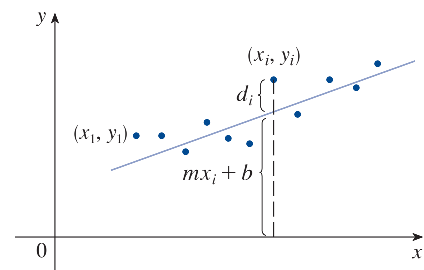
(c) Determine el valor máximo de H. ¿Para cuáles valores de p_1, p_2, p_3 ocurre?

58. Tres alelos (versiones alternativas de un gen) A, B y O determinan los cuatro tipos de sangre A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción de individuos en una población que portan dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

donde p, q y r son las proporciones de A, B y O en la población. Use el hecho de que $p + q + r = 1$ para demostrar que P es a lo sumo de $\frac{2}{3}$.

59. Suponga que un científico tiene razones para creer que dos cantidades x y y están relacionadas linealmente, es decir que $y = mx + b$, al menos aproximadamente, para algunos valores de m y b. El científico realiza un experimento y recolecta datos bajo la forma de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, tras de lo cual traza estos puntos. Los puntos no se sitúan exactamente en una recta, así que el científico quiere determinar constantes m y b de tal forma que la recta $y = mx + b$ "se ajuste" lo más posible a los puntos (véase la figura).



Sea $d_i = y_i - (mx_i + b)$ la desviación vertical del punto respecto a la recta. El **método de mínimos cuadrados** determina m y b de tal modo que se minimice $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, la suma de los cuadrados de estas desviaciones. Demuestre que, de acuerdo con este método, la recta de mejor ajuste se obtiene cuando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

y

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Así, la recta se determina resolviendo en estas dos ecuaciones las dos incógnitas m y b. (Véase la sección 1.2 para un análisis adicional y aplicaciones del método de mínimos cuadrados.)

60. Determine una ecuación del plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y corta el menor volumen en el primer octante.

PROYECTO DE APLICACIÓN DISEÑO DE UN CONTENEDOR DE DESECHOS

Para este proyecto localice un contenedor rectangular a fin de estudiar su forma y construcción. Luego intente determinar las dimensiones de un contenedor de diseño similar que minimicen el costo de construcción.

1. Localice primero un contenedor de desechos en su área. Estúdielo atentamente y describa todos los detalles de su construcción, y determine su volumen. Incluya un boceto del contenedor.

2. Manteniendo la forma general y método de construcción, determine las dimensiones de un contenedor del mismo volumen si usted tuviera que minimizar el costo de construcción. Use los supuestos siguientes en su análisis:

- Los lados, frente y tras deben hacerse con hojas de acero de 12 gauges (de 2.657 mm de grosor), que cuestan \$8.00 dólares por metro cuadrado (incluidos todos los cortes y dobleces requeridos).
- La base debe hacerse con una hoja de acero de 10 gauges (de 3.416 mm de grosor), que cuesta \$10.00 dólares por metro cuadrado.
- Las tapas cuestan aproximadamente \$50.00 cada una, independientemente de sus dimensiones.
- La soldadura cuesta alrededor de \$0.60 por metro, combinando material y mano de obra.

Dé una justificación de cualesquiera supuestos o simplificaciones adicionales respecto a los detalles de construcción.

3. Describa cómo podrían sus supuestos o simplificaciones afectar al resultado final.

4. Si se le contratara como consultor en esta investigación, ¿cuáles serían sus conclusiones? ¿Recomendaría alterar el diseño del contenedor? De ser así, describa los ahorros que resultarían.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO APROXIMACIONES CUADRÁTICAS Y PUNTOS CRÍTICOS

La aproximación polinomial de Taylor de funciones de una variable que se estudió en el capítulo 11 puede prolongarse a funciones de dos o más variables. Aquí investigará las aproximaciones cuadráticas de funciones de dos variables y las usará para dar una idea de la prueba de la segunda derivada para la clasificación de puntos críticos.

En la sección 14.4 se analizó la linealización de una función f de dos variables en un punto (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Recuerde que la gráfica de L es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ y que la correspondiente aproximación lineal es $f(x, y) \approx L(x, y)$. La linealización L también se llama **polinomio de Taylor de primer grado** de f en (a, b).

1. Si f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden en (a, b), el **polinomio de Taylor de segundo grado** de f en (a, b) es

$$Q(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$+ \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

y la aproximación $f(x, y) \approx Q(x, y)$ se llama **aproximación cuadrática** de f en (a, b). Verifique que Q tiene las mismas derivadas parciales de primero y segundo orden que f en (a, b).

2. (a) Determine los polinomios de Taylor de primer y segundo grado L y Q de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ en (0, 0).
 (b) Grafique f, L y Q. Comente qué tanto L y Q se aproximan a f.

3. (a) Determine los polinomios de Taylor de primer y segundo grado L y Q para $f(x, y) = xe^y$ en (1, 0).
(b) Compare los valores de L, Q y f en (0.9, 0.1).
 (c) Grafique f, L y Q. Comente qué tanto L y Q se aproximan a f.

4. En este problema se analizará el comportamiento del polinomio $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (sin usar la prueba de la segunda derivada) al identificar la gráfica como un paraboloide.
(a) Completando el cuadrado, demuestre que si a $\neq 0$, entonces

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]$$

(b) Sea $D = 4ac - b^2$. Demuestre que si $D > 0$ y $a > 0$, f tiene un mínimo local en (0, 0).
(c) Demuestre que si $D > 0$ y a < 0, f tiene un máximo local en (0, 0).
(d) Demuestre que si $D < 0$, entonces (0. 0) es un punto silla.

5. (a) Suponga que f es cualquier función con derivadas parciales continuas de segundo orden tales que $f(0, 0) = 0$ y que (0, 0) es un punto crítico de f. Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de segundo grado Q de f en (0, 0).
(b) ¿Qué puede concluir sobre Q con base en el problema 4?
(c) En vista de la aproximación cuadrática $f(x, y) \approx Q(x, y)$, ¿qué sugiere el inciso (b) acerca de f?

14.8 Multiplicadores de Lagrange

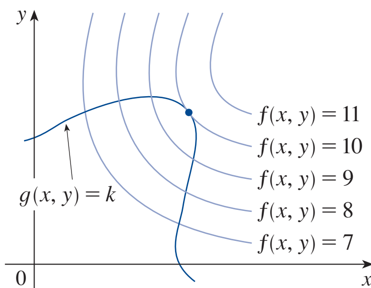


FIGURA 1

TEC Visual 14.8 anima la figura 1 tanto para curvas de nivel como para superficies de nivel.

En el ejemplo 14.7.6 se maximizó una función de volumen $V = xyz$ sujeta a la restricción $2xz + 2yz + xy = 12$, que expresaba la condición secundaria de que el área era de 12 m^2. En esta sección se presentará el método de Lagrange para maximizar o minimizar una función general $f(x, y, z)$ sujeta a una restricción (o condición secundaria) de la forma $g(x, y, z) = k$.

Es más fácil explicar la base geométrica del método de Lagrange para funciones de dos variables. Así, comience tratando de determinar los valores extremos de (x, y) sujetos a una restricción de la forma $g(x, y) = k$. En otras palabras, buscaremos los valores extremos de $f(x, y)$ cuando el punto (x, y) está restringido a residir en la curva de nivel $g(x, y) = k$. La figura 1 muestra esta curva junto con varias curvas de nivel de f. Estas tienen las ecuaciones $f(x, y) = c$, donde $c = 7, 8, 9, 10, 11$. Maximizar $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = k$

consiste en hallar el mayor valor de c tal que la curva de nivel $f(x, y) = c$ interseque $g(x, y) = k$. En la figura 1 parece que esto sucede cuando esas curvas se tocan apenas entre sí, es decir, cuando tienen una recta tangente común. (De lo contrario, el valor de c podría aumentar más.) Esto significa que las rectas normales en el punto (x_0, y_0) donde se tocan son idénticas. Así, los vectores gradiente son paralelos; es decir, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algún escalar λ.

Este tipo de argumento también se aplica al problema de encontrar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. Así, el punto (x, y, z) está restringido a residir en la superficie de nivel S con ecuación $g(x, y, z) = k$. En vez de las curvas de nivel de la figura 1, considere las superficies de nivel $f(x, y, z) = c$ y argumente que si el valor máximo de f es $f(x_0, y_0, z_0) = c$, la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ es tangente a la superficie de nivel $g(x, y, z) = k$, y por tanto los correspondientes vectores gradiente son paralelos.

Este argumento intuitivo puede precisarse de la forma siguiente. Suponga que una función f tiene un valor extremo en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en la superficie S y sea C una curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ que reside en S y pasa por P. Si t_0 es el valor paramétrico correspondiente al punto P, entonces $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. La función compuesta $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ representa los valores que f adopta en la curva C. Como f tiene un valor extremo en (x_0, y_0, z_0), de esto resulta que h tiene un valor extremo en t_0, de modo que $h'(t_0) = 0$. Pero si f es derivable, se puede usar la regla de la cadena para escribir

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Esto demuestra que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ a todas esas curvas C. Pero por la sección 14.6 se sabe que el vector gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ para todas esas curvas. (Véase la ecuación 14.6.18.) Esto significa que los vectores gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ deben ser paralelos. Por tanto, si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, existe un número λ tal que

1
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Los multiplicadores de Lagrange deben su nombre al matemático ítalo-francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Véase un boceto biográfico de Lagrange en la página 289.

El número λ en la ecuación 1 se llama **multiplicador de Lagrange**. El procedimiento basado en la ecuación 1 es como sigue.

Método de multiplicadores de Lagrange Para determinar los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z)$ sujetos a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores extremos existen y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = k$$

(b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso (a). El mayor de esos valores es el valor máximo de f; el menor es el valor mínimo de f.

Al derivar el método de Lagrange se supuso que $\nabla g \neq \mathbf{0}$. En cada uno de nuestros ejemplos puede verificar que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos donde $g(x, y, z) = k$. Véase el ejercicio 25 para analizar qué puede fallar si $\nabla g = \mathbf{0}$.

Si se escribe la ecuación vectorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ en términos de componentes, las ecuaciones del paso (a) se convierten en

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones con las cuatro incógnitas x, y, z y λ, pero no es necesario hallar valores explícitos para λ.

Para funciones de dos variables, el método de multiplicadores de Lagrange es similar al método que se acaba de describir. Para determinar los valores extremos de $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = k$ se buscan valores de x, y y λ tales que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = k$$

Esto equivale a resolver tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

La primera ilustración del método de Lagrange es para reconsiderar el problema dado en el ejemplo 14.7.6.

EJEMPLO 1 Una caja rectangular sin tapa debe hacerse con 12 m^2 de cartón. Determine el volumen máximo de esa caja.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 14.7.6, sean x, y y z la longitud, ancho y alto, respectivamente, de la caja en metros. Entonces, se desea maximizar

$$V = xyz$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Usando el método de multiplicadores de Lagrange, busque valores de x, y, z y λ tales que $\nabla V = \lambda \nabla g$ y $g(x, y, z) = 12$. Esto da las ecuaciones

$$V_x = \lambda g_x$$

$$V_y = \lambda g_y$$

$$V_z = \lambda g_z$$

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

que se convierten en

2 $$yz = \lambda(2z + y)$$

3 $$xz = \lambda(2z + x)$$

4 $$xy = \lambda(2x + 2y)$$

5 $$2xz + 2yz + xy = 12$$

No existen reglas generales para resolver sistemas de ecuaciones. A veces se requiere un poco de ingenio. En el ejemplo siguiente es notorio que si se multiplica (2) por x, (3) por y y (4) por z, los miembros izquierdos de estas ecuaciones serán idénticos. Haciendo esto, se tiene

Otro método para resolver el sistema de ecuaciones (2-5) es despejar λ en cada una de las ecuaciones 2, 3 y 4 e igualar después las expresiones resultantes.

6 $$xyz = \lambda(2xz + xy)$$

7 $$xyz = \lambda(2yz + xy)$$

8 $$xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observe que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaría que $yz = xz = xy$ de (2), (3)

y (4), y esto contradiría (5). Por tanto, de (6) y (7) se tiene

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

lo que da $xz = yz$. Pero $z \neq 0$ (ya que $z = 0$ daría $V = 0$), así que $x = y$. De (7) y (8) es

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

lo que da $2xz = xy$, y por tanto (ya que $x \neq 0$) $y = 2z$. Si se pone ahora $x = y = 2z$ en (5), se obtiene

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Como x, y y z son positivas, se tiene $z = 1$, así que $x = 2$ y $y = 2$. Esto coincide con la respuesta en la sección 14.7. ■

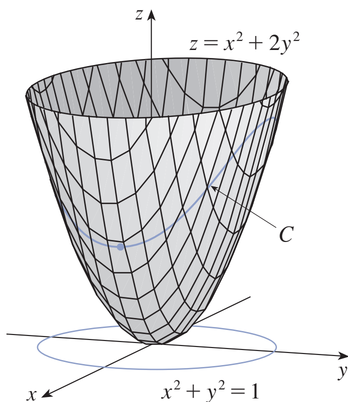


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Determine los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Se piden los valores extremos de f sujetos a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Usando los multiplicadores de Lagrange, se resuelven las ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ y $g(x, y) = 1$, las que pueden escribirse como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

o bien

9 $$2x = 2x\lambda$$

10 $$4y = 2y\lambda$$

11 $$x^2 + y^2 = 1$$

De (9) se tiene que $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces (11) da $y = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ de (10), así que (11) da $x = \pm 1$. Por tanto, f tiene posibles valores extremos en los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Al evaluar f en esos cuatro puntos se descubre que

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

La geometría detrás del uso de los multiplicadores de Lagrange en el ejemplo 2 se muestra en la figura 3. Los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ corresponden a las curvas de nivel que tocan el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

En consecuencia, el valor máximo de f en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(\pm 1, 0) = 1$. En términos geométricos, estos corresponden a los puntos más alto y más bajo en la curva C de la figura 2, donde C consta de aquellos puntos en el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ que se encuentran directamente arriba del círculo de restricción $x^2 + y^2 = 1$. ■

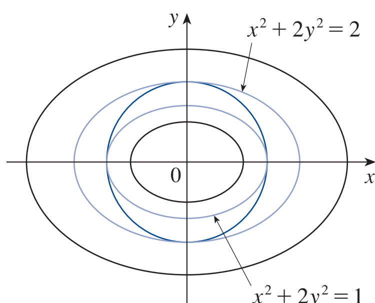


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Determine los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el procedimiento en (14.7.9), se compararon los valores de f en los puntos críticos con los valores en los puntos de la frontera. Como $f_x = 2x$ y $f_y = 4y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Compare el valor de f en ese punto con los valores extremos en la frontera del ejemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Por tanto, el valor máximo de f en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$. ■

EJEMPLO 4 Halle los puntos en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están más cerca y más lejos del punto (3, 1, –1).

SOLUCIÓN La distancia desde un punto (x, y, z) al punto (3, 1, –1) es

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

pero el álgebra es más simple si en lugar de ello maximiza y minimiza el cuadrado de la distancia:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

La restricción es que el punto (x, y, z) reside en la esfera, es decir

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acuerdo con el método de multiplicadores de Lagrange, se resuelve $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$. Esto da

12 $$2(x-3) = 2x\lambda$$

13 $$2(y-1) = 2y\lambda$$

14 $$2(z+1) = 2z\lambda$$

15 $$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

La manera más sencilla de resolver estas ecuaciones es despejar x, y y z en términos de λ en (12), (13) y (14) y sustituir después esos valores en (15). De (12) se tiene

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{o} \qquad x(1-\lambda) = 3 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3}{1-\lambda}$$

[Adviértase que $1 - \lambda \neq 0$, porque $\lambda = 1$ es imposible debido a (12).] De igual manera, (13) y (14) dan

$$y = \frac{1}{1-\lambda} \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

En consecuencia, de (15) se tiene

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

lo que da $(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$, así que

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Estos valores de λ dan entonces los correspondientes puntos (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Es fácil ver que f tiene un valor menor en el primero de estos puntos, así que el punto más cercano es $\left(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}\right)$ y el más alejado es $\left(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}\right)$. ■

La figura 4 muestra la esfera y el punto P más cercano del ejemplo 4. ¿Cómo podría determinar las coordenadas de P sin usar cálculo?

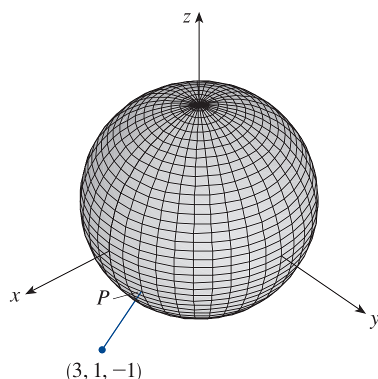


FIGURA 4

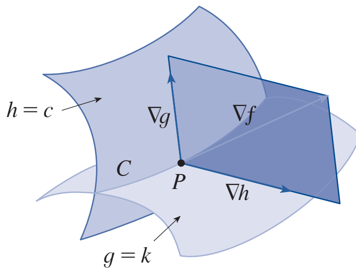


FIGURA 5

Dos restricciones

Suponga ahora que se quieren encontrar los valores máximo y mínimo de una función $f(x, y, z)$ sujeta a dos restricciones (condiciones secundarias) de la forma $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$. Geométricamente, esto significa que se buscan los valores extremos de f cuando (x, y, z) está restringido a residir en la curva de intersección C de las superficies de nivel $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$. (Véase la figura 5.) Suponga que f tiene tal valor extremo en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Se sabe desde el principio de esta sección que ∇f es ortogonal a C en P. Pero también se sabe que ∇g es ortogonal a $g(x, y, z) = k$ y que ∇h es ortogonal a $h(x, y, z) = c$, así que ∇g y ∇h son por igual ortogonales a C. Esto significa que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está en el plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Suponga que estos vectores gradiente no son cero ni paralelos.) Así, existen números λ y μ (llamados multiplicadores de Lagrange) tales que

16
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

En este caso, el método de Lagrange consiste en buscar valores extremos resolviendo cinco ecuaciones con las cinco incógnitas x, y, z, λ y μ. Estas ecuaciones se obtienen escribiendo la ecuación 16 en términos de sus componentes y usando las ecuaciones de restricción:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ interseca el plano $x - y + z = 1$ en una elipse (figura 6). El ejemplo 5 pide el valor máximo de f cuando (x, y, z) está restringido a residir en la elipse.

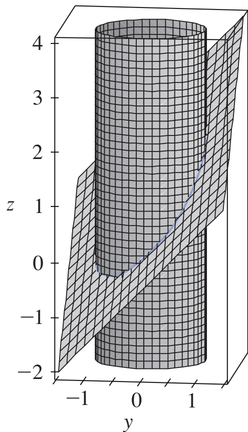


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Encuentre el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ en la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Maximice la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeta a las restricciones $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ y $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. La condición de Lagrange es $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, así que se resuelven las ecuaciones

17 $$1 = \lambda + 2x\mu$$

18 $$2 = -\lambda + 2y\mu$$

19 $$3 = \lambda$$

20 $$x - y + z = 1$$

21 $$x^2 + y^2 = 1$$

Al poner $\lambda = 3$ [de 19)] en (17) se obtiene $2x\mu = -2$, así que $x = -1/\mu$. De igual manera, (18) da $y = 5/(2\mu)$. La sustitución en (21) da entonces

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

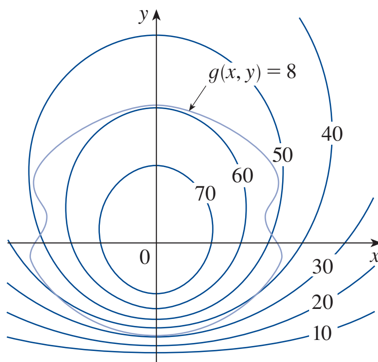
y por tanto $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Entonces, $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$ y, de (20), $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Los valores correspondientes de f son

$$\mp \frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Por tanto, el valor máximo de f en la curva dada es $3 + \sqrt{29}$. ■

14.8 EJERCICIOS

1. Se presenta un mapa de contorno de f y una curva con ecuación $g(x, y) = 8$. Estime los valores máximo y mínimo de f sujetos a la restricción de que $g(x, y) = 8$. Explique su razonamiento.



2. (a) Use una calculadora graficadora o computadora para graficar el círculo $x^2 + y^2 = 1$. En la misma pantalla, grafique varias curvas de la forma $x^2 + y = c$ hasta encontrar dos que toquen apenas el círculo. ¿Cuál es la significación de los valores de c para estas dos curvas?
(b) Use los multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Compare sus respuestas con las del inciso (a).

3-14 Cada uno de estos problemas de valores extremos tiene una solución tanto con un valor máximo como con un valor mínimo. Use los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores extremos de la función sujeta a la restricción dada.

3. $f(x, y) = x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 = 1$

4. $f(x, y) = e^{xy}$; $x^3 + y^3 = 16$

5. $f(x, y) = xy$; $4x^2 + y^2 = 8$

6. $f(x, y) = xe^y$; $x^2 + y^2 = 2$

7. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 12$

8. $f(x, y, z) = e^{xyz}$; $2x^2 + y^2 + z^2 = 24$

9. $f(x, y, z) = xy^2z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

10. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 1) + \ln(y^2 + 1) + \ln(z^2 + 1)$; $x^2 + y^2 + z^2 = 12$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15. El método de multiplicadores de Lagrange supone que los valores extremos existen, pero este no siempre es el caso. Demuestre que el problema de encontrar el valor mínimo de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeta a la restricción $xy = 1$ puede resolverse usando multiplicadores de Lagrange pero que f no tiene un valor máximo con esa restricción.

16. Halle el valor mínimo de $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sujeta a la restricción $x + 2y + 3z = 10$. Demuestre que f no tiene ningún valor máximo con esa restricción.

17-20 Determine los valores extremos de f sujeta a ambas restricciones.

17. $f(x, y, z) = x + y + z$; $x^2 + z^2 = 2$, $x + y = 1$

18. $f(x, y, z) = z$; $x^2 + y^2 = z^2$, $x + y + z = 24$

19. $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$, $y^2 + z^2 = 4$

20. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $x + y - z = 0$, $x^2 + 2z^2 = 1$

21-23 Halle los valores extremos de f en la región descrita por la desigualdad.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$

22. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$, $x^2 + y^2 \leqslant 16$

23. $f(x, y) = e^{-xy}$, $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

24. Considere el problema de maximizar la función $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a la restricción $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.
(a) Intente usar multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.
(b) ¿Podría $f(25, 0)$ dar un valor mayor que el del inciso (a)?
(c) Resuelva el problema graficando la ecuación de restricción y varias curvas de nivel de f.
(d) Explique por qué el método de multiplicadores de Lagrange fracasa en la resolución de este problema.
(e) ¿Cuál es el significado de $f(9, 4)$?

25. Considere el problema de minimizar la función $f(x, y) = x$ en la curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (un piriforme).

(a) Intente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

(b) Demuestre que el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$, pero que la condición de Lagrange $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ no es satisfecha por ningún valor de λ.

(c) Explique por qué los multiplicadores de Lagrange fracasan en el hallazgo del valor mínimo en este caso.

SAC **26.** (a) Si su sistema algebraico computacional traza curvas implícitamente definidas, úselo para estimar los valores mínimo y máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeta a la restricción $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ mediante métodos gráficos.

(b) Resuelva el problema del inciso (a) con ayuda de los multiplicadores de Lagrange. Use su SAC para resolver la ecuación numéricamente. Compare sus respuestas con las del inciso (a).

27. La producción total P de cierto producto depende de la cantidad L de mano de obra utilizada y de la cantidad K de inversión de capital. En las secciones 14.1 y 14.3 se analizó cómo el modelo de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ sigue ciertos supuestos económicos, donde b y α son constantes positivas y $\alpha < 1$. Si el costo de una unidad de trabajo es m y el costo de una unidad de capital es n, y si la compañía solo puede gastar p dólares como su presupuesto total, maximizar la producción P está sujeta a la restricción $mL + nK = p$. Demuestre que la producción máxima ocurre cuando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{y} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

28. En referencia al ejercicio 27, suponga ahora que la producción se fija en $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, donde Q es una constante. ¿Qué valores de L y K minimizan la función de costo $C(L, K) = mL + nK$?

29. Use multiplicadores de Lagrange para comprobar que el rectángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es un cuadrado.

30. Use multiplicadores de Lagrange para comprobar que el triángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es equilátero.

Sugerencia: use la fórmula de Herón para el área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

donde $s = p/2$ y x, y, z son las longitudes de los lados.

31-43 Use multiplicadores de Lagrange para dar una solución alterna al ejercicio indicado de la sección 14.7.

31. Ejercicio 41 **32.** Ejercicio 42

33. Ejercicio 43 **34.** Ejercicio 44

35. Ejercicio 45 **36.** Ejercicio 46

37. Ejercicio 47 **38.** Ejercicio 48

39. Ejercicio 49 **40.** Ejercicio 50

41. Ejercicio 51 **42.** Ejercicio 52

43. Ejercicio 55

---

44. Determine los volúmenes máximo y mínimo de una caja rectangular cuya área es de 1500 cm^2 y cuya longitud de aristas total es de 200 cm.

45. El plano $x + y + 2z = 2$ interseca el paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Halle los puntos en esta elipse que están más cerca y más lejos del origen.

46. El plano $4x - 3y + 8z = 5$ interseca el cono $z^2 = x^2 + y^2$ en una elipse.

(a) Grafique el cono y el plano y observe la intersección elíptica.

(b) Use multiplicadores de Lagrange para determinar el punto más alto y el más bajo en la elipse.

SAC **47-48** Halle los valores máximo y mínimo de f sujeta a las restricciones dadas. Use un sistema algebraico computacional para resolver el sistema de ecuaciones que surge del uso de multiplicadores de Lagrange. (Si su SAC solo halla una solución, quizá deba usar comandos adicionales.)

47. $f(x, y, z) = ye^{x-z}$; $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$, $xy + yz = 1$

48. $f(x, y, z) = x + y + z$; $x^2 - y^2 = z$, $x^2 + z^2 = 4$

---

49. (a) Encuentre el valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos y $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, donde c es una constante.

(b) Deduzca del inciso (a) que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos, entonces

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Esta desigualdad indica que la media geométrica de n números no es mayor que la media aritmética de los números. ¿En qué circunstancias estas dos medias son iguales?

50. (a) Maximice $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeta a las restricciones $\sum_{i-1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\sum_{i-1}^{n} y_i^2 = 1$.

(b) Use

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \qquad \text{y} \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para demostrar que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\,\sqrt{\sum b_j^2}$$

para cualesquiera números $a_1, \ldots, an, b_1, \ldots, bn$. Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Cauchy-Schwarz.

PROYECTO DE APLICACIÓN LA CIENCIA DE LOS COHETES







Cortesía de Orbital Sciences Corporation

Muchos cohetes, como el *Pegasus XL*, que actualmente se usa para lanzar satélites, y el *Saturn V*, que fue el primero en llevar hombres a la luna, están diseñados para usar tres etapas en su ascenso al espacio. Una gran primera etapa propulsa inicialmente al cohete hasta que su combustible se agota, momento en el cual esta etapa es desechada para reducir la masa del cohete. Las etapas segunda y tercera son menores y funcionan de manera similar a fin de poner en órbita alrededor de la Tierra la carga útil del cohete. (Con este diseño, se requieren al menos dos etapas para llegar a las velocidades necesarias, y usar tres etapas ha resultado ser un buen arreglo entre costo y desempeño.) La meta aquí es determinar las masas particulares de las tres etapas, las que deben diseñarse para minimizar la masa total del cohete, permitiendo al mismo tiempo que alcance la velocidad deseada.

Para un cohete de una etapa que consume combustible a una razón constante, el cambio en velocidad que resulta de la aceleración del vehículo del cohete se ha propuesto como

$$\Delta V = -c \ln\left(1 - \frac{(1 - S)M_r}{P + M_r}\right)$$

donde M_r es la masa del motor del cohete incluido el combustible inicial, P es la masa de la carga útil, S es un *factor estructural* determinado por el diseño del cohete (específicamente, la proporción entre la masa del vehículo del cohete sin combustible y la masa total del cohete sin carga útil) y c es la velocidad (constante) de escape en relación con el cohete.

Considérese ahora un cohete con tres etapas y una carga útil de masa A. Suponga que las fuerzas externas son mínimas y que c y S permanecen constantes en cada etapa. Si M_i es la masa de la etapa de orden i, se puede considerar inicialmente que el motor del cohete tiene masa M_1 y que su carga útil tiene masa $M_2 + M_3 + A$; la segunda y tercera etapas pueden manejarse de forma similar.

1. Demuestre que la velocidad alcanzada después de desechadas las tres etapas está dada por

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A}\right)\right]$$

2. Se desea minimizar la masa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ del motor del cohete sujeta a la restricción de que se alcance la velocidad deseada vf del problema 1. El método de multiplicadores de Lagrange es apropiado aquí, pero difícil de implementar usando las expresiones corrientes. Para simplificar, se definen variables N_i de tal forma que la ecuación de restricción pueda expresarse como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Dado que M es ahora difícil de expresar en términos de N_i's, es deseable usar una función más simple que sea minimizada en el mismo lugar que M. Demuestre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_2}{1 - SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1 - S)N_3}{1 - SN_3}$$

y concluya que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1 - S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1 - SN_1)(1 - SN_2)(1 - SN_3)}$$

3. Verifique que $\ln((M + A)/A)$ se minimiza en el mismo lugar que M; use multiplicadores de Lagrange y los resultados del problema 2 para hallar expresiones para los valores de N_i donde ocurre el mínimo sujeto a la restricción $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. [*Sugerencia*: use propiedades de logaritmos para simplificar las expresiones.]

4. Determine una expresión para el valor mínimo de M como función de v_f.

5. Si se quiere poner un cohete de tres etapas en órbita a 160 km de la superficie terrestre, se requiere una velocidad final de aproximadamente 28 000 km/h. Suponga que cada etapa integra un factor estructural $S = 0.2$ y una velocidad de escape de $c = 9\,600$ km/h.
(a) Determine la masa mínima total M de los motores del cohete como una función de A.
(b) Determine la masa de cada etapa particular como una función de A. (¡No son de igual tamaño!)

6. El mismo cohete requeriría una velocidad final de aproximadamente 39 700 km/h para escapar de la gravedad de la Tierra. Determine la masa de cada etapa que minimizaría la masa total de los motores del cohete y que le permitiría propulsar una sonda de 200 kg en el espacio profundo.

PROYECTO DE APLICACIÓN OPTIMIZACIÓN DE HIDROTURBINAS

En una estación generadora de energía hidroeléctrica (alguna vez operada por la Katahdin Paper Company) en Millinocket, Maine, el agua se traslada por tuberías desde una presa hasta la estación de energía. La razón a la que fluye el agua por la tubería varía, dependiendo de condiciones externas.

La estación de energía tiene tres diferentes turbinas hidroeléctricas, cada una de ellas con una función de potencia conocida (y única) que define la cantidad de energía eléctrica generada como una función del flujo de agua que llega a la turbina. El agua de arribo puede repartirse en diferentes volúmenes a cada turbina, así que la meta es determinar cómo distribuir el agua entre las turbinas para establecer la máxima producción de energía total a cualquier razón de flujo.

Con base en evidencia experimental y la *ecuación de Bernoulli*, se determinaron los modelos cuadráticos siguientes para la producción de energía de cada turbina, junto con los flujos permisibles de operación:

$$KW_1 = (-18.89 + 0.1277Q_1 - 4.08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_2 = (-24.51 + 0.1358Q_2 - 4.69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_3 = (-27.02 + 0.1380Q_3 - 3.84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$250 \leqslant Q_1 \leqslant 1110, \quad 250 \leqslant Q_2 \leqslant 1110, \quad 250 \leqslant Q_3 \leqslant 1225$$

donde

Q_i = flujo por la turbina i en pies cúbicos por segundo

KW_i = energía generada por turbina i en kilowatts

Q_T = flujo total por la estación en pies cúbicos por segundo

1. Si se usan las tres turbinas, se quiere determinar el flujo Q_i a cada turbina que dará la producción máxima de energía total. Las limitaciones son que los flujos deben sumar el flujo de entrada total y observar las restricciones dadas del dominio. En consecuencia, use multiplicadores de Lagrange para determinar los valores para los flujos particulares (como funciones de Q_T) que maximicen la producción de energía total $KW_1 + KW_2 + KW_3$ sujeta a las restricciones $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$ y a las restricciones del dominio en cada Q_i.

2. ¿Para cuáles valores de Q_T es válido su resultado?

3. Para un flujo de entrada de 2500 pies^3/s, determine la distribución a las turbinas y verifique (probando algunas distribuciones cercanas) que su resultado sea efectivamente un máximo.

4. Hasta ahora se ha supuesto que las tres turbinas están en operación; ¿en algunas situaciones es posible que se produzca más energía usando solo una turbina? Haga una gráfica de las

tres funciones de energía y úsela para decidir si un flujo de entrada de 1000 pies^3/s debería distribuirse a las tres turbinas o encauzarse solo a una. (Si determina que debería usarse solo una turbina, ¿cuál de ellas sería?) ¿Y si el flujo fuera de únicamente 600 pies^3/s?

5. Quizá para algunos niveles de flujo sería provechoso usar dos turbinas. Si el flujo de entrada es de 1500 pies^3/s, ¿cuáles dos turbinas recomendaría usar? Use multiplicadores de Lagrange para determinar cómo debería distribuirse el flujo entre las dos turbinas para maximizar la energía producida. Para este flujo, ¿emplear dos turbinas es más eficiente que usar las tres?

6. Si el flujo de entrada es de 3400 pies^3/s, ¿qué recomendaría a la gerencia de la estación?

14 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) ¿Qué es una función de dos variables?
(b) Describa tres métodos para visualizar una función de dos variables.

2. ¿Qué es una función de tres variables? ¿Cómo puede visualizar una función de ese tipo?

3. ¿Qué significa la expresión siguiente?

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = L$$

¿Cómo podría demostrar que ese límite no existe?

4. (a) ¿Qué significa decir que f es continua en (a, b)?
(b) Si f es continua en $\mathbb{R}^2$, ¿qué puede decir usted sobre su gráfica?

5. (a) Escriba expresiones para las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ como límites.
(b) ¿Cómo se interpreta $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ geométricamente? ¿Cómo se les interpreta como razones de cambio?
(c) Si $f(x, y)$ está dada por una fórmula, ¿cómo se calcula f_x y f_y?

6. ¿Qué dice el teorema de Clairaut?

7. ¿Cómo se determina un plano tangente a cada uno de los tipos de superficies siguientes?
(a) Una gráfica de una función de dos variables, $z = f(x, y)$
(b) Una superficie de nivel de una función de tres variables, $F(x, y, z) = k$

8. Defina la linealización de f en (a, b). ¿Cuál es la correspondiente aproximación lineal? ¿Cuál es la interpretación geométrica de la aproximación lineal?

9. (a) ¿Qué significa decir que f es derivable en (a, b)?
(b) ¿Cómo suele verificarse que f es derivable?

10. Si $z = f(x, y)$, ¿qué son las diferenciales dx, dy y dz?

11. Enuncie la regla de la cadena para el caso en el que $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una variable. ¿Y si x y y fueran funciones de dos variables?

12. Si z es definida implícitamente como una función de x y y por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, ¿cómo se determina $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$?

13. (a) Escriba una expresión como un límite para la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$. ¿Cómo se le interpreta como una razón? ¿Cómo se le interpreta geométricamente?
(b) Si f es derivable, escriba una expresión para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ en términos de f_x y f_y.

14. (a) Defina el vector gradiente ∇f para una función f de dos o tres variables.
(b) Exprese $D_{\mathbf{u}} f$ en términos de ∇f.
(c) Explique la significación geométrica del gradiente.

15. ¿Qué significan los enunciados siguientes?
(a) f tiene un máximo local en (a, b).
(b) f tiene un máximo absoluto en (a, b).
(c) f tiene un mínimo local en (a, b).
(d) f tiene un mínimo absoluto en (a, b).
(e) f tiene un punto silla en (a, b).

16. (a) Si f tiene un máximo local en (a, b), ¿qué puede decir usted sobre sus derivadas parciales en (a, b)?
(b) ¿Qué es un punto crítico de f?

17. Enuncie la prueba de la segunda derivada.

18. (a) ¿Qué es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué es un conjunto acotado?
(b) Enuncie el teorema de valores extremos para funciones de dos variables.
(c) ¿Cómo se determinan los valores que garantiza el teorema de valores extremos?

19. Explique cómo funciona el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. ¿Y si hubiera una segunda restricción $h(x, y, z) = c$?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $f_y(a, b) = \lim_{y \to b} \dfrac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$
2. Existe una función f con derivadas parciales continuas de segundo orden tales que $f_x(x, y) = x + y^2$ y $f_y(x, y) = x - y^2$.
3. $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}$
4. $D_{\mathbf{k}} f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$
5. Si $f(x, y) \to L$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de todas las rectas que pasan por (a, b), entonces $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$.
6. Si $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ existen, f es derivable en (a, b).
7. Si f tiene un mínimo local en (a, b) y f es derivable en (a, b), entonces $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.
8. Si f es una función, entonces
$$\lim_{(x, y)\to(2, 5)} f(x, y) = f(2, 5)$$
9. Si $f(x, y) = \ln y$, entonces $\nabla f(x, y) = 1/y$.
10. Si $(2, 1)$ es un punto crítico de f y
$$f_{xx}(2, 1)\, f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$$
f tiene un punto silla en $(2, 1)$.
11. Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$, entonces $-\sqrt{2} \leqslant D_{\mathbf{u}} f(x, y) \leqslant \sqrt{2}$.
12. Si $f(x, y)$ tiene dos máximos locales, f debe tener un mínimo local.

EJERCICIOS

1-2 Determine y trace el dominio de la función.

1. $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$
2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$

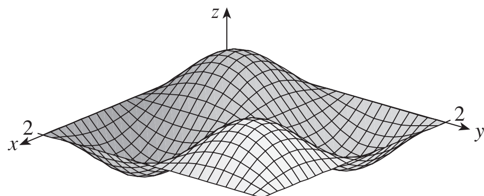
3-4 Trace la gráfica de la función.

3. $f(x, y) = 1 - y^2$
4. $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$

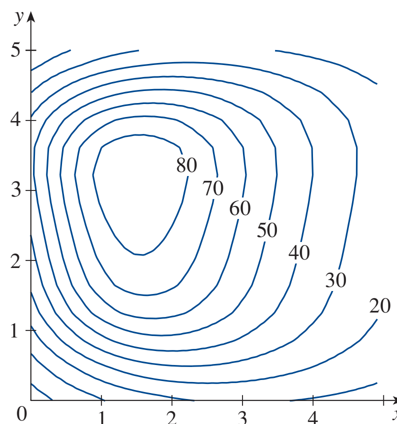
5-6 Trace varias curvas de nivel de la función.

5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$
6. $f(x, y) = e^x + y$

7. Haga un diagrama aproximado de un mapa de contorno para la función cuya gráfica se muestra.



8. Se muestra el mapa de contorno de una función f.
   (a) Estime el valor de $f(3, 2)$.
   (b) ¿$f_x(3, 2)$ es positivo o negativo? Explique su respuesta.
   (c) ¿Cuál es mayor, $f_y(2, 1)$ o $f_y(2, 2)$? Explique su respuesta.



9-10 Evalúe el límite o demuestre que no existe.

9. $\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

10. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

11. Una placa de metal está situada en el plano xy y ocupa el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 8$, donde x y y se miden en metros. La temperatura en el punto (x, y) en la placa es $T(x, y)$, donde T se mide en grados Celsius. Temperaturas en puntos igualmente espaciados se miden y registran en la tabla.
   (a) Estime los valores de las derivadas parciales $T_x(6, 4)$ y $T_y(6, 4)$. ¿Cuáles son las unidades?

(b) Estime el valor de $D_{\mathbf{u}} T(6, 4)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Interprete su resultado.

(c) Estime el valor de $T_{xy}(6, 4)$.

x \ y	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

12. Halle una aproximación lineal de la función de temperatura $T(x, y)$ del ejercicio 11 cerca del punto (6, 4). Úsela después para estimar la temperatura en el punto (5, 3.8).

13-17 Determine las primeras derivadas parciales.

13. $f(x, y) = (5y^3 + 2x^2y)^8$

14. $g(u, v) = \dfrac{u + 2v}{u^2 + v^2}$

15. $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 \ln(\alpha^2 + \beta^2)$

16. $G(x, y, z) = e^{xz} \operatorname{sen}(y/z)$

17. $S(u, v, w) = u \arctan(v\sqrt{w})$

18. La velocidad del sonido a través de aguas oceánicas es una función de la temperatura, la salinidad y la presión, que se representa por la función

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T la temperatura (en grados Celsius), S la salinidad (la concentración de sales en partes por millar, lo que significa el número de gramos de sólidos disueltos por cada 1000 g de agua) y D la profundidad bajo la superficie marina (en metros). Calcule $\partial C/\partial T$, $\partial C/\partial S$, y $\partial C/\partial D$ cuando $T = 10$ °C, $S = 35$ partes por millar y $D = 100$ m. Explique el significado físico de estas derivadas parciales.

19-22 Determine todas las segundas derivadas parciales de f.

19. $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$

20. $z = xe^{-2y}$

21. $f(x, y, z) = x^k y^l z^m$

22. $v = r\cos(s + 2t)$

23. Si $z = xy + xe^{y/x}$, demuestre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

24. Si $z = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} t)$, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

25-29 Determine ecuaciones de (a) el plano tangente y (b) la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

25. $z = 3x^2 - y^2 + 2x$, $(1, -2, 1)$

26. $z = e^x \cos y$, $(0, 0, 1)$

27. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$, $(2, -1, 1)$

28. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

29. $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$, $(2, -1, 0)$

30. Use una computadora para graficar la superficie $z = x^2 + y^4$ y su plano tangente y recta normal en (1, 1, 2) en la misma pantalla. Elija el dominio y punto de vista de tal forma que obtenga una vista completa de los tres objetos.

31. Halle los puntos en el hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + 2y + z = 5$.

32. Halle du si $u = \ln(1 + se^{2t})$.

33. Halle la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$ en el punto (2, 3, 4) y úsela para estimar el número $(1.98)^3\sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$.

34. Los dos lados de un triángulo rectángulo se miden como 5 m y 12 m con un posible error de medición de a lo sumo 0.2 cm en cada una. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de (a), el área del triángulo y (b) la longitud de la hipotenusa.

35. Si $u = x^2y^3 + z^4$, donde $x = p + 3p^2$, $y = pe^p$ y $z = p \operatorname{sen} p$, use la regla de la cadena para determinar du/dp.

36. Si $v = x^2 \operatorname{sen} y + ye^{xy}$, donde $x = s + 2t$ y $y = st$, use la regla de la cadena para determinar $\partial v/\partial s$ y $\partial v/\partial t$ cuando $s = 0$ y $t = 1$.

37. Suponga que $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_s(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$, $h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_x(3, 6) = 7$, y $f_y(3, 6) = 8$. Determine $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ cuando $s = 1$ y $t = 2$.

38. Use un diagrama de árbol para escribir la regla de la cadena para el caso en el que $w = f(t, u, v)$, $t = t(p, q, r, s)$, $u = u(p, q, r, s)$ y $v = v(p, q, r, s)$ son todas ellas funciones derivables.

39. Si $z = y + f(x^2 - y^2)$, donde f es derivable, demuestre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

40. La longitud x de un lado de un triángulo aumenta a razón de 6 cm/s, la longitud y de otro lado disminuye a razón de 4 cm/s y el ángulo contenido θ aumenta a razón de 0.05 radianes/s. ¿Qué tan rápido cambia el área del triángulo cuando $x = 80$ cm, $y = 100$ cm y $\theta = \pi/6$?

41. Si $z = f(u, v)$, donde $u = xy$, $v = y/x$ y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Si $\cos(xyz) = 1 + x^2y^2 + z^2$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

43. Determine el gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2 e^{yz^2}$.

44. (a) ¿Cuándo es un máximo la derivada direccional de f?
(b) ¿Cuándo es un mínimo?
(c) ¿Cuándo es de 0?
(d) ¿Cuándo es de la mitad de su valor máximo?

45-46 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección indicada.

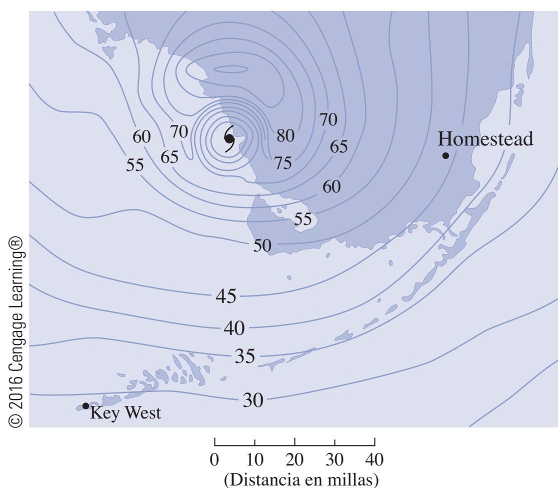
45. $f(x, y) = x^2e^{-y}$, $(-2, 0)$, en dirección al punto (2, –3)

46. $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1 + z}$, $(1, 2, 3)$, en la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

47. Determine la máxima razón de cambio de $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ en el punto (2, 1). ¿En qué dirección ocurre?

48. Determine la dirección en la que $f(x, y, z) = ze^{xy}$ aumenta más rápido en el punto (0, 1, 2). ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

49. El mapa de contorno muestra la velocidad del viento en nudos durante el huracán Andrew el 24 de agosto de 1992. Úselo para estimar el valor de la derivada direccional de la velocidad del viento en Homestead, Florida, en la dirección del ojo del huracán.



50. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente en el punto (–2, 2, 4) a la curva de intersección de la superficie y el plano $z = 4$.

51-54 Encuentre los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de las funciones. Si tiene software de graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y perspectiva que revele todos los aspectos importantes de la función.

51. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

52. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

53. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

54. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

55-56 Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de f en el conjunto D.

55. $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D es la región triangular cerrada en el plano xy con vértices (0, 0), (0, 6) y (6, 0)

56. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$; D es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$

57. Use una gráfica o curvas de nivel o ambas para estimar los valores máximos y mínimos locales y puntos silla de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$. Use después cálculo para determinar con precisión esos valores.

58. Use una calculadora graficadora o computadora (o el método de Newton, o un sistema algebraico computacional) para determinar los puntos críticos de $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$ con tres decimales. Clasifique después los puntos críticos y determine el punto más alto en la gráfica.

59-62 Use multiplicadores de Lagrange para determinar los valores máximos y mínimos de f sujeta a las restricciones dadas.

59. $f(x, y) = x^2y$; $x^2 + y^2 = 1$

60. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

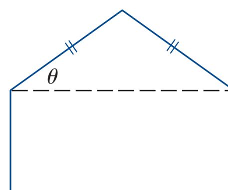
61. $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$;
$x + y + z = 1$, $x - y + 2z = 2$

63. Halle los puntos en la superficie $xy^2z^3 = 2$ que están más cerca del origen.

64. Un paquete en forma de una caja rectangular puede enviarse por el US Postal Service si la suma de su longitud y circunferencia (el perímetro de una sección transversal perpendicular a la longitud) es a lo sumo de 108 pulgadas. Halle las dimensiones del paquete con el mayor volumen que es posible enviar.

65. Un pentágono se forma colocando un triángulo isósceles sobre un rectángulo, como se muestra en la figura. Si el pentágono tiene perímetro fijo P, halle las longitudes de los lados del pentágono que maximicen su área.



Problemas adicionales

1. Un rectángulo con longitud L y ancho W es cortado en cuatro rectángulos más pequeños por dos rectas paralelas a los lados. Determine los valores máximo y mínimo de la suma de los cuadrados de las áreas de los rectángulos menores.

2. Biólogos marinos han determinado que cuando un tiburón detecta la presencia de sangre en el agua, nadará en la dirección en la que la concentración de la sangre aumenta más rápido. Con base en ciertas pruebas, la concentración de sangre (en partes por millón) en un punto $P(x, y)$ en la superficie del mar se aproxima mediante

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

donde x y y se miden en metros en un sistema de coordenadas rectangulares con la fuente de sangre en el origen.

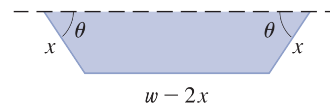
(a) Identifique las curvas de nivel de la función de concentración y trace varios miembros de esta familia junto con una trayectoria que un tiburón seguirá a la fuente.

(b) Suponga que un tiburón está en el punto (x_0, y_0) cuando detecta por primera vez la presencia de sangre en el agua. Determine una ecuación de la trayectoria del tiburón estableciendo y resolviendo una ecuación diferencial.

3. Una pieza larga de una hoja metálica galvanizada con ancho w debe doblarse en forma simétrica con tres lados rectos para hacer una canaleta de agua de lluvia. Una sección transversal se muestra en la figura.

(a) Determine las dimensiones que permitan el máximo flujo posible; es decir, halle las dimensiones que den la máxima área transversal posible.

(b) ¿Sería mejor doblar el metal para formar la canaleta con una sección transversal circular?



4. ¿Para cuáles valores del número r la función siguiente es continua en $\mathbb{R}^3$?

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

5. Suponga que f es una función derivable de una variable. Demuestre que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf(y/x)$ intersecan en un punto común.

6. (a) El método de Newton para aproximar una solución de un sistema de ecuaciones $f(x) = 0$ (véase la sección 4.8) puede adaptarse para aproximar una solución de un sistema de ecuaciones $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$. Las superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ se intersecan en una curva que interseca el plano xy en el punto (r, s), la cual es la solución del sistema. Si una aproximación inicial (x_1, y_1) está cerca de este punto, los planos tangentes a las superficies en (x_1, y_1) se intersecan en una recta que interseca el plano xy en un punto (x_2, y_2), el que debería estar más cerca de (r, s). (Compare con la figura 4.8.2.) Demuestre que

$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = y_1 - \frac{f_x g - fg_x}{f_x g_y - f_y g_x}$$

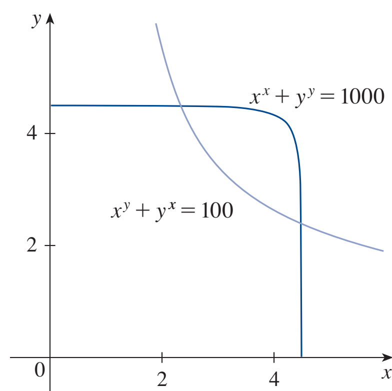
donde f, g y sus derivadas parciales se evalúan en (x_1, y_1). Si continúa este procedimiento, se obtendrán sucesivas aproximaciones (x_n, y_n).

(b) Fue Thomas Simpson (1710-1761) quien formuló el método de Newton tal como se conoce ahora y quien lo prolongó a funciones de dos variables como en el inciso (a).

(Véase la biografía de Simpson en la página 520.) El ejemplo que dio para ilustrar el método fue resolver el sistema de ecuaciones

$$x^x + y^y = 1000 \qquad x^y + y^x = 100$$

En otras palabras, determinó los puntos de intersección de las curvas en la figura. Use el método del inciso (a) para determinar las coordenadas de los puntos de intersección con seis decimales.



7. Si la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ debe encerrar al círculo $x^2 + y^2 = 2y$, ¿qué valores de a y b minimizan el área de la elipse?

8. Demuestre que el valor máximo de la función

$$f(x, y) = \frac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

es $a^2 + b^2 + c^2$.

Sugerencia: un método para atacar este problema es usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

(Véase el ejercicio 12.3.61.)

15 Integrales múltiples



© Juan Gaertner/Shutterstock.com

Los tumores, como el que se muestra, han sido modelados como "esferas con protuberancias". En el ejercicio 47 de la sección 15.8 se le pedirá calcular el volumen encerrado por una superficie de este tipo.

EN ESTE CAPÍTULO SE PROLONGARÁ la idea de una integral definida a las integrales dobles y triples de funciones de dos o tres variables. Estas ideas se usarán después para calcular volúmenes, masas y centroides de regiones más generales que las que se pudieron considerar en los capítulos 6 y 8. También se usarán integrales dobles para calcular probabilidades cuando dos variables aleatorias están implicadas.

Se verá que las coordenadas polares son útiles para calcular integrales dobles en algunos tipos de regiones. En forma similar, se presentarán dos nuevos sistemas de coordenadas en el espacio tridimensional —las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas— que simplifican enormemente el cálculo de integrales triples en ciertas regiones sólidas de ocurrencia común.

15.1 Integrales dobles en rectángulos

Así como el intento de resolver el problema del área condujo a la definición de una integral definida, ahora se buscará determinar el volumen de un sólido y llegar en el proceso a la definición de una integral doble.

Repaso de la integral definida

Recuerde primero los elementos básicos concernientes a las integrales definidas de funciones de una variable. Si $f(x)$ se define para $a \leqslant x \leqslant b$, se comienza dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$ y se eligen puntos de muestra x_i^* en estos subintervalos. Luego se forma la suma de Riemann

1 $$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

y se toma el límite de esas sumas como $n \to \infty$ para obtener la integral definida de f de a a b:

2 $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

En el caso especial en que $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann puede interpretarse como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación de la figura 1, y $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b.

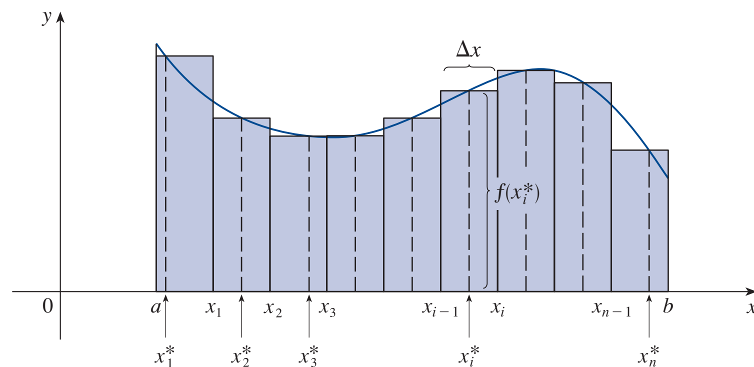


FIGURA 1

Volúmenes e integrales dobles

En forma similar, si se considera una función f de dos variables definida en un rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\, c \leqslant y \leqslant d\}$$

y se supone primero que $f(x, y) \geqslant 0$. La gráfica de f es una superficie con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que se encuentra arriba de R y bajo la gráfica de f, es decir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$

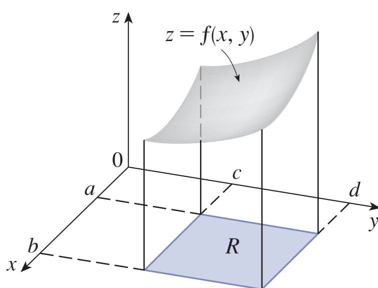


FIGURA 2

(Véase la figura 2.) La meta es determinar el volumen de S.

El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos. Se hace esto dividiendo el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/m$ y dividiendo $[c, d]$ en n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual ancho $\Delta y = (d - c)/n$. Al dibujar líneas

paralelas a los ejes de coordenadas que pasan por los puntos extremos de esos subintervalos, se forman los subrectángulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

cada uno con área $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$, como en la figura 3.

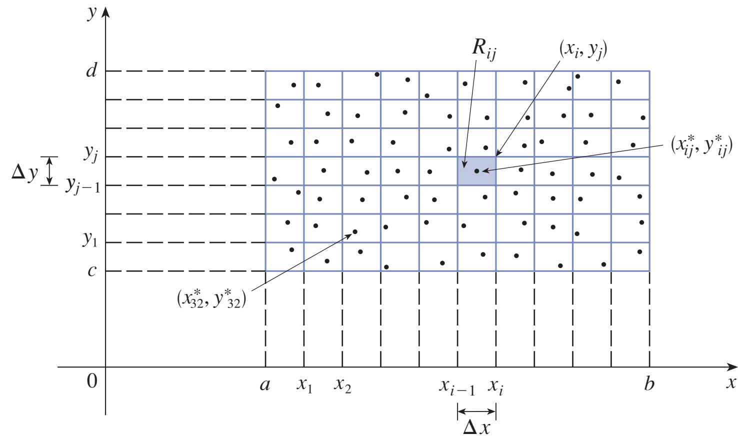


FIGURA 3
División de R en subrectángulos

Si se elige un **punto muestra** (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en cada R_{ij}, se puede aproximar la parte de S ubicada sobre cada R_{ij} mediante una fina caja rectangular (o "columna") con base R_{ij} y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como se muestra en la figura 4. (Compare con la figura 1.) El volumen de esta caja es la altura de la caja multiplicada por el área del rectángulo base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

Si se sigue este procedimiento para todos los rectángulos y se suman los volúmenes de las cajas correspondientes, se obtendrá una aproximación del volumen total de S:

3
$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

(Véase la figura 5.) Esta doble suma significa que para cada subrectángulo se evalúa f en el punto elegido y se multiplica por el área del subrectángulo, y después se suman los resultados.

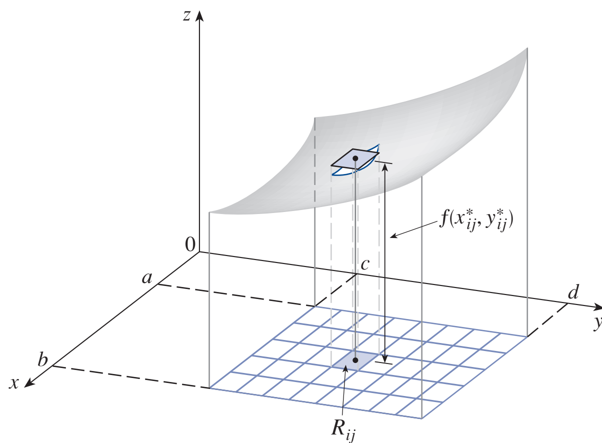


FIGURA 4

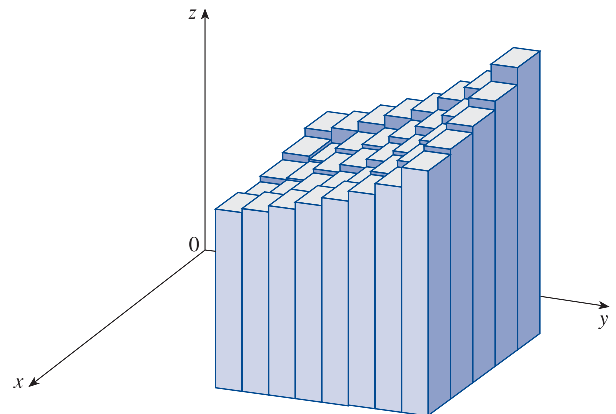


FIGURA 5

El significado del doble límite en la ecuación 4 es que se puede hacer la doble suma lo más cercana que se quiera al número V [para cualquier selección de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}] tomando m y n lo suficientemente grandes.

La intuición dice que la aproximación dada en (3) mejora cuando m y n se vuelven más grandes, de modo que sería de esperar que

4 $$V = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A$$

Se usa la expresión en la ecuación 4 para definir el **volumen** del sólido S que se encuentra bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo R. (Se puede demostrar que esta definición es congruente con la fórmula para el volumen en la sección 6.2.)

Límites del tipo que aparece en la ecuación 4 ocurren con frecuencia, no solo en la determinación de volúmenes, sino también en una amplia variedad de otras situaciones (como se verá en la sección 15.4) aun si f no es una función positiva. Así, se hace la definición siguiente.

Note la semejanza entre la definición 5 y la definición de una integral en la ecuación 2.

5 Definición La **integral doble** de f en el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A$$

si este límite existe.

Aunque se ha definido la integral doble dividiendo R en subrectángulos de igual tamaño, se podría haber usado subrectángulos R_{ij} de tamaño desigual. Pero luego se tendría que cerciorar de que todas sus dimensiones se aproximaran a cero en el proceso límite.

El significado preciso del límite en la definición 5 es que para cada número $\varepsilon > 0$ existe un entero N, tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dA - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos los enteros m y n mayores que N y para cualquier selección de puntos muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}.

Una función f se llama **integrable** si el límite de la definición 5 existe. En cursos de cálculo avanzado se demuestra que todas las funciones continuas son integrables. De hecho, la integral doble de f existe siempre y cuando f "no sea demasiado discontinua". En particular, si f está acotada en R [es decir, si hay una constante M, tal que $|f(x, y)| \leqslant M$ para todas las (x, y) en R] y f es continua ahí, excepto en un número finito de curvas suaves, f es integrable en R.

El punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) puede ser elegido como cualquier punto en el subrectángulo R_{ij}, pero si se escoge en el extremo superior derecho de R_{ij} [es decir (x_i, y_j), véase la figura 3], la expresión para la integral doble luce más simple:

6 $$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \, \Delta A$$

Al comparar las expresiones dadas en la ecuación 4 y la definición 5, se ve que un volumen puede escribirse como una integral doble:

Si $f(x, y) \geqslant 0$, el volumen V del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y bajo la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

La suma de la definición 5,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

se llama **doble suma de Riemann** y se usa como una aproximación del valor de la integral doble. [Nótese lo parecida que es a la suma de Riemann en (1) para una función de una variable.] Si f resulta ser una función *positiva*, la doble suma de Riemann representa la suma de los volúmenes de las columnas, como en la figura 5, y es una aproximación del volumen bajo la gráfica de f.

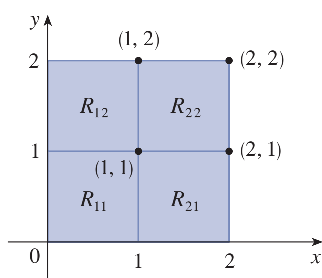


FIGURA 6

EJEMPLO 1 Estime el volumen del sólido que se encuentra arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y bajo el paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R en cuatro cuadrados iguales y elija como punto muestra el extremo superior derecho de cada cuadrado R_{ij}. Trace el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.

SOLUCIÓN Los cuadrados se muestran en la figura 6. El paraboloide es la gráfica de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ y el área de cada cuadrado es $\Delta A = 1$. Al aproximar el volumen por la suma de Riemann con $m = n = 2$, se tiene

$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\,\Delta A$$

$$= f(1, 1)\,\Delta A + f(1, 2)\,\Delta A + f(2, 1)\,\Delta A + f(2, 2)\,\Delta A$$

$$= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34$$

Este es el volumen de las cajas rectangulares de aproximación que se muestran en la figura 7. ■

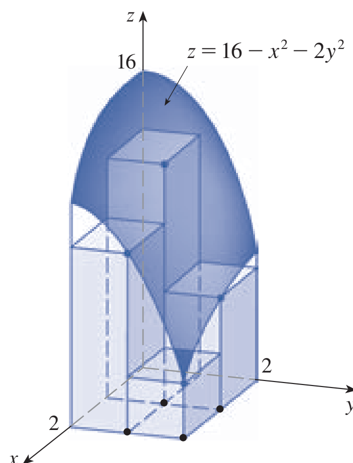
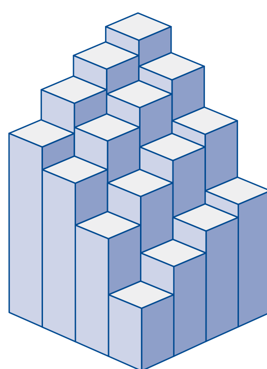
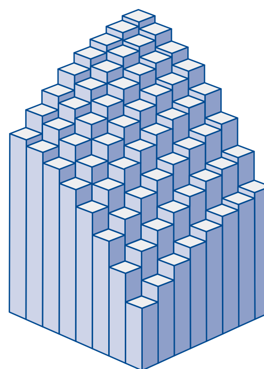


FIGURA 7

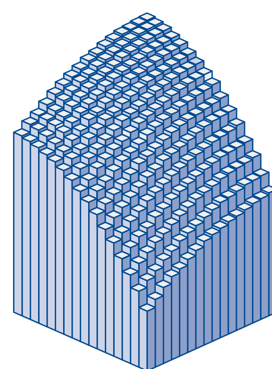
Se obtienen mejores aproximaciones del volumen del ejemplo 1 si se aumenta el número de cuadrados. La figura 8 muestra cómo las columnas comienzan a parecerse más al sólido real y las aproximaciones correspondientes se vuelven cada vez más acertadas cuando se usa 16, 64 y 256 cuadrados. En el ejemplo 7 se demostrará que el volumen exacto es 48.



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$



(b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$



(c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

FIGURA 8
Las aproximaciones por la suma de Riemann del volumen bajo $z = 16 - x^2 - 2y^2$ se vuelven más acertadas conforme m y n aumentan.

EJEMPLO 2 Si $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -2 \leqslant y \leqslant 2\}$, evalúe la integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$$

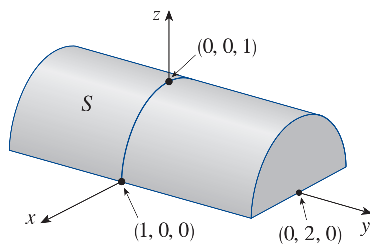


FIGURA 9

SOLUCIÓN Sería muy difícil evaluar directamente esta integral a partir de la definición 5 pero, debido a que $\sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, se puede calcular la integral interpretándola como un volumen. Si $z = \sqrt{1 - x^2}$, entonces $x^2 + z^2 = 1$ y $z \geqslant 0$, así que la doble integral dada representa el volumen del sólido S que se encuentra bajo el cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ y arriba del rectángulo R. (Véase la figura 9.) El volumen de S es el área de un semicírculo con radio 1 multiplicada por la longitud del cilindro. Así,

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA = \tfrac{1}{2}\pi(1)^2 \times 4 = 2\pi$$ ■

■ La regla del punto medio

Los métodos que se usan para aproximar integrales simples (la regla del punto medio, la regla del trapecio, la regla de Simpson) tienen contrapartes para las integrales dobles. Aquí solo se considerará la regla del punto medio para integrales dobles. Esto significa que se usará una doble suma de Riemann para aproximar la integral doble, en la que como punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij} se elige el centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ de R_{ij}. En otras palabras, $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\bar{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

Regla del punto medio para integrales dobles

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

donde $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\bar{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

EJEMPLO 3 Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de la integral $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

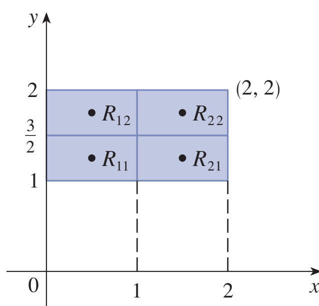


FIGURA 10

SOLUCIÓN Al usar la regla del punto medio con $m = n = 2$, se evalúa $f(x, y) = x - 3y^2$ en los centros de los cuatro subrectángulos que aparecen en la figura 10. Así, $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$, y $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. El área de cada subrectángulo es $\Delta A = \frac{1}{2}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\iint_R (x - 3y^2)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A \\
&= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A \\
&= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A \\
&= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2} \\
&= -\tfrac{95}{8} = -11.875
\end{aligned}$$

Así se tiene $$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11.875$$ ■

NOTA En el ejemplo 5 se verá que el valor exacto de la integral doble del ejemplo 3 es -12. (Recuerde que la interpretación de una integral doble como un volumen es válida solo cuando el integrando f es una función *positiva*. El integrando del ejemplo 3 no es una función positiva, así que su integral no es un volumen. En los ejemplos 5 y 6 se estudiará cómo interpretar integrales de funciones que no siempre son positivas en términos de volúmenes.) Si se sigue dividiendo cada subrectángulo de la figura 10 en cuatro más pequeños de forma similar, se obtendrán las aproximaciones por la regla del punto medio que se presentan en la tabla al margen. Note cómo estas aproximaciones se acercan al valor exacto de la integral doble, -12.

Número de subrectángulos	Aproximación por la regla del punto medio
1	-11.5000
4	-11.8750
16	-11.9687
64	-11.9922
256	-11.9980
1024	-11.9995

Integrales iteradas

Recuerde que suele ser difícil evaluar directamente integrales simples a partir de la definición de una integral, pero el teorema fundamental del cálculo proporciona un método mucho más fácil. La evaluación de integrales dobles con base en los principios elementales es aún más difícil, pero aquí se verá cómo expresar una integral doble como una integral iterada, la que después puede evaluarse calculando dos integrales simples.

Suponga que f es una función de dos variables integrable en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x, y)\, dy$ para indicar que x se mantiene fija y que $f(x, y)$ se integra con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Este procedimiento se llama *integración parcial con respecto* a y. (Adviértase su semejanza con la derivación parcial.) Ahora $\int_c^d f(x, y)\, dy$ es un número que depende del valor de x, así que define a una función de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Si integra ahora la función A con respecto a x de $x = a$ a $x = b$, se obtiene

7 $$\int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

La integral en el miembro derecho de la ecuación 7 se llama **integral iterada**. Usualmente se omiten los corchetes. Así,

8 $$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

significa que primero se integra con respecto a y de c a d, y después con respecto a x de a a b.

De igual forma, la integral iterada

9 $$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

significa que primero se integra con respecto a x (considerando a y como si fuera constante) de $x = a$ a $x = b$, y después se integra la función resultante de y con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Note que en las ecuaciones 8 y 9 se trabaja *de adentro hacia fuera*.

EJEMPLO 4 Evalúe las integrales iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy$

SOLUCIÓN

(a) Considerando a x como una constante, se obtiene

$$\int_1^2 x^2 y\, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \tfrac{3}{2}x^2$$

Así, la función A en el análisis precedente está dada por $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ en este ejemplo. Ahora integre esta función de x de 0 a 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2}x^2\, dx = \frac{x^3}{2} \Big]_0^3 = \frac{27}{2}$$

(b) Aquí integre primero con respecto a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \bigg]_1^2 = \frac{27}{2}$$

Observe que en el ejemplo 4 se obtuvo la misma respuesta ya sea que se integrara primero con respecto a y o x. En general, resulta que las dos integrales iteradas de las ecuaciones 8 y 9 siempre son iguales (véase el teorema 10); es decir, el orden de la integración no importa. (Esto es similar al teorema de Clairaut sobre la igualdad de las derivadas parciales mixtas.)

El teorema siguiente da un método práctico para evaluar una integral doble expresándola como una integral iterada (en cualquier orden).

El teorema 10 debe su nombre al matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), quien comprobó una versión muy general de este teorema en 1907. Pero la versión para funciones continuas fue conocida por el matemático francés Augustin-Louis Cauchy casi un siglo antes.

10 Teorema de Fubini Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

En términos más generales, esto es cierto si se supone que f está acotada en R, f es discontinua solo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

La comprobación del teorema de Fubini es demasiado difícil para incluirla en este libro, pero se puede dar, al menos, una indicación intuitiva de por qué es cierto para el caso en el que $f(x, y) \geqslant 0$. Recuerde que si f es positiva, se puede interpretar la integral doble $\iint_R f(x, y) \, dA$ como el volumen V del sólido S que se encuentra arriba de R y bajo la superficie $z = f(x, y)$. Pero se tiene otra fórmula que se usa para determinar el volumen en el capítulo 6, a saber

$$V = \int_a^b A(x) \, dx$$

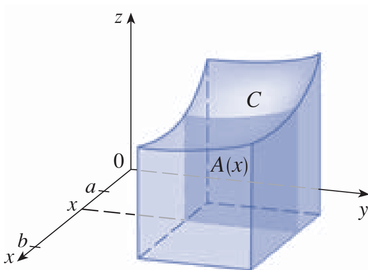


FIGURA 11

TEC Visual 15.1 ilustra el teorema de Fubini mostrando una animación de las figuras 11 y 12.

donde $A(x)$ es el área de una sección transversal de S en el plano que pasa por x perpendicular al eje x. En la figura 11 puede verse que $A(x)$ es el área bajo la curva C cuya ecuación es $z = f(x, y)$, donde x se mantiene constante y $c \leqslant y \leqslant d$. Por tanto,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

y se tiene

$$\iint_R f(x, y) \, dA = V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

Un argumento similar, usando secciones transversales perpendiculares al eje y como el que se muestra en la figura 12, demuestra que

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

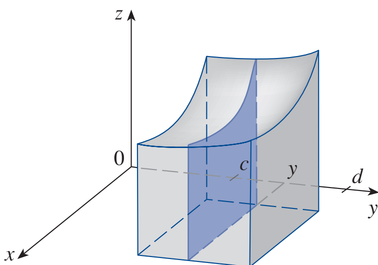


FIGURA 12

EJEMPLO 5 Evalúe la integral doble $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. (Compare con el ejemplo 3.)

SOLUCIÓN El teorema de Fubini da

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx = \int_0^2 \Big[xy - y^3\Big]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7)\, dx = \frac{x^2}{2} - 7x \Big]_0^2 = -12$$

SOLUCIÓN 2 Al aplicar de nuevo el teorema de Fubini, pero esta vez integrando primero con respecto a x, se tiene

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 (2 - 6y^2)\, dy = 2y - 2y^3\Big]_1^2 = -12$$ ■

Note la respuesta negativa en el ejemplo 5; no hay nada incorrecto en ella. La función f no es una función positiva, así que su integral no representa un volumen. De la figura 13 se deduce que f siempre es negativa en R, de manera que el valor de la integral es la *negativa* del volumen que está *sobre* la gráfica de f y *bajo* R.

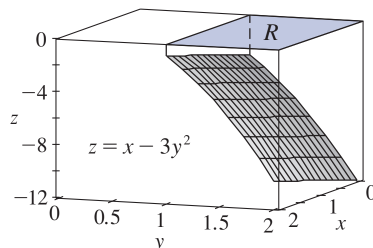


FIGURA 13

EJEMPLO 6 Evalúe $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$, donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUCIÓN Si se integra primero con respecto a x, se obtiene

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\pi \Big[-\cos(xy)\Big]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y)\, dy$$

$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y\Big]_0^\pi = 0$$ ■

Para una función f que adopta valores tanto positivos como negativos, $\iint_R f(x, y)\, dA$ es una diferencia de volúmenes: $V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen sobre R y bajo la gráfica de f y V_2 es el volumen bajo R y sobre la gráfica. El hecho de que la integral del ejemplo 6 sea 0 significa que ambos volúmenes V_1 y V_2 son iguales. (Véase la figura 14.)

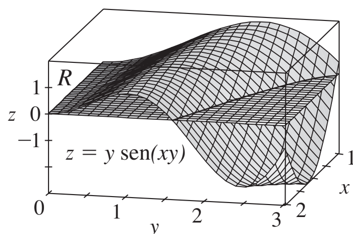


FIGURA 14

NOTA Si se invierte el orden de integración y se integra primero con respecto a y en el ejemplo 6, se obtiene

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx$$

pero este orden de integración es mucho más difícil que el método dado en el ejemplo, porque implica integración por partes dos veces. Así, al evaluar integrales dobles resulta prudente elegir el orden de integración que producirá integrales más simples.

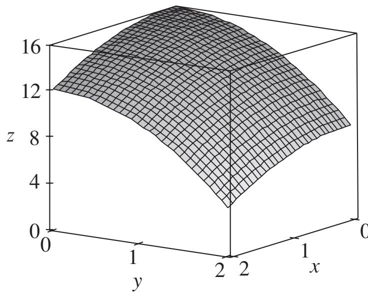


FIGURA 15

EJEMPLO 7 Determine el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$, y los tres planos de coordenadas.

SOLUCIÓN Se observa primeramente que S es el sólido que se encuentra bajo la superficie $z = 16 - x^2 - 2y^2$ y sobre el cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Véase la figura 15.) Este sólido se consideró en el ejemplo 1, pero ahora se está en condiciones de evaluar la integral doble usando el teorema de Fubini. Por tanto,

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \Big[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2y^2x\Big]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\tfrac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \Big[\tfrac{88}{3}y - \tfrac{4}{3}y^3\Big]_0^2 = 48$$ ■

En el caso especial en que $f(x, y)$ pueda factorizarse como el producto únicamente de una función de x y solamente una función de y, la integral doble de f puede escribirse en una forma particularmente simple. En específico, suponga que $f(x, y) = g(x)h(y)$ y $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces, el teorema de Fubini da

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx\right] dy$$

En la integral interior, y es una constante, así que $h(y)$ es una constante y se puede escribir

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx\right] dy = \int_c^d \left[h(y)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)\right] dy = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy$$

puesto que $\int_a^b g(x)\, dx$ es una constante. Así, en este caso la integral doble de f puede escribirse como el producto de dos integrales simples:

11 $$\iint_R g(x)\, h(y)\, dA = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy \qquad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EJEMPLO 8 Si $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, entonces, por la ecuación 11,

$$\iint_R \operatorname{sen} x \cos y\, dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} \Big[\operatorname{sen} y\Big]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$ ■

La función $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ del ejemplo 8 es positiva en R, así que la integral representa el volumen del sólido sobre R y bajo la gráfica de f que aparece en la figura 16.

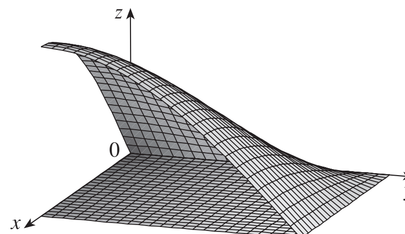


FIGURA 16

Valor promedio

Recuerde de la sección 6.5 que el valor promedio de una función f de una variable definida en un intervalo $[a, b]$ es

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

En forma similar, se define el **valor promedio** de una función f de dos variables delimitadas en un rectángulo R como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x, y)\,dA$$

donde $A(R)$ es el área de R.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, la ecuación

$$A(R) \times f_{\text{prom}} = \iint_R f(x, y)\,dA$$

indica que la caja con base R y altura f_{prom} tiene el mismo volumen que el sólido bajo la gráfica de f. [Si $z = f(x, y)$ describe una región montañosa y se cortan las cimas de las montañas en la altura f_{prom}, se pueden usar para rellenar los valles a fin de que la región se vuelva completamente plana. Véase la figura 17.]

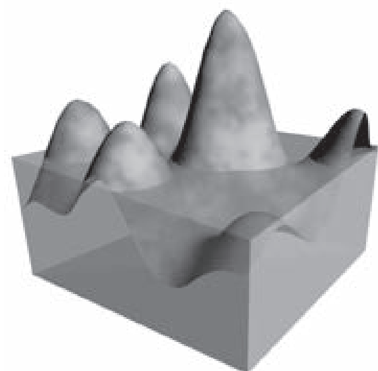


FIGURA 17

EJEMPLO 9 El mapa de contorno de la figura 18 muestra la altura en pulgadas de la nieve que cayó en el estado de Colorado durante el 20 y 21 de diciembre de 2006. (Ese estado tiene la forma de un rectángulo que mide 388 millas de oeste a este y 276 millas de sur a norte.) Use el mapa de contorno para estimar la nevada promedio en todo el estado de Colorado en esos días.

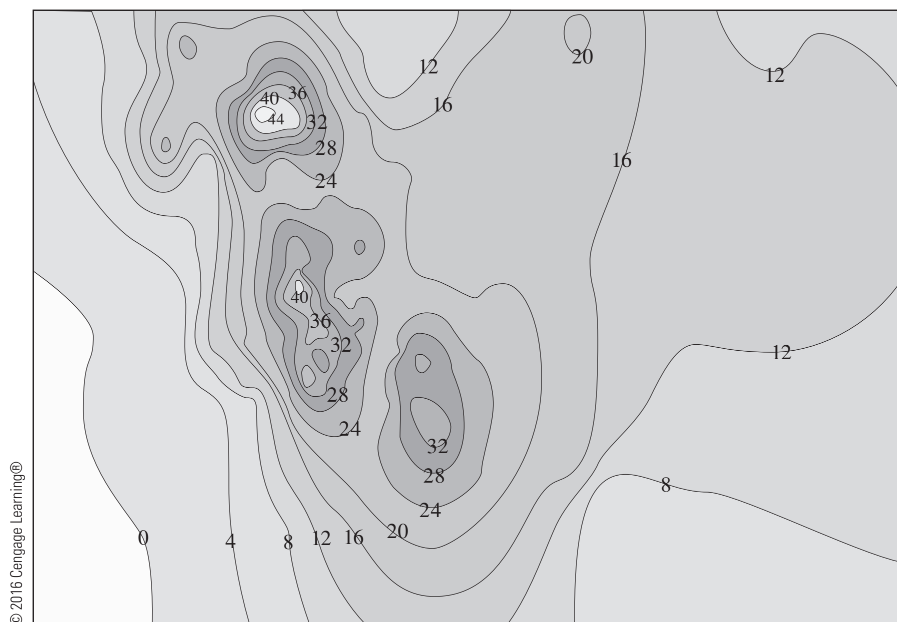


FIGURA 18

SOLUCIÓN Sitúe el origen en la esquina suroeste de ese estado. Entonces $0 \leqslant x \leqslant 388$, $0 \leqslant y \leqslant 276$ y $f(x, y)$ es la caída de nieve, en pulgadas, en un lugar a x millas al este y a y millas al norte del origen. Si R es el rectángulo que representa a Colorado, la nevada promedio para ese estado del 20 al 21 de diciembre fue

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x, y)\,dA$$

donde $A(R) = 388 \cdot 276$. Para estimar el valor de esta integral doble, se usa la regla del punto medio con $m = n = 4$. En otras palabras, se divide R en 16 subrectángulos de igual tamaño, como en la figura 19. El área de cada subrectángulo es

$$\Delta A = \tfrac{1}{16}(388)(276) = 6693 \text{ mi}^2$$

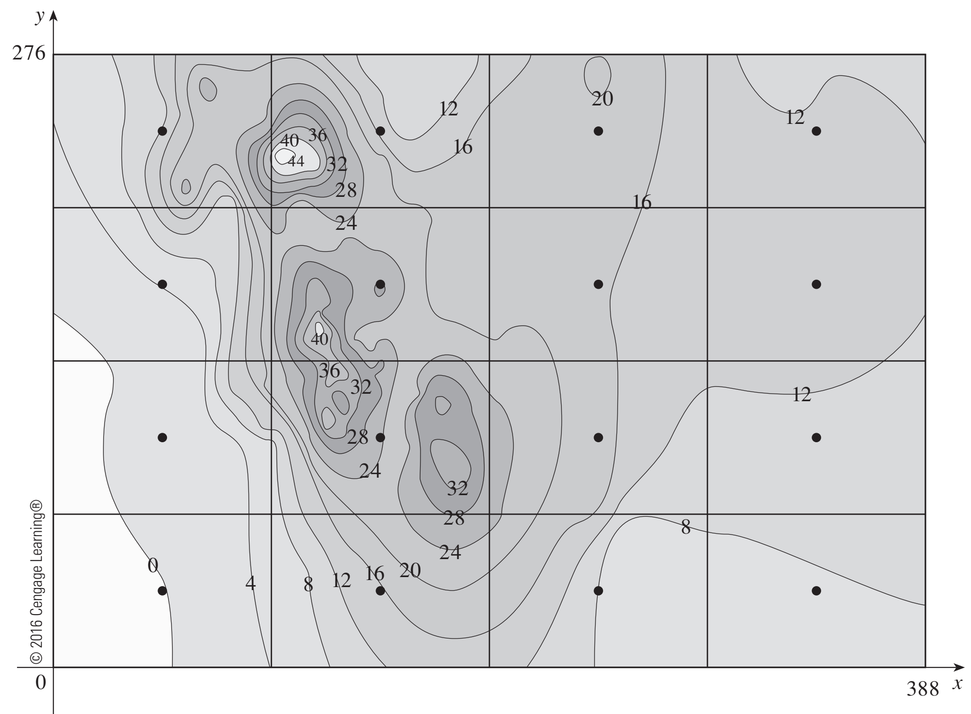


FIGURA 19

Usando el mapa de contorno para estimar el valor de f en el centro de cada subrectángulo, se obtiene

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

$$\approx \Delta A[0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18.5 + 11$$

$$+ 4.5 + 28 + 17 + 13.5 + 12 + 15 + 17.5 + 13]$$

$$= (6693)(207)$$

Por tanto, $$f_{\text{prom}} \approx \frac{(6693)(207)}{(388)(276)} \approx 12.9$$

El 20 y 21 de diciembre de 2006, Colorado recibió un promedio de aproximadamente 13 pulgadas de nieve. ■

15.1 EJERCICIOS

1. (a) Estime el volumen del sólido que se encuentra bajo la superficie $z = xy$ y sobre el rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$$

Use la suma de Riemann con $m = 3$, $n = 2$ y elija como punto muestra la esquina superior derecha de cada cuadrado.
(b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del sólido del inciso (a).

2. Si $R = [0, 4] \times [-1, 2]$, use la suma de Riemann con $m = 2$, $n = 3$ para estimar el valor de $\iint_R (1 - xy^2)\, dA$. Elija como puntos muestra (a) las esquinas inferiores derechas y (b) las esquinas superiores izquierdas de los rectángulos.

3. (a) Use la suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R xe^{-xy}\, dA$, donde $R = [0, 2] \times [0, 1]$. Elija como puntos muestra las esquinas superiores derechas.
(b) Use la regla del punto medio para estimar la integral en el inciso (a).

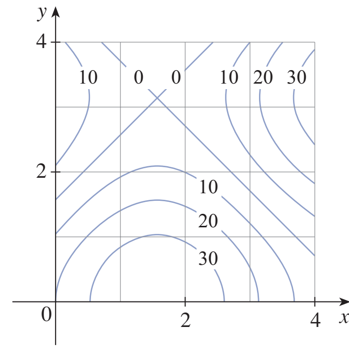
4. (a) Estime el volumen del sólido que se encuentra bajo la superficie $z = 1 + x^2 + 3y$ y sobre el rectángulo $R = [1, 2] \times [0, 3]$. Use la suma de Riemann con $m = n = 2$ y elija como puntos muestra las esquinas inferiores izquierdas.
(b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del inciso (a).

5. Sea V el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ y sobre el rectángulo dado por $2 \leq x \leq 4$, $2 \leq y \leq 6$. Use las rectas $x = 3$ y $y = 4$ para dividir R en subrectángulos. Sean L y U las sumas de Riemann calculadas usando las esquinas inferiores izquierdas y las esquinas superiores derechas, respectivamente. Sin calcular los números V, L y U, dispóngalos en orden creciente y explique su razonamiento.

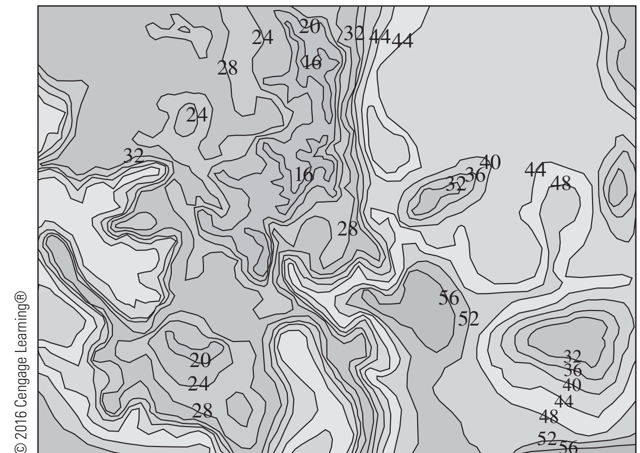
6. Una piscina de 8 por 12 metros está llena de agua. La profundidad se mide en intervalos de 2 m a partir de una esquina de la piscina y los valores se registran en la tabla. Estime el volumen de agua en la piscina.

	0	2	4	6	8	10	12
0	1	1.5	2	2.4	2.8	3	3
2	1	1.5	2	2.8	3	3.6	3
4	1	1.8	2.7	3	3.6	4	3.2
6	1	1.5	2	2.3	2.7	3	2.5
8	1	1	1	1	1.5	2	2

7. Se muestra un mapa de contorno para una función f en el cuadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.
(a) Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$.
(b) Estime el valor promedio de f.



8. El mapa de contorno muestra la temperatura, en grados Fahrenheit, a las cuatro de la tarde del 26 de febrero de 2007 en Colorado. (Este estado mide 388 millas de oeste a este y 276 millas de sur a norte.) Use la regla del punto medio con $m = n = 4$ para estimar la temperatura promedio en Colorado a esa hora.



9-11 Evalúe la integral doble identificándola primero como el volumen de un sólido.

9. $\iint_R \sqrt{2}\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 6, -1 \leq y \leq 5\}$

10. $\iint_R (2x + 1)\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$

11. $\iint_R (4 - 2y)\, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

---

12. La integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2}\, dA$, donde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa el volumen de un sólido. Trace el sólido.

13-14 Determine $\int_0^2 f(x, y)\, dx$ y $\int_0^3 f(x, y)\, dy$

13. $f(x, y) = x + 3x^2y^2$

14. $f(x, y) = y\sqrt{x + 2}$

15-26 Calcule la integral iterada.

15. $\displaystyle\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\, dy\, dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (x + y)^2\, dx\, dy$

17. $\int_0^1 \int_1^2 (x + e^{-y})\, dx\, dy$

18. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\, dy\, dx$

19. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

20. $\int_1^3 \int_1^5 \frac{\ln y}{xy}\, dy\, dx$

21. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx$

22. $\int_0^1 \int_0^2 y e^{x-y}\, dx\, dy$

23. $\int_0^3 \int_0^{\pi/2} t^2 \operatorname{sen}^3 \phi\, d\phi\, dt$

24. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y}\, dy\, dx$

25. $\int_0^2 \int_0^{\pi} r \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta\, dr$

26. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\, dx\, dy$

27-34 Calcule la integral doble.

27. $\iint_R x \sec^2 y\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant \pi/4\}$

28. $\iint_R (y + xy^{-2})\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

29. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

30. $\iint_R \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 - t^2}}\, dA, \quad R = \{(\theta, t) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\}$

31. $\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\, dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

32. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

33. $\iint_R \operatorname{sen}(x - y)\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$

34. $\iint_R \frac{1}{1 + x + y}\, dA, \quad R = [1, 3] \times [1, 2]$

35-36 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

35. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\, dx\, dy$

36. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$

37. Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el plano $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ y sobre el rectángulo $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

38. Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ y sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [1, 2]$.

39. Determine el volumen del sólido que se tiende bajo el paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ y sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

40. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = x^2 + xy^2$ y los planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 5$ y $y = \pm 2$.

41. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + x^2 y e^y$ y los planos $z = 0$, $x = \pm 1$, $y = 0$ y $y = 1$.

42. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + e^x \operatorname{sen} y$ y los planos $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$ y $z = 0$.

43. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = x \sec^2 y$ y los planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = \pi/4$.

44. Grafique el sólido que se ubica entre la superficie $z = 2xy/(x^2 + 1) + 2y$ y el plano $z = x + 2y$ y es acotado por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 4$. Halle después su volumen.

SAC **45.** Use un sistema algebraico computacional para hallar el valor exacto de la integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Use después el SAC para dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral.

SAC **46.** Grafique el sólido que se ubica entre las superficies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ y $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Use un sistema algebraico computacional para aproximar el volumen de este sólido con cuatro decimales.

47-48 Determine el valor promedio de f en el rectángulo dado.

47. $f(x, y) = x^2 y$, R tiene vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

48. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}, \quad R = [0, 4] \times [0, 1]$

49-50 Use simetría para evaluar la integral doble.

49. $\iint_R \frac{xy}{1 + x^4}\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

50. $\iint_R (1 + x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x)\, dA, \quad R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

SAC **51.** Use un SAC para calcular las integrales iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy$$

¿Las respuestas contradicen el teorema de Fubini? Explique lo que sucede.

52. (a) ¿En qué sentido son similares los teoremas de Fubini y de Clairaut?

(b) Si $f(x, y)$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ y

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\, dt\, ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, demuestre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.2 Integrales dobles en regiones generales

Para integrales simples, la región en la que se integra es siempre un intervalo. Pero para integrales dobles, debe ser capaz de integrar una función f no solo en rectángulos, sino también en regiones D de forma más general, como la que se ilustra en la figura 1. Se supone que D es una región acotada, lo que significa que D puede estar encerrada en una región rectangular R como en la figura 2. Luego se define una nueva función F con dominio R mediante

1 $$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

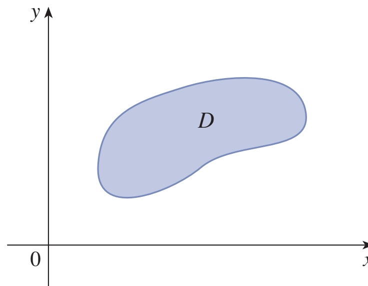


FIGURA 1

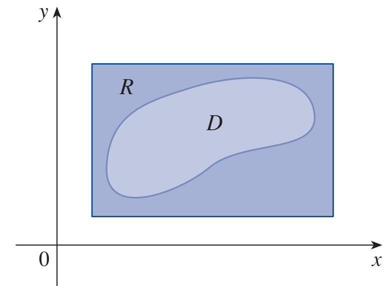


FIGURA 2

Si F es integrable en R, se define la **integral doble** de f sobre D mediante

2 $$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{donde } F \text{ está dada por la ecuación 1}$$

La definición 2 tiene sentido porque R es un rectángulo, así que $\iint_R F(x, y)\, dA$ fue previamente definida en la sección 15.1. El procedimiento que se ha usado es razonable porque los valores de $F(x, y)$ son de 0 cuando (x, y) se encuentra fuera de D y por tanto no hacen ninguna contribución a la integral. Esto significa que no importa qué rectángulo R se use mientras contenga D.

En el caso en el que $f(x, y) \geqslant 0$, aún se puede interpretar $\iint_D f(x, y)\, dA$ como el volumen del sólido que se encuentra sobre D y bajo la superficie $z = f(x, y)$ (la gráfica de f). Puede verse que esto es razonable comparando las gráficas de f y F en las figuras 3 y 4, respectivamente, y recordando que $\iint_R F(x, y)\, dA$ es el volumen bajo la gráfica de F.

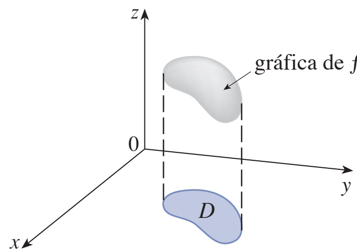


FIGURA 3

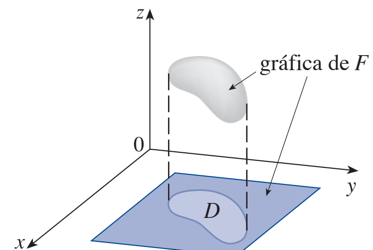


FIGURA 4

La figura 4 también muestra que es probable que F tenga discontinuidades en los puntos frontera de D. No obstante, si f es continua en D y la curva frontera de D "se porta bien" (en un sentido que está fuera del alcance de este libro), se puede demostrar que

$\iint_R F(x, y)\, dA$ existe y por tanto que $\iint_D f(x, y)\, dA$ existe. En particular, este es el caso para los dos tipos de regiones siguientes.

Se dice que una región en un plano D es de **tipo I** si se ubica entre las gráficas de dos funciones continuas de x, es decir

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$. Algunos ejemplos de regiones tipo I aparecen en la figura 5.

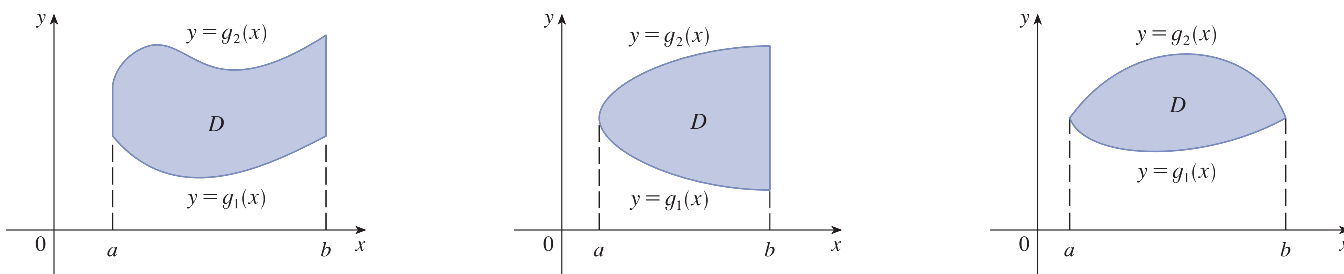


FIGURA 5
Algunas regiones tipo I

Para evaluar $\iint_D f(x, y)\, dA$ cuando D es una región de tipo I, se elige un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenga D, como en la figura 6, y se concede que F es la función dada por la ecuación 1; es decir, F coincide con f en D y F es de 0 fuera de D. Así, por el teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y)\, dy\, dx$$

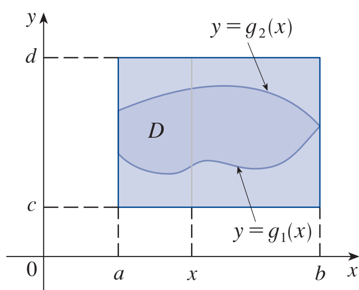


FIGURA 6

Observe que $F(x, y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o $y > g_2(x)$ porque (x, y) reside entonces fuera de D. Por tanto,

$$\int_c^d F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ cuando $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$. Así se tiene la fórmula siguiente que permite evaluar la integral doble como una integral iterada.

3 Si f es continua en una región D tipo I, tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

La integral en el miembro derecho de (3) es una integral iterada similar a las que se consideran en la sección precedente, excepto que en la integral interior se considera a x como constante no solo en $f(x, y)$, sino también en los límites de integración, $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

También se consideran regiones en un plano de **tipo II**, que pueden expresarse como

4
$$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son continuas. Dos de esas regiones se ilustran en la figura 7.

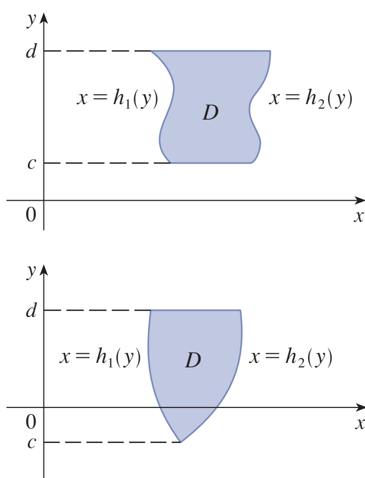


FIGURA 7
Algunas regiones tipo II

Usando los mismos métodos que se emplearon para establecer (3), se puede demostrar que

5
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

donde D es una región tipo II dada por la ecuación 4.

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_D (x + 2y)\, dA$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

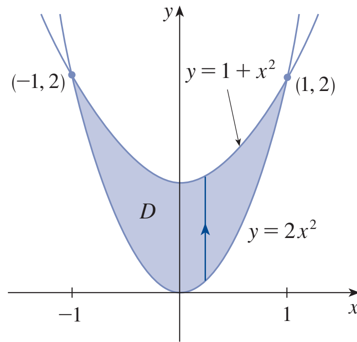


FIGURA 8

SOLUCIÓN Las parábolas intersecan cuando $2x^2 = 1 + x^2$, es decir $x^2 = 1$, así que $x = \pm 1$. Se advierte que la región D, representada en la figura 8, es una región tipo I y no una región tipo II y se puede escribir

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}$$

Como la frontera inferior es $y = 2x^2$ y la frontera superior es $y = 1 + x^2$, la ecuación 3 da

$$\begin{aligned}
\iint_D (x + 2y)\, dA &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2\Big]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx \\
&= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}
\end{aligned}$$

■

NOTA Cuando se establece una integral doble como en el ejemplo 1, es esencial dibujar un diagrama. A menudo es útil dibujar una flecha vertical como en la figura 8. Entonces, los límites de integración para la integral *interior* pueden tomarse del diagrama, como sigue: la flecha comienza en la frontera inferior $y = g_1(x)$, que da el límite inferior de la integral, y termina en la frontera superior $y = g_2(x)$, que da el límite superior de integración. Para una región tipo II, la flecha se traza horizontalmente, de la frontera izquierda a la frontera derecha.

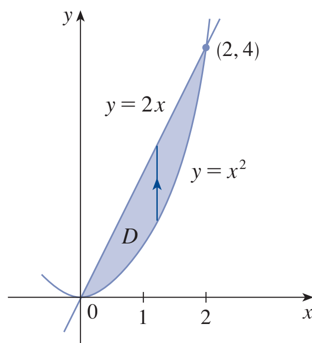


FIGURA 9
D como región tipo I

EJEMPLO 2 Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

SOLUCIÓN En la figura 9 se ve que D es una región tipo I y

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2x\}$$

La figura 10 muestra el sólido cuyo volumen se calcula en el ejemplo 2. Este se halla sobre el plano xy, bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y entre el plano $y = 2x$ y el cilindro parabólico $y = x^2$.

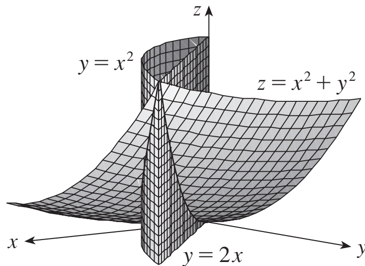


FIGURA 10

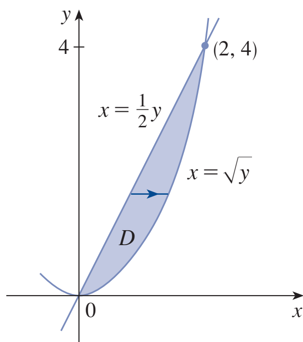


FIGURA 11
Representación de D como una región tipo II

Por tanto, el volumen bajo $z = x^2 + y^2$ y sobre D es

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2x^2 - \frac{(x^2)^3}{3}\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right) dx$$

$$= -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6}\Big]_0^2 = \frac{216}{35}$$

SOLUCIÓN 2 En la figura 11 se ve que D también puede escribirse como una región tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\right\}$$

En consecuencia, otra expresión para V es

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2x\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right) dy$$

$$= \tfrac{2}{15}y^{5/2} + \tfrac{2}{7}y^{7/2} - \tfrac{13}{96}y^4\Big]_0^4 = \tfrac{216}{35}$$ ■

EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_D xy\,dA$, donde D es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN La región D se muestra en la figura 12. También en este caso, D es tanto tipo I como tipo II, aunque la descripción de D como una región tipo I es más complicada, porque la frontera inferior consta de dos partes. Por consiguiente, se prefiere expresar D como una región tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \leqslant x \leqslant y + 1\right\}$$

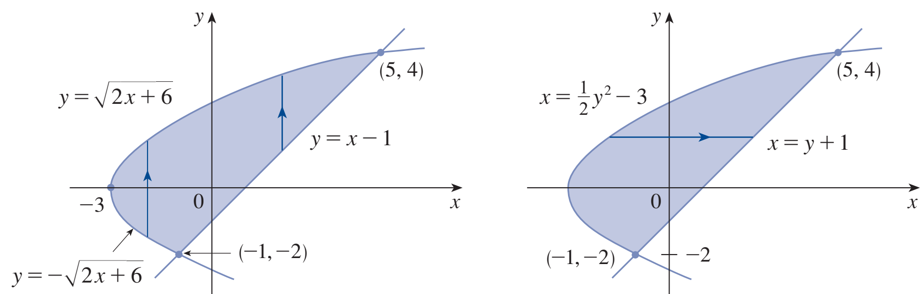


FIGURA 12 (a) Representación de D como una región tipo I (b) Representación de D como una región tipo II

Entonces, al utilizar la ecuación 5 se obtiene

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-2}^{4}\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2 - \left(\tfrac{1}{2}y^2-3\right)^2\right] dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2\right]_{-2}^{4} = 36$$

Si se hubiera expresado D como región tipo I usando la figura 12(a), se habría obtenido

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

pero esto habría implicado más trabajo que el otro método. ■

EJEMPLO 4 Determine el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, y $z = 0$.

SOLUCIÓN En una cuestión como esta, es prudente dibujar dos diagramas: uno del sólido tridimensional y otro de la región en un plano D en la que se encuentra. La figura 13 muestra el tetraedro T acotado por los planos de coordenadas $x = 0$, $z = 0$, el plano vertical $x = 2y$ y el plano $x + 2y + z = 2$. Como el plano $x + 2y + z = 2$ interseca el plano xy (cuya ecuación es $z = 0$) en la recta $x + 2y = 2$, se ve que T se sitúa sobre la región triangular D en el plano xy acotado por las rectas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ y $x = 0$. (Véase la figura 14.)

El plano $x + 2y + z = 2$ puede escribirse como $z = 2 - x - 2y$, así que el volumen requerido se tiende bajo la gráfica de la función $z = 2 - x - 2y$ y sobre

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x/2 \leqslant y \leqslant 1 - x/2\}$$

Por tanto,

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\,dA$$

$$= \int_0^1\int_{x/2}^{1-x/2}(2 - x - 2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1\left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$ ■

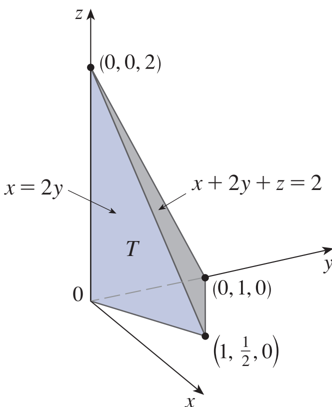


FIGURA 13

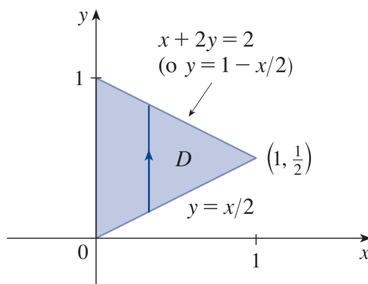


FIGURA 14

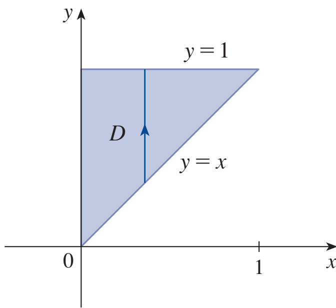


FIGURA 15
D como región tipo I

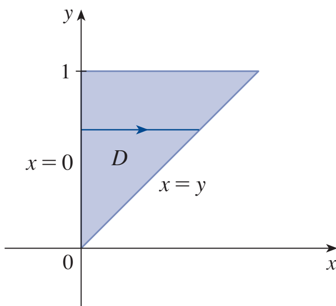


FIGURA 16
D como región tipo II

EJEMPLO 5 Evalúe la integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx$.

SOLUCIÓN Si se intenta evaluar la integral tal como está, se enfrenta a la tarea de evaluar primeramente $\int \operatorname{sen}(y^2)\, dy$. Pero esto es imposible de hacer en términos finitos, porque $\int \operatorname{sen}(y^2)\, dy$ no es una función elemental. (Véase el final de la sección 7.5.) Así, se debe cambiar el orden de integración. Esto se hace expresando primero la integral iterada dada como una integral doble. Si se escribe la ecuación 3 con el lado derecho a la izquierda, se tiene

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA$$

donde $$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x \leqslant y \leqslant 1\}$$

La región *D* se representa en la figura 15. En la figura 16 se ve que una descripción alternativa de *D* es

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

Esto permite usar (5) para expresar la integral doble como una integral iterada en el orden inverso:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx &= \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA \\
&= \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \Big[x \operatorname{sen}(y^2)\Big]_{x=0}^{x=y} dy \\
&= \int_0^1 y \operatorname{sen}(y^2)\, dy = -\tfrac{1}{2}\cos(y^2)\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 1)
\end{aligned}$$

Propiedades de las integrales dobles

Suponga que todas las integrales siguientes existen. Para regiones rectangulares *D*, las tres primeras prioridades pueden comprobarse de la misma manera que en la sección 5.2. Para regiones generales, las propiedades se desprenden de la definición 2.

6 $$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_D f(x, y)\, dA + \iint_D g(x, y)\, dA$$

7 $$\iint_D c f(x, y)\, dA = c \iint_D f(x, y)\, dA \qquad \text{donde } c \text{ es una constante}$$

Si $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todas las (x, y) en *D*, entonces

8 $$\iint_D f(x, y)\, dA \geqslant \iint_D g(x, y)\, dA$$

La propiedad de las integrales dobles siguiente es similar a la propiedad de las integrales simples dada por la ecuación $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se traslapan excepto quizá en sus fronteras (véase la figura 17), entonces

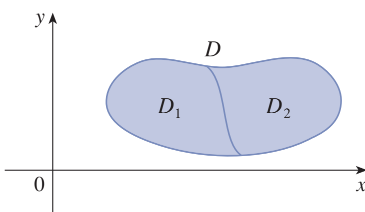


FIGURA 17

9 $$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA$$

La propiedad 9 puede usarse para evaluar integrales dobles en regiones D que no son del tipo I ni del tipo II pero que pueden expresarse como una unión de regiones del tipo I o el tipo II. La figura 18 ilustra este procedimiento. (Véase los ejercicios 57 y 58.)

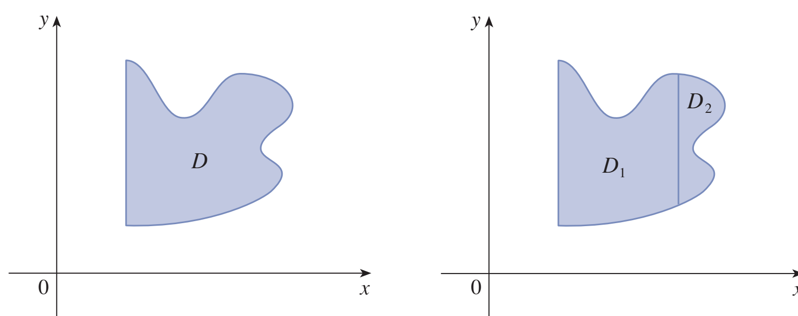


FIGURA 18

(a) D no es del Tipo I ni del tipo II.

(b) $D = D_1 < D_2$. D_1 es tipo I, D_2 es tipo II.

La propiedad de las integrales siguiente indica que si se integra la función constante $f(x, y) = 1$ en una región D, se obtiene el área de D:

10
$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

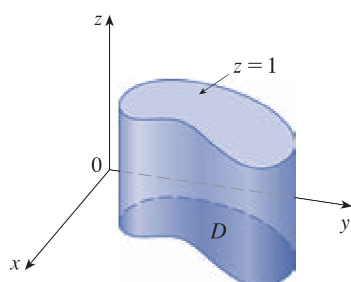


FIGURA 19
Cilindro con base D y altura $z = 1$

La figura 19 ilustra por qué la ecuación 10 es cierta: un cilindro sólido cuya base es D y cuya altura es 1 tiene volumen $A(D) \cdot 1 = A(D)$, pero se sabe que también se puede escribir su volumen como $\iint_D 1\, dA$.

Por último, se pueden combinar las propiedades 7, 8 y 10 para comprobar la propiedad siguiente. (Véase el ejercicio 63.)

11 Si $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todas las (x, y) en D, entonces

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

EJEMPLO 6 Use la propiedad 11 para estimar la integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2.

SOLUCIÓN Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, se tiene $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \cos y \leqslant 1$, y por tanto

$$e^{-1} \leqslant e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leqslant e^1 = e$$

Así, usando $m = e^{-1} = 1/e$, M $= e$, y $A(D) = \pi(2)^2$ en la propiedad 11, se obtiene

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$ ■

15.2 EJERCICIOS

1-6 Evalúe la integral iterada.

1. $\int_1^5 \int_0^x (8x - 2y)\, dy\, dx$

2. $\int_0^2 \int_0^{y^2} x^2 y\, dx\, dy$

3. $\int_0^1 \int_0^y x e^{y^3}\, dx\, dy$

4. $\int_0^{\pi/2} \int_0^x x \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

5. $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3)\, dt\, ds$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7-10 Evalúe la integral doble.

7. $\iint_D \dfrac{y}{x^2 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$

8. $\iint_D (2x + y)\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant y \leqslant 2, y - 1 \leqslant x \leqslant 1\}$

9. $\iint_D e^{-y^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 3, 0 \leqslant x \leqslant y\}$

10. $\iint_D y\sqrt{x^2 - y^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant x\}$

11. Dibuje un ejemplo de una región que sea
(a) tipo I pero no tipo II
(b) tipo II pero no tipo I

12. Dibuje un ejemplo de una región que sea
(a) tanto tipo I como tipo II
(b) ni tipo I ni tipo II

13-14 Exprese D como una región de tipo I y también como una región de tipo II. Evalúe después la integral doble de las dos maneras.

13. $\iint_D x\, dA$, D está encerrada por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$

14. $\iint_D xy\, dA$, D está encerrada por las curvas $y = x^2$, $y = 3x$

15-16 Establezca integrales iteradas para ambos órdenes de integración. Evalúe después la integral doble usando el orden más fácil y explique por qué es más fácil.

15. $\iint_D y\, dA$, D está acotada por $y = x - 2$, $x = y^2$

16. $\iint_D y^2 e^{xy}\, dA$, D está acotada por $y = x$, $y = 4$, $x = 0$

17-22 Evalúe la integral doble.

17. $\iint_D x \cos y\, dA$, D está acotada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

18. $\iint_D xy^2\, dA$, D está acotada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1 - y^2}$

19. $\iint_D y^2\, dA$, D es la región triangular con vértices (0, 1), (1, 2), (4, 1)

20. $\iint_D xy\, dA$, D está encerrada por el cuarto de círculo $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \geqslant 0$ y los ejes

21. $\iint_D (2x - y)\, dA$, D está acotada por el círculo con centro en el origen y radio 2

22. $\iint_D y\, dA$, D es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 1) y (4, 0)

23-32 Halle el volumen del sólido dado.

23. Bajo el plano $3x + 2y - z = 0$ y sobre la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$

24. Bajo la superficie $z = 2x + y^2$ y sobre la región acotada por $x = y^2$ y $x = y^3$

25. Bajo la superficie $z = xy$ y sobre el triángulo con vértices (1, 1), (4, 1) y (1, 2)

26. Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 2$

27. El tetraedro encerrado por los planos de coordenadas y el plano $2x + y + z = 4$

28. Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$

29. Acotado por los planos de coordenadas y el plano $3x + 2y + z = 6$

30. Acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante

31. Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante

32. Acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$


33. Use una calculadora graficadora o computadora para estimar las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = x^4$ y $y = 3x - x^2$. Si D es la región acotada por estas curvas, estime $\iint_D x\, dA$.

34. Determine el volumen aproximado del sólido en el primer octante acotado por los planos $y = x$, $z = 0$ y $z = x$ y el cilindro $y = \cos x$. (Use un dispositivo de graficación para estimar los puntos de intersección.)

35-38 Determine el volumen del sólido restando dos volúmenes.

35. El sólido encerrado por los cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ y los planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$

36. El sólido encerrado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $z = 3y$, $z = 2 + y$

37. El sólido bajo el plano $z = 3$, sobre el plano $z = y$, y entre los cilindros parabólicos $y = x^2$ y $y = 1 - x^2$

38. El sólido en el primer octante bajo el plano $z = x + y$, sobre la superficie $z = xy$, y encerrado por las superficies $x = 0$, $y = 0$ y $x^2 + y^2 = 4$

39-40 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

39. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx$

40. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\, dx\, dx$

SAC **41-44** Use un sistema algebraico computacional para hallar el volumen exacto del sólido.

41. Bajo la superficie $z = x^3y^4 + xy^2$ y sobre la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$

42. Entre los paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - 2y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

43. Encerrado por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$

44. Encerrado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2y$

45-50 Trace la región de integración y cambie el orden de integración.

45. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\, dx\, dy$

46. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\, dy\, dx$

47. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy\, dx$

48. $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$

49. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$

50. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

51-56 Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración.

51. $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx\, dy$

52. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y}\, \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3 + 1}\, dy\, dx$

54. $\displaystyle\int_0^2 \int_{y/2}^1 y \cos(x^3 - 1)\, dx\, dy$

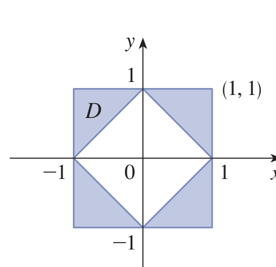
55. $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\, dy\, dx$

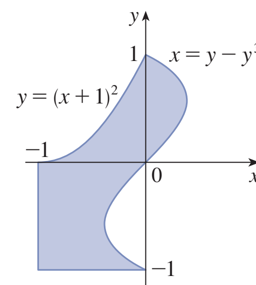
56. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dy\, dx$

57-58 Exprese D como una unión de regiones de tipo I o tipo II y evalúe la integral.

57. $\displaystyle\iint_D x^2\, dA$

58. $\displaystyle\iint_D y\, dA$





59-60 Use la propiedad 11 para estimar el valor de la integral.

59. $\displaystyle\iint_S \sqrt{4 - x^2y^2}\, dA$, $\quad S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$

60. $\displaystyle\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA$, Q es el cuarto de círculo con centro en el origen y radio $\frac{1}{2}$ en el primer cuadrante

61-62 Halle el valor promedio de f en la región D.

61. $f(x, y) = xy$, D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 3)$

62. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, D está encerrada por las curvas $y = 0$, $y = x^2$ y $x = 1$

63. Compruebe la propiedad 11.

64. Al evaluar una integral doble en una región D, se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Trace la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

65-69 Use geometría o simetría, o ambas, para evaluar la integral doble.

65. $\iint_D (x + 2)\, dA$,

$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}\}$

66. $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dA$, D es el disco con centro en el origen y radio R

67. $\iint_D (2x + 3y)\, dA$, D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$

68. $\iint_D (2 + x^2y^3 - y^2 \operatorname{sen} x)\, dA$,

$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$

69. $\iint_D \left(ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2}\right) dA$,

$D = [-a, a] \times [-b, b]$

SAC **70.** Grafique el sólido acotado por el plano $x + y + z = 1$ y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y determine su volumen exacto. (Use su SAC para hacer la graficación, hallar las ecuaciones de las curvas frontera de la región de integración y evaluar la integral doble.)

15.3 Integrales dobles en coordenadas polares

Suponga que se quiere evaluar una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde R es una de las regiones que aparecen en la figura 1. En cualquier caso, la descripción de R en términos de coordenadas rectangulares es bastante complicada, pero R es fácil de describir usando coordenadas polares.

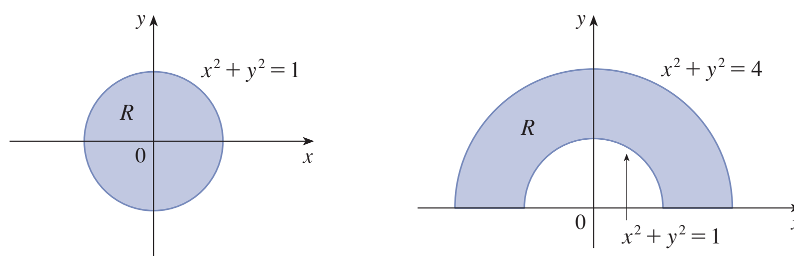


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

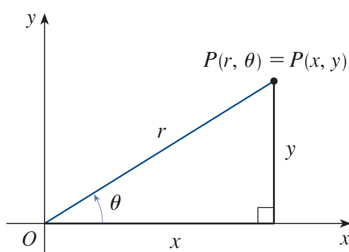


FIGURA 2

Recuerde de la figura 2 que las coordenadas polares (r, θ) de un punto se relacionan con las coordenadas rectangulares (x, y) mediante las ecuaciones

$$r^2 = x^2 = y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

(Véase la sección 10.3.)

Las regiones en la figura 1 son casos especiales de un **rectángulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$

el cual se muestra en la figura 3. Para calcular la integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde R es un rectángulo polar, se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de igual ancho $\Delta r = (b - a)/m$ y se divide el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de igual ancho $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Entonces los círculos $r = r_i$ y los rayos $\theta = \theta_j$ dividen el rectángulo polar R en los más pequeños rectángulos polares R_{ij} que aparecen en la figura 4.

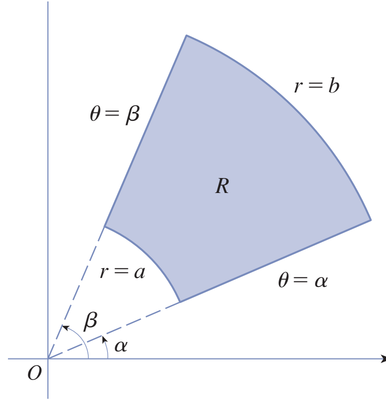


FIGURA 3 Rectángulo polar

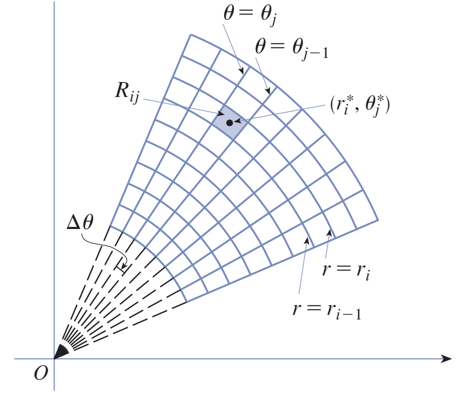


FIGURA 4 División de R en subrectángulos polares

El “centro” del subrectángulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$

tiene coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Se calcula el área de R_{ij} usando el hecho de que el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ es $\frac{1}{2}r^2\theta$. Restando las áreas de dos de esos sectores, cada uno de los cuales tiene ángulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, se determina que el área de R_{ij} es

$$\Delta A_i = \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Aunque se ha definido la integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ en términos de rectángulos ordinarios, se puede demostrar que, para funciones continuas f, siempre se obtiene la misma respuesta usando rectángulos polares. Las coordenadas rectangulares del centro de R_{ij} son $(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)$, así que una típica suma de Riemann es

1 $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\,r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Si se escribe $g(r, \theta) = rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, la suma de Riemann de la ecuación 1 puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta$$

la cual es una suma de Riemann para la integral doble

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta$$

Por tanto se tiene

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta = \int_\alpha^\beta\int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

2 Cambio a coordenadas polares en una integral doble Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, donde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

La fórmula en (2) establece que se convierten coordenadas rectangulares a polares en una integral doble escribiendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, usando los límites de integración apropiados para r y θ y reemplazando dA por $r\, dr\, d\theta$. **Tenga cuidado de no olvidar el factor adicional r en el miembro derecho de la fórmula 2.** Un método clásico para recordar esto se muestra en la figura 5, donde el rectángulo polar "infinitesimal" puede concebirse como un rectángulo ordinario con dimensiones $r\, d\theta$ y dr y que por tanto tiene un área $dA = r\, dr\, d\theta$.

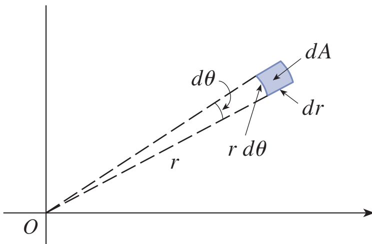


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN La región R puede describirse como

$$R = \{(x, y) \mid y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

Este es el semianillo que se mostró en la figura 1(b), y en coordenadas polares está dado por $1 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Así, por la fórmula 2,

$$\begin{aligned}\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\,\text{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\,\text{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \Big[r^3\cos\theta + r^4\,\text{sen}^2\theta\Big]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi (7\cos\theta + 15\,\text{sen}^2\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \Big[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\Big] d\theta \\ &= 7\,\text{sen}\,\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\,\text{sen}\,2\theta \Big]_0^\pi = \frac{15\pi}{2}\end{aligned}$$

Aquí se usa la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Véase la sección 7.2 para consejos sobre la integración de funciones trigonométricas.

EJEMPLO 2 Halle el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUCIÓN Si se pone $z = 0$ en la ecuación del paraboloide, se obtiene $x^2 + y^2 = 1$. Esto significa que el plano interseca el paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 1$, así que el sólido reside bajo el paraboloide y sobre el disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$ [véase las figuras 6 y 1(a)]. En coordenadas polares, D está dado por $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Puesto que $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, el volumen es

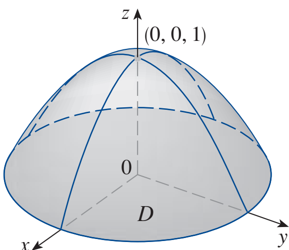


FIGURA 6

$$\begin{aligned}V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Si hubiera usado coordenadas rectangulares en vez de coordenadas polares, habría obtenido

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$$

lo cual no es fácil de evaluar porque implica determinar $\int (1 - x^2)^{3/2}\,dx$. ■

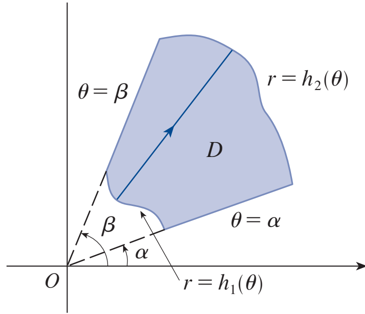


FIGURA 7
$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$

Lo que se ha hecho hasta aquí puede prolongarse al tipo de región, más complicado, que se muestra en la figura 7. Este tipo es similar a las regiones rectangulares tipo II consideradas en la sección 15.2. De hecho, al combinar la fórmula 2 de esta sección con la fórmula 15.2.5, se obtiene la fórmula siguiente.

3 Si f es continua en una región polar de la forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x, y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

En particular, al tomar $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ y $h_2(\theta) = h(\theta)$ en esta fórmula, se ve que el área de la región D acotada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, y $r = h(\theta)$ es

$$A(D) = \iint_D 1\,dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[h(\theta)]^2\,d\theta$$

y esto coincide con la fórmula 10.4.3.

EJEMPLO 3 Use una integral doble para encontrar el área encerrada por un lazo de la rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$.

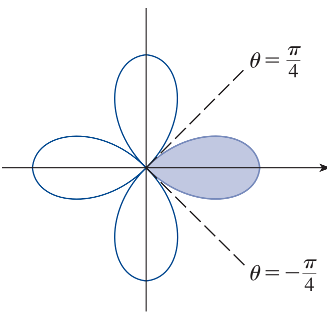


FIGURA 8

SOLUCIÓN En el trazo de la curva en la figura 8 se advierte que un lazo está dado por la región

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$$

Así, el área es

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$ ■

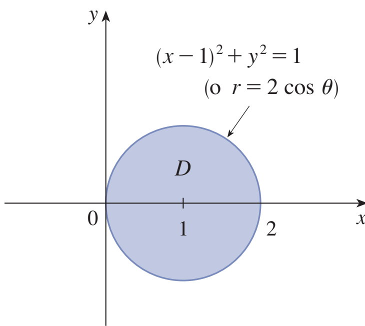


FIGURA 9

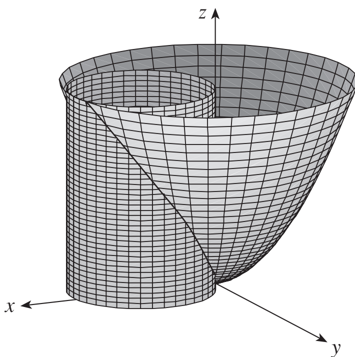


FIGURA 10

EJEMPLO 4 Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$, sobre el plano xy, y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUCIÓN El sólido se tiende arriba del disco D cuyo círculo frontera tiene ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ o, tras completar el cuadrado,

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

(Véase las figuras 9 y 10.)

En coordenadas polares se tiene $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = r\cos\theta$, así que el círculo frontera se convierte en $r^2 = 2r\cos\theta$, o $r = 2r\cos\theta$. De este modo, el disco D está dado por

$$D = \{(r,\theta) \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

y, por la fórmula 3, se tiene

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

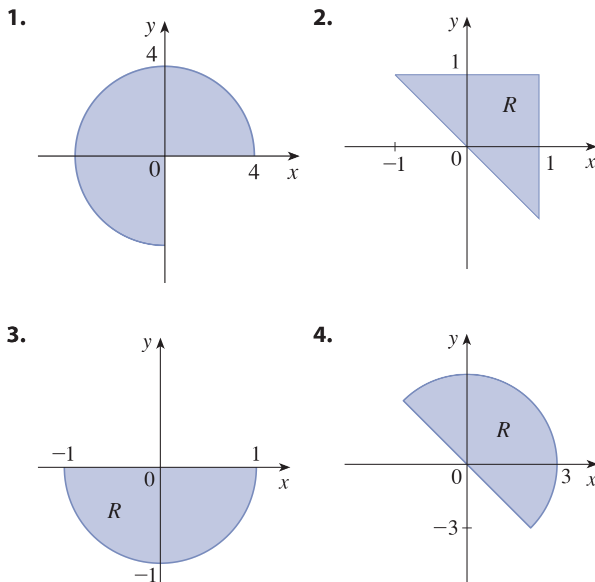
$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right] d\theta$$

$$= 2\left[\tfrac{3}{2}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$ ■

15.3 EJERCICIOS

1-4 Se muestra una región R. Decida si usar coordenadas polares o coordenadas rectangulares y escriba $\iint_R f(x,y)\,dA$ como una integral iterada, donde f es una función continua arbitraria en R.



5-6 Trace la región cuya área está dada por la integral y evalúe la integral.

5. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^2 r\,dr\,d\theta$ **6.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta$

7-14 Evalúe la integral dada cambiando a coordenadas polares.

7. $\iint_D x^2y\,dA$, donde D es la mitad superior del disco con centro en el origen y radio 5

8. $\iint_R (2x-y)\,dA$, donde R es la región en el primer cuadrante encerrada por el círculo $x^2+y^2=4$ y las rectas $x=0$ y $y=x$

9. $\iint_R \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dA$, donde R es la región en el primer cuadrante entre los círculos con centro en el origen y radios 1 y 3

10. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dA$, donde R es la región que se encuentra entre los círculos $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+y^2=b^2$ con $0<a<b$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, donde D es la región acotada por el semicírculo $x=\sqrt{4-y^2}$ y el eje y

12. $\iint_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2

13. $\iint_R \arctan(y/x)\, dA$, donde
$R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$

14. $\iint_D x\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$

15-18 Use una integral doble para hallar el área de la región.

15. Un lazo de la rosa $r = \cos 3\theta$

16. La región encerrada por los dos cardioides $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 1 - \cos\theta$

17. La región dentro del círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$

18. La región dentro del cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera del círculo $r = 3\cos\theta$

19-27 Use coordenadas polares para determinar el volumen del sólido dado.

19. Bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 25$

20. Bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sobre el anillo $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$

21. Bajo el plano $2x + y + z = 4$ y sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$

22. Bajo el paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y sobre el plano xy

23. Una esfera de radio a

24. Acotado por los paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

25. Sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Acotado por los paraboloides $z = 6 - x^2 - y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$

27. Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Un taladro cilíndrico con radio r_1 se usa para perforar un agujero en el centro de una esfera de radio r_2. Determine el volumen del sólido en forma de anillo que resta.
(b) Exprese el volumen del inciso (a) en términos de la altura h del anillo. Note que el volumen depende solo de h, no de r_1 ni r_2.

29-32 Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

29. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx$

30. $\displaystyle\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} (2x + y)\, dx\, dy$

31. $\displaystyle\int_0^{1/2} \int_{\sqrt{3}\,y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\, dx\, dy$

32. $\displaystyle\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y\, dx\, dy$

33-34 Exprese la integral doble en términos de una integral simple con respecto a r. Use después su calculadora para evaluar la integral con cuatro decimales.

33. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\, dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 1

34. $\iint_D xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dA$, donde D es la porción del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ que está en el primer cuadrante

35. Una piscina es circular con un diámetro de 10 metros. La profundidad es constante a lo largo de las rectas este-oeste y aumenta linealmente de 1 m en el extremo sur a 2 m en el extremo norte. Determine el volumen de agua en la piscina.

36. Un aspersor agrícola distribuye agua en un patrón circular de 50 m de radio. Suministra agua a una profundidad de e^{-r} metros por hora a una distancia de r metros desde el aspersor.
(a) Si $0 < R \leqslant 50$, ¿cuál es la cantidad total de agua suministrada por hora a la región dentro del círculo de radio R centrado en el aspersor?
(b) Determine una expresión para la cantidad promedio de agua por hora por metro cuadrado suministrada a la región dentro del círculo de radio R.

37. Halle el valor promedio de la función $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ en la región anular $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$, donde $0 < a < b$.

38. Sea D el disco con centro en el origen y radio a. ¿Cuál es la distancia promedio de los puntos en D al origen?

39. Use coordenadas polares para combinar la suma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\, dy\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\, dy\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\, dy\, dx$$

en una integral doble. Evalúe después la integral doble.

40. (a) Se define la integral impropia (en la totalidad del plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

donde D_a es el disco con radio a y centro en el origen. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \pi$$

(b) Una definición equivalente de la integral impropia del inciso (a) es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

donde S_a es el cuadrado con vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esto para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

(c) Deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{2}$, demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

(Este es un resultado fundamental en probabilidad y estadística.)

41. Use el resultado del ejercicio 40, inciso (c), para evaluar las integrales siguientes.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx$

15.4 Aplicaciones de las integrales dobles

Ya se ha visto una aplicación de las integrales dobles: calcular volúmenes. Otra aplicación geométrica es determinar áreas de superficies, y esto se hará en la sección siguiente. En esta sección se exploran aplicaciones físicas como el cálculo de masa, carga eléctrica, centro de masa y momento de inercia. Se verá que estas ideas físicas también son importantes cuando se aplican a funciones de densidad de probabilidad de dos variables aleatorias.

Densidad y masa

En la sección 8.3 fue capaz de usar integrales simples para calcular momentos y el centro de masa de una placa o lámina delgada con densidad constante. Pero ahora, equipado con la integral doble, se puede considerar una lámina con densidad variable. Suponga que la lámina ocupa una región D del plano xy y que su **densidad** (en unidades de masa por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por $\rho(x, y)$, donde ρ es una función continua en D. Esto significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

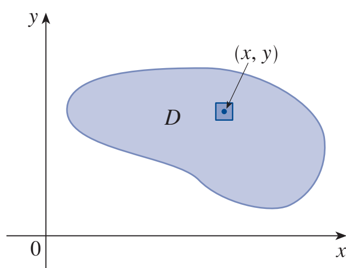


FIGURA 1

donde Δm y ΔA son la masa y el área de un rectángulo pequeño que contiene (x, y) y el límite se toma como las dimensiones del rectángulo cerca de 0. (Véase la figura 1.)

Para determinar la masa total m de la lámina, se divide un rectángulo R que contiene a D en subrectángulos R_{ij} del mismo tamaño (como en la figura 2) y se considera que $\rho(x, y)$ es 0 fuera de D. Si se elige un punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}, la masa de la parte de la lámina que ocupa R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$, donde ΔA es el área de R_{ij}. Si se suman todas las masas, se obtiene una aproximación de la masa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

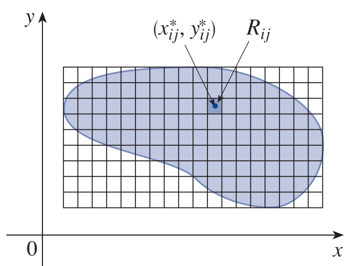


FIGURA 2

Si ahora se incrementa el número de subrectángulos, se obtiene la masa total m de la lámina como el valor limitante de las aproximaciones:

1
$$m = \lim_{k,\,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint_D \rho(x, y)\,dA$$

Los físicos también consideran otros tipos de densidad que pueden tratarse de la misma manera. Por ejemplo, si una carga eléctrica se distribuye en una región D y la densidad de

carga (en unidades de carga por unidad de área) está dada por $\sigma(x, y)$ en un punto (x, y) en D, la carga total Q está dada por

2
$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA$$

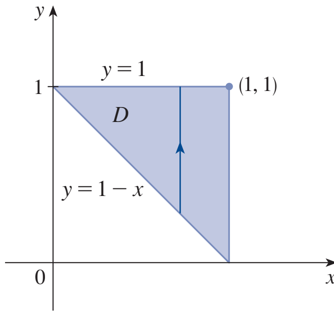


FIGURA 3

EJEMPLO 1 La carga se distribuye en la región triangular D de la figura 3 de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = xy$, medida en coulombs por metro cuadrado (C/m^2). Determine la carga total.

SOLUCIÓN De la ecuación 2 y la figura 3 se tiene

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} [1^2 - (1 - x)^2]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24}$$

Así, la carga total es $\frac{5}{24}$ C. ■

Momentos y centros de masa

En la sección 8.3 se determinó el centro de masa de una lámina con densidad constante; aquí se considera una lámina con densidad variable. Suponga que la lámina ocupa la región D y tiene función de densidad $\rho(x, y)$. Recuerde que en el capítulo 8 se definió el momento de una partícula alrededor de un eje como el producto de su masa y su distancia dirigida desde el eje. Se dividió D en pequeños rectángulos como en la figura 2. Entonces, la masa de R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$, así que se puede aproximar el momento de R_{ij} con respecto al eje x mediante

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A] y_{ij}^*$$

Si se suman ahora estas cantidades y se toma el límite conforme el número de subrectángulos aumenta, se obtiene el **momento** de la lámina entera **alrededor del eje *x***:

3
$$M_x = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y\, \rho(x, y)\, dA$$

De igual manera, el **momento alrededor del eje *y*** es

4
$$M_y = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x\, \rho(x, y)\, dA$$

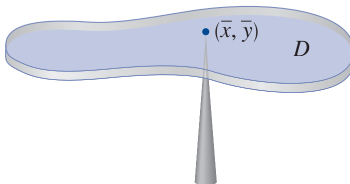


FIGURA 4

Como en el caso anterior, se define el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de tal modo que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. El significado físico es que la lámina se comporta como si su masa entera se concentrara en su centro de masa. Así, la lámina se balancea horizontalmente cuando es sostenida en su centro de masa (véase la figura 4).

5 Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa de la lámina que ocupa la región D y con función de densidad $\rho(x, y)$ son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)\, dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)\, dA$$

donde la masa m está dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

EJEMPLO 2 Halle la masa y centro de masa de una lámina triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$ si la función de densidad es $\rho(x, y) = 1 + 3y + y$.

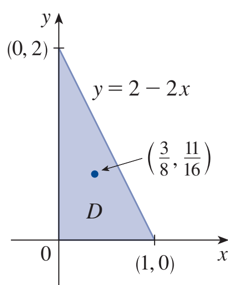


FIGURA 5

SOLUCIÓN El triángulo aparece en la figura 5. (Note que la ecuación de la frontera superior es $y = 2 - 2x$.) La masa de la lámina es

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= 4 \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

Así, las fórmulas en (5) dan

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)\, dA = \tfrac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\, dy\, dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3)\, dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)\, dA = \tfrac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \tfrac{1}{4} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[7x - 9\frac{x^2}{2} - x^3 + 5\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16}$$

El centro de masa está en el punto $\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$. ■

EJEMPLO 3 La densidad en cualquier punto en una lámina semicircular es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Encuentre el centro de masa de la lámina.

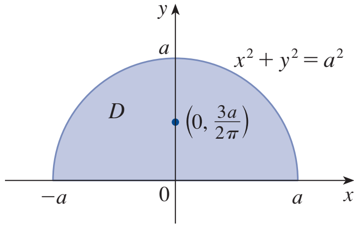


FIGURA 6

SOLUCIÓN Si se concibe la lámina como la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$. (Véase la figura 6.) Entonces, la distancia de un punto (x, y) al centro del círculo (el origen) es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, la función de densidad es

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

donde K es una constante. Tanto la función de densidad como la forma de la lámina sugieren que se conviertan a coordenadas polares. Entonces, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ y la región D está dada por $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Así, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y)\, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{a} (Kr)\, r\, dr\, d\theta = K \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\, dr \\ &= K\pi \frac{r^3}{3}\bigg]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

Tanto la lámina como la función de densidad son simétricas con respecto al eje y, así que el centro de masa debe estar en el eje y, es decir $\bar{x} = 0$. La coordenada y está dada por

Compare la ubicación del centro de masa del ejemplo 3 con el ejemplo 8.3.4, donde se determinó que el centro de masa de una lámina con la misma forma pero con densidad uniforme se localiza en el punto $(0, 4a/(3\pi))$.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)\, dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r \operatorname{sen}\theta\, (Kr)\, r\, dr\, d\theta \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{a} r^3\, dr = \frac{3}{\pi a^3} \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi} \end{aligned}$$

En consecuencia, el centro de masa se localiza en el punto $(0, 3a/(2\pi))$. ■

Momento de inercia

El **momento de inercia** (también llamado **segundo momento**) de una partícula de masa m alrededor de un eje se define como mr^2, donde r es la distancia de la partícula al eje. Se prolongará este concepto a una lámina con función de densidad $\rho(x, y)$ y que ocupa una región D procediendo como lo hizo para los momentos ordinarios. Divida D en pequeños rectángulos, aproxime el momento de inercia de cada subrectángulo alrededor del eje x y tome el límite de la suma cuando el número de subrectángulos aumente. El resultado es el **momento de inercia** de la lámina **alrededor del eje x**:

6 $$I_x = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$$

De igual manera, el **momento de inercia alrededor del eje y** es:

7 $$I_y = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$$

También es de interés considerar el **momento de inercia alrededor del origen**, llamado asimismo **momento polar de inercia**:

$$\boxed{8} \quad I_0 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2)\, \rho(x, y)\, dA$$

Nótese que $I_0 = I_x + I_y$.

EJEMPLO 4 Encuentre los momentos de inercia I_x, I_y, e I_0 de un disco homogéneo D con densidad $\rho(x, y) = \rho$, centro en el origen y radio a.

SOLUCIÓN La frontera de D es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y en coordenadas polares D es descrita por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant a$. Calcule primero I_0:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho\, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3\, dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

En vez de calcular I_x e I_y directamente, se usa los hechos de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (de la simetría del problema). Así,

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}$$ ■

En el ejemplo 4 se advierte que la masa del disco es

$$m = \text{densidad} \times \text{área} = \rho(\pi a^2)$$

así que el momento de inercia del disco alrededor del origen (como una rueda alrededor de su eje) puede escribirse como

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \tfrac{1}{2}(\rho\pi a^2)a^2 = \tfrac{1}{2}ma^2$$

Así, si se aumenta la masa o el radio del disco, se incrementa el momento de inercia. En general, el momento de inercia desempeña casi el mismo papel en el movimiento rotacional que el que desempeña la masa en el movimiento lineal. El momento de inercia de una rueda es lo que dificulta iniciar o detener la rotación de la rueda, así como la masa de un automóvil es lo que dificulta iniciar o detener el movimiento del vehículo.

El **radio de giro de una lámina alrededor de un eje** es el número R, tal que

$$\boxed{9} \qquad mR^2 = I$$

donde m es la masa de la lámina e I es el momento de inercia alrededor del eje dado. La ecuación 9 indica que si la masa de la lámina se concentrara en una distancia R desde el eje, el momento de inercia de esta "masa de punto" sería igual al momento de inercia de la lámina.

En particular, el radio de giro $\bar{\bar{y}}$ con respecto al eje x y el radio de giro $\bar{\bar{x}}$ con respecto al eje y están dados por las ecuaciones

$$\boxed{10} \qquad m\bar{\bar{y}}^2 = I_x \qquad m\bar{\bar{x}}^2 = I_y$$

Así, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ es el punto en el que la masa de la lámina puede concentrarse sin cambiar los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas. (Note la analogía con el centro de masa.)

EJEMPLO 5 Determine el radio de giro alrededor del eje x del disco del ejemplo 4.

SOLUCIÓN Como se indicó, la masa del disco es $m = \rho\pi a^2$, así que de las ecuaciones 10 se tiene

$$\bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Por tanto, el radio de giro alrededor del eje x es $\bar{\bar{y}} = \frac{1}{2}a$, lo cual es la mitad del radio del disco. ■

Probabilidad

En la sección 8.5 se considera la *función de densidad de probabilidad* f de una variable aleatoria continua X. Esto significa que $f(x) \geqslant 0$ para todas las x, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, y la probabilidad de que X se halle entre a y b se determina integrando f de a a b:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Ahora se considera un par de variables aleatorias continuas X y Y, como el período de vida de dos componentes de una máquina o la altura y peso de una mujer adulta elegidos al azar. La **función de densidad conjunta** de X y Y es una función f de dos variables tales que la probabilidad de que (X, Y) esté en una región D es

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$$

En particular, si la región es un rectángulo, la probabilidad de que X se ubique entre a y b, y Y se ubique entre c y d es

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

(Véase la figura 7.)

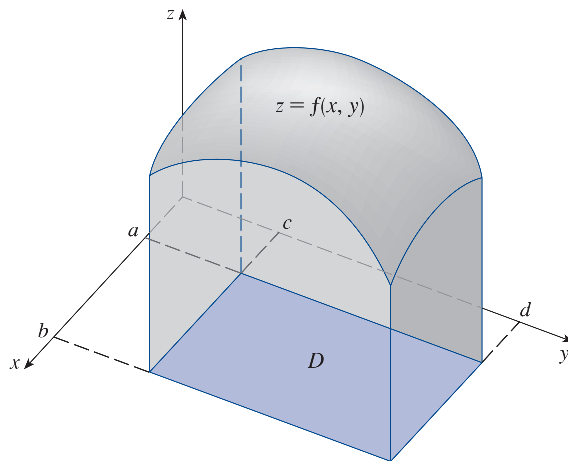


FIGURA 7
La probabilidad de que X se ubique entre a y b, y Y se ubique entre c y d, es el volumen que reside sobre el rectángulo $D = [a, b] \times [c, d]$ y bajo la gráfica de la función de densidad conjunta.

Como las probabilidades no son negativas y se miden en una escala de 0 a 1, la función de densidad conjunta tiene las propiedades siguientes:

$$f(x, y) \geqslant 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$$

Al igual que en el ejercicio 15.3.40, la integral doble en $\mathbb{R}^2$ es una integral impropia definida como el límite de las integrales dobles en círculos o cuadrados en expansión, y se puede escribir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

EJEMPLO 6 Si la función de densidad conjunta para X y Y está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

determine el valor de la constante C. Determine después $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

SOLUCIÓN Encuentre el valor de C cerciorándose de que la integral doble de f sea igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ fuera del rectángulo $[0, 10] \times [0, 10]$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0}^{10} \int_{0}^{10} C(x + 2y)\, dy\, dx = C \int_{0}^{10} \Big[xy + y^2\Big]_{y=0}^{y=10} dx$$

$$= C \int_{0}^{10} (10x + 100)\, dx = 1500C$$

Por tanto, $1500C = 1$, así que $C = \frac{1}{1500}$.

Ahora es posible calcular la probabilidad de que X sea a lo sumo de 7 y Y al menos de 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7} \int_{2}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{0}^{7} \int_{2}^{10} \tfrac{1}{1500}(x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \tfrac{1}{1500} \int_{0}^{7} \Big[xy + y^2\Big]_{y=2}^{y=10} dx = \tfrac{1}{1500} \int_{0}^{7} (8x + 96)\, dx$$

$$= \tfrac{868}{1500} \approx 0.5787$$

■

Suponga que X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_1(x)$ y Y una variable aleatoria con función de densidad $f_2(y)$. Entonces, X y Y se llaman **variables aleatorias independientes** si su función de densidad conjunta es el producto de sus funciones de densidad particulares:

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

En la sección 8.5 se modelaron tiempos de espera usando funciones exponenciales de densidad

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

donde μ es la media del tiempo de espera. En el ejemplo siguiente se considerará una situación con dos tiempos de espera independientes.

EJEMPLO 7 El gerente de una sala de cine determina que el tiempo promedio que los cinéfilos esperan en fila para comprar un boleto y ver la película de esta semana es de 10 minutos, y que el tiempo promedio que esperan para comprar palomitas es

de 5 minutos. Suponiendo que los tiempos de espera son independientes, determine la probabilidad de que un cinéfilo espere un total de menos de 20 minutos antes de ocupar su asiento.

SOLUCIÓN Suponiendo que tanto el tiempo de espera X para la compra de boletos como el tiempo de espera Y en la fila de la dulcería son modelados por funciones exponenciales de densidad de probabilidad, se pueden escribir las funciones de densidad particulares como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

Puesto que X y Y son independientes, la función de densidad conjunta es el producto:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & \text{si } x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se pide determinar la probabilidad de que $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

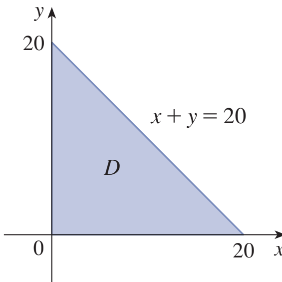


FIGURA 8

donde D es la región triangular que aparece en la figura 8. Así,

$$\begin{aligned} P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^{20}\int_0^{20-x} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5}\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{50}\int_0^{20} \Big[e^{-x/10}(-5)e^{-y/5}\Big]_{y=0}^{y=20-x} dx \\ &= \frac{1}{10}\int_0^{20} e^{-x/10}(1 - e^{(x-20)/5})\, dx \\ &= \frac{1}{10}\int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4}e^{x/10})\, dx \\ &= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476 \end{aligned}$$

Esto significa que aproximadamente 75% de los cinéfilos esperan menos de 20 minutos antes de ocupar su asiento. ■

Valores esperados

Recuerde de la sección 8.5 que si X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f, su *media* es

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Ahora bien, si X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta f, defina la **media de X** y la **media de Y**, también llamadas **valores esperados** de X y Y, como

11 $$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y)\, dA \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y)\, dA$$

Observe qué parecidas son las expresiones para μ_1 y μ_2 en (11) los momentos M_x y M_y de una lámina con función de densidad ρ en las ecuaciones 3 y 4. De hecho, se puede concebir la probabilidad como una masa continuamente distribuida. Se calcula la probabilidad como se calculó la masa, integrando una función de densidad. Y como la "masa de probabilidad" total es 1, las expresiones para $\bar{x}$ y $\bar{y}$ en (5) indican que se pueden concebir los valores esperados de X y Y, μ_1 y μ_2, como las coordenadas del "centro de masa" de la distribución de probabilidad.

En el ejemplo siguiente se tratará con distribuciones normales. Como en la sección 8.5, una variable aleatoria está *normalmente distribuida* si su función de densidad de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

donde μ es la media y σ la desviación estándar.

EJEMPLO 8 Una fábrica produce cojinetes de rodillos (de forma cilíndrica) que se venden con un diámetro de 4.0 cm y una longitud de 6.0 cm. De hecho, los diámetros X están normalmente distribuidos con una media de 4.0 cm y desviación estándar de 0.01 cm; mientras que las longitudes Y están normalmente distribuidas con una media de 6.0 cm y desviación estándar de 0.01 cm. Suponiendo que X y Y son independientes, escriba la función de densidad conjunta y grafíquela. Halle la probabilidad de que un cojinete aleatoriamente seleccionado de la línea de producción tenga una longitud o diámetro que difiera de la media en más de 0.02 cm.

SOLUCIÓN Se da que X y Y están normalmente distribuidas con $\mu_1 = 4.0$, $\mu_2 = 6.0$, y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.01$. Así, las funciones de densidad particulares para X y Y son

$$f_1(x) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-4)^2/0.0002} \qquad f_2(y) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(y-6)^2/0.0002}$$

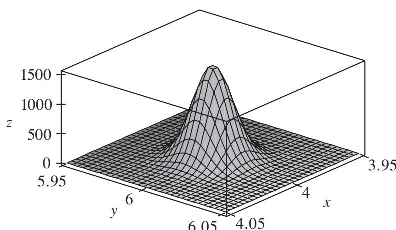


FIGURA 9
Gráfica de la función de densidad conjunta bivariada normal del ejemplo 8

Como X y Y son independientes, la función de densidad conjunta es el producto:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

$$= \frac{1}{0.0002\pi}\, e^{-(x-4)^2/0.0002} e^{-(y-6)^2/0.0002}$$

$$= \frac{5000}{\pi}\, e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}$$

Una gráfica de esta función se presenta en la figura 9.

Calcule primeramente la probabilidad de que tanto X como Y difieran de sus medias en menos de 0.02 cm. Al usar una calculadora o computadora para estimar la integral, se tiene

$$P(3.98 < X < 4.02,\ 5.98 < Y < 6.02) = \int_{3.98}^{4.02}\int_{5.98}^{6.02} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \frac{5000}{\pi}\int_{3.98}^{4.02}\int_{5.98}^{6.02} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}\, dy\, dx$$

$$\approx 0.91$$

Entonces, la probabilidad de que X o Y difiera de su media en más de 0.02 cm es de aproximadamente

$$1 - 0.91 = 0.09$$



15.4 EJERCICIOS

1. La carga eléctrica se distribuye en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 5$, $2 \leqslant y \leqslant 5$ de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Determine la carga total en el rectángulo.

2. La carga eléctrica se distribuye en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Determine la carga total en el disco.

3-10 Halle la masa y centro de masa de la lámina que ocupa la región D y que tiene la función de densidad ρ dada.

3. $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 1 \leqslant y \leqslant 4\}$; $\rho(x, y) = ky^2$

4. D es la región triangular encerrada por las rectas $x = 0$, $y = x$, y $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$

5. D es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$

6. D es la región triangular encerrada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$, y $x + 2y = 1$; $\rho(x, y) = x$

7. D está acotada por $y = 1 - x^2$ y $y = 0$; $\rho(x, y) = ky$

8. D está acotada por $y = x + 2$ y $y = x^2$; $\rho(x, y) = kx^2$

9. D está acotada por las curvas $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; $\rho(x, y) = xy$

10. D está encerrada por las curvas $y = 0$, y $y = \cos x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$; $\rho(x, y) = y$

---

11. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en el primer cuadrante. Determine su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia del eje x.

12. Determine el centro de masa de la lámina del ejercicio 11 si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de su distancia del origen.

13. La frontera de una lámina consta de los semicírculos $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = \sqrt{4 - x^2}$ junto con las porciones del eje x que los unen. Determine el centro de masa de la lámina si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia del origen.

14. Determine el centro de masa de la lámina del ejercicio 13 si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia del origen.

15. Determine el centro de masa de una lámina en forma de un triángulo rectángulo isósceles con lados iguales de longitud a si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto de la hipotenusa.

16. Una lámina ocupa la región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 2y$ pero fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Halle el centro de masa si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia del origen.

17. Halle los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 3.

18. Halle los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 6.

19. Halle los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 15.

20. Considere una aspa de ventilador cuadrada con lados de longitud 2 y la esquina inferior izquierda ubicada en el origen. Si la densidad del aspa es $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$, ¿es más difícil rotar el aspa alrededor del eje x o alrededor del eje y?

21-24 Una lámina con densidad constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa la región dada. Halle los momentos de inercia I_x y I_y y los radios de giro $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$.

21. El rectángulo $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant h$

22. El triángulo con vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$ y $(0, h)$

23. La parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ en el primer cuadrante

24. La región bajo la curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$

SAC **25-26** Use un sistema algebraico computacional para determinar la masa, centro de masa y momentos de inercia de la lámina que ocupa la región D y tiene la función de densidad dada.

25. D está encerrada por el lazo derecho de la rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$; $\rho(x, y) = x^2 + y^2$

26. $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant xe^{-x}, 0 \leqslant x \leqslant 2\}$; $\rho(x, y) = x^2y^2$

---

27. La función de densidad conjunta para un par de variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{en caso contario} \end{cases}$$

(a) Determine el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y \leqslant 1)$.

28. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es una función de densidad conjunta.
(b) Si X y Y son variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es la función f del inciso (a), halle
(i) $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}\right)$ (ii) $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant \frac{1}{2}\right)$
(c) Halle los valores esperados de X y Y.

29. Suponga que X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)} & \text{si } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ 0 & \text{en caso contario} \end{cases}$$

(a) Verifique que f es en efecto una función de densidad conjunta.
(b) Encuentre las probabilidades siguientes.
(i) $P(Y \geqslant 1)$ (ii) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 4)$
(c) Encuentre los valores esperados de X y Y.

30. (a) Una lámpara tiene dos focos, cada uno de un tipo con período de vida promedio de 1000 horas. Suponiendo que se puede calcular la probabilidad de falla de un foco mediante una función exponencial de densidad con media $\mu = 1000$, halle la probabilidad de que ambos focos de la lámpara fallen en menos de 1000 horas.
(b) Otra lámpara tiene un solo foco del mismo tipo que en el inciso (a). Si un foco se funde y es reemplazado por otro del mismo tipo, encuentre la probabilidad de que los dos focos fallen en menos de un total de 1000 horas.

SAC **31.** Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes, donde X está normalmente distribuida con una media de 45 y la desviación estándar de 0.5, y Y está normalmente distribuida con una media de 20 y desviación estándar de 0.1.
(a) Determine $P(40 \leqslant X \leqslant 50,\ 20 \leqslant Y \leqslant 25)$.
(b) Determine $P(4(X - 45)^2 + 100(Y - 20)^2 \leqslant 2)$.

32. Xavier y Yolanda tienen clases que terminan al mediodía y convienen en reunirse todos los días después de clases. Llegan a la cafetería en forma independiente. La hora de llegada de Xavier es X y la hora de llegada de Yolanda es Y, donde X y Y se miden en minutos después del mediodía. Las funciones de densidad particulares son

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(Xavier llega un poco después de mediodía y es más probable que llegue a tiempo que tarde. Yolanda siempre llega a las 12:10 de la tarde y es más probable que llegue tarde que a tiempo.) Después de su llegada, Yolanda espera a Xavier hasta media hora, pero él no la esperará. Determine la probabilidad de que se encuentren.

33. Cuando se estudia la propagación de una epidemia, se supone que la probabilidad de que un individuo contagiado propague la enfermedad a otro individuo no contagiado es una función de distancia entre ellos. Considere una ciudad circular con 10 km de radio, donde la población está uniformemente distribuida. Para un individuo no contagiado en un punto fijo $A(x_0, y_0)$, suponga que la función de probabilidad está dada por

$$f(P) = \tfrac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

donde $d(P, A)$ denota la distancia entre los puntos P y A.
(a) Suponga que la exposición de una persona a la enfermedad es la suma de las probabilidades de contraer la enfermedad por parte de todos los miembros de la población. Suponga que las personas contagiadas están uniformemente distribuidas en la ciudad, con k individuos contagiados por kilómetro cuadrado. Halle una integral doble que represente la exposición de una persona residente en A.
(b) Evalúe la integral para el caso en el que A es el centro de la ciudad y para el caso en que A se localiza en el extremo de la ciudad. ¿Dónde preferiría vivir usted?

15.5 Área de una superficie

En la sección 16.6 se tratará con áreas de superficies más generales, llamadas superficies paramétricas, así que esta sección no necesita ser cubierta si se cubre aquella.

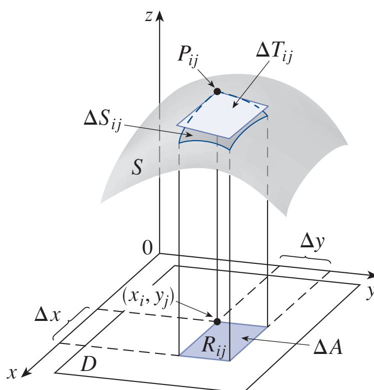


FIGURA 1

En esta sección se aplican las integrales dobles al problema de calcular el área de una superficie. En la sección 8.2 se determinó el área de un tipo muy especial de superficie (una superficie de revolución) por los métodos del cálculo de una variable. Aquí se calculará el área de una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, la gráfica de una función de dos variables.

Sea S una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, donde f tiene derivadas parciales continuas. Para mayor facilidad en la derivación de la fórmula del área de superficie, se supondrá que $f(x, y) \geqslant 0$ y el dominio D de f es un rectángulo. Se divide D en pequeños rectángulos R_{ij} con área $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$. Si (x_i, y_j) es la esquina de R_{ij} más cercana al origen, sea $P_{ij}(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ el punto en S directamente arriba de él (véase la figura 1). El plano tangente a S en P_{ij} es una aproximación de S cerca de P_{ij}. Así, el área ΔT_{ij} de la parte de este plano tangente (un paralelogramo) que se halla directamente arriba de R_{ij} es una aproximación del área ΔS_{ij} de la parte de S que se halla directamente arriba de R_{ij}. De este modo, la suma $\Sigma\,\Sigma\, \Delta T_{ij}$ es una aproximación del área total de S, y esta aproximación parece mejorar conforme aumenta el número de rectángulos. En consecuencia, se define el **área de superficie** de S como

1
$$A(S) = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

Para determinar una fórmula más conveniente que la ecuación 1 con fines de cálculo, sean **a** y **b** los vectores que parten de P_{ij} y se tienden a lo largo de los lados del paralelogramo con área ΔT_{ij}. (Véase la figura 2.) Entonces, $\Delta T_{ij} = |\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}\,|$. Recuerde de la sección 14.3 que $f_x(x_i, y_j)$ y $f_y(x_i, y_j)$ son las pendientes de las rectas tangentes que pasan por P_{ij} en las direcciones de **a** y **b**. Por tanto,

$$\mathbf{a} = \Delta x\, \mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\, \Delta x\, \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\, \mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\, \Delta y\, \mathbf{k}$$

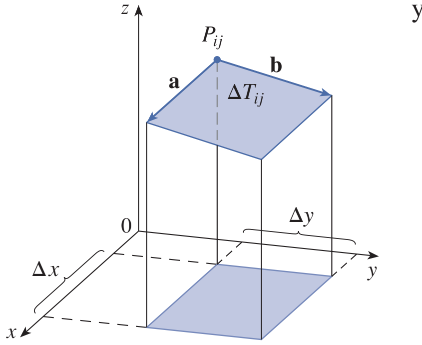


FIGURA 2

y

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\,\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\,\Delta y \end{vmatrix}$$

$$= -f_x(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y\,\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y\,\mathbf{j} + \Delta x\,\Delta y\,\mathbf{k}$$

$$= [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,\Delta A$$

Así, $$\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\,\Delta A$$

De la definición 1 se tiene entonces

$$A(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1}\,\Delta A$$

y por la definición de una integral doble se obtiene la fórmula siguiente.

2 El área de la superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde f_x y f_y son continuas, es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

En la sección 16.6 se verificará que esta fórmula es congruente con la fórmula previa para el área de una superficie de revolución. Si se usa la notación alternativa para derivadas parciales, es posible reescribir la fórmula 2 como sigue:

3 $$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Nótese la semejanza entre la fórmula de área de superficie en la ecuación 3 y la fórmula de longitud de arco de la sección 8.1:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

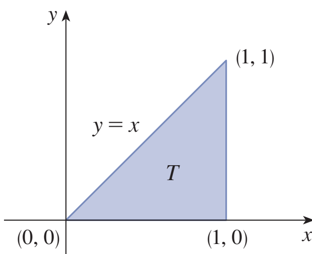


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Determine el área de la superficie $z = x^2 + 2y$ que se encuentra sobre la región triangular T en el plano xy con vértices (0. 0), (1, 0) y (1, 1).

SOLUCIÓN La región T aparece en la figura 3 y está descrita por

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

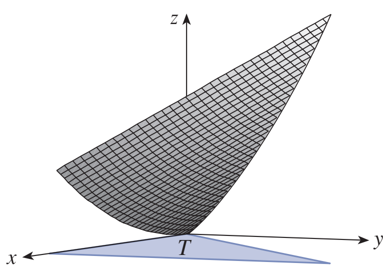


FIGURA 4

Usando la fórmula 2 con $f(x, y) = x^2 + 2y$ se obtiene

$$A = \iint_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1}\, dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5}\, dx = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{2}{3}(4x^2 + 5)^{3/2}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{12}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$$

La figura 4 muestra la porción de la superficie cuya área se acaba de calcular. ■

EJEMPLO 2 Halle el área del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra bajo el plano $z = 9$.

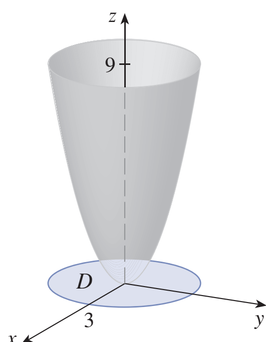


FIGURA 5

SOLUCIÓN El plano interseca el paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Así, la superficie dada se encuentra sobre el disco D con centro en el origen y radio 3. (Véase la figura 5.) Usando la fórmula 5 se tiene

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Al convertir a coordenadas polares se obtiene

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \tfrac{1}{8}\sqrt{1 + 4r^2}\, (8r)\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$ ■

15.5 EJERCICIOS

1-12 Determine el área de la superficie.

1. La parte del plano $5x + 3y - z + 6 = 0$ que está sobre el rectángulo $[1, 4] \times [2, 6]$

2. La parte del plano $6x + 4y + 2z = 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 25$

3. La parte del plano $3x + 2y - z = 6$ que está en el primer octante

4. La parte de la superficie $2y + 4z - x^2 = 5$ que está sobre el triángulo con vértices (0, 0), (2, 0) y (2, 4)

5. La parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano $z = -2$

6. La parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que está sobre el cuadrado con vértices (0, 0), (1, 0), (0, 1) y (1, 1)

7. La parte del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está sobre el rectángulo con vértices (0, 0), (4, 0), (0, 2) y (4, 2)

8. La parte de la superficie $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está sobre el triángulo con vértices (0, 0), (0, 1) y (2, 1)

9. La parte de la superficie $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

10. La parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy

11. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y sobre el plano xy

12. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$

13-14 Determine el área de la superficie con cuatro decimales expresando el área en términos de una integral simple y usando su calculadora para estimar la integral.

13. La parte de la superficie $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$ que está sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$

14. La parte de la superficie $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

15. (a) Use la regla del punto medio para integrales dobles (véase la sección 15.1) con cuatro cuadrados para estimar la porción del área de la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está sobre el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar el área de superficie del inciso (a) con cuatro decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).

16. (a) Use la regla del punto medio para integrales dobles con $m = n = 2$ para estimar el área de la superficie $z = xy + x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar el área de superficie del inciso (a) con cuatro decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).

SAC **17.** Determine el área exacta de la superficie $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 1$.

SAC **18.** Determine el área exacta de la superficie

$$z = 1 + x + y + x^2 \qquad -2 \leq x \leq 1 \qquad -1 \leq y \leq 1$$

Ilustre graficando la superficie.

SAC **19.** Determine con cuatro decimales el área de la parte de la superficie $z = 1 + x^2y^2$ que está sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

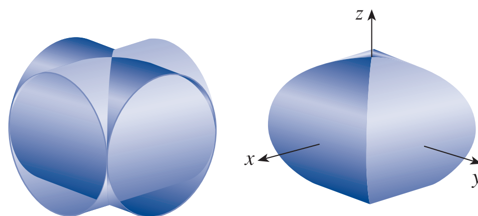
SAC **20.** Determine con cuatro decimales el área de la parte de la superficie $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está sobre el cuadrado $|x| + |y| \leq 1$. Ilustre graficando esta parte de la superficie.

21. Demuestre que el área de la parte del plano $z = ax + by + c$ que se proyecta en la región D en el plano xy con área $A(D)$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\, A(D)$.

22. Si usted intenta usar la fórmula 2 para hallar el área de la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, tiene un pequeño problema, porque la integral doble es impropia. De hecho, el integrando tiene una discontinuidad infinita en cada punto del círculo frontera $x^2 + y^2 = a^2$. Sin embargo, la integral puede calcularse como el límite de la integral en el disco $x^2 + y^2 \leq t^2$ cuando $t \to a^-$. Use este método para demostrar que el área de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.

23. Determine el área de la parte finita del paraboloide $y = x^2 + z^2$ cortado por el plano $y = 25$. [*Sugerencia*: proyecte la superficie en el plano xz.]

24. La figura muestra la superficie creada cuando el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ interseca el cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Determine el área de esta superficie.



15.6 Integrales triples

Así como se definieron las integrales simples para funciones de una variable y las integrales dobles para funciones de dos variables, se pueden definir integrales triples para funciones de tres variables. Se tratará primero el caso más simple, en el que f es definida en una caja rectangular:

1 $$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$$

El primer paso es dividir B en subcajas. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho Δx, dividiendo $[c, d]$ en m subintervalos de ancho Δy y dividiendo $[r, s]$ en n subintervalos de ancho Δz. Los planos que pasan por los puntos extremos de estos subintervalos paralelos a los planos de coordenadas dividen la caja B en lmn subcajas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

que aparecen en la figura 1. Cada subcaja tiene volumen $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$.

Luego se forma la **triple suma de Riemann**

2 $$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

donde el punto muestra $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está en B_{ijk}. Por analogía con la definición de la integral doble (15.1.5), se define la integral triple como el límite de las triples sumas de Riemann en (2).

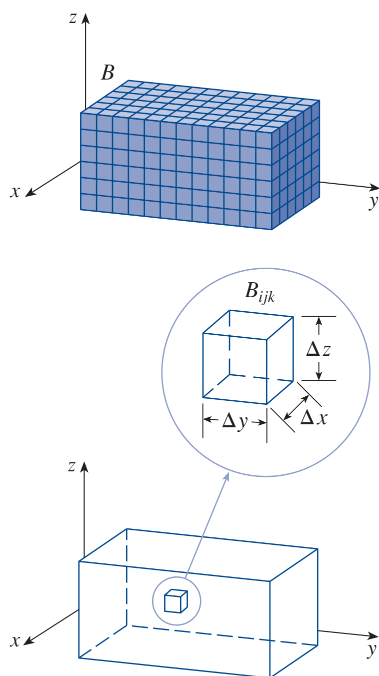


FIGURA 1

3 Definición La integral triple de f en la caja B es

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

si este límite existe.

Otra vez, la integral triple siempre existe si f es continua. Se puede elegir como punto muestra cualquier punto en la subcaja, pero si se escoge el punto (x_i, y_j, z_k) se obtiene una expresión de apariencia más simple para la integral triple:

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V$$

Lo mismo que en el caso de las integrales dobles, el método práctico para evaluar las integrales triples es expresarlas como integrales iteradas, de esta manera.

4 Teorema de Fubini para integrales triples Si f es continua en la caja rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

La integral iterada del miembro derecho del teorema de Fubini significa que primero se integra con respecto a x (manteniendo fijas a y y z), luego se integra con respecto a y (manteniendo fija z) y finalmente se integra con respecto a z. Hay otros cinco órdenes posibles en que se puede integrar, todos los cuales dan el mismo valor. Por ejemplo, si se integra con respecto a y, luego a z y después a x, se tiene

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

EJEMPLO 1 Evalúe la integral triple $\iiint_B xyz^2\, dV$, donde B es la caja rectangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$$

SOLUCIÓN Se podría usar cualesquiera de los seis posibles órdenes de integración. Si se decide integrar con respecto a x, luego a y, y después a z, se obtiene

$$\iiint_B xyz^2\, dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy\, dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\, dy\, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\, dz = \frac{z^3}{4} \Big]_0^3 = \frac{27}{4}$$ ■

Ahora se define **la integral triple en una región acotada general E** en el espacio tridimensional (un sólido) siguiendo casi el mismo procedimiento que se usó para las integrales dobles (15.2.2). Se encierra E en una caja B del tipo dado por la ecuación 1. Luego se define F de tal forma que coincida con f en E, aunque sea 0 para puntos en B fuera de E. Por definición,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_B F(x, y, z)\, dV$$

Esta integral existe si f es continua y la frontera de E es "razonablemente suave". La integral triple tiene en esencia las mismas propiedades que la integral doble (propiedades 6-9 de la sección 15.2).

Se restringe la atención a funciones continuas f y a ciertos tipos simples de regiones. Se dice que una región sólida E es de **tipo 1** si se sitúa entre las gráficas de dos funciones continuas de x y y, es decir

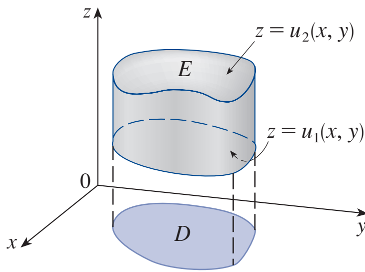


FIGURA 2
Región sólida tipo 1

5 $$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xy, como se muestra en la figura 2. Note que la frontera superior del sólido E es la superficie con ecuación $z = u_2(x, y)$, mientras que la frontera inferior es la superficie $z = u_1(x, y)$.

Por el mismo tipo de argumento que llevó a (15.2.3), se puede demostrar que si E es una región tipo 1 dada por la ecuación 5, entonces

6 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

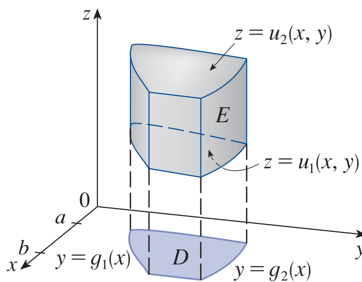


FIGURA 3
Región sólida tipo 1 donde la proyección D es una región plana tipo 1

El significado de la integral interior en el miembro derecho de la ecuación 6 es que x y y se mantienen fijas, y por tanto $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ se consideran constantes, mientras que $f(x, y, z)$ se integra con respecto a z.

En particular, si la proyección D de E en el plano xy es una región plana tipo 1 (como en la figura 3), entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

y la ecuación 6 se convierte en

7 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

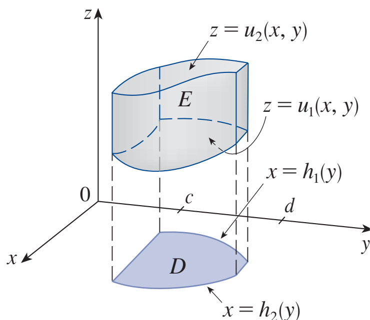


FIGURA 4
Región sólida tipo 1 con una proyección tipo II

Si por otro lado, D es una región plana tipo II (como en la figura 4), entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

y la ecuación 6 se convierte en

8 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

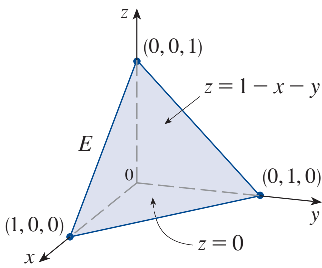


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Evalúe $\iiint_B z\,dV$, donde E es el tetraedro sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

SOLUCIÓN Cuando se establece una integral triple, es prudente dibujar dos diagramas: uno de la región sólida E (véase la figura 5) y otro de su proyección D en el plano xy (véase la figura 6). La frontera inferior del tetraedro es el plano $z = 0$ y la frontera superior es el plano $x + y + z = 1$ (o $z = 1 - x - y$), así que se usa $u_1(x, y) = 0$ y $u_2(x, y) = 1 - x - y$ en la fórmula 7. Observe que los planos $x + y + z = 1$ y $z = 0$ intersecan en la recta $x + y = 1$ (o $y = 1 - x$) en el plano xy. Así, la proyección de E es la región triangular que aparece en la figura 6, y se tiene

$$\boxed{9} \qquad E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$$

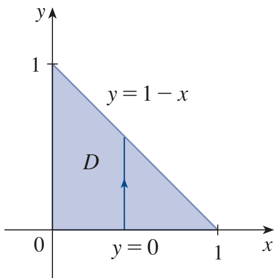


FIGURA 6

Esta descripción de E como región tipo 1 permite evaluar la integral como sigue:

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\,dy\,dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\,dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$ ■

Una región sólida E es de **tipo 2** si es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leqslant x \leqslant u_2(y, z)\}$$

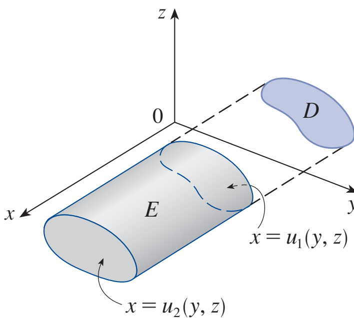


FIGURA 7
Región tipo 2

Donde, esta vez, D es la proyección de E en el plano yz (véase la figura 7). La superficie posterior es $x = u_1(y, z)$, la superficie anterior es $x = u_2(y, z)$ y se tiene

$$\boxed{10} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\,dx\right] dA$$

Por último, una región **tipo 3** es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leqslant y \leqslant u_2(x, z)\}$$

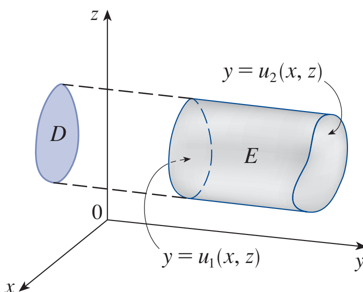


FIGURA 8
Región tipo 3

donde D es la proyección de E en el plano xz, $y = u_1(x, z)$ es la superficie izquierda y $y = u_2(x, z)$ es la superficie derecha (véase la figura 8). Para este tipo de región se tiene

$$\boxed{11} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\,dy\right] dA$$

En cada una de las ecuaciones 10 y 11 hay dos posibles expresiones para la integral, dependiendo de si D es una región plana tipo I o tipo II (en correspondencia con las ecuaciones 7 y 8).

EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\,dV$, donde E es la región acotada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$.

SOLUCIÓN El sólido E se muestra en la figura 9. Si se considera una región tipo 1, se debe considerar su proyección D_1 en el plano xy, que es la región parabólica en la figura 10. (La traza de $y = x^2 + z^2$ en el plano $z = 0$ es la parábola $y = x^2$.)

TEC Visual 15.6 ilustra cómo regiones sólidas (incluida la de la figura 9) se proyectan en planos de coordenadas.

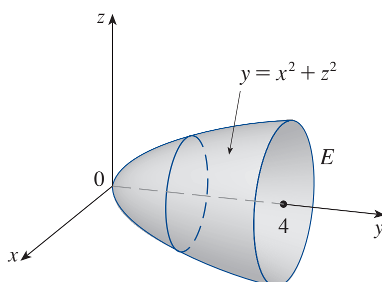


FIGURA 9
Región de integración

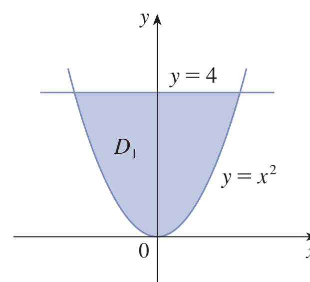


FIGURA 10
Proyección en el plano xy

De $y = x^2 + z^2$ se obtiene $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, así que la superficie frontera inferior de E es $z = -\sqrt{y - x^2}$ y la superficie superior es $z = \sqrt{y - x^2}$. Por tanto, la descripción de E como región tipo 1 es

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4,\ -\sqrt{y - x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{y - x^2}\right\}$$

y se obtiene

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

Aunque esta expresión es correcta, es extremadamente difícil de evaluar. Así, se considera en su lugar a E como región tipo 3. En este caso, su proyección D_3 en el plano xz es el disco $x^2 + z^2 \leqslant 4$ que aparece en la figura 11.

Entonces la frontera izquierda de E es el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y la frontera derecha es el plano $y = 4$, así que si se toma $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ y $u_2(x, z) = 4$ en la ecuación 11 se tiene

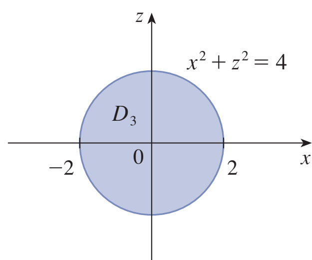


FIGURA 11
Proyección en el plano xz

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy\right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

Aunque esta integral podría escribirse como

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

es más fácil convertir a coordenadas polares en el plano xz: $x = r\cos\theta$, $z = r \operatorname{sen}\theta$. Esto da

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr$$

$$= 2\pi\left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}$$ ■

⊘ El paso más difícil para evaluar una integral triple es establecer una expresión para la región de integración (como la ecuación 9 del ejemplo 2). Recuerde que los límites de integración en la integral interior contienen a lo sumo dos variables, los límites de integración en la integral intermedia contienen a lo sumo una variable y los límites de integración en la integral exterior deben ser constantes.

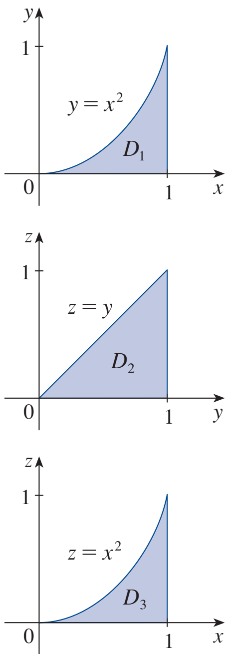


FIGURA 12
Proyecciones de E

EJEMPLO 4 Exprese la integral iterada $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$ como una integral triple y después reescríbala como integral iterada en un orden diferente, integrando primero con respecto a x, luego a z y después a y.

SOLUCIÓN Se puede escribir

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2, 0 \leqslant z \leqslant y\}$. Esta descripción de E nos permite escribir proyecciones en los tres planos de coordenadas, como sigue:

en el plano xy: $\quad D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

$\quad = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1\}$

en el plano yz: $\quad D_2 = \{(y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant y\}$

en el plano xz: $\quad D_3 = \{(x, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x^2\}$

De los trazos resultantes de las proyecciones en la figura 12 se obtiene el sólido E de la figura 13. Se ve que este es el sólido encerrado por los planos $z = 0$, $x = 1$, $y = z$, y el cilindro parabólico $y = x^2$ (o $x = \sqrt{y}$).

Si se integra primero con respecto a x, luego a z y después a y, se usa una descripción alterna de E:

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant y, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1\}$$

Así,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$$

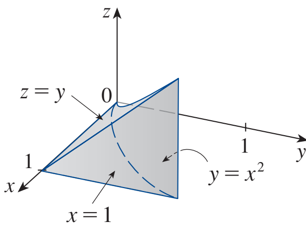


FIGURA 13
El sólido E

Aplicaciones de integrales triples

Recuerde que si $f(x) \geqslant 0$, la integral simple $\int_a^b f(x)\, dx$ representa el área bajo la curva, $y = f(x)$ de a a b, y si $f(x, y) \geqslant 0$, la integral doble $\iint_D f(x, y)\, dA$ representa el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre D. La correspondiente interpretación de la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$, donde $f(x, y, z) \geqslant 0$, no es muy útil, porque sería el "hipervolumen" de un objeto tetradimensional y, desde luego, eso es muy difícil de visualizar. (Recuerde que E es solo el *dominio* de la función f; la gráfica de f reside en el espacio tetradimensional.) No obstante, la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ puede interpretarse de diferentes maneras en diversas situaciones físicas, dependiendo de las interpretaciones físicas de x, y, z y $f(x, y, z)$.

Comience con el caso especial en el que $f(x, y, z) = 1$ para todos los puntos en E. La integral triple representa entonces el volumen de E:

12 $$V(E) = \iiint_E dV$$

Por ejemplo, esto puede verse en el caso de una región tipo 1 poniendo $f(x, y, z) = 1$ en la fórmula 6:

$$\iiint_E 1\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)]\, dA$$

y por la sección 15.2 se sabe que esto representa el volumen que se encuentra entre las superficies $z = u_1(x, y)$ y $z = u_2(x, y)$.

EJEMPLO 5 Use una integral triple para determinar el volumen del tetraedro T acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, y $z = 0$.

SOLUCIÓN El tetraedro T y su proyección D en el plano xy aparecen en las figuras 14 y 15, respectivamente. La frontera inferior de T es el plano $z = 0$ y la frontera superior es el plano $x + 2y + z = 2$, es decir $z = 2 - x - 2y$.

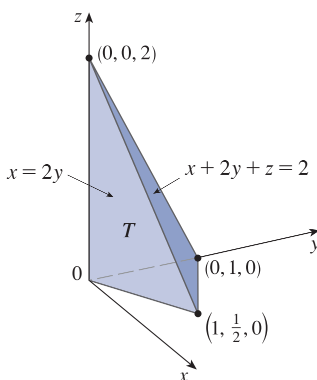


FIGURA 14

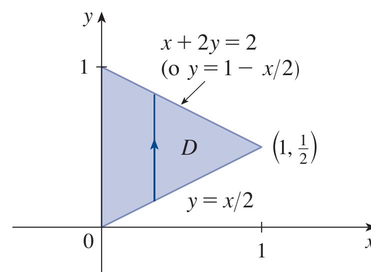


FIGURA 15

Por tanto, se tiene

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx = \tfrac{1}{3}$$

por el mismo cálculo del ejemplo 15.2.4.

(Adviértase que no es necesario usar integrales triples para calcular volúmenes. Simplemente ofrecen un método alternativo para establecer el cálculo.) ■

Todas las aplicaciones de las integrales dobles de la sección 15.4 pueden prolongarse inmediatamente a las integrales triples. Por ejemplo, si la función de densidad de un objeto sólido que ocupa la región E es $\rho(x, y, z)$, en unidades de masa por unidad de volumen, en cualquier punto dado (x, y, z), entonces su **masa** es

13 $$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

y sus **momentos** alrededor de los tres planos de coordenadas son

14 $$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

El **centro de masa** se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

15 $$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Si la densidad es constante, el centro de masa del sólido se llama **centroide** de E. Los **momentos de inercia** alrededor de los tres ejes de coordenadas son

$$\boxed{16} \quad I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,dV \qquad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\,dV$$

Como en la sección 15.4, la **carga eléctrica** total en un objeto sólido que ocupa una región E y con densidad de carga $\sigma(x, y, z)$ es

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)\,dV$$

Si se tienen tres variables aleatorias continuas X, Y y Z, su **función de densidad conjunta** es una función de tres variables tal que la probabilidad de que (X, Y, Z) resida en E es

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z)\,dV$$

En particular,

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d,\ r \leqslant Z \leqslant s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

La función de densidad conjunta satisface

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx = 1$$

EJEMPLO 6 Halle el centro de masa de un sólido de densidad constante acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$ y $x = 1$.

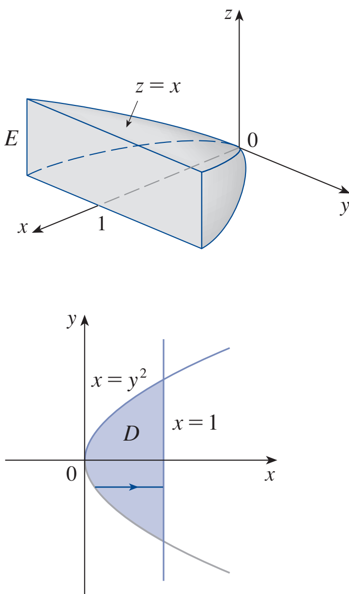


FIGURA 16

SOLUCIÓN El sólido E y su proyección en el plano xy aparecen en la figura 16. Las superficies inferior y superior de E son los planos $z = 0$ y $z = x$, así que se describe E como una región tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1,\ y^2 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant x\}$$

Entonces, si la densidad es $\rho(x, y, z) = \rho$, la masa es

$$m = \iiint_E \rho\,dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x \rho\,dz\,dx\,dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x\,dx\,dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} (1 - y^4)\,dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4)\,dy$$

$$= \rho\left[y - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4\rho}{5}$$

Debido a la simetría de E y ρ respecto al plano xz, se puede decir de inmediato que $M_{xz} = 0$, y por tanto $\bar{y} = 0$. Los otros momentos son

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_{0}^{x} x\rho\, dz\, dx\, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{2\rho}{3} \int_{0}^{1} (1 - y^6)\, dy = \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{7}$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_{0}^{x} z\rho\, dz\, dx\, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx\, dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy$$

$$= \frac{\rho}{3} \int_{0}^{1} (1 - y^6)\, dy = \frac{2\rho}{7}$$

En consecuencia, el centro de masa es

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left(\tfrac{5}{7}, 0, \tfrac{5}{14} \right)$$ ■

15.6 EJERCICIOS

1. Evalúe la integral del ejemplo 1 integrando primero con respecto a y, luego a z y después a x.

2. Evalúe la integral $\iiint_E (xz - y^3)\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

usando tres diferentes órdenes de integración.

3-8 Evalúe la integral iterada.

3. $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)\, dx\, dy\, dz$

4. $\int_0^1 \int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy\, dz\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \int_0^{x} \cos(x + y + z)\, dz\, dx\, dy$

6. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y\, dy\, dz\, dx$

7. $\int_0^{\pi} \int_0^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \operatorname{sen} x\, dy\, dz\, dx$

8. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\, dz\, dy\, dx$

9-18 Evalúe la integral triple.

9. $\iiint_E y\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant x, x - y \leqslant z \leqslant x + y\}$$

10. $\iiint_E e^{z/y}\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant xy\}$$

11. $\iiint_E 2x\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2}, 0 \leqslant z \leqslant y\}$$

12. $\iiint_E xy\, dV$, donde E está acotado por los cilindros parabólicos $y = x^2$ y $x = y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = x + y$

13. $\iiint_E 6xy\, dV$, donde E reside bajo el plano $z = 1 + x + y$, y sobre la región en el plano xy acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, y $x = 1$

14. $\iiint_E (x - y)\, dV$, donde E está encerrado por las superficies $z = x^2 - 1$, $z = 1 - x^2$, $y = 0$, y $y = 2$

15. $\iiint_T y^2\, dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$

16. $\iiint_T xz\, dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(0, 0, 1)$

17. $\iiint_E x\, dV$, donde E está acotado por el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$

18. $\iiint_E z\, dV$, donde E está acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 3x$ y $z = 0$ en el primer octante

19-22 Use una integral triple para hallar el volumen del sólido dado.

19. El tetraedro encerrado por los planos de coordenadas y el plano $2x + y + z = 4$

20. El sólido encerrado por los paraboloides $y = x^2 + z^2$ y $y = 8 - x^2 - z^2$

21. El sólido encerrado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $z = 0$ y $y + z = 1$

22. El sólido encerrado por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y los planos $y = -1$, y $y + z = 4$

23. (a) Expese el volumen de la cuña en el primer octante cortada del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ por los planos $y = x$ y $x = 1$ como una integral triple.

SAC (b) Use la tabla de integrales (en las páginas de referencia 6-10) o un sistema algebraico computacional para determinar el valor exacto de la integral triple del inciso (a).

24. (a) En la **regla del punto medio para integrales triples** se usa una triple suma de Riemann para aproximar una integral triple en una caja B, donde $f(x, y, z)$ se evalúa en el centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ de la caja B_{ijk}. Use la regla del punto medio para estimar $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, donde B es el cubo definido por $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant 4$. Divida B en ocho cubos de igual tamaño.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar la integral del inciso (a) al entero más cercano. Compare con la respuesta del inciso (a).

25-26 Use la regla del punto medio para integrales triples (ejercicio 24) para estimar el valor de la integral. Divida B en ocho subcajas de igual tamaño.

25. $\iiint_B \cos(xyz)\, dV$, donde $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$

26. $\iiint_B \sqrt{x}\, e^{xyz}\, dV$, donde $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2\}$

27-28 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

27. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$

29-32 Exprese la integral $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ como una integral iterada de seis maneras diferentes, donde E es el sólido acotado por las superficies dadas.

29. $y = 4 - x^2 - 4z^2$, $y = 0$

30. $y^2 + z^2 = 9$, $x = -2$, $x = 2$

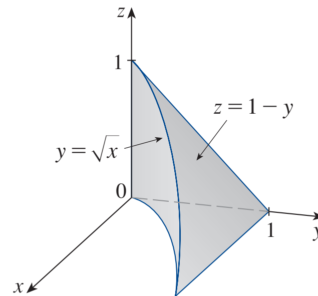
31. $y = x^2$, $z = 0$, $y + 2z = 4$

32. $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$, $x + y - 2z = 2$

33. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

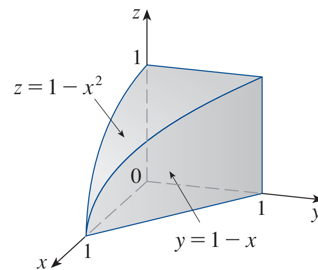
Reescriba esta integral como una integral iterada equivalente en los otros cinco órdenes.



34. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

Reescriba esta integral como una integral iterada equivalente en los otros cinco órdenes.



35-36 Escriba otras cinco integrales iteradas iguales a la integral iterada dada.

35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

36. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

37-38 Evalúe la integral triple usando solo interpretación geométrica y simetría.

37. $\iiint_C (4 + 5x^2yz^2)\, dV$, donde C es la región cilíndrica $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $-2 \leqslant z \leqslant 2$

38. $\iiint_B (z^3 + \operatorname{sen} y + 3)\, dV$, donde B es la pelota unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$

39-42 Determine la masa y el centro de masa del sólido E con la función de densidad ρ dada.

39. E se encuentra sobre el plano xy y bajo el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$; $\rho(x, y, z) = 3$

40. E está acotado por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $x + z = 1$, $x = 0$ y $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$

41. E es el cubo dado por $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

42. E es el tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

43-46 Suponga que el sólido tiene densidad constante k

43. Determine los momentos de inercia para un cubo cuyos lados miden L si un vértice se localiza en el origen y tres aristas se tienden a lo largo de los ejes de coordenadas.

44. Determine los momentos de inercia para un ladrillo rectangular con dimensiones a, b y c, y masa M si el centro del ladrillo está situado en el origen y las aristas son paralelas a los ejes de coordenadas.

45. Determine el momento de inercia alrededor del eje z del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

46. Determine el momento de inercia alrededor del eje z del cono sólido $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h$.

47-48 Establezca, pero no evalúe, expresiones integrales para (a) la masa, (b) el centro de masa y (c) el momento de inercia alrededor del eje z.

47. El sólido del ejercicio 21; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

48. El hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

SAC **49.** Sea E el sólido en el primer octante acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use un sistema algebraico computacional para hallar los valores exactos de las cantidades para E siguientes.
(a) La masa
(b) El centro de masa
(c) El momento de inercia alrededor del eje z

SAC **50.** Si E es el sólido del ejercicio 18 con función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine las cantidades siguientes, con tres decimales.
(a) La masa
(b) El centro de masa
(c) El momento de inercia alrededor del eje z

51. La función de densidad conjunta para las variables aleatorias X, Y y Z es $f(x, y, z) = Cxyz$ si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$, y $f(x, y, z) = 0$, en caso contrario.
(a) Determine el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y + Z \leqslant 1)$.

52. Suponga que X, Y y Z son variables aleatorias con función de densidad conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0.5x+0.2y+0.1z)}$ si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, y $f(x, y, z) = 0$, en caso contrario.
(a) Determine el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.

53-54 El **valor promedio** de una función $f(x, y, z)$ en una región sólida E se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E. Por ejemplo, si ρ es una función de densidad, entonces ρ_{prom} es la densidad promedio de E.

53. Halle el valor promedio de la función $f(x, y, z) = xyz$ en el cubo con longitud de lados L que reside en el primer octante con un vértice en el origen y aristas paralelas a los ejes de coordenadas.

54. Halle la altura promedio de los puntos en el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$

55. (a) Encuentre la región E para la integral triple

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

es un máximo.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para calcular el valor máximo exacto de la integral triple del inciso (a).

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

VOLÚMENES DE HIPERESFERAS

En este proyecto se determinarán fórmulas para el volumen encerrado por una hiperesfera en el espacio n dimensional.

1. Use una integral doble y sustitución trigonométrica, junto con la fórmula 64 de la tabla de integrales, para determinar el área de un círculo con radio r.
2. Use una integral triple y sustitución trigonométrica para determinar el volumen de una esfera con radio r.
3. Use una integral cuádruple para determinar el volumen (tetradimensional) encerrado por la hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ en $\mathbb{R}^4$. (Use solo sustitución trigonométrica y las fórmulas de reducción para $\int \text{sen}^n x\, dx$ o $\int \cos^n x\, dx$.)
4. Use una integral de múltiple para determinar el volumen encerrado por una hiperesfera de radio r en el espacio n dimensional $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: las fórmulas son diferentes para n pares y n impares.]

15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas

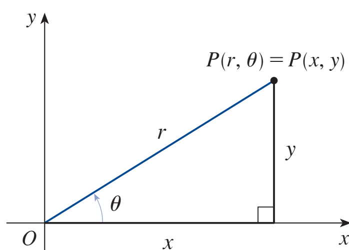


FIGURA 1

En geometría plana, el sistema de coordenadas polares se usa para dar una descripción conveniente de ciertas curvas y regiones. (Véase la sección 10.3.) La figura 1 permite recordar la relación entre coordenadas polares y cartesianas. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), de la figura se deduce que

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

En tres dimensiones hay un sistema de coordenadas, llamado *coordenadas cilíndricas*, que es similar a las coordenadas polares y da descripciones convenientes de algunas superficies y sólidos de ocurrencia común. Como se verá, algunas integrales triples son mucho más fáciles de evaluar en coordenadas cilíndricas.

Coordenadas cilíndricas

En el **sistema de coordenadas cilíndricas**, un punto P en el espacio tridimensional es representado por la terna ordenada (r, θ, z), donde r y θ son coordenadas polares de la proyección de P en el plano xy, y z es la distancia dirigida del plano xy a P. (Véase la figura 2.)

Para convertir de coordenadas cilíndricas a rectangulares, se usan las ecuaciones

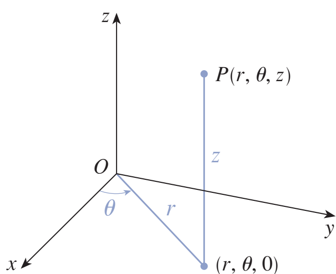


FIGURA 2
Las coordenadas cilíndricas de un punto

1 $$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z$$

mientras que para convertir de coordenadas rectangulares a cilíndricas se usan

2 $$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

EJEMPLO 1

(a) Trace el punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ y determine sus coordenadas rectangulares.
(b) Encuentre las coordenadas cilíndricas del punto con coordenadas rectangulares $(3, -3, -7)$.

SOLUCIÓN

(a) El punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ se traza en la figura 3. De las ecuaciones 1, sus coordenadas rectangulares son

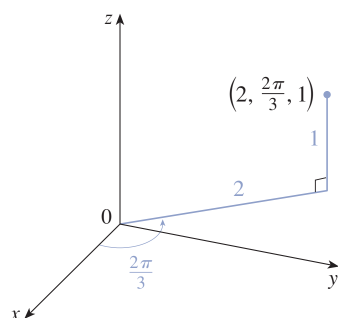


FIGURA 3

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

Así, el punto es $\left(-1, \sqrt{3}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares.

(b) De las ecuaciones 2 se tiene

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1 \quad \text{de modo que} \quad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Por tanto, un conjunto de coordenadas cilíndricas es $\left(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7\right)$. Otro es $\left(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7\right)$. Como en el caso de las coordenadas polares, las opciones son infinitas. ■

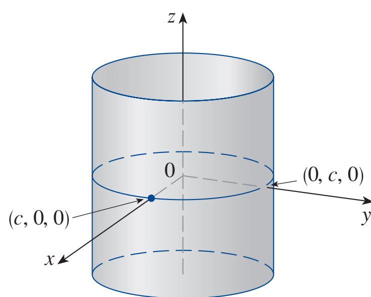


FIGURA 4
$r = c$, un cilindro

Las coordenadas cilíndricas son útiles en problemas que implican simetría alrededor de un eje, y se escoge el eje z para coincidir con este eje de simetría. Por ejemplo, el eje del cilindro circular con ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ es el eje z. En coordenadas cilíndricas este cilindro tiene la simple ecuación $r = c$. (Véase la figura 4.) Esta es la razón del nombre coordenadas "cilíndricas".

EJEMPLO 2 Describa la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = r$.

SOLUCIÓN La ecuación indica que el valor z, o altura, de cada punto en la superficie es el mismo que r, la distancia desde el punto al eje z. Como θ no aparece, puede variar. Así, cualquier traza horizontal en el plano $z = k$ $(k > 0)$ es un círculo de radio k. Estas trazas sugieren que la superficie es un cono. Esta predicción puede confirmarse convirtiendo la ecuación a coordenadas rectangulares. De esta primera ecuación en (2) se tiene

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

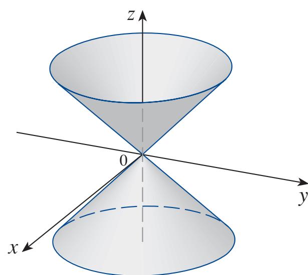


FIGURA 5
$z = r$, un cono

Se reconoce la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ (en comparación con la tabla 1 de la sección 12.6) como un cono circular cuyo eje está en el eje z (véase la figura 5). ■

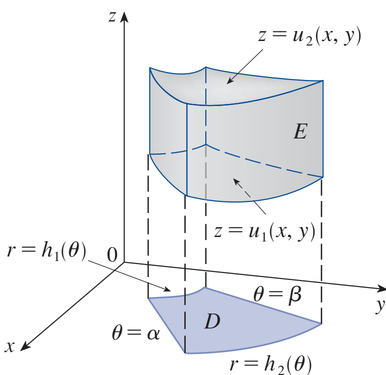


FIGURA 6

Evaluación de integrales triples con coordenadas cilíndricas

Suponga que E es una región tipo 1 cuya proyección D en el plano xy es convenientemente descrita en coordenadas polares (véase la figura 6). En particular, suponga que f es continua y

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D está dada en coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

Por la ecuación 15.6.6 se sabe que

3 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Pero también se sabe cómo evaluar integrales dobles en coordenadas polares. De hecho, al combinar la ecuación 3 con la ecuación 15.3.3 se obtiene

4 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

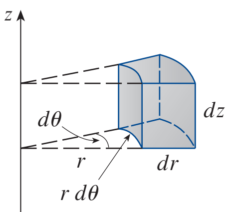


FIGURA 7
Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

La fórmula 4 es la **fórmula para la integración triple en coordenadas cilíndricas**. Establece que se convierte una integral triple de coordenadas rectangulares a cilíndricas escribiendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, dejando z como está, usando los límites de integración apropiados para z, r y θ, y reemplazando dV por $r\,dz\,dr\,d\theta$. (La figura 7 muestra cómo recordar esto.) Vale la pena usar esta fórmula cuando E es una región sólida fácil de describir en coordenadas cilíndricas, y especialmente cuando la función $f(x, y, z)$ implica la expresión $x^2 + y^2$.

EJEMPLO 3 Un sólido E se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, bajo el plano $z = 4$ y sobre el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Véase la figura 8.) La densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje del cilindro. Determine la masa de E.

SOLUCIÓN En coordenadas cilíndricas, el cilindro es $r = 1$ y el paraboloide es $z = 1 - r^2$, así que se puede escribir

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 1 - r^2 \leqslant z \leqslant 4\}$$

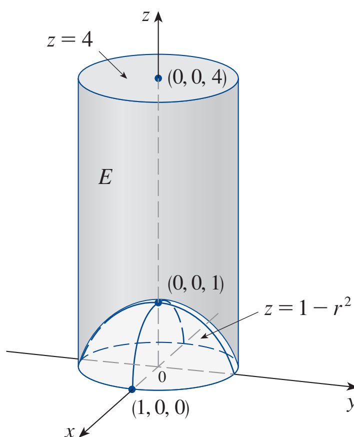


FIGURA 8

Como la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia desde el eje z, la función de densidad es

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Por tanto, con base en la fórmula 15.6.13, la masa de E es

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r_2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr$$

$$= 2\pi K \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$ ■

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral iterada es una integral triple en la región sólida

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

y la proyección de E en el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$. La superficie inferior de E es el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y su superficie superior es el plano $z = 2$. (Véase la figura 9.) Esta región tiene una descripción mucho más simple en coordenadas cilíndricas:

$$E = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ r \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

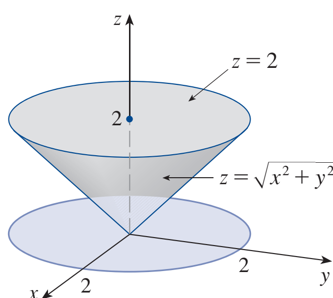


FIGURA 9

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx &= \iiint_E (x^2+y^2)\,dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\, r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r)\,dr \\ &= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi\end{aligned}$$

■

15.7 EJERCICIOS

1-2 Trace el punto cuyas coordenadas cilíndricas se dan. Determine después las coordenadas rectangulares del punto.

1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$

2. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$ (b) $(1, 1, 1)$

3-4 Cambie de coordenadas rectangulares a cilíndricas.

3. (a) $(1, \sqrt{3}, -1)$ (b) $(3, -3, 2)$

4. (a) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ (b) $(2, 2, 2)$

5-6 Describa con palabras la superficie cuya ecuación se da.

5. $r = 2$ **6.** $\theta = \pi/6$

7-8 Identifique la superficie cuya ecuación se da.

7. $r^2 + z^2 = 4$ **8.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

9-10 Escriba las ecuaciones en coordenadas cilíndricas.

9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$

10. (a) $2x^2 - 2y^2 - z^2 = 4$ (b) $2x - y + z = 1$

11-12 Trace el sólido descrito por las desigualdades dadas.

11. $r^2 \leqslant z \leqslant 8 - r^2$

12. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad r \leqslant z \leqslant 2$

13. Un proyectil cilíndrico es de 20 cm de largo, con radio interno de 6 cm y radio externo de 7 cm. Escriba desigualdades que describan el proyectil en un sistema de coordenadas apropiado. Explique cómo posicionó el sistema de coordenadas con respecto al proyectil.

14. Use un dispositivo de graficación para dibujar el sólido encerrado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 5 - x^2 - y^2$.

15-16 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral.

15. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$ **16.** $\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^r r\,dz\,d\theta\,dr$

17-28 Use coordenadas cilíndricas.

17. Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, donde E es la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y entre los planos $z = -5$ y $z = 4$.

18. Evalúe $\iiint_E z\,dV$, donde E está encerrado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

19. Evalúe $\iiint_E (x + y + z)\, dV$, donde E es el sólido en el primer octante que está bajo el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

20. Evalúe $\iiint_E (x - y)\, dV$, donde E es el sólido que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 16$, sobre el plano xy, y bajo el plano $z = y + 4$.

21. Evalúe $\iiint_E x^2\, dV$, donde E es el sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sobre el plano $z = 0$ y bajo el cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

22. Evalúe $\iiint_E x dV$, donde E está encerrado por los planos $z = 0$ y $z = x + y + 5$, y por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

23. Determine el volumen del sólido encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

24. Determine el volumen del sólido que está entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

25. (a) Determine el volumen de la región E que está entre el paraboloide $z = 24 - x^2 - y^2$ y el cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
(b) Determine el centroide de E (el centro de masa en el caso en que la densidad es constante).

26. (a) Determine el volumen del sólido que el cilindro $r = a \cos \theta$ corta de la esfera de radio a centrada en el origen.
(b) Ilustre el sólido del inciso (a) graficando la esfera y el cilindro en la misma pantalla.

27. Determine la masa y el centro de masa del sólido S acotado por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = a$ $(a > 0)$ si S tiene densidad constante K.

28. Determine la masa de una pelota B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a$ si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde del eje z.

29-30 Evalúe la integral cambiando a coordenadas cilíndricas.

29. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\, dz\, dx\, dy$

30. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

31. Cuando estudian la formación de cadenas montañosas, los geólogos estiman la cantidad de trabajo requerido para levantar una montaña desde el nivel del mar. Considere una montaña que tiene esencialmente la forma de un cono circular recto. Suponga que la densidad de peso del material alrededor de un punto P es $g(P)$ y la altura $h(P)$.
(a) Determine una integral definida que represente el trabajo total efectuado para formar la montaña.
(b) Suponga que el Monte Fuji en Japón tiene la forma de un cono circular recto con radio 19 000 m, altura 3800 m y densidad constante 3200 kg/m³. ¿Cuánto trabajo se hizo para formar el Monte Fuji si el terreno estaba inicialmente al nivel del mar?



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

LA INTERSECCIÓN DE TRES CILINDROS

La figura muestra el sólido encerrado por tres cilindros circulares con el mismo diámetro que intersecan en ángulos rectos. En este proyecto se calculará su volumen y se determinará cómo cambia su forma si los cilindros tienen diámetros diferentes.



1. Trace cuidadosamente el sólido encerrado por los tres cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$. Indique las posiciones de los ejes de coordenadas y rotule las caras con las ecuaciones de los cilindros correspondientes.

2. Determine el volumen del sólido del problema 1.

SAC 3. Use un sistema algebraico computacional para dibujar las aristas del sólido.

4. ¿Qué sucede con el sólido del problema 1 si el radio del primer cilindro es diferente a 1? Ilustre con un diagrama a mano o una gráfica por computadora.

5. Si el primer cilindro es $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a < 1$, establezca pero no evalúe una integral doble para el volumen del sólido. ¿Y si $a > 1$?

15.8 Integrales triples en coordenadas esféricas

Otro sistema de coordenadas en tres dimensiones útil es el sistema de coordenadas esféricas. Este sistema simplifica la evaluación de integrales triples en regiones acotadas por esferas y conos.

Coordenadas esféricas

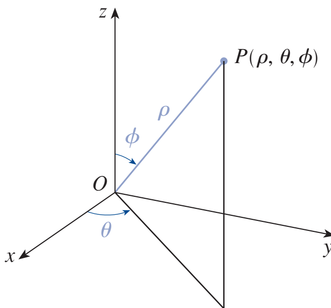


FIGURA 1
Coordenadas esféricas del punto P en el espacio

Las **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de un punto P en el espacio se muestran en la figura 1, donde $\rho = |OP|$ es la distancia del origen a P, θ es el mismo ángulo que en las coordenadas cilíndricas y ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta OP. Note que

$$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en problemas en los que hay simetría en torno a un punto y el origen se encuentra en ese punto. Por ejemplo, la esfera con centro en el origen y radio c tiene la ecuación simple $\rho = c$ (véase la figura 2); esta es la razón del nombre coordenadas "esféricas". La gráfica de la ecuación $\theta = c$ es un semiplano vertical (véase la figura 3) y la ecuación $\phi = c$ representa un semicono con el eje z como su eje (véase la figura 4).

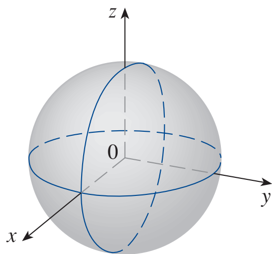


FIGURA 2 $\rho = c$, una esfera

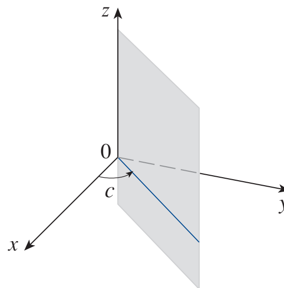
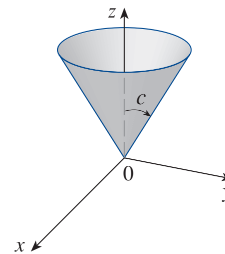


FIGURA 3 $\theta = c$, un semiplano



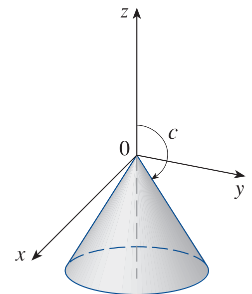


FIGURA 4 $\phi = c$, un semicono

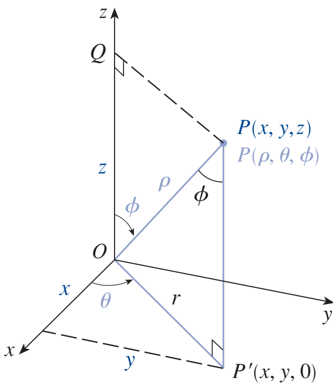


FIGURA 5

La relación entre las coordenadas rectangulares y esféricas puede verse en la figura 5. De los triángulos OPQ y OPP' se tiene

$$z = \rho \cos \phi \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Pero, $x = r \cos \theta$, y $y = r \operatorname{sen} \theta$, así que para convertir de coordenadas esféricas a rectangulares se usan las ecuaciones

1
$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Asimismo, la fórmula de la distancia indica que

2
$$\rho = x^2 + y^2 + z^2$$

Se usa esta ecuación para convertir de coordenadas rectangulares a esféricas.

EJEMPLO 1 El punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ se da en coordenadas esféricas. Trace el punto y determine sus coordenadas rectangulares.

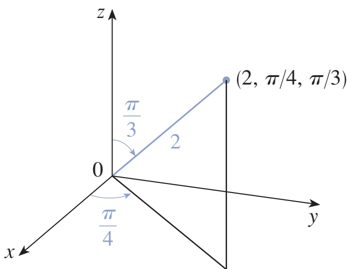


FIGURA 6

SOLUCIÓN Trace el punto en la figura 6. De las ecuaciones 1 se tiene

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Así, el punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ es $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares. ■

EJEMPLO 2 El punto $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ se da en coordenadas rectangulares. Halle las coordenadas esféricas de este punto.

ADVERTENCIA No existe acuerdo universal sobre la notación para coordenadas esféricas. En la mayoría de los libros de física se invierten los significados de θ y ϕ y se usa r en lugar de ρ.

SOLUCIÓN De la ecuación 2 se tiene

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

así que las ecuaciones 1 dan

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen} \phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Note que $\theta \neq 3\pi/2$ porque $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Por tanto, las coordenadas esféricas del punto dado son $(4, \pi/2, 2\pi/3)$. ■

TEC En Module 15.8 usted puede investigar familias de superficies en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Evaluación de integrales triples con coordenadas esféricas

En el sistema de coordenadas esféricas la contraparte de una caja rectangular es una **cuña esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

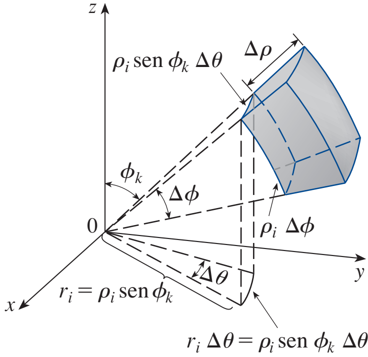


FIGURA 7

donde $a \geqslant 0$ y $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$ y $d - c \leqslant \pi$. Aunque se definen integrales triples dividiendo sólidos en pequeñas cajas, se puede demostrar que dividir un sólido en pequeñas cuñas esféricas siempre da el mismo resultado. Así, se divide E en cuñas esféricas menores E_{ijk} por medio de esferas igualmente espaciadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$, y semiconos $\phi = \phi_k$. La figura 7 muestra que E_{ijk} es aproximadamente una caja rectangular con dimensiones $\Delta\rho$, $\rho_i\,\Delta\phi$ (arco de un círculo con radio ρ_i, ángulo $\Delta\phi$) y ρ_i sen $\phi_k\,\Delta\theta$ (arco de un círculo con radio ρ_i sen ϕ_k, ángulo $\Delta\theta$). Así, una aproximación del volumen de E_{ijk} está dada por

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i\,\Delta\phi)(\rho_i \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

De hecho, se puede demostrar, con la ayuda del teorema del valor medio (ejercicio 49), que el volumen de E_{ijk} está dado exactamente por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

donde $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ es algún punto en E_{ijk}. Sean $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ las coordenadas rectangulares de este punto. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\,\Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \cos\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \operatorname{sen}\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos\tilde{\phi}_k)\,\tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k\,\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

Pero esta suma es una suma de Riemann para la función

$$F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \operatorname{sen}\phi\ \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi\ \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

En consecuencia, se ha llegado a la **fórmula para la integración triple con coordenadas esféricas** siguiente.

3 $$\iiint_E f(x, y, z)\,dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi\ \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi\ \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\ d\rho\,d\theta\,d\phi$$

donde E es una cuña esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

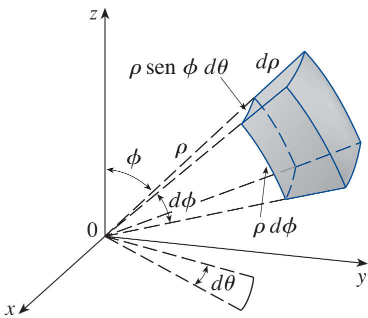


FIGURA 8
Elemento de volumen en coordenadas esféricas: $dV = \rho^2$ sen $\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi$

La fórmula 3 indica que se convierte una integral triple de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas escribiendo

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

usando los límites apropiados de integración y reemplazando dV por ρ^2 sen $\phi\ dp\ d\theta\ d\phi$. Esto se ilustra en la figura 8.

Esta fórmula puede prolongarse para incluir regiones esféricas más generales, como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d,\ g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\}$$

En este caso, la fórmula es la misma que en (3), excepto que los límites de integración para ρ son $g_1(\theta, \phi)$ y $g_2(\theta, \phi)$.

Por lo común, las coordenadas esféricas se usan en integrales triples cuando superficies como conos y esferas forman la frontera de la región de integración.

EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, donde B es la pelota unitaria:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

SOLUCIÓN Como la frontera de B es una esfera, se usan coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\}$$

Además, las coordenadas esféricas son apropiadas porque

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Así, (3) da

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho$$

$$= \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi}(2\pi)\Big[\tfrac{1}{3}e^{\rho^3}\Big]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi(e - 1)$$

■

NOTA Habría sido extremadamente insensato evaluar la integral del ejemplo 3 sin coordenadas esféricas. En coordenadas rectangulares la integral iterada habría sido

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dz\, dy\, dx$$

EJEMPLO 4 Use coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido que se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Véase la figura 9.)

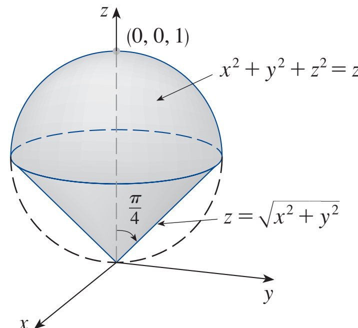


FIGURA 9

La figura 10 da otra vista (esta vez dibujada por Maple) del sólido del ejemplo 4.

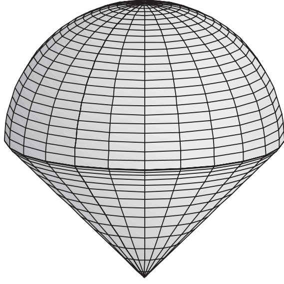


FIGURA 10

SOLUCIÓN Note que la esfera pasa por el origen y tiene centro $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Se escribe la ecuación de la esfera en coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \qquad \text{o} \qquad \rho = \rho \cos \phi$$

La ecuación del cono puede escribirse como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Esto da $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$, o $\phi = \pi/4$. Por tanto, la descripción del sólido E en coordenadas esféricas es

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi\}$$

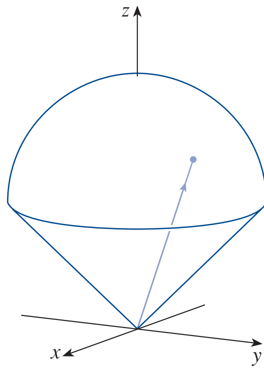
La figura 11 muestra cómo se recorre E si se integra primero con respecto a ρ, luego a ϕ y después a θ. El volumen de E es

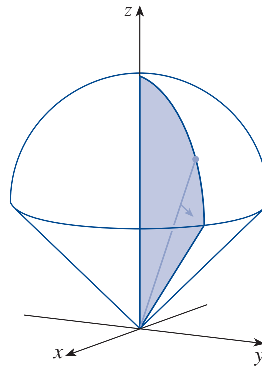
$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

TEC Visual 15.8 muestra una animación de la figura 11.





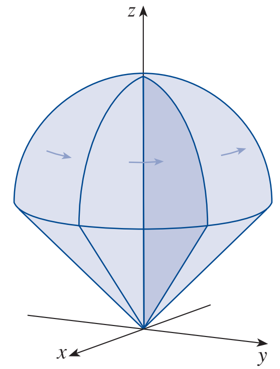


FIGURA 11

ρ varía de 0 a $\cos \phi$, mientras ϕ y θ son constantes.

ϕ varía de 0 a $\pi/4$, mientras θ es constante.

θ varía de 0 a 2π. ■

15.8 EJERCICIOS

1-2 Trace el punto cuyas coordenadas esféricas se dan. Determine después las coordenadas rectangulares del punto.

1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$

2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$

3-4 Cambie de coordenadas rectangulares a esféricas.

3. (a) $(1, 0, -1)$ (b) $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$

4. (a) $(1, 0, \sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$

5-6 Describa con palabras la superficie cuya ecuación se da.

5. $\phi = \pi/3$

6. $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$

7-8 Identifique la superficie cuya ecuación se da.

7. $\rho \cos \phi = 1$

8. $\rho = \cos \phi$

9-10 Escriba la ecuación en coordenadas esféricas.

9. (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (b) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

10. (a) $z = x^2 + y^2$ (b) $z = x^2 - y^2$

11-14 Trace el sólido descrito por las desigualdades dadas.

11. $\rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/6, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $1 \leqslant \rho \leqslant 2, \quad \pi/2 \leqslant \phi \leqslant \pi$

13. $2 \leqslant \rho \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

14. $1 \leqslant \rho \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

15. Un sólido se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escriba una descripción del sólido en términos de desigualdades que impliquen coordenadas esféricas.

16. (a) Determine desigualdades que describan una pelota hueca con diámetro de 30 cm y grosor de 0.5 cm. Explique cómo posicionó el sistema de coordenadas que eligió.
(b) Suponga que la pelota está cortada por la mitad. Escriba desigualdades que describan una de las mitades.

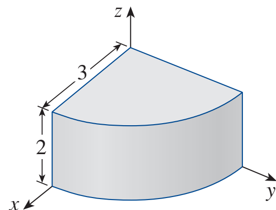
17-18 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$

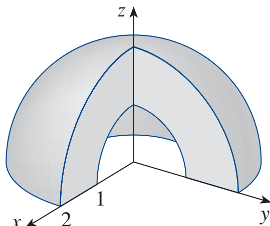
18. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

19-20 Establezca la integral triple de una función continua arbitraria $f(x, y, z)$ en coordenadas cilíndricas y esféricas en el sólido que se muestra.

19.



20.



21-34 Use coordenadas esféricas.

21. Evalúe $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, donde B es la pelota con centro en el origen y radio 5.

22. Evalúe $\iiint_E y^2 z^2 \, dV$, donde E está sobre el cono $\phi = \pi/3$ y bajo la esfera $\rho = 1$.

23. Evalúe $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dV$, donde E está entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

24. Evalúe $\iiint_H (9 - x^2 - y^2) \, dV$, donde H es el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

25. Evalúe $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2} \, dV$, donde E es la porción de la pelota unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ que está en el primer octante.

26. Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$, donde E está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

27. Determine el volumen de la parte de la pelota $\rho \leqslant a$ que está entre los conos $\phi = \pi/6$ y $\phi = \pi/3$.

28. Determine la distancia promedio de un punto en la pelota de radio a a su centro.

29. (a) Determine el volumen del sólido que está sobre el cono $\phi = \pi/3$ y bajo la esfera $\rho = 4 \cos \phi$.
(b) Determine el centroide del sólido del inciso (a).

30. Determine el volumen del sólido que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, sobre el plano xy y bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

31. (a) Halle el centroide del sólido del ejemplo 4. (Suponga densidad constante K.)
(b) Halle el momento de inercia alrededor del eje z para este sólido.

32. Sea H un hemisferio sólido de radio a cuya densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia del centro de la base.
(a) Halle la masa de H.
(b) Halle el centro de masa de H.
(c) Halle el momento de inercia de H alrededor de su eje.

33. (a) Halle el centroide de un hemisferio sólido homogéneo de radio a.
(b) Halle el momento de inercia del sólido del inciso (a) respecto a un diámetro de su base.

34. Halle la masa y el centro de masa de un hemisferio sólido de radio a si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia de la base.

35-40 Use coordenadas cilíndricas o esféricas, lo que parezca más apropiado.

35. Determine el volumen y centroide del sólido E que está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

36. Determine el volumen de la pequeña cuña cortada de la esfera de radio a por dos planos que intersecan a lo largo de un diámetro en un ángulo de $\pi/6$.

37. Un cilindro sólido con densidad constante tiene radio de base a y altura h.
(a) Determine el momento de inercia del cilindro alrededor de su eje.
(b) Determine el momento de inercia del cilindro respecto a un diámetro de su base.

38. Un cono circular recto sólido con densidad constante tiene radio de base a y altura h.
(a) Determine el momento de inercia del cono alrededor de su eje.
(b) Determine el momento de inercia del cono respecto a un diámetro de su base.

SAC **39.** Evalúe $\iiint_E z\,dV$, donde E está sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y bajo el plano $z = 2y$. Use la tabla de integrales (en las páginas de referencia 6-10) o un sistema algebraico computacional para evaluar la integral.

SAC **40.** (a) Determine el volumen encerrado por el toro $\rho = \operatorname{sen}\phi$.
(b) Use una computadora para dibujar el toro.

41-43 Evalúe la integral cambiando a coordenadas esféricas.

41. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$

42. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z + y^2z + z^3)\,dz\,dx\,dy$

43. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

44. Un modelo para la densidad δ de la atmósfera de la Tierra cerca de su superficie es

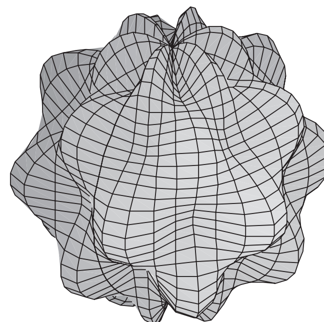
$$\delta = 619.09 - 0.000097\rho$$

donde ρ (la distancia desde el centro de la Tierra) se mide en metros y δ en kilogramos por metro cúbico. Si se toma la superficie de la Tierra como una esfera con radio 6370 km, este modelo es razonable para $6.370 \times 10^6 \leqslant \rho \leqslant 6.375 \times 10^6$. Use este modelo para estimar la masa de la atmósfera entre el suelo y una altitud de 5 km.

45. Use un dispositivo de graficación para dibujar un silo que conste de un cilindro con radio 3 y altura 10 rematado por una media esfera.

46. La latitud y longitud de un punto P en el hemisferio norte se relacionan con las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como sigue. Se toma el centro de la Tierra como el origen y el eje z positivo pasa por el Polo Norte. El eje x positivo pasa por el punto donde el primer meridiano (el meridiano que pasa por Greenwich, Inglaterra) interseca el ecuador. Entonces, la latitud de P es $\alpha = 90° - \phi°$ y la longitud es $\beta = 360° - \theta°$. Determine la distancia de gran círculo de Los Angeles (lat. 34.06 °N, long. 118.25 °O) a Montreal (lat. 45.50 °N, long. 73.60 °O). Tome el radio de la Tierra como 6370 km. (Un *gran círculo* es el círculo de intersección de una esfera y un plano que pasa por el centro de la esfera.)

SAC **47.** Las superficies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} n\phi$ se han usado como modelos para tumores. Se muestra la "esfera con protuberancias" con $m = 6$ y $n = 5$. Use un sistema algebraico computacional para determinar el volumen que encierra.



48. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(La integral triple impropia se define como el límite de una integral triple en una esfera sólida conforme el radio de la esfera aumenta indefinidamente.)

49. (a) Use coordenadas cilíndricas para demostrar que el volumen de un sólido acotado arriba por la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y abajo del cono $z = r\cot\phi_0$ (o $\phi = \phi_0$), donde $0 < \phi_0 < \pi/2$, es

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduzca que el volumen de la cuña esférica dado por $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ es

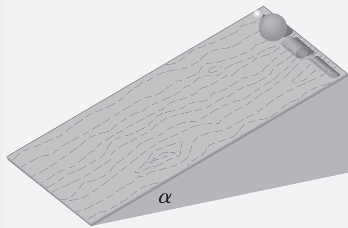
$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Use el teorema del valor medio para demostrar que el volumen del inciso (b) puede escribirse como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

donde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 y ρ_2, $\tilde{\phi}$ entre ϕ_1 y ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, y $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

PROYECTO DE APLICACION CARRERA SOBRE RUEDAS



Suponga que una pelota sólida (una canica), una pelota hueca (una pelota de squash), un cilindro sólido (una barra de acero) y un cilindro hueco (un tubo de plomo) ruedan por una pendiente. ¿Cuál de estos objetos llegará primero al suelo? (Haga una conjetura antes de proceder.)

Para responder esta pregunta, se considera una pelota o cilindro con masa m, radio r y momento de inercia I (alrededor del eje de rotación). Si la caída vertical es h, la energía potencial en la punta es mgh. Suponga que el objeto llega al suelo con velocidad v y velocidad angular ω, así que $v = \omega r$. La energía cinética en la base consta de dos partes: $\frac{1}{2}mv^2$ de traslación (bajar la pendiente) y $\frac{1}{2}I\omega^2$ de rotación. Si se supone que la pérdida de energía por la fricción de rodamiento es insignificante, la conservación de energía da

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

1. Demuestre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \qquad \text{donde } I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Si $y(t)$ es la distancia vertical recorrida en el momento t, el mismo razonamiento que se usó en el problema 1 indica que $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$ en cualquier momento t. Use este resultado para demostrar que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1 + I^*}}\,(\operatorname{sen}\alpha)\sqrt{y}$$

donde α es el ángulo de inclinación del plano.

3. Resolviendo la ecuación diferencial del problema 2, demuestre que el tiempo de recorrido total es

$$T = \sqrt{\frac{2h(1 + I^*)}{g\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

Esto demuestra que el objeto con menor valor de I^* gana la carrera.

4. Demuestre que $I^* = \frac{1}{2}$ para un cilindro sólido y $I^* = 1$ para un cilindro hueco.

5. Calcule I^* para una pelota parcialmente hueca con radio interno a y radio externo r. Exprese su respuesta en términos de $b = a/r$. ¿Qué sucede cuando $a \to 0$ y cuando $a \to r$?

6. Demuestre que $I^* = \frac{2}{5}$ para una pelota sólida y $I^* = \frac{2}{3}$ para una pelota hueca. Así, los objetos terminan en el orden siguiente: pelota sólida, cilindro sólido, pelota hueca, cilindro hueco.

15.9 Cambio de variables en integrales múltiples

En cálculo unidimensional a menudo se usa un cambio de variable (una sustitución) para simplificar una integral. Invirtiendo los papeles de x y u, se puede escribir la regla de sustitución (5.5.6) como

1 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,g'(u)\,du$$

donde $x = g(u)$ y $a = g(c)$, $b = g(d)$. Otra manera de escribir la fórmula 1 es como sigue:

2 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du$$

Un cambio de variables también puede ser útil en integrales dobles. Ya se vio un ejemplo de esto: la conversión a coordenadas polares. Las nuevas variables r y θ se relacionan con las antiguas variables x y y mediante las ecuaciones

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y la fórmula para el cambio de variables (15.3.2) puede escribirse como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

donde S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a la región R en el plano xy.

En términos más generales, se considera un cambio de variables dado por una **transformación** T del plano uv al plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

donde x y y se relacionan con u y v por medio de las ecuaciones

3 $$x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

o, como a veces se escribe,

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

Usualmente se supone que T es una **transformación C^1**, lo que significa que g y h tienen derivadas parciales continuas de primer orden.

Una transformación T es en realidad sencillamente una función cuyo dominio y rango son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Si $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, el punto (x_1, y_1) se llama **imagen** del punto (u_1, v_1). Si no hay dos puntos con la misma imagen, T se llama **inyectiva**. La figura 1 muestra el efecto de una transformación T sobre una región S en el plano uv. T transforma S en una región R en el plano xy llamado la **imagen de S**, la cual consta de las imágenes de todos los puntos en S.

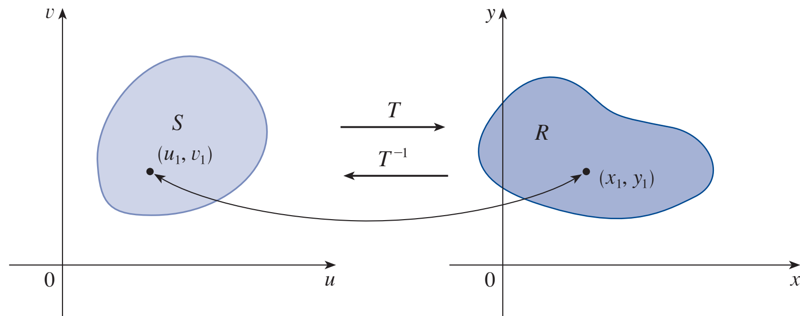


FIGURA 1

Si T es una transformación inyectiva, tiene una **transformación inversa** T^{-1} del plano xy al plano uv y quizá sea posible resolver las ecuaciones 3 para u y v en términos de x y y:

$$u = G(x, y) \qquad v = H(x, y)$$

EJEMPLO 1 Una transformación es definida por las ecuaciones

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Determine la imagen del cuadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$.

SOLUCIÓN La transformación traza la frontera de S en la frontera de la imagen. Así, se comienza determinando las imágenes de los lados de S. El primer lado, S_1, está dado

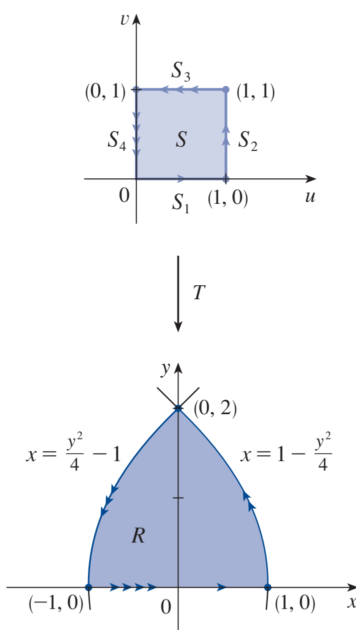


FIGURA 2

por $v = 0$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$. (Véase la figura 2.) De las ecuaciones dadas se tiene $x = u^2$, $y = 0$, así que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Por tanto, S_1 se convierte en el segmento de recta de (0, 0) a (1, 0) en el plano xy. El segundo lado, S_2, es $u = 1$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$ y al poner $u = 1$ en las ecuaciones dadas se obtiene

$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v$$

Eliminando v se obtiene

$$\boxed{4} \qquad x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

la cual es parte de una parábola. De igual forma, S_3 está dado por $v = 1$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, cuya imagen es el arco parabólico

$$\boxed{5} \qquad x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0$$

Por último, S_4 está dado por $u = 0$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$, cuya imagen es $x = -v^2$, $y = 0$, es decir $-1 \leqslant x \leqslant 0$. (Note que al desplazarse por el cuadrado en sentido contrario a las manecillas del reloj, se desplaza por la región parabólica en la misma dirección.) La imagen de S es la región R (la cual se muestra en la figura 2) acotada por el eje x y las parábolas dadas por las ecuaciones 4 y 5. ■

Se verá ahora cómo un cambio de variables afecta a la integral doble. Se comienza con un pequeño rectángulo S en el plano uv cuya esquina inferior derecha es el punto (u_0, v_0) y cuyas dimensiones son Δu y Δv. (Véase la figura 3.)

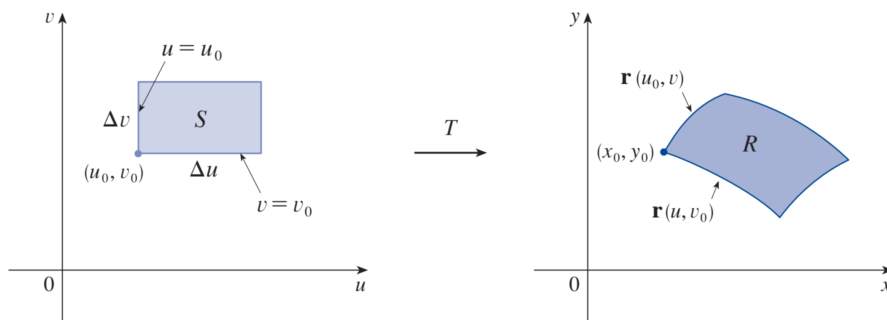


FIGURA 3

La imagen de S es una región R en el plano xy, uno de cuyos puntos frontera es $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. El vector

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\,\mathbf{i} + h(u, v)\,\mathbf{j}$$

es el vector de posición de la imagen del punto (u, v). La ecuación del lado menor de S es $v = v_0$, cuya curva imagen está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. El vector tangente en (x_0, y_0) a esta curva imagen es

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j}$$

De igual forma, el vector tangente en (x_0, y_0) a la curva imagen del lado izquierdo de S (es decir, $u = u_0$) es

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j}$$

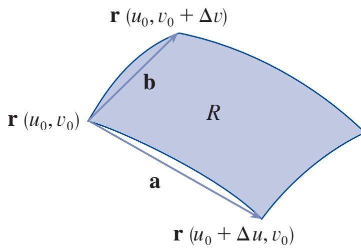


FIGURA 4

Se puede aproximar la región imagen $R = T(S)$ con un paralelogramo determinado por los vectores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \qquad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

que aparecen en la figura 4. Pero

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

y entonces $$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u\, \mathbf{r}_u$$

De igual manera, $$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v\, \mathbf{r}_v$$

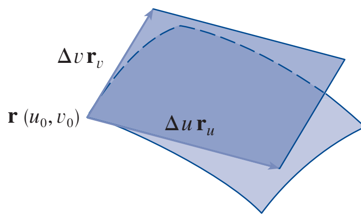


FIGURA 5

Esto significa que se puede aproximar R con un paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u\,\mathbf{r}_u$ y $\Delta v\,\mathbf{r}_v$. (Véase la figura 5.) Así, se puede aproximar el área de R mediante el área de ese paralelogramo, la que, con base en la sección 12.4, es

6 $$|(\Delta u\,\mathbf{r}_u) \times (\Delta v\,\mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v$$

Al calcular el producto cruzado se obtiene

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

El determinante que surge de este cálculo se llama *jacobiano* de la transformación y recibe una notación especial.

El jacobiano debe su nombre al matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Aunque el matemático francés Cauchy fue el primero en emplear estos determinantes especiales que implican derivadas parciales, Jacobi las convirtió en un método para evaluar integrales múltiples.

7 Definición El **jacobiano** de la transformación T dada por $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Con esta notación puede usarse la ecuación 6 para dar una aproximación del área ΔA de R:

8 $$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

donde el jacobiano se evalúa en (u_0, v_0).

Luego se divide una región S en el plano uv en rectángulos S_{ij} y se llama R_{ij} a sus imágenes en el plano xy. (Véase la figura 6.)

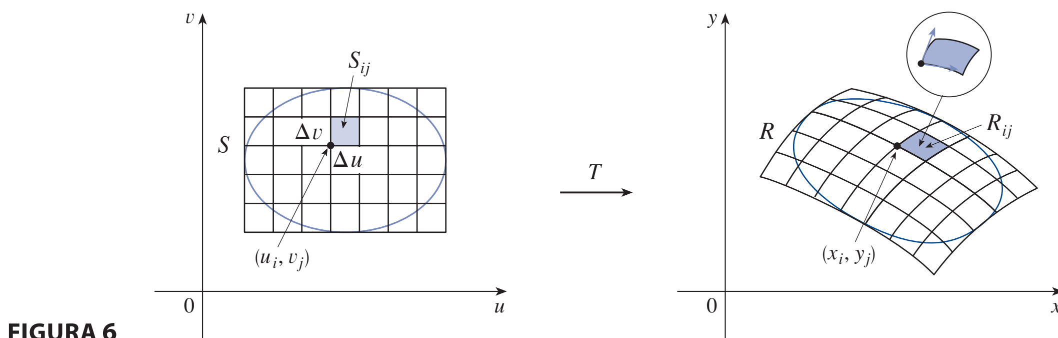


FIGURA 6

Al aplicar la aproximación (8) a cada R_{ij}, se aproxima la integral doble de f en R como sigue:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

donde el jacobiano se evalúa en (u_i, v_j). Nótese que esta doble suma es una suma de Riemann para la integral

$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

El argumento previo sugiere que el teorema siguiente es cierto. (Una comprobación completa se da en libros de cálculo avanzado.)

9 Cambio de variables en una integral doble Suponga que T es una transformación C^1 cuyo jacobiano es diferente de cero y que T convierte una región S en el plano uv en una región R en el plano xy. Suponga que f es continua en R y que R y S son regiones planas tipo I o tipo II. Suponga también que T es inyectiva, excepto quizá en la frontera de S. Así,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

El teorema 9 indica que se cambia de una integral en x y y a una integral en u y v, expresando x y y en términos de u y v, y escribiendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Observe la semejanza entre el teorema 9 y la fórmula unidimensional de la ecuación 2. En vez de la derivada dx/du, se tiene el valor absoluto del jacobiano, es decir $|\,\partial(x, y)/\partial(u, v)\,|$.

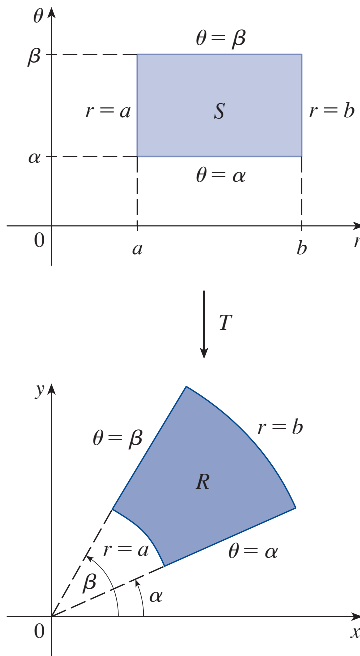


FIGURA 7
La transformación en coordenadas polares

Como una primera ilustración del teorema 9, se demuestra que la fórmula para la integración en coordenadas polares es sencillamente un caso especial. Aquí la transformación T del plano $r\theta$ al plano xy está dada por

$$x = g(r, \theta) = r\cos\theta \qquad y = h(r, \theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y la geometría de la transformación aparece en la figura 7. T convierte un rectángulo ordinario en el plano $r\theta$ en un rectángulo polar en el plano xy. El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r > 0$$

Así, el teorema 9 da

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

lo cual es igual a la fórmula 15.3.2.

EJEMPLO 2 Use el cambio de variables $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para evaluar la integral $\iint_R y\,dA$, donde R es la región acotada por el eje x y las parábolas $y^2 = 4 - 4x$ y $y^2 = 4 + 4x$, $y \geqslant 0$.

SOLUCIÓN La región R se representa en la figura 2 (en la página 1054). En el ejemplo 1 se descubrió que $T(S) = R$, donde S es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. En realidad, la razón de hacer el cambio de variables para evaluar la integral es que S es una región mucho más simple que R. Primero se tiene que calcular el jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Así, por el teorema 9,

$$\iint_R y\,dA = \iint_S 2uv\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA = \int_0^1\int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2)\,du\,dv$$

$$= 8\int_0^1\int_0^1 (u^3v + uv^3)\,du\,dv = 8\int_0^1 \left[\tfrac{1}{4}u^4v + \tfrac{1}{2}u^2v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$= \int_0^1 (2v + 4v^3)\,dv = \left[v^2 + v^4\right]_0^1 = 2$$

■

NOTA El ejemplo 2 no fue un problema muy difícil de resolver porque se dio un adecuado cambio de variables. De no haberse proporcionado la transformación, el primer paso sería pensar en un apropiado cambio de variables. Si $f(x, y)$ es difícil de integrar, la forma de $f(x, y)$ puede sugerir una transformación. Si la región de integración R es

incómoda, debe optarse por la transformación, para que la correspondiente región S en el plano uv tenga una descripción conveniente.

EJEMPLO 3 Evalúe la integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$, donde R es la región trapezoidal con vértices (1, 0), (2, 0), (0, –2) y (0, –1).

SOLUCIÓN Como no es fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, se hace un cambio de variables sugerido por la forma de esta función:

10 $$u = x + y \qquad v = x - y$$

Estas ecuaciones definen una transformación T^{-1} del plano xy al plano uv. El teorema 9 se refiere a una transformación del plano uv al plano xy. Eso se obtiene despejando x y y en las ecuaciones 10:

11 $$x = \tfrac{1}{2}(u + v) \qquad y = \tfrac{1}{2}(u - v)$$

El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}$$

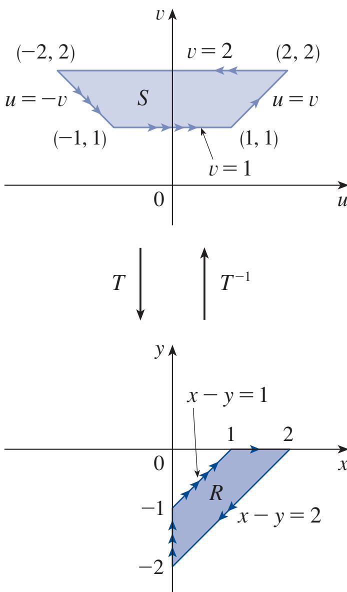


FIGURA 8

Para hallar la región S en el plano uv correspondiente a R, se advierte que los lados de R se tienden en las rectas

$$y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$$

y, de las ecuaciones 10 u 11, las líneas que son su imagen en el plano uv son

$$u = v \qquad v = 2 \qquad u = -v \qquad v = 1$$

Así, la región S es la región trapezoidal con vértices (1, 1), (2, 2), (–2, 2) y (–1, 1) que aparece en la figura 8. Como

$$S = \{ (u, v) \mid 1 \leqslant v \leqslant 2,\ -v \leqslant u \leqslant v\}$$

el teorema 9 da

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA = \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\left(\tfrac{1}{2}\right) du\,dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \Big[ve^{u/v}\Big]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 (e - e^{-1})v\,dv = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1})$$ ■

Integrales triples

Hay una fórmula similar de cambio de variables para las integrales triples. Sea T la transformación que convierte una región S en el espacio uvw en una región R en el espacio xyz por medio de las ecuaciones

$$x = g(u, v, w) \qquad y = h(u, v, w) \qquad z = k(u, v, w)$$

El **jacobiano** de T es el determinante 3×3 siguiente:

12
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Con hipótesis similares a las del teorema 9, se tiene la fórmula siguiente para integrales triples:

13
$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

EJEMPLO 4 Use la fórmula 13 para derivar la fórmula para la integración triple en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN Aquí el cambio de variables está dado por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Se calcula el jacobiano como sigue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix} - \rho \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \,(-\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2\theta - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2\theta)$$

$$\quad - \rho \operatorname{sen} \phi \,(\rho \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos^2\phi - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2\phi = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

Como $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, se tiene $\operatorname{sen} \phi \geqslant 0$. Por tanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = |-\rho^2 \operatorname{sen} \phi| = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

y la fórmula 13 da

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

lo cual es equivalente a la fórmula 15.8.3. ■

15.9 EJERCICIOS

1-6 Halle el jacobiano de la transformación.

1. $x = 2u + v, \quad y = 4u - v$

2. $x = u^2 + uv, \quad y = uv^2$

3. $x = s \cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$

4. $x = pe^q, \quad y = qe^p$

5. $x = uv, \quad y = vw, \quad z = wu$

6. $x = u + vw, \quad y = v + wu, \quad z = w + uv$

7-10 Determine la imagen del conjunto S bajo la transformación dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$; $x = 2u + 3v,\ y = u - v$

8. S es el cuadrado acotado por las rectas $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$; $x = v$, $y = u(1 + v^2)$

9. S es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 1), (0, 1); $x = u^2$, $y = v$

10. S es el disco dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$; $x = au$, $y = bv$

11-14 Se da una región R en el plano xy. Determine ecuaciones para una transformación T que convierta una región rectangular S en el plano uv en R, donde los lados de S son paralelos a los ejes u y v.

11. R está acotada por $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$, $y = 1 - x$, $y = 3 - x$

12. R es el paralelogramo con vértices (0, 0), (4, 3), (2, 4), (–2, 1)

13. R está entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$ en el primer cuadrante

14. R está acotada por las hipérbolas $y = 1/x$, $y = 4/x$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$ en el primer cuadrante

15-20 Use la transformación dada para evaluar la integral.

15. $\iint_R (x - 3y)\, dA$, donde R es la región triangular con vértices (0, 0), (2, 1) y (1, 2); $x = 2u + v$, $y = u + 2v$

16. $\iint_R (4x + 8y)\, dA$, donde R es el paralelogramo con vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ y $(1, 5)$; $x = \frac{1}{4}(u + v)$, $y = \frac{1}{4}(v + 3u)$

17. $\iint_R x^2\, dA$, donde R es la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u$, $y = 3v$

18. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, donde R es la región acotada por la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}\, u - \sqrt{2/3}\, v,\ y = \sqrt{2}\, u + \sqrt{2/3}\, v$

19. $\iint_R xy\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = x$ y $y = 3x$, y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$, $x = u/v$, $y = v$

20. $\iint_R y^2\, dA$, donde R es la región acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $u = xy$, $v = xy^2$. Ilustre usando una calculadora graficadora o computadora para dibujar R.

21. (a) Evalúe $\iiint_E dV$, donde E es el sólido encerrado por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Use la transformación $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.
(b) La Tierra no es una esfera perfecta; la rotación ha resultado en el aplanamiento de los polos. Así, su forma puede aproximarse por medio de un elipsoide con $a = b = 6378$ km y $c = 6356$ km. Use el inciso (a) para estimar el volumen de la Tierra.
(c) Si el sólido del inciso (a) tiene densidad constante k, determine su momento de inercia alrededor del eje z.

22. Un problema importante en termodinámica es encontrar el trabajo realizado por un motor de Carnot ideal. Un ciclo consta de una expansión y compresión alternantes de gas en un pistón. El trabajo realizado por el motor es igual al área de la región R encerrada por dos curvas isotérmicas $xy = a$, $xy = b$ y dos curvas adiabáticas $xy^{1.4} = c$, $xy^{1.4} = d$, donde $0 < a < b$ y $0 < c < d$. Calcule el trabajo realizado determinando el área de R.

23-27 Evalúe la integral haciendo un apropiado cambio de variables.

23. $\displaystyle\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y}\, dA$, donde R es el paralelogramo encerrado por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, y $3x - y = 8$

24. $\iint_R (x + y)e^{x^2 - y^2}\, dA$, donde R es el rectángulo encerrado por las rectas $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$, y $x + y = 3$

25. $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right)$, donde R es la región trapezoidal con vértices (1, 0), (2, 0), (0, 2) y (0, 1)

26. $\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

27. $\iint_R e^{x+y}\, dA$, donde R está dada por la desigualdad $|x| + |y| \leqslant 1$

28. Sea f continua en [0, 1] y R la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1). Demuestre que

$$\iint_R f(x + y)\, dA = \int_0^1 u f(u)\, du$$

15 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Suponga que f es una función continua definida en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
(a) Escriba una expresión para una doble suma de Riemann de f. Si $f(x, y) \geqslant 0$, ¿qué representa la suma?
(b) Escriba la definición de $\iint_R f(x, y)\, dA$ como un límite.
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\iint_R f(x, y)\, dA$ si $f(x, y) \geqslant 0$? ¿Y si f adoptara valores tanto positivos como negativos?
(d) ¿Cómo se evalúa $\iint_R f(x, y)\, dA$?
(e) ¿Qué dice la regla del punto medio para las integrales dobles?
(f) Escriba una expresión para el valor promedio de f.

2. (a) ¿Cómo se define $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región acotada que no es un rectángulo?
(b) ¿Qué es una región tipo I? ¿Cómo se evalúa $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región tipo I?
(c) ¿Qué es una región tipo II? ¿Cómo se evalúa $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región tipo II?
(d) ¿Qué propiedades tienen las integrales dobles?

3. ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble? ¿Por qué querría usted hacer ese cambio?

4. Si una lámina ocupa una región plana D y tiene una función de densidad $\rho(x, y)$, escriba expresiones para cada uno de los términos de integrales dobles siguientes.
(a) La masa
(b) Los momentos alrededor de los ejes
(c) El centro de masa
(d) Los momentos de inercia alrededor de los ejes y el origen

5. Sea f una función de densidad conjunta de un par de variables aleatorias continuas X y Y.
(a) Escriba una integral doble para la probabilidad de que X se ubique entre a y b y entre c y d.
(b) ¿Qué propiedades posee f?
(c) ¿Cuáles son los valores esperados de X y Y?

6. Escriba una expresión para el área de una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

7. (a) Escriba la definición de la integral triple de f en una caja rectangular B.
(b) ¿Cómo se evalúa $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$?
(c) ¿Cómo se define $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región sólida acotada que no es una caja?
(d) ¿Qué es una región sólida tipo 1? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?
(e) ¿Qué es una región sólida tipo 2? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?
(f) ¿Qué es una región sólida tipo 3? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?

8. Suponga que un objeto sólido ocupa la región E y tiene función de densidad $\rho(x, y, z)$. Escriba expresiones para cada uno de los elementos siguientes.
(a) La masa
(b) Los momentos alrededor de los planos de coordenadas
(c) Las coordenadas del centro de masa
(d) Los momentos de inercia alrededor de los ejes

9. (a) ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas en una integral triple?
(b) ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas en una integral triple?
(c) ¿En qué situaciones usted cambiaría a coordenadas cilíndricas o esféricas?

10. (a) Si una transformación T está dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, ¿cuál es el jacobiano de T?
(b) ¿Cómo se cambian variables en una integral doble?
(c) ¿Cómo se cambian variables en una integral triple?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $\int_{-1}^{2} \int_{0}^{6} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dx\, dy = \int_{0}^{6} \int_{-1}^{2} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dy\, dx$

2. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{x} \sqrt{x + y^2}\, dy\, dx = \int_{0}^{x} \int_{0}^{1} \sqrt{x + y^2}\, dx\, dy$

3. $\int_{1}^{2} \int_{3}^{4} x^2 e^y\, dy\, dx = \int_{1}^{2} x^2\, dx \int_{3}^{4} e^y\, dy$

4. $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} y\, dx\, dy = 0$

5. Si f es continua en $[0, 1]$, entonces

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} f(x) f(y)\, dy\, dx = \left[\int_{0}^{1} f(x)\, dx\right]^2$$

6. $\int_{1}^{4} \int_{0}^{1} \left(x^2 + \sqrt{y}\right) \operatorname{sen}(x^2 y^2)\, dx\, dy \leqslant 9$

7. Si D es el disco dado por $x^2 + y^2 \leqslant 4$, entonces

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA = \tfrac{16}{3}\pi$$

8. La integral $\iiint_E kr^3\, dz\, dr\, d\theta$ representa el momento de inercia alrededor del eje z de un sólido E con densidad constante k.

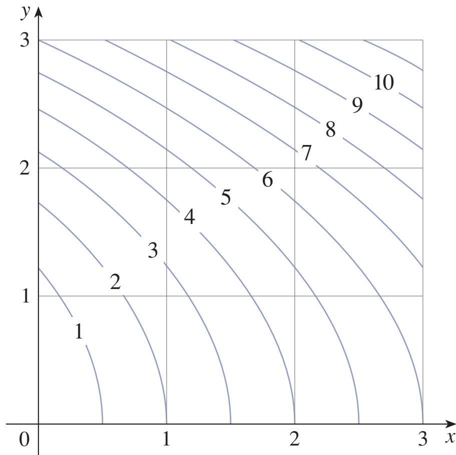
9. La integral

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \int_{r}^{2} dz\, dr\, d\theta$$

representa el volumen encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$.

EJERCICIOS

1. Se muestra un mapa de contorno para una función f en el cuadrado $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Use una suma de Riemann con nueve términos para estimar el valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$. Tome como puntos muestra las esquinas superiores derechas de los cuadrados.



2. Use la regla del punto medio para estimar la integral del ejercicio 1.

3-8 Calcule la integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + xy + y^2)\, dx\, dy$

4. $\int_1^2 \int_0^1 (4x + 2ye^x)\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^x 2 \cos x \cos y\, dy\, dx$

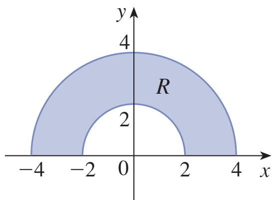
6. $\int_0^1 \int_x^{e^x} 3xy^2\, dy\, dx$

7. $\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \operatorname{sen} x\, dz\, dy\, dx$

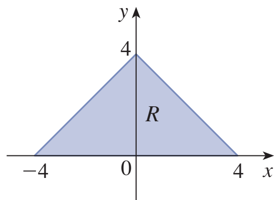
8. $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyz\, dz\, dx\, dy$

9-10 Escriba $\iint_R f(x, y)\, dA$ como una integral iterada, donde R es la región que se muestra y f una función continua arbitraria en R.

9.



10.



11. Las coordenadas cilíndricas de un punto son $(2\sqrt{3}, \pi/3, 2)$. Determine las coordenadas rectangulares y esféricas del punto.

12. Las coordenadas rectangulares de un punto son $(2, 2, -1)$. Determine las coordenadas cilíndricas y esféricas del punto.

13. Las coordenadas esféricas de un punto son $(8, \pi/4, \pi/6)$. Determine las coordenadas rectangulares y cilíndricas del punto.

14. Identifique las superficies cuyas ecuaciones se dan.
(a) $\theta = \pi/4$ (b) $\phi = \pi/4$

15. Escriba la ecuación en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.
(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (b) $x^2 + y^2 = 4$

16. Trace el sólido que consta de todos los puntos con coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) tales que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/6$, y $0 \leqslant \rho \leqslant 2 \cos \phi$.

17. Describa la región cuya área está dada por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

18. Describa el sólido cuyo volumen está dado por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

y evalúe la integral.

19-20 Calcule la integral iterada invirtiendo primero el orden de integración.

19. $\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\, dy\, dx$

20. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3}\, dx\, dy$

21-34 Calcule el valor de la integral múltiple

21. $\iint_R ye^{xy}\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

22. $\iint_D xy\, dA$, donde $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y^2 \leqslant x \leqslant y + 2\}$

23. $\iint_D \frac{y}{1 + x^2}\, dA$, donde D está acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$

24. $\iint_D \frac{1}{1 + x^2}\, dA$, donde D es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$

25. $\iint_D y\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotada por las parábolas $x = y^2$ y $x = 8 - y^2$

26. $\iint_D y\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que está sobre la hipérbola $xy = 1$ y la recta $y = x$ y bajo la recta $y = 2$

27. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas $y = 0$ y $y = \sqrt{3}x$ y el círculo $x^2 + y^2 = 9$

28. $\iint_D x\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que está entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$

29. $\iiint_E xy\, dV$, donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant z \leqslant x + y\}$

30. $\iiint_T xy\, dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices $(0, 0, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

31. $\iiint_E y^2z^2\, dV$, donde E está acotada por el paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ y el plano $x = 0$

32. $\iiint_E z\, dV$, donde E está acotada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante

33. $\iiint_E yz\,dV$, donde E está sobre el plano $z = 0$, bajo el plano $z = y$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

34. $\iiint_H z^3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$, donde H es el hemisferio sólido que está sobre el plano xy y tiene centro en el origen y radio 1

35-40 Determine el volumen del sólido dado.

35. Bajo el paraboloide $z = x^2 + 4y^2$ y sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$

36. Bajo la superficie $z = x^2y$ y sobre el triángulo en el plano xy con vértices (1, 0), (2, 1) y (4, 0)

37. El tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 0) y (2, 2, 0)

38. Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$ y $y + z = 3$

39. Una de las cuñas cortadas del cilindro $x^2 + 9y^2 = a^2$ por los planos $z = 0$ y $z = mx$

40. Sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y bajo el semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

41. Considere una lámina que ocupa la región D acotada por la parábola $x = 1 - y^2$ y los ejes de coordenadas en el primer cuadrante con función de densidad $\rho(x, y) = y$.
(a) Determine la masa de la lámina.
(b) Determine el centro de masa.
(c) Determine los momentos de inercia y radios de giro en torno a los ejes x y y.

42. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ que se ubica en el primer cuadrante.
(a) Determine el centroide de la lámina.
(b) Determine el centro de masa de la lámina si la función de densidad es $\rho(x, y) = xy^2$.

43. (a) Determine el centroide de un cono circular recto sólido con altura h y radio de base a. (Coloque el cono de tal forma que su base esté en el plano xy con centro en el origen y su eje a lo largo del eje z positivo.)
(b) Si el cono tiene función de densidad $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, determine el momento de inercia del cono alrededor de su eje (el eje z).

44. Encuentre el área de la parte del cono $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

45. Encuentre el área de la parte de la superficie $z = x^2 + y$ que está sobre el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 2).

SAC **46.** Grafique la superficie $z = x \operatorname{sen} y$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ y encuentre su área con cuatro decimales.

47. Use coordenadas polares para evaluar

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)\,dy\,dx$$

48. Use coordenadas esféricas para evaluar

$$\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dz\,dx\,dy$$

49. Si D es la región acotada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = e^x$, determine el valor aproximado de la integral $\iint_D y^2\,dA$. (Use un dispositivo de graficación para estimar los puntos de intersección de las curvas.)

SAC **50.** Determine el centro de masa del tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3) y función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

51. La función de densidad conjunta para las variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) Determine el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y \leqslant 1)$.

52. Una lámpara tiene tres focos, cada uno de un tipo con período de vida promedio de 800 horas. Si se modela la probabilidad de falla de un foco mediante una función exponencial de densidad con media 800, encuentre la probabilidad de que los tres focos fallen en menos de un total de 1000 horas.

53. Reescriba la integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_0^{1-y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

como una integral iterada en el orden $dx\,dy\,dz$.

54. Dé otras cinco integrales iteradas que sean iguales a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$$

55. Use la transformación $u = x - y$, $v = x + y$ para evaluar

$$\iint_R \frac{x - y}{x + y}\,dA$$

donde R es el cuadrado con vértices (0, 2), (1, 1), (2, 2) y (1, 3).

56. Use la transformación $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para hallar el volumen de la región acotada por la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ y los planos de coordenadas.

57. Use la fórmula de cambio de variables y una transformación apropiada para evaluar $\iint_R xy\,dA$, donde R es el cuadrado con vértices (0, 0), (1, 1), (2, 0) y (1, −1).

58. El **teorema del valor medio para integrales dobles** establece que si f es una función continua en una región plana D que es de tipo I o tipo II, existe un punto (x_0, y_0) en D tal que

$$\iint_D f(x, y)\,dA = f(x_0, y_0)A(D)$$

Use el teorema de valores extremos (14.7.8) y la propiedad 15.2.11 de las integrales para comprobar este teorema. (Use como guía la comprobación de la versión de una variable en la sección 6.5.)

59. Suponga que f es continua en un disco que contiene el punto (a, b). Sea D_r el disco cerrado con centro (a, b) y radio r. Use el teorema del valor medio para integrales dobles (véase el ejercicio 58) para demostrar que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

60. (a) Evalúe $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}}\, dA$, donde n es un entero y D la región acotada por los círculos con centro en el origen y radios r y R, $0 < r < R$.

(b) ¿Para cuáles valores de n tiene la integral en el inciso (a) un límite cuando $r \to 0^+$?

(c) Determine $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}}\, dV$, donde E es la región acotada por las esferas con centro en el origen y radios r y R, $0 < r < R$.

(d) ¿Para cuáles valores de n tiene la integral en el inciso (c) un límite cuando $r \to 0^+$?

Problemas adicionales

1. Si $[\![x]\!]$ denota el entero mayor en x, evalúe la integral

$$\iint_R [\![x + y]\!]\, dA$$

donde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3, \quad 2 \leqslant y \leqslant 5\}$.

2. Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\text{máx}\{x^2,\, y^2\}}\, dy\, dx$$

donde $\text{máx}\{x^2, y^2\}$ significa el mayor de los números x^2 y y^2.

3. Determine el valor promedio de la función $f(x) = \int_x^1 \cos(t^2)\, dt$ en el intervalo $[0, 1]$.

4. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores constantes, $\mathbf{r}$ es el vector de posición $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y E está dada por las desigualdades $0 \leqslant \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \leqslant \alpha$, $0 \leqslant \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \leqslant \beta$, $0 \leqslant \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \leqslant \gamma$, demuestre que

$$\iiint_E (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\, dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8\,|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

5. La integral doble $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}$ es una integral impropia y podría definirse como el límite de integrales dobles en el rectángulo $[0, t] \times [0, t]$ cuando $t \to 1^-$. Pero si se desarrolla el integrando como una serie geométrica, se puede expresar la integral como la suma de una serie infinita. Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\, dx\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

6. Leonhard Euler fue capaz de determinar la suma exacta de la serie en el problema 5. En 1736 comprobó que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

En este problema se pide comprobar este hecho evaluando la integral doble del problema 5. Comience haciendo el cambio de variables

$$x = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$$

Esto da una rotación en torno al origen por el ángulo $\pi/4$. Usted tendrá que trazar la región correspondiente en el plano uv.

[*Sugerencia*: si al evaluar la integral encuentra cualesquiera de las expresiones $(1 - \operatorname{sen}\theta)/\cos\theta$ o $(\cos\theta)/(1 + \operatorname{sen}\theta)$, podría usar la identidad $\cos\theta = \operatorname{sen}((\pi/2) - \theta)$ y la identidad correspondiente para $\operatorname{sen}\theta$.]

7. (a) Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xyz}\, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(Nadie ha podido hallar el valor exacto de la suma de esta serie.)

(b) Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xyz}\, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Use esta ecuación para evaluar la integral triple con dos decimales.

8. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln \pi$$

expresando primero la integral como una integral iterada.

9. (a) Demuestre que cuando la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se escribe en coordenadas cilíndricas, se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(b) Demuestre que cuando la ecuación de Laplace se escribe en coordenadas esféricas se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

10. (a) Una lámina tiene densidad constante ρ y adopta la forma de un disco con centro en el origen y radio R. Use la ley de la gravitación de Newton (véase la sección 13.4) para demostrar que la magnitud de la fuerza de atracción que la lámina ejerce sobre un cuerpo con masa m localizado en el punto $(0, 0, d)$ en el eje z positivo es

$$F = 2\pi Gm\rho d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$$

[*Sugerencia*: divida el disco como en la figura 15.3.4 y calcule primero el componente vertical de la fuerza ejercida por el subrectángulo polar R_{ij}.]

(b) Demuestre que la magnitud de la fuerza de atracción de una lámina con densidad ρ que ocupa un plano entero sobre un objeto con masa m localizado a una distancia d del plano es

$$F = 2\pi Gm\rho$$

Note que esta expresión no depende de d.

11. Si f es continua, demuestre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t)\, dt\, dz\, dy = \tfrac{1}{2}\int_0^x (x - t)^2 f(t)\, dt$$

12. Evalúe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + ni + j}}$.

13. El plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0$$

corta el elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

en dos piezas. Determine el volumen de la pieza menor.

16 Cálculo vectorial

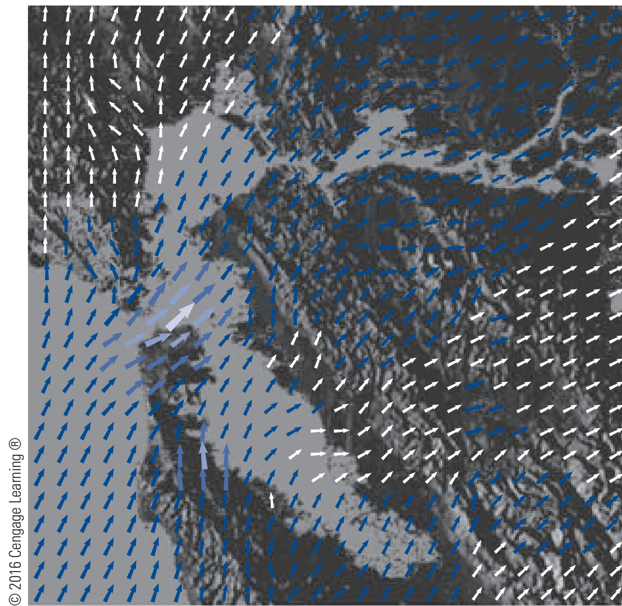
Las superficies paramétricas, las cuales se estudiarán en la sección 16.6, son frecuentemente usadas por programadores para crear el sofisticado software que se utiliza en el desarrollo de filmes animados por computadora como la serie *Shrek*. Ese software emplea superficies paramétricas y de otros tipos para crear modelos tridimensionales de los personajes y objetos en una escena. Color, textura e iluminación se producen entonces para dar vida a la escena.



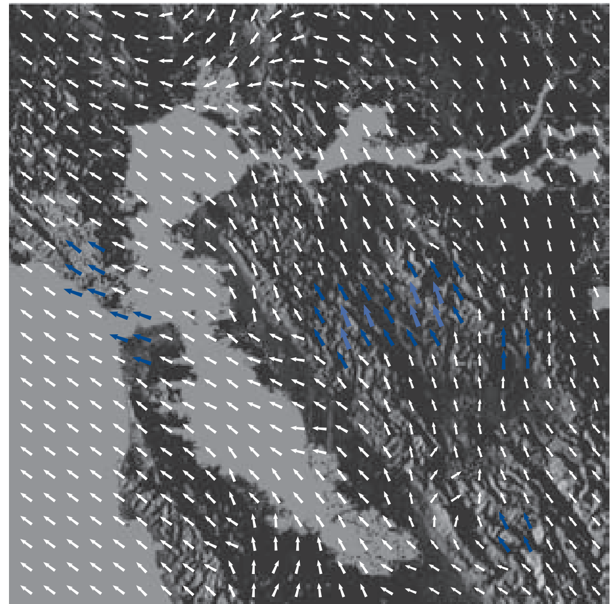
EN ESTE CAPÍTULO SE ESTUDIARÁ el cálculo de campos vectoriales. (Estos son funciones que asignan vectores a puntos en el espacio.) En particular, se definirán integrales de línea (que pueden usarse para determinar el trabajo realizado por un campo de fuerzas para mover un objeto a lo largo de una curva). Después se definirán integrales de superficie (que pueden usarse para determinar la razón de flujo de un fluido en una superficie). Las relaciones entre estos nuevos tipos de integrales y las integrales simples, dobles y triples que ya se conocen están dadas por las versiones de dimensiones superiores del teorema fundamental del cálculo: el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia.

16.1 Campos vectoriales

Los vectores de la figura 1 son vectores de velocidad del aire que indican la velocidad y dirección del viento en puntos a 10 m por encima de la elevación superficial en el área de la bahía de San Francisco. Basta con echar un vistazo a las flechas más grandes de la parte (a) para saber que las mayores velocidades del viento ocurrieron a esa hora, cuando los vientos entraron a la bahía por el puente Golden Gate. La parte (b) muestra el patrón del viento 12 horas antes. Los dos patrones difieren mucho entre sí. En asociación con cada punto en el aire puede imaginar un vector de velocidad del viento. Este es un ejemplo de un *campo vectorial de velocidad*.



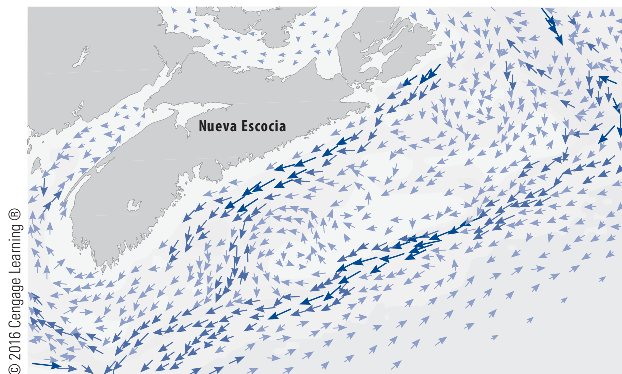
(a) 6:00 PM, 1º de marzo de 2010



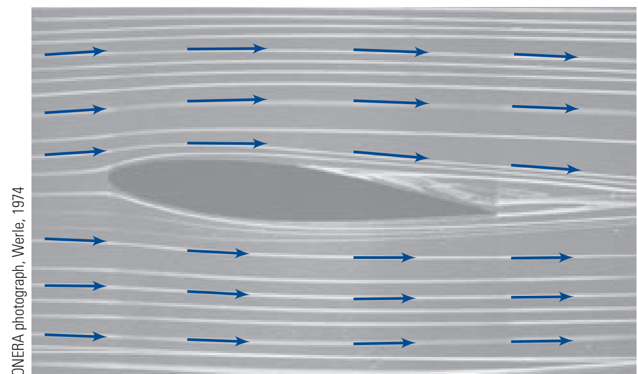
(b) 6:00 AM, 1º de marzo de 2010

FIGURA 1 Campos vectoriales de velocidad que muestran patrones de viento de la bahía de San Francisco

Otros ejemplos de campos vectoriales de velocidad se ilustran en la figura 2: corrientes marinas y el flujo por un alerón.



(a) Corrientes marinas frente a las cosas de Nueva Escocia



(b) Flujo de aire por un alerón inclinado

FIGURA 2
Campos vectoriales de velocidad

Otro tipo de campo vectorial, llamado *campo de fuerzas*, asocia un vector de fuerza con cada punto en una región. Un ejemplo es el campo de fuerzas gravitacionales que se examinará en el ejemplo 4.

En general, un campo vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) y cuyo rango es un conjunto de vectores en V_2 (o V_3).

1 Definición Sea D un conjunto en $\mathbb{R}^2$ (una región plana). Un **campo vectorial en** $\mathbb{R}^2$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y) en D un vector bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

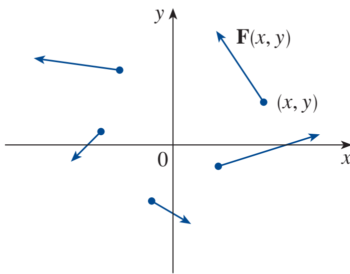


FIGURA 3
Campo vectorial en $\mathbb{R}^2$

La mejor manera de representar un campo vectorial es dibujar la flecha que representa al vector $\mathbf{F}(x, y)$ a partir del punto (x, y). Desde luego que esto es imposible de hacer para todos los puntos (x, y), pero se puede obtener una impresión razonable de $\mathbf{F}$ al hacerlo para algunos puntos representativos en D, como en la figura 3. Puesto que $\mathbf{F}(x, y)$ es un vector bidimensional, puede escribirse en términos de sus **funciones componentes** P y Q como sigue:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$$

o para abreviar

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$$

Nótese que P y Q son funciones escalares de dos variables, también llamadas **campos escalares** para distinguirlas de los campos vectoriales.

2 Definición Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Un **campo vectorial en** $\mathbb{R}^3$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y, z) en E un vector tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

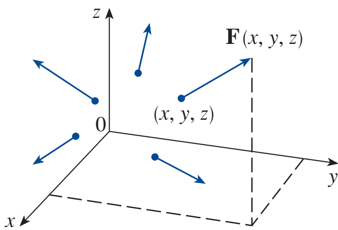


FIGURA 4
Campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ se presenta en la figura 4. Puede expresarse en términos de sus funciones componentes P, Q y R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Al igual que en el caso de las funciones vectoriales en la sección 13.1, se puede definir la continuidad de los campos vectoriales y demostrar que $\mathbf{F}$ es continuo si y solo si sus funciones componentes P, Q y R son continuas.

A veces se identifica un punto (x, y, z) con su vector de posición $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ y se escribe $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en lugar de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Entonces $\mathbf{F}$ se convierte en una función que asigna un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a un vector $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 1 Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Describa $\mathbf{F}$ trazando algunos de los vectores $\mathbf{F}(x, y)$ como en la figura 3.

SOLUCIÓN Puesto que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, dibuje el vector $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ a partir del punto $(1, 0)$ en la figura 5. Ya que $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, dibuje el vector $\langle -1, 0\rangle$ a partir del punto $(0, 1)$. Continuando de esta manera, calcule varios valores representativos más de $\mathbf{F}(x, y)$ en la tabla y dibuje los vectores correspondientes para representar el campo vectorial en la figura 5.

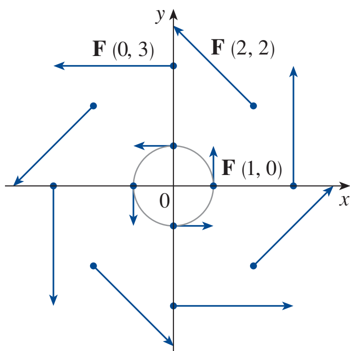


FIGURA 5
$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Da la impresión en la figura 5 de que cada flecha es tangente a un círculo con centro en el origen. Para confirmar esto, se toma el producto punto del vector de posición $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ con el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

Esto demuestra que $\mathbf{F}(x, y)$ es perpendicular al vector de posición $\langle x, y \rangle$, y por tanto tangente a un círculo con centro en el origen y radio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nótese también que

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

así que la magnitud del vector $\mathbf{F}(x, y)$ es igual al radio del círculo. ■

Algunos sistemas algebraicos computacionales son capaces de trazar campos vectoriales en dos o tres dimensiones. Dan una mejor impresión del campo vectorial de la que es posible a mano, porque la computadora puede trazar un gran número de vectores representativos. La figura 6 muestra un trazo en computadora del campo vectorial del ejemplo 1; las figuras 7 y 8 muestran los otros dos campos vectoriales. Adviértase que la computadora escala las longitudes de los vectores para que no sean demasiado largos, aunque sin dejar de ser proporcionales a sus longitudes verdaderas.

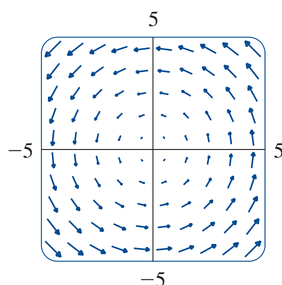


FIGURA 6
$\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$

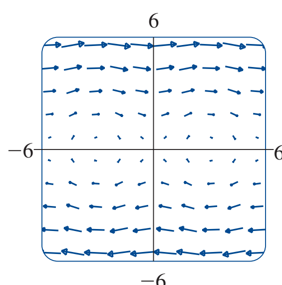


FIGURA 7
$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \text{sen}\, x \rangle$

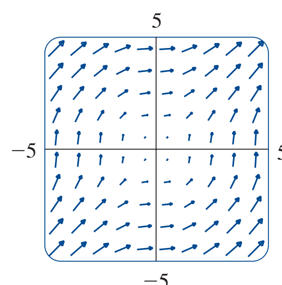


FIGURA 8
$\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2) \rangle$

EJEMPLO 2 Trace el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN El trazo aparece en la figura 9. Nótese que todos los vectores son verticales y apuntan hacia arriba sobre el plano xy, o hacia abajo debajo de él. La magnitud aumenta con la distancia del plano xy.

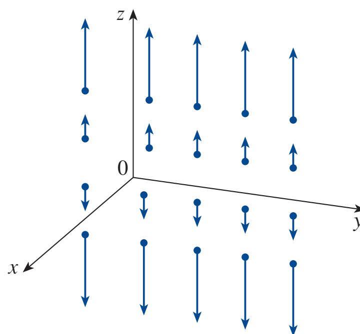


FIGURA 9
$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$

■

Se pudo dibujar a mano el campo vectorial del ejemplo 2 gracias a su fórmula particularmente simple. La mayoría de los campos vectoriales tridimensionales, sin embargo, son prácticamente imposibles de trazar a mano, así que es necesario recurrir a software

de computación. Se muestran ejemplos en las figuras 10, 11 y 12. Obsérvese que los campos vectoriales en las figuras 10 y 11 tienen fórmulas similares, pero todos los vectores en la figura 11 apuntan en la dirección general del eje y negativo, porque todos sus componentes y son -2. Si el campo vectorial en la figura 12 representa un campo de velocidad, una partícula sería lanzada hacia arriba y giraría en espiral alrededor del eje z en el sentido de las manecillas del reloj al ser vista desde arriba.

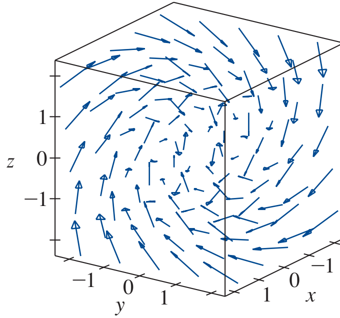


FIGURA 10
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

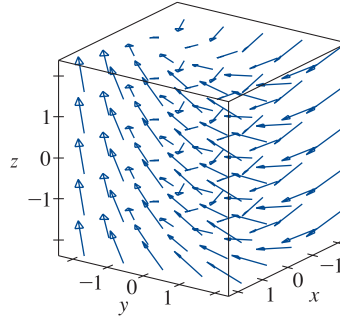


FIGURA 11
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

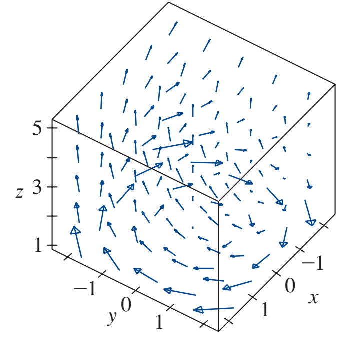


FIGURA 12
$\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{y}{z}\,\mathbf{i} - \dfrac{x}{z}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{4}\,\mathbf{k}$

TEC En Visual 16.1 usted puede rotar los campos vectoriales de las figuras 10-12, así como otros campos adicionales.

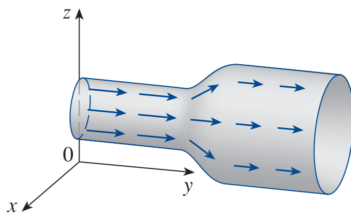


FIGURA 13
Campo de velocidad en el flujo de un fluido

EJEMPLO 3 Imagine un fluido que fluye constantemente a lo largo de un tubo y sea $\mathbf{V}(x, y, z)$ el vector velocidad en un punto (x, y, z). Entonces, $\mathbf{V}$ asigna un vector a cada punto (x, y, z) en cierto dominio E (el interior del tubo), así que $\mathbf{V}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ llamado **campo de velocidad**. Un posible campo de velocidad se ilustra en la figura 13. La rapidez en cualquier punto dado está indicada por la longitud de la flecha.

Los campos de velocidad también ocurren en otras áreas de la física. Por ejemplo, el campo vectorial del ejemplo 1 podría usarse como el campo de velocidad que describe la rotación de una rueda en sentido contrario a las manecillas del reloj. Se han visto otros ejemplos de campos de velocidad en las figuras 1 y 2. ■

EJEMPLO 4 La ley de la gravitación de Newton sostiene que la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos objetos con masas m y M es

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los objetos y G la constante gravitacional. (Este es un ejemplo de una ley de cuadrados inversa.) Suponga que el objeto con masa M se localiza en el origen en $\mathbb{R}^3$. (Por ejemplo, M podría ser la masa de la Tierra y el origen estaría en su centro.) Sea $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ el vector de posición del objeto con masa m. Entonces, $r = |\mathbf{x}|$, así que $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. La fuerza gravitacional ejercida sobre este segundo objeto actúa hacia el origen, y el vector unitario en esta dirección es

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Por tanto, la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto en $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ es

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

[Los físicos suelen usar la notación $\mathbf{r}$ en vez de $\mathbf{x}$ para el vector de posición, así que usted podría ver la fórmula 3 escrita en la forma $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}$.] La función dada

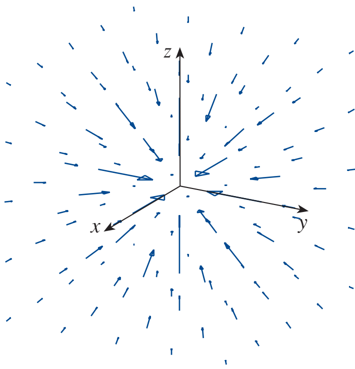


FIGURA 14
Campo de fuerzas gravitacionales

por la ecuación 3 es un ejemplo de un campo vectorial, llamado **campo gravitacional**, porque asocia un vector [la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$] con cada punto $\mathbf{x}$ en el espacio.

La fórmula 3 es un modo compacto de escribir el campo gravitacional, pero también puede escribirse en términos de sus funciones componentes usando los hechos de que $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

El campo gravitacional $\mathbf{F}$ se representa en la figura 14. ■

EJEMPLO 5 Suponga que una carga eléctrica Q se localiza en el origen. De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza eléctrica $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ejercida por esa carga sobre una carga q localizada en un punto (x, y, z) con vector de posición $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ es

4 $$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon q Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

donde ε es una constante (que depende de las unidades usadas). Para cargas iguales, se tiene $qQ > 0$ y la fuerza es de repulsión; para cargas desiguales se tiene $qQ < 0$ y la fuerza es de atracción. Nótese la semejanza entre las fórmulas 3 y 4. Ambos campos vectoriales son ejemplos de **campos de fuerzas**.

En lugar de considerar la fuerza eléctrica $\mathbf{F}$, los físicos suelen considerar la fuerza por unidad de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

Entonces, $\mathbf{E}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ llamado **campo eléctrico** de Q. ■

Campos gradientes

Si f es una función escalar de dos variables, recuerde de la sección 14.6 que su gradiente ∇f (o grad f) está definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Por tanto, ∇f es en realidad un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ llamado **campo vectorial gradiente**. De igual forma, si f es una función escalar de tres variables, su gradiente es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

EJEMPLO 6 Determine el campo vectorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Trace el campo vectorial gradiente junto con un mapa de contorno de f. ¿Cómo se relacionan entre sí?

SOLUCIÓN El campo vectorial gradiente está dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

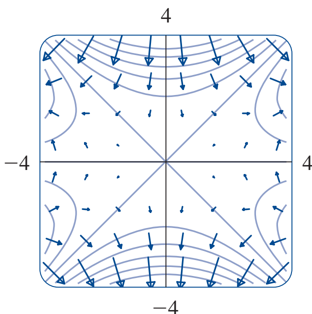


FIGURA 15

La figura 15 muestra un mapa de contorno de f con el campo vectorial gradiente. Observe que los vectores gradientes son perpendiculares a las curvas de nivel, como

cabría esperar por la sección 14.6. Observe también que los vectores gradientes son largos donde las curvas de nivel están muy cerca entre sí y cortos donde las curvas están separadas. Esto se debe a que la longitud del vector gradiente es el valor de la derivada direccional de f y las curvas de nivel estrechamente espaciadas indican una gráfica pronunciada. ■

Un campo vectorial **F** se llama **campo vectorial conservativo** si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. En esta situación, f se llama **función potencial** de **F**.

No todos los campos vectoriales son conservativos, pero tales campos surgen con frecuencia en física. Por ejemplo, el campo gravitacional **F** en el ejemplo 4 es conservativo, porque si se define

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z)\end{aligned}$$

En las secciones 16.3 y 16.5 se aprenderá si un campo vectorial dado es conservativo o no.

16.1 EJERCICIOS

1-10 Trace el campo vectorial **F** dibujando un diagrama como la figura 5 o la figura 9.

1. $\mathbf{F}(x, y) = 0.3\,\mathbf{i} - 0.4\,\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

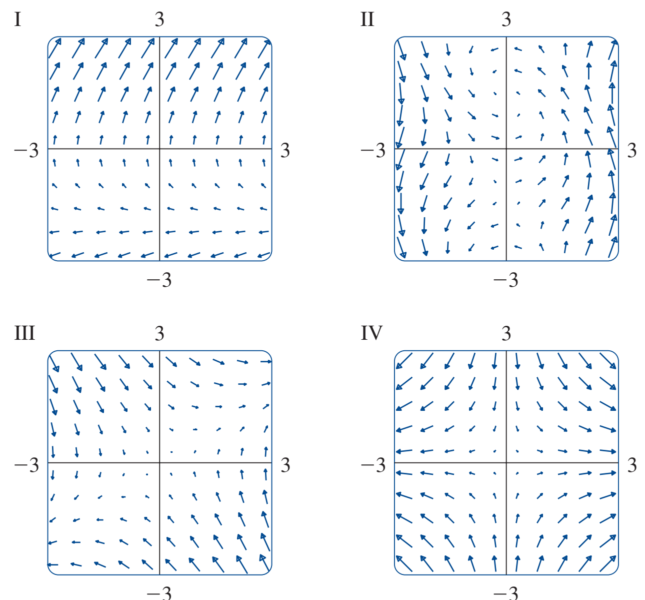
11-14 Asocie los campos vectoriales **F** con los diagramas rotulados I-IV. Dé razones de sus decisiones.

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, -y\rangle$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x - y\rangle$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, y + 2\rangle$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \cos(x + y), x\rangle$



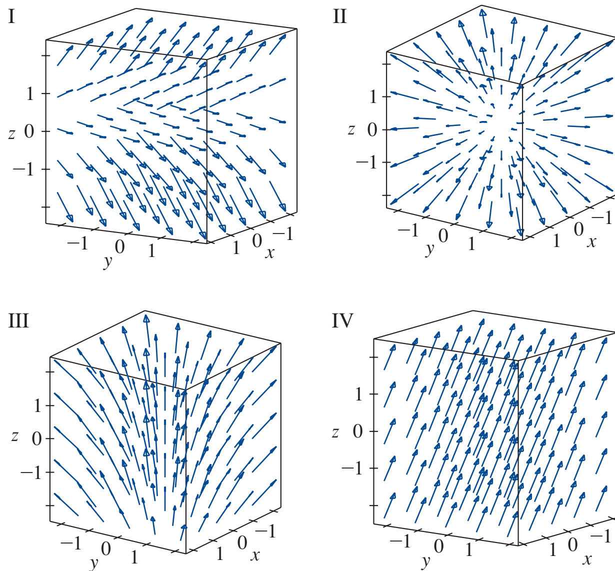
15-18 Asocie los campos vectoriales **F** en $\mathbb{R}^3$ con los diagramas rotulados I-IV. Dé razones de sus decisiones.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$



19. Si tiene un SAC que trace campos vectoriales (el comando es `fieldplot` en Maple y `PlotVectorField` o `VectorPlot` en Mathematica), úselo para trazar

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2xy)\,\mathbf{i} + (3xy - 6y^2)\,\mathbf{j}$$

Explique la apariencia determinando el conjunto de puntos (x, y) tales que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$.

20. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$ y $r = |\,\mathbf{x}\,|$. Use un SAC para trazar este campo vectorial en varios dominios hasta que pueda ver qué sucede. Describa la apariencia del diagrama y explíquela determinando los puntos donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21-24 Halle el campo vectorial gradiente de f.

21. $f(x, y) = \tan(3x - 4y)$

22. $f(s, t) = \sqrt{2s + 3t}$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

24. $f(x, y, z) = x^2 y e^{y/z}$

25-26 Halle el campo vectorial gradiente ∇f de f y trácelo.

25. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$

26. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

27-28 Trace el campo vectorial gradiente de f junto con un mapa de contorno de f. Explique cómo se relacionan entre sí.

27. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2)$

28. $f(x, y) = \cos x - 2 \operatorname{sen} y$

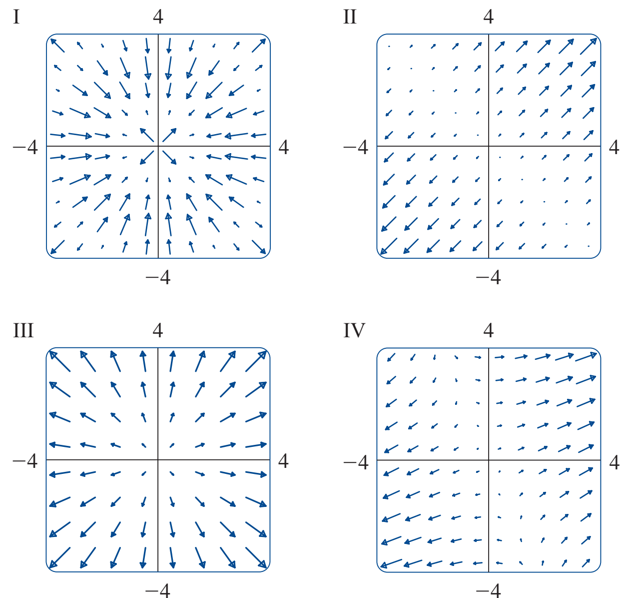
29-32 Asocie las funciones f con los diagramas de sus campos vectoriales gradientes rotulados I-IV. Dé razones de sus decisiones.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2$

30. $f(x, y) = x(x + y)$

31. $f(x, y) = (x + y)^2$

32. $f(x, y) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$



33. Una partícula se mueve en un campo de velocidad $\mathbf{V}(x, y) = \langle x^2, x + y^2\rangle$. Si está en la posición (2, 1) en el momento $t = 3$, estime su ubicación en el momento $t = 3.01$.

34. En el momento $t = 1$, una partícula se localiza en la posición (1, 3). Si se mueve en un campo de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle xy - 2, y^2 - 10\rangle$$

determine su ubicación aproximada en el momento $t = 1.05$.

35. Las **líneas de flujo** (o **líneas de corriente**) de un campo vectorial son las trayectorias seguidas por una partícula cuyo campo de velocidad es el campo vectorial dado. Así, los vectores en un campo vectorial son tangentes a las líneas de flujo.

(a) Use un diagrama del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ para dibujar algunas líneas de flujo. ¿Puede deducir de sus bocetos las ecuaciones de las líneas de flujo?

(b) Si ecuaciones paramétricas de una línea de flujo son $x = x(t)$, $y = y(t)$, explique por qué estas funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales $dx/dt = x$ y $dy/dt = -y$. Resuelva después las ecuaciones diferenciales para determinar una ecuación de la línea de flujo que pasa por el punto (1, 1).

36. (a) Trace el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ y dibuje después algunas líneas de flujo. ¿Qué forma parecen tener estas líneas de flujo?

(b) Si ecuaciones paramétricas de las líneas de flujo son $x = x(t)$, $y = y(t)$, ¿qué ecuaciones diferenciales satisfacen estas funciones? Deduzca que $dy/dx = x$.

(c) Si una partícula parte del origen en el campo de velocidad dado por **F**, determine una ecuación de la trayectoria que sigue.

16.2 Integrales de línea

En esta sección se definirá una integral que es similar a una integral simple excepto que en vez de integrar en un intervalo $[a, b]$, se integra en una curva C. Tales integrales se llaman *integrales de línea*, aunque "integrales de curva" sería una mejor terminología. Fueron inventadas a principios del siglo XIX para resolver problemas que implican el flujo de fluidos, fuerzas, electricidad y magnetismo.

Se comienza con una curva plana C dada por las ecuaciones paramétricas

1 $$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

o, en forma equivalente, por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, y suponga que C es una curva suave. [Esto significa que $\mathbf{r}$' es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. Véase la sección 13.3.] Si divide el intervalo paramétrico $[a, b]$ en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual ancho y concede que $x_i = x(t_i)$ y $y_i = y(t_i)$, entonces los correspondientes puntos $P_i\,(x_i, y_i)$ dividen C en n subarcos con longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. (Véase la figura 1.). Elija cualquier punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ en el arco de orden i. (Esto corresponde al punto t_i^* en $[t_{i-1}, t_i]$.) Ahora, si f es cualquier función de dos variables cuyo dominio incluye la curva C, evalúe f en el punto (x_i^*, y_i^*), multiplique por la longitud Δs_i del subarco y forme la suma

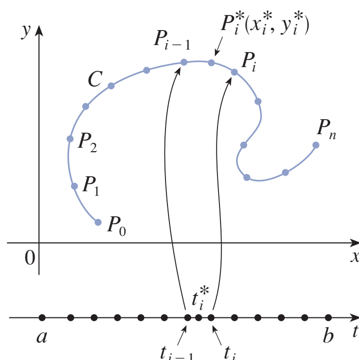


FIGURA 1

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

la cual es similar a una suma de Riemann. Tome entonces el límite de estas sumas y represente la definición siguiente por analogía con una integral simple.

2 Definición Si f se define en una curva suave C dada por las ecuaciones 1, la **integral de línea de f a lo largo de C** es

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

si este límite existe.

En la sección 10.2 se determina que la longitud de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Un tipo de argumento similar puede usarse para demostrar que si f es una función continua, el límite en la definición 2 siempre existe y la fórmula siguiente puede usarse para evaluar la integral de línea:

3 $$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

El valor de la integral de línea no depende de la parametrización de la curva, siempre que esa curva sea recorrida exactamente una vez conforme t aumenta de a a b.

La función longitud de arco se analiza en la sección 13.3.

Si $s(t)$ es la longitud de C entre $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Así, la manera de recordar la fórmula 3 es expresar todo en términos del parámetro t: use las ecuaciones paramétricas para expresar x y y en términos de t y escriba ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

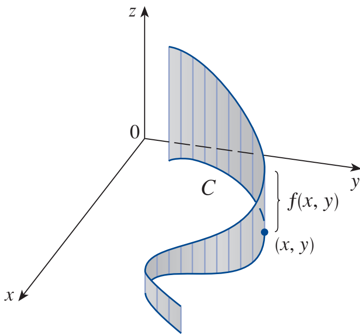


FIGURA 2

En el caso especial en el que C es el segmento de recta que une $(a, 0)$ con $(b, 0)$, usando x como el parámetro, se pueden escribir las ecuaciones paramétricas de C como sigue: $x = x$, $y = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. La fórmula 3 se convierte entonces en

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, 0)\, dx$$

y por tanto la integral de línea en este caso se reduce a una integral simple ordinaria.

Igual que en el caso de una integral simple ordinaria, se puede interpretar la integral de línea de una función *positiva* como un área. De hecho, si $f(x, y) \geqslant 0$, $\int_C f(x, y)\, ds$ representa el área de un lado de la "cerca" o "cortina" de la figura 2, cuya base es C y cuya altura arriba del punto (x, y) es $f(x, y)$.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C (2 + x^2y)\, ds$, donde C es la mitad superior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$.

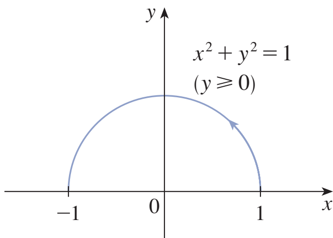


FIGURA 3

SOLUCIÓN Para usar la fórmula 3, necesita primero ecuaciones paramétricas que representen a C. Recuerde que el círculo unitario puede parametrizarse por medio de las ecuaciones

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

y la mitad superior del círculo es descrita por el intervalo paramétrico $0 \leqslant t \leqslant \pi$. (Véase la figura 3.) Por tanto, la fórmula 3 da

$$\int_C (2 + x^2y)\, ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi$$

$$= 2\pi + \tfrac{2}{3}$$

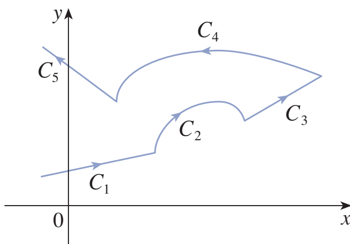


FIGURA 4
Una curva suave por partes

Suponga ahora que C es una **curva suave por partes**; es decir, C es una unión de un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$, donde, como se ilustra en la figura 4, el punto inicial de C_{i+1} es el punto terminal de C_i. Se define entonces la integral de f a lo largo de C como la suma de las integrales de f a lo largo de cada una de las piezas suaves de C:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_C 2x\, ds$, donde C consta del arco C_1 de la parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido por el segmento de recta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

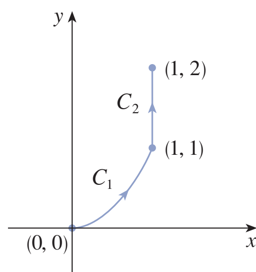


FIGURA 5
$C = C_1 \cup C_2$

SOLUCIÓN La curva C aparece en la figura 5. C_1 es la gráfica de una función de x, así que es posible elegir x como el parámetro y las ecuaciones de C_1 se convierten en

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Por tanto

$$\int_{C_1} 2x\, ds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

En C_2 se elige y como el parámetro, de modo que las ecuaciones de C_2 son

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

y
$$\int_{C_2} 2x\, ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^2 2\, dy = 2$$

Así
$$\int_C 2x\, ds = \int_{C_1} 2x\, ds + \int_{C_2} 2x\, ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$ ■

Toda interpretación física de una integral de línea $\int_C f(x, y)\, ds$ depende de la interpretación física de la función f. Suponga que $\rho(x, y)$ representa la densidad lineal en un punto (x, y) de un alambre delgado en forma de una curva C. Entonces, la masa de la parte del alambre de P_{i-1} a P_i en la figura 1 es aproximadamente $\rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$, y en consecuencia la masa total del alambre es aproximadamente $\Sigma\, \rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$. Al tomar cada vez más puntos en la curva, se obtiene la **masa** m del alambre como el valor límite de estas aproximaciones:

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\, ds$$

[Por ejemplo, si $f(x, y) = 2 + x^2y$ representa la densidad de un alambre en forma de semicírculo, la integral del ejemplo 1 representaría la masa del alambre.] El **centro de masa** del alambre con función de densidad ρ se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

4
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x, y)\, ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y)\, ds$$

Otras interpretaciones físicas de integrales de línea se analizarán más adelante en este mismo capítulo.

EJEMPLO 3 Un alambre adopta la forma del semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, y es más grueso cerca de su base que cerca de la parte más alta. Encuentre el centro de masa del alambre si la densidad lineal en cualquier punto es proporcional a su distancia de la recta $y = 1$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 1, se usa la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, y se determina que $ds = dt$. La densidad lineal es

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

donde k es una constante, así que la masa del alambre es

$$m = \int_C k(1 - y)\, ds = \int_0^\pi k(1 - \operatorname{sen} t)\, dt = k\Big[t + \cos t\Big]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

De las ecuaciones 4 se tiene

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x, y)\, ds = \frac{1}{k(\pi - 2)}\int_C y\, k(1 - y)\, ds$$

$$= \frac{1}{\pi - 2}\int_0^\pi (\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t)\, dt = \frac{1}{\pi - 2}\Big[-\cos t - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\Big]_0^\pi$$

$$= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}$$

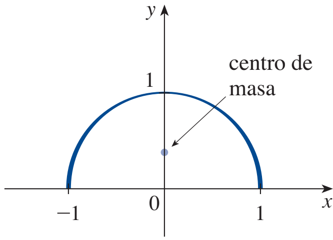


FIGURA 6

Por simetría se ve que $\bar{x} = 0$, de modo que el centro de masa es

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\right) \approx (0, 0.38)$$

Véase la figura 6. ■

Otras dos integrales de línea se obtienen reemplazando Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ en la definición 2. Estas se llaman **integrales de línea de *f* a lo largo de *C* con respecto a *x* y *y***:

5 $$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i$$

6 $$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta y_i$$

Cuando se desea distinguir la integral de línea original $\int_C f(x, y)\, ds$ de las ecuaciones 5 y 6, se llama **integral de línea con respecto a la longitud de arco**.

Las fórmulas siguientes establecen que las integrales de línea con respecto a x y y también pueden evaluarse expresando todo en términos de t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$

7
$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$$

Con frecuencia sucede que integrales de línea con respecto a x y y ocurran juntas. Cuando pasa esto, se acostumbra abreviar escribiendo

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Cuando se establece una integral general, a veces lo más difícil es pensar en una representación paramétrica para una curva cuya descripción geométrica está dada. En particular, a menudo se debe parametrizar un segmento de recta, así que resulta útil

recordar que una representación vectorial del segmento de recta que parte de $\mathbf{r}_0$ y termina en $\mathbf{r}_1$ está dada por

8
$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Véase la ecuación 12.5.4.)

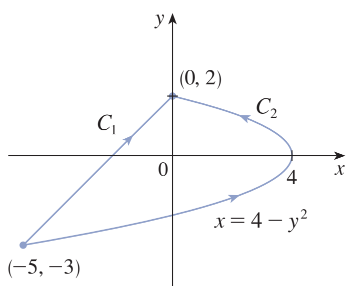


FIGURA 7

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, donde (a) $C = C_1$ es el segmento de recta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ y (b) $C = C_2$ es el arco de la parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Véase la figura 7.)

SOLUCIÓN

(a) Una representación paramétrica para el segmento de recta es

$$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Use la ecuación 8 con $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$.) Entonces $dx = 5\,dt$, $dy = 5\,dt$, y las fórmulas 7 dan

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy &= \int_0^1 (5t - 3)^2(5\,dt) + (5t - 5)(5\,dt) \\ &= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\,dt \\ &= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

(b) Puesto que la parábola está dada como una función de y, se toma y como el parámetro y se escribe C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Así $dx = -2y\,dy$, y por las fórmulas 7 se tiene

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y)\,dy + (4 - y^2)\,dy \\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4)\,dy \\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^2 = 40\tfrac{5}{6}\end{aligned}$$ ■

Nótese que se obtuvieron respuestas diferentes en las partes (a) y (b) del ejemplo 4, aunque las dos curvas tienen los mismos puntos extremos. Así, en general, el valor de una integral de línea depende no solo de los puntos extremos de la curva, sino también de la trayectoria. (Pero véase la sección 16.3 para condiciones en las cuales la integral es independiente de la trayectoria.)

Nótese también que las respuestas en el ejemplo 4 dependen de la dirección u orientación de la curva. Si $-C_1$ denota el segmento de recta de (0, 2) a (–5, –3), usted puede verificar, usando la parametrización

$$x = -5t \qquad y = 2 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

que
$$\int_{-C_1} y^2\,dx + x\,dy = \tfrac{5}{6}$$

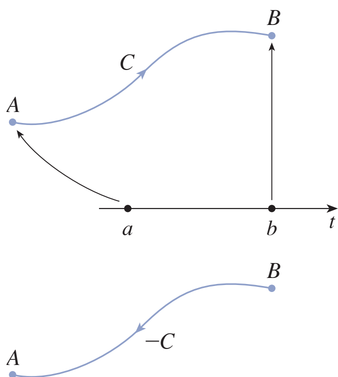


FIGURA 8

En general, una parametrización dada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, determina una **orientación** de una curva C, y la dirección positiva corresponde a valores crecientes del parámetro t. (Véase la figura 8, donde el punto inicial A corresponde al valor paramétrico a y el punto terminal B a $t = b$.)

Si $-C$ denota la curva que consta de los mismos puntos que C pero con la orientación opuesta (del punto inicial B al punto terminal A en la figura 8), entonces se tiene

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx \qquad \int_{-C} f(x, y)\, dy = -\int_C f(x, y)\, dy$$

Pero si se integra con respecto a la longitud de arco, el valor de la integral de línea *no* cambia cuando se invierte la orientación de la curva:

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

Esto se debe a que Δs_i siempre es positiva, mientras que Δx_i y Δy_i cambian de signo cuando se invierte la orientación de C.

Integrales de línea en el espacio

Suponga ahora que C es una curva suave en el espacio dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

o por una ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Si f es una función de tres variables que es continua en alguna región que contiene C, se define la **integral de línea de f a lo largo de C** (con respecto a la longitud de arco) en forma similar a la de las curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

Se evalúa usando una fórmula semejante a la fórmula 3:

$$\boxed{9} \qquad \int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que las integrales en las fórmulas tanto 3 como 9 pueden escribirse con la notación vectorial más compacta

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Para el caso especial $f(x, y, z) = 1$ se obtiene

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = L$$

donde L es la longitud de la curva C (véase la fórmula 13.3.3).

También pueden definirse integrales de línea a lo largo de C con respecto a x, y y z. Por ejemplo,

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt$$

Por tanto, como en el caso de las integrales de línea en el plano, se evalúan integrales de la forma

10 $$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

expresando todo (x, y, z, dx, dy, dz) en términos del parámetro t.

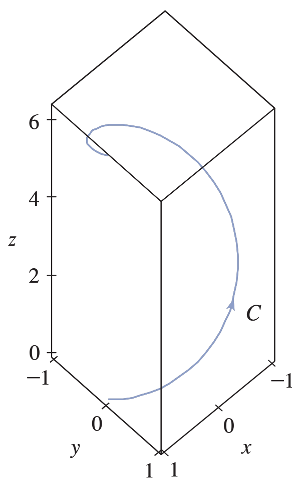


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_C y \text{ sen } z\, ds$, donde C es la hélice circular dada por las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (Véase la figura 9.)

SOLUCIÓN La fórmula 9 da

$$\int_C y \text{ sen } z\, ds = \int_0^{2\pi} (\text{sen } t) \text{ sen } t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 t \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t - \tfrac{1}{2} \text{ sen } 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$ ■

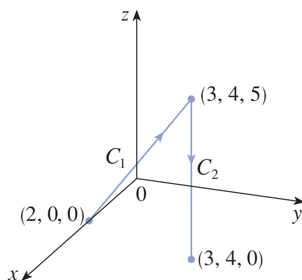


FIGURA 10

EJEMPLO 6 Evalúe $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$, donde C consta del segmento de recta C_1 de $(2, 0, 0)$ a $(3, 4, 5)$, seguido por el segmento de recta vertical C_2 de $(3, 4, 5)$ a $(3, 4, 0)$.

SOLUCIÓN La curva C aparece en la figura 10. Usando la ecuación 8, se escribe C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0\rangle + t\langle 3, 4, 5\rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t\rangle$$

o, en forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \qquad y = 4t \qquad z = 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Así

$$\int_{C_1} y\, dx + z\, dy + x\, dz = \int_0^1 (4t)\, dt + (5t)4\, dt + (2 + t)5\, dt$$

$$= \int_0^1 (10 + 29t)\, dt = 10t + 29\,\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = 24.5$$

De igual manera, C_2 puede escribirse en la forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5\rangle + t\langle 3, 4, 0\rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t\rangle$$

o $$x = 3 \qquad y = 4 \qquad z = 5 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Entonces $dx = 0 = dy$, de modo que

$$\int_{C_2} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 3(-5)\,dt = -15$$

Al sumar los valores de estas integrales se obtiene

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = 24.5 - 15 = 9.5$$

Integrales de línea de campos vectoriales

Recuerde de la sección 6.4 que el trabajo realizado por una fuerza variable $f(x)$ para mover una partícula de a a b a lo largo del eje x es $W = \int_a^b f(x)\,dx$. Luego, en la sección 12.3 se determinó que el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ para mover un objeto de un punto P a otro punto Q en el espacio es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ es el vector de desplazamiento.

Suponga ahora que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo continuo de fuerzas en $\mathbb{R}^3$, como el campo gravitacional del ejemplo 16.1.4 o el campo de fuerzas eléctricas del ejemplo 16.1.5. (Un campo de fuerzas en $\mathbb{R}^2$ podría considerarse un caso especial donde $R = 0$ y P y Q dependen únicamente de x y y.) Se desea calcular el trabajo realizado por esta fuerza para mover una partícula a lo largo de una curva suave C.

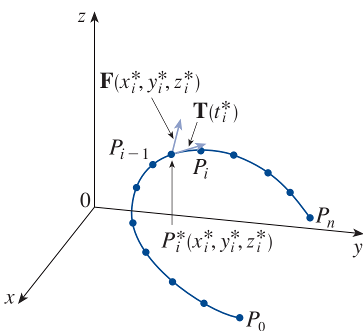


FIGURA 11

Se divide C en subarcos $P_{i-1}P_i$ con longitudes Δs_i dividiendo el intervalo paramétrico $[a, b]$ en subintervalos de igual ancho. (Véase la figura 1 para el caso bidimensional o la figura 11 para el caso tridimensional.) Elija un punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ en el subarco de orden i que corresponda al valor paramétrico t_i^*. Si Δs_i es pequeña, entonces cuando la partícula se mueve de P_{i-1} a P_i a lo largo de la curva, avanza aproximadamente en la dirección de $\mathbf{T}(t_i^*)$, el vector tangente unitario en P_i^*. Así, el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ para mover la partícula de P_{i-1} a P_i es aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i\,\mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\,\Delta s_i$$

y el trabajo total realizado para mover la partícula a lo largo de C es aproximadamente

11 $$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)]\,\Delta s_i$$

donde $\mathbf{T}(x, y, z)$ es el vector tangente unitario en el punto (x, y, z) en C. Intuitivamente, se ve que estas aproximaciones deberían mejorar a medida que n aumenta. Por tanto, se define el **trabajo** W realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ como el límite de las sumas de Riemann en (11), a saber,

12 $$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\,ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$$

La ecuación 12 indica que el *trabajo es la integral de línea con respecto a la longitud de arco del componente tangencial de la fuerza*.

Si la curva C está dada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$, así que usando la ecuación 9 se puede reescribir la ecuación 12 en la forma

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Esta integral suele abreviarse como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y ocurre también en otras áreas de la física. A continuación se da la definición siguiente para la integral de línea de *cualquier* campo de vectores continuos.

13 Definición Sea **F** un campo de vectores continuos definido en una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Entonces, la **integral de línea de F a lo largo de C** es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Cuando use la definición 13, tenga en mente que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ es solo una abreviación para el campo vectorial $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, así que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ se evalúa poniendo simplemente $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ en la expresión para $\mathbf{F}(x, y, z)$. Nótese también que se puede escribir formalmente $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt$.

La figura 12 muestra el campo de fuerzas y la curva del ejemplo 7. El trabajo realizado es negativo porque el campo impide el movimiento a lo largo de la curva.

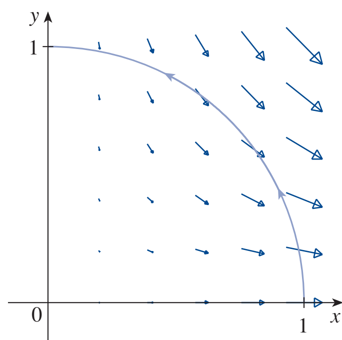


FIGURA 12

EJEMPLO 7 Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ para mover una partícula a lo largo del cuarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Como $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, se tiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Por tanto, el trabajo realizado es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2\,\frac{\cos^3 t}{3}\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$ ■

NOTA Aunque $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ y las integrales con respecto a la longitud de arco no cambian cuando se invierte la orientación, de todas formas es cierto que

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

porque el vector tangente unitario **T** es reemplazado por su negativo cuando C es reemplazada por $-C$.

La figura 13 muestra la cúbica torcida C del ejemplo 8 y algunos vectores típicos que actúan en tres puntos en C.

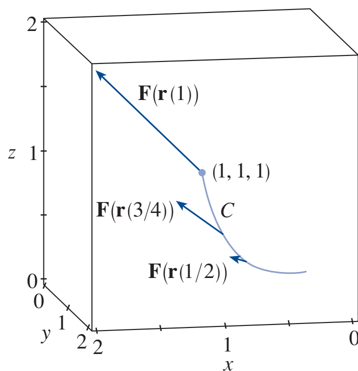


FIGURA 13

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ y C es la cúbica torcida dada por

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

SOLUCIÓN Se tiene

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\,\mathbf{i} + t^5\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$$

Así
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\, dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\Big]_0^1 = \frac{27}{28}$$ ■

Por último, advierta la relación entre integrales de línea de campos vectoriales e integrales de línea de campos escalares. Suponga que el campo vectorial **F** en $\mathbb{R}^3$ está dado en forma de componentes por la ecuación $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Se usa la definición 13 para calcular su integral de línea a lo largo de C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$
$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot (x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k})\, dt$$
$$= \int_a^b \Big[P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\Big]\, dt$$

Pero esta última integral es precisamente la integral de línea en (10). Por tanto, se tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz \qquad \text{donde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

Por ejemplo, la integral $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$ en el ejemplo 6 podría expresarse como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

16.2 EJERCICIOS

1-16 Evalúe la integral de línea, donde C es la curva dada.

1. $\int_C y\, ds$, C: $x = t^2$, $y = 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 3$

2. $\int_C (x/y)\, ds$, C: $x = t^3$, $y = t^4$, $1 \leqslant t \leqslant 2$

3. $\int_C xy^4\, ds$, C es la mitad derecha del círculo $x^2 + y^2 = 16$

4. $\int_C xe^y\, ds$, C es el segmento de recta de (2, 0) a (5, 4)

5. $\int_C (x^2 y + \operatorname{sen} x)\, dy$,
C es el arco de la parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (π, π^2)

6. $\int_C e^x\, dx$,
C es el arco de la curva $x = y^3$ de $(-1, -1)$ a (1, 1)

7. $\int_C (x + 2y)\, dx + x^2\, dy$, C consta de segmentos de recta de (0, 0) a (2, 1) y de (2, 1) a (3, 0)

8. $\int_C xe^y\, dx$,
C es el arco de la curva $x = e^y$ de (1, 0) a $(e, 1)$

9. $\int_C x^2 y\, ds$,
C: $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

10. $\int_C y^2 z\, ds$,
C es el segmento de recta de (3, 1, 2) a (1, 2, 5)

11. $\int_C xe^{yz}\, ds$,
C es el segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 2, 3)

12. $\int_C xyz^2\, ds$,
C es el segmento de recta de (–1, 5, 0) a (1, 6, 4)

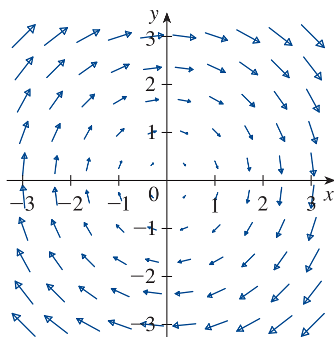
13. $\int_C xye^{yz}\, dy$, C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\int_C z\, dx + x\, dy + y\, dz$,
C: $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

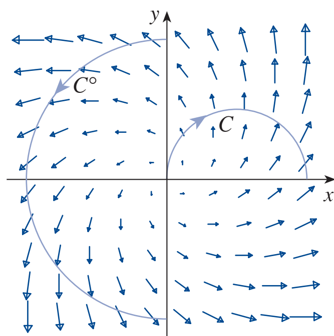
15. $\int_C z^2\, dx + x^2\, dy + y^2\, dz$,
C es el segmento de recta de (1, 0, 0) a (4, 1, 2)

16. $\int_C (y + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + y)\, dz$,
C consta de segmentos de recta de (0, 0, 0) a (1, 0, 1) y de (1, 0, 1) a (0, 1, 2)

17. Sea **F** el campo vectorial que se muestra en la figura.
(a) Si C_1 es el segmento de recta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine si $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o cero.
(b) Si C_2 es el círculo orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj, con radio 3 y centro en el origen, determine si $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o cero.



18. La figura muestra un campo vectorial **F** y dos curvas C_1 y C_2. ¿Las integrales de línea de **F** sobre C_1 y C_2 son positivas, negativas o cero? Explique su respuesta.



19-22 Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (y + z)\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

23-26 Use una calculadora para evaluar la integral de línea con cuatro decimales.

23. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{x + y}\;\mathbf{i} + (y/x)\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t \cos t\,\mathbf{j}$, $\pi/6 \leqslant t \leqslant \pi/3$

24. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^x\,\mathbf{i} + zxe^y\,\mathbf{j} + xye^z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \tan t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

25. $\int_C xy \arctan z\, ds$, donde C tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $z = \sqrt{t}$, $1 \leqslant t \leqslant 2$

26. $\int_C z \ln(x + y)\, ds$, donde C tiene ecuaciones paramétricas $x = 1 + 3t$, $y = 2 + t^2$, $z = t^4$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$

SAC **27-28** Use una gráfica del campo vectorial **F** y la curva C para conjeturar si la integral de línea **F** en C es positiva, negativa o cero. Evalúe después la integral de línea.

27. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$,
C es el arco del círculo $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj de $(2, 0)$ a $(0, -2)$

28. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{j}$,
C es la parábola $y = 1 + x^2$ de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$

---

29. (a) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
 (b) Ilustre el inciso (a) usando una calculadora graficadora o computadora para graficar C y los vectores del campo vectorial correspondientes a $t = 0$, $1/\sqrt{2}$ y 1 (como en la figura 13).

30. (a) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.
 (b) Ilustre el inciso (a) usando una computadora para graficar C y los vectores del campo vectorial correspondientes a $t = \pm 1$ y $\pm\frac{1}{2}$ (como en la figura 13).

SAC **31.** Determine el valor exacto de $\int_C x^3y^2 z\, ds$, donde C es la curva con ecuaciones paramétricas $x = e^{-t} \cos 4t$, $y = e^{-t} \operatorname{sen} 4t$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. (a) Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ sobre una partícula que se mueve una vez alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj.
SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para graficar el campo de fuerzas y el círculo en la misma pantalla. Use la gráfica para explicar su respuesta al inciso (a).

33. Un alambre delgado es doblado en forma de un semicírculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$. Si la densidad lineal es una constante k, halle la masa y centro de masa del alambre.

34. Un alambre delgado tiene la forma de la parte en el primer cuadrante del círculo, con centro en el origen y radio a. Si la función de densidad es $\rho(x, y) = kxy$, halle la masa y el centro de masa del alambre.

35. (a) Escriba las fórmulas similares a las ecuaciones 4 para el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un alambre delgado en forma de una curva en el espacio C si el alambre tiene una función de densidad $\rho(x, y, z)$.

(b) Halle el centro de masa de un alambre en forma de la hélice $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, si la densidad es una constante k.

36. Halle la masa y centro de masa de un alambre en forma de la hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ si la densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de la distancia desde el origen.

37. Si un alambre con densidad lineal $\rho(x, y)$ se tiende a lo largo de una curva plana C, sus **momentos de inercia** alrededor de los ejes x y y se definen como

$$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y)\, ds \qquad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y)\, ds$$

Halle los momentos de inercia para el alambre del ejemplo 3.

38. Si un alambre con densidad lineal $\rho(x, y, z)$ se tiende a lo largo de una curva en el espacio C, sus **momentos de inercia** alrededor de los ejes x, y y z se definen como

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

Halle los momentos de inercia para el alambre del ejercicio 35.

39. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y + 2)\,\mathbf{j}$$

para mover un objeto a lo largo de un arco del cicloide

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

40. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + ye^x\,\mathbf{j}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

41. Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x - y^2, y - z^2, z - x^2 \rangle$$

sobre una partícula que se mueve a lo largo del segmento de recta de $(0, 0, 1)$ a $(2, 1, 0)$.

42. La fuerza ejercida por una carga eléctrica en el origen sobre una partícula cargada en un punto (x, y, z) con vector de posición $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ es $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\,\mathbf{r}\,|^3$, donde K es una constante. (Véase el ejemplo 16.1.5.) Encuentre el trabajo realizado cuando la partícula se mueve a lo largo de una recta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.

43. La posición de un objeto con masa m en el momento t es $\mathbf{r}(t) = at^2\,\mathbf{i} + bt^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
(a) ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre el objeto en el momento t?
(b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza durante el intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant 1$?

44. Un objeto con masa m se mueve con una función de posición $\mathbf{r}(t) = a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + b \cos t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Encuentre el trabajo realizado sobre el objeto durante este período.

45. Un hombre que pesa 160 lb sube una lata de pintura de 25 lb por una escalera de caracol que rodea un silo con un radio de 20 pies. Si el silo es de 90 pies de alto y el hombre hace exactamente tres revoluciones completas para llegar a la cima, ¿cuánto trabajo realiza contra la gravedad?

46. Suponga que hay un agujero en la lata de pintura del ejercicio 45 y que 9 lb de pintura se derraman constantemente de la lata durante el ascenso del hombre. ¿Cuánto trabajo se realiza?

47. (a) Demuestre que el valor del trabajo que un campo de fuerzas constante hace sobre una partícula que se mueve una vez de manera uniforme alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es cero.
(b) ¿Esto también es cierto para un campo de fuerzas $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, donde k es una constante y $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$?

48. La base de una cerca circular con radio 10 m está dada por $x = 10 \cos t$, $y = 10 \operatorname{sen} t$. La altura de la cerca en la posición (x, y) está dada por la función $h(x, y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$, de manera que la altura varía de 3 m a 5 m. Suponga que 1 L de pintura cubre 100 m^2. Trace la cerca y determine cuánta pintura necesitará si pinta ambos lados de la cerca.

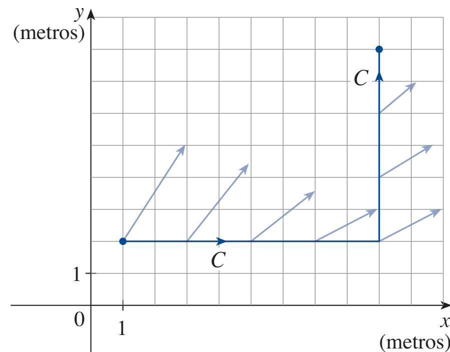
49. Si C es una curva suave dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ y $\mathbf{v}$ es un vector constante, demuestre que

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)]$$

50. Si C es una curva suave dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, demuestre que

$$\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\Big[|\mathbf{r}(b)|^2 - |\mathbf{r}(a)|^2\Big]$$

51. Un objeto se mueve a lo largo de la curva C que se muestra en la figura, de $(1, 2)$ a $(9, 8)$. Las longitudes de los vectores en el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ son medidas en newtons por las escalas en los ejes. Estime el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre el objeto



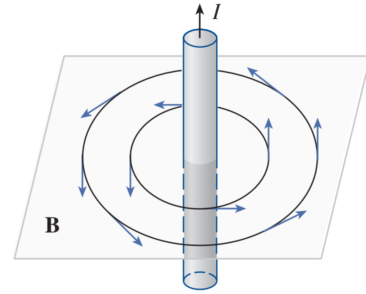
52. Experimentos demuestran que una corriente constante I en un alambre largo produce un campo magnético $\mathbf{B}$ que es tangente a cualquier círculo que resida en el plano perpendicular al alambre y cuyo centro es el eje del alambre

(como en la figura). La *ley de Ampère* relaciona la corriente eléctrica con sus efectos magnéticos y establece que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

donde I es la corriente neta que pasa por cualquier superficie acotada por una curva cerrada C y μ_0 es una constante llamada permeabilidad del espacio libre. Tomando C como un círculo con radio r, demuestre que la magnitud $B = |\mathbf{B}|$ del campo magnético a una distancia r del centro del alambre es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 El teorema fundamental para integrales de línea

Recuerde de la sección 5.3 que la parte 2 del teorema fundamental del cálculo puede escribirse como

1
$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F' es continua en $[a, b]$. También se llama a la ecuación 1 el teorema del cambio neto: la integral de una razón de cambio es el cambio neto.

Si se concibe al vector gradiente ∇f de una función f de dos o tres variables como un tipo de derivada de f, el teorema siguiente puede considerarse una versión del teorema fundamental para integrales de línea.

2 Teorema Sea C una curva suave dada por la función vectorial r(t), $a \leqslant t \leqslant b$. Sea f una función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo en C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

NOTA El teorema 2 establece que se puede evaluar la integral de línea de un campo vectorial conservativo (el campo vectorial gradiente de la función potencial f) simplemente conociendo el valor de f en los puntos extremos de C. De hecho, el teorema 2 indica que la integral de línea de ∇f es el cambio neto en f. Si f es una función de dos variables y C es una curva plana con punto inicial $A(x_1, y_1)$ y punto terminal $B(x_2, y_2)$, como en la figura 1(a), el teorema 2 se convierte en

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Si f es una función de tres variables y C es la curva en el espacio que une al punto $A(x_1, y_1, z_1)$ con el punto $B(x_2, y_2, z_2)$, como en la figura 1(b), se tiene

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Compruebe el teorema 2 para este caso.

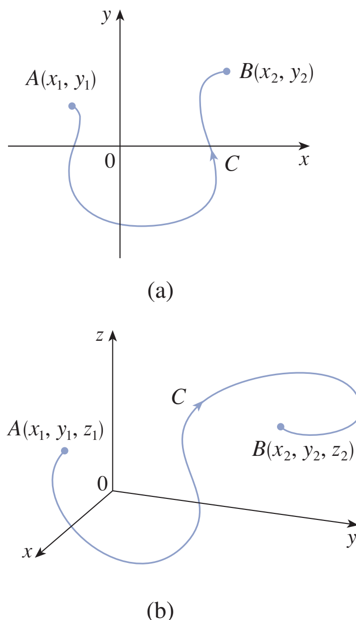


FIGURA 1

COMPROBACIÓN DEL TEOREMA 2 Al usar la definición 16.2.13, se tiene

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\,dt \qquad \text{(por la regla de la cadena)} \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))\end{aligned}$$

El último paso se sigue del teorema fundamental del cálculo (ecuación 1). ■

Aunque se ha comprobado el teorema 2 para curvas suaves, también es cierto para curvas suaves por partes. Esto puede verse subdividiendo C en un número finito de curvas suaves y sumando las integrales resultantes.

EJEMPLO 1 Determine el trabajo realizado por el campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

para mover una partícula con masa m del punto (3, 4, 12) al punto (2, 2, 0) a lo largo de una curva suave por partes C. (Véase el ejemplo 16.1.4.)

SOLUCIÓN Por la sección 16.1 se sabe que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo y que, de hecho, $\mathbf{F} = \nabla f$, donde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Así, por el teorema 2, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)\end{aligned}$$ ■

Independencia de la trayectoria

Suponga que C_1 y C_2 son dos curvas suaves por partes (llamadas **trayectorias**) que tienen el mismo punto inicial A y el mismo punto terminal B. Se sabe por el ejemplo 16.2.4 que, en general, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Pero una implicación del teorema 2 es que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

siempre que ∇f es continua. En otras palabras, la integral de línea de un campo vectorial *conservativo* solo depende del punto inicial y el punto terminal de una curva.

En general, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo con dominio D, se dice que la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria** si $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para cualesquiera dos trayectorias C_1 y C_2 en D que tengan los mismos puntos iniciales y los mismos puntos terminales. Con esta terminología se puede decir que las *integrales de línea de campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria*.

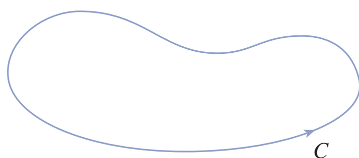


FIGURA 2
Una curva cerrada

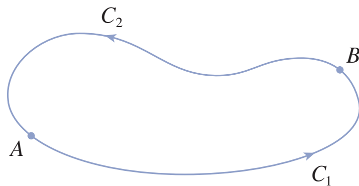


FIGURA 3

Una curva se llama **cerrada** si su punto terminal coincide con su punto inicial, es decir $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$. (Véase la figura 2.) Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D y C es cualquier trayectoria cerrada en D, se pueden elegir dos puntos cualesquiera A y B en C y considerar a C como compuesta por la trayectoria C_1 de A a B seguida por la trayectoria C_2 de B a A. (Véase la figura 3.) Así pues

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

ya que C_1 y C_2 tienen los mismos puntos inicial y terminal.

A la inversa, si es cierto que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ siempre que C es una trayectoria cerrada en D, se demuestra independencia de la trayectoria como sigue. Tome dos trayectorias cualesquiera C_1 y C_2 de A a B en D y defina C como la curva que consta de C_1 seguida por $-C_2$. Entonces

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y por tanto $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Se ha comprobado así el teorema siguiente.

3 Teorema $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y solo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada trayectoria cerrada C en D.

Como se sabe que la integral de línea de todo campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria, de esto se sigue que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier trayectoria cerrada. La interpretación física es que el trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo (como el campo gravitacional o eléctrico de la sección 16.1), cuando mueve un objeto por una trayectoria cerrada, es de 0.

El teorema siguiente establece que los *únicos* campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son los conservativos. Esto se enuncia y comprueba para curvas planas, pero existe una versión similar para curvas en el espacio. Suponga que D es **abierta**, lo que significa que para cada punto P en D hay un disco con centro P que reside enteramente en D. (Así, D no contiene ninguno de sus puntos frontera.) Además, suponga que D está **conectada**: esto significa que dos puntos cualesquiera en D pueden ser unidos por una trayectoria que resida en D.

4 Teorema Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo en una región abierta y conectada D. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo en D; es decir, existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

COMPROBACIÓN Sea $A(a, b)$ un punto fijo en D. Se construye la deseada función potencial f definiendo

$$f(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para cualquier punto (x, y) en D. Como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, no importa qué trayectoria C de (a, b) a (x, y) se use para evaluar $f(x, y)$. Dado que D es abierta, existe un disco contenido en D con centro (x, y). Elija cualquier punto (x_1, y) en el disco con $x_1 < x$ y conceda que C consta de cualquier trayectoria C_1 de (a, b) a (x_1, y) seguida por el segmento de recta horizontal C_2 de (x_1, y) a (x, y). (Véase la figura 4.) Entonces

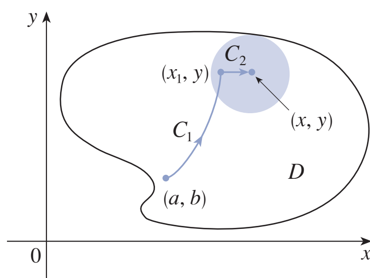


FIGURA 4

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a, b)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Nótese que la primera de estas integrales no depende de x, así que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Si se escribe $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, entonces

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

En C_2, y es constante, así que $dy = 0$. Usando t como el parámetro, donde $x_1 \leqslant t \leqslant x$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t, y)\,dt = P(x, y)$$

por la parte 1 del teorema fundamental del cálculo (véase la sección 5.3). Un argumento similar, usando un segmento de recta vertical (véase la figura 5), demuestra que

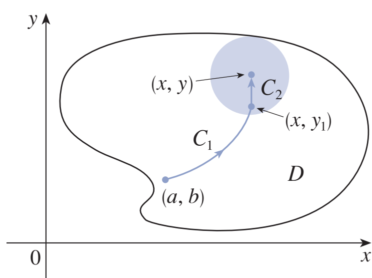


FIGURA 5

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x, t)\,dt = Q(x, y)$$

Así
$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = \nabla f$$

lo que indica que $\mathbf{F}$ es conservativo. ■

La pregunta persiste: ¿cómo se puede determinar si un campo vectorial **F** es conservativo o no? Suponga que se sabe que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ es conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces hay una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, es decir,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por tanto, por el teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

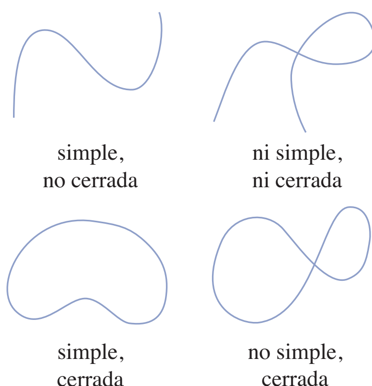


FIGURA 6
Tipos de curvas

5 Teorema Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden en un dominio D, entonces a todo lo largo de D se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

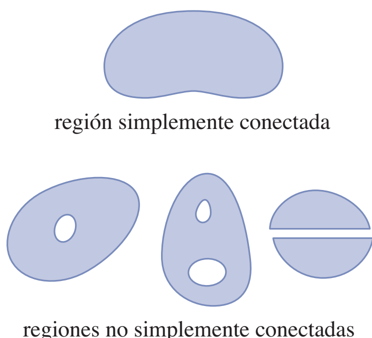


FIGURA 7

La contraparte del teorema 5 es cierta solo para un tipo especial de región. Para explicar esto, se necesita primero el concepto de **curva simple**, que es una curva que no interseca consigo misma entre sus puntos extremos. [Véase la figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para una curva cerrada simple, pero $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ cuando $a < t_1 < t_2 < b$.]

En el teorema 4 se necesita una región conectada abierta. Para el teorema siguiente se necesita una condición más enfática. Una **región simplemente conectada** en el plano es una región conectada D tal que cada curva cerrada simple en D encierre solo puntos que están en D. Adviértase en la figura 7 que, en términos intuitivos, una región simplemente conectada no contiene ningún agujero y no puede constar de dos piezas separadas.

En términos de regiones simplemente conectadas, ahora se puede enunciar una recíproca parcial del teorema 5 que dé un método conveniente para verificar que un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es conservativo. La comprobación se esbozará en la sección siguiente como consecuencia del teorema de Green.

6 Teorema Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ un campo vectorial en una región abierta simplemente conectada D. Suponga que P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden y que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{a todo lo largo de } D$$

Entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

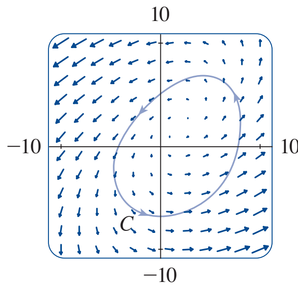


FIGURA 8

Las figuras 8 y 9 muestran los campos vectoriales de los ejemplos 2 y 3, respectivamente. Todos los vectores de la figura 8 que parten de la curva cerrada C parecen apuntar aproximadamente en la misma dirección que C. Así, parece como si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$, y por tanto $\mathbf{F}$ no es conservativo. El cálculo en el ejemplo 2 confirma esta impresión. Algunos de los vectores cerca de las curvas C_1 y C_2 en la figura 9 apuntan aproximadamente en la misma dirección que las curvas, mientras que otros apuntan en la dirección opuesta. Así, parece verosímil que las integrales de línea alrededor de todas las trayectorias cerradas sean de 0. El ejemplo 3 muestra que $\mathbf{F}$ es, en efecto, conservativo.

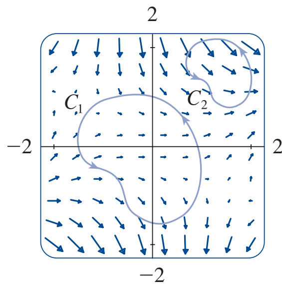


FIGURA 9

EJEMPLO 2 Determine si el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

es conservativo o no.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y) = x - y$ y $Q(x, y) = x - 2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, $\mathbf{F}$ no es conservativo por el teorema 5. ■

EJEMPLO 3 Determine si el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

es conservativo o no.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y) = 3 + 2xy$ y $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Asimismo, el dominio de $\mathbf{F}$ es el plano entero ($D = \mathbb{R}^2$), el cual es abierto y simplemente conectado. En consecuencia, se puede aplicar el teorema 6 y concluir que $\mathbf{F}$ es conservativo. ■

En el ejemplo 3, el teorema 6 indicó que $\mathbf{F}$ es conservativo, pero no cómo determinar la función (potencial) f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La comprobación del teorema 4 da una pista de cómo determinar f. Use la "integración parcial", como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4

(a) Si $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, halle una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

SOLUCIÓN

(a) Por el ejemplo 3 se sabe que $\mathbf{F}$ es conservativo, y por tanto existe una función f con $\nabla f = \mathbf{F}$, es decir,

$$\boxed{7} \qquad f_x(x, y) = 3 + 2xy$$

$$\boxed{8} \qquad f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Al integrar (7) con respecto a x, se obtiene

9 $$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Nótese que la constante de integración es una constante con respecto a x, es decir una función de y, que se ha llamado $g(y)$. Ahora se diferencian ambos miembros de (9) con respecto a y:

10 $$f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Al comparar (8) y (10) se ve que

$$g'(y) = -3y^2$$

Integrando con respecto a y, se tiene

$$g(y) = -y^3 + K$$

donde K es una constante. Al poner esto en (9) se tiene

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como la función potencial deseada.

(b) Para usar el teorema 2, todo lo que se debe saber son los puntos inicial y terminal de C, es decir $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ y $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$. En la expresión para $f(x, y)$ en la parte (a), cualquier valor de la constante K servirá, así que se elige $K = 0$. Entonces se tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Este método es mucho más corto que el método directo para evaluar integrales de línea que se aprendió en la sección 16.2. ■

Un criterio para determinar si un campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ es conservativo o no se dará en la sección 16.5. Mientras tanto, el ejemplo siguiente muestra que la técnica para determinar la función potencial es casi la misma que para campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\,\mathbf{k}$, determine una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUCIÓN Si esa función f existe, entonces

11 $$f_x(x, y, z) = y^2$$

12 $$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

13 $$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}$$

Al integrar (11) con respecto a x, se obtiene

14 $$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

donde $g(y, z)$ es una constante con respecto a x. Entonces, derivando (14) con respecto a y se tiene

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

y la comparación con (12) da

$$g_y(y, z) = ye^{3z}$$

Así $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ y se reescribe (14) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Por último, al derivar con respecto a z y comparar con (13) se obtiene $h'(z) = 0$, y por tanto $h(z) = K$, una constante. La función deseada es

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

Es fácil verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$. ■

Conservación de energía

Aplique las ideas de este capítulo a un campo de fuerzas continuo **F** que mueve un objeto a lo largo de una trayectoria C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, donde $\mathbf{r}(a) = A$ es el punto inicial y $\mathbf{r}(b) = B$ el punto terminal de C. De acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton (véase la sección 13.4), la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ en un punto en C se relaciona con la aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ por la ecuación

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Así, el trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]\, dt \qquad \text{(teorema 13.2.3, fórmula 4)}$$

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2\, dt = \frac{m}{2} \Big[|\mathbf{r}'(t)|^2 \Big]_a^b \qquad \text{(teorema fundamental del cálculo)}$$

$$= \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2 \right)$$

Por consiguiente

15 $$W = \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(a)|^2$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ es la velocidad.

La cantidad $\frac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(t)|^2$, es decir la mitad de la masa multiplicada por el cuadrado de la rapidez, se llama **energía cinética** del objeto. En consecuencia, se puede reescribir la ecuación 15 como

16 $$W = K(B) - K(A)$$

lo que indica que el trabajo realizado por el campo de fuerzas a lo largo de C es igual al cambio en energía cinética en los puntos extremos de C.

Suponga ahora, además, que **F** es un campo de fuerzas conservativo; es decir, que se puede escribir $\mathbf{F} = \nabla f$. En física, la **energía potencial** de un objeto en el punto (x, y, z) se define como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, así que se tiene $\mathbf{F} = -\nabla P$. Entonces, por el teorema 2 se tiene

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

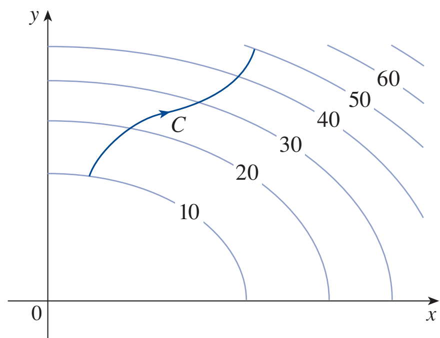
Al comparar esta ecuación con la ecuación 16, se ve que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

lo que indica que si un objeto se mueve de un punto A a otro punto B bajo la influencia de un campo de fuerzas conservativo, la suma de su energía potencial y su energía cinética permanece constante. Esto se llama **ley de conservación de la energía** y es la razón de que al campo vectorial se le llame *conservativo*.

16.3 EJERCICIOS

1. La figura muestra una curva C y un mapa de contorno de una función f cuyo gradiente es continuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. Se da una tabla de valores de una función f con gradiente continuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, donde C tiene ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 + 1 \qquad y = t^3 + t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3-10 Determine si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo o no. Si lo es, halle una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (xy + y^2)\,\mathbf{i} + (x^2 + 2xy)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2x)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = y^2e^{xy}\,\mathbf{i} + (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = ye^x\,\mathbf{i} + (e^x + e^y)\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\,\mathbf{i} + (4xy + 3)\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2\cos x + \cos y)\,\mathbf{i} + (2y \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y)\,\mathbf{j}$

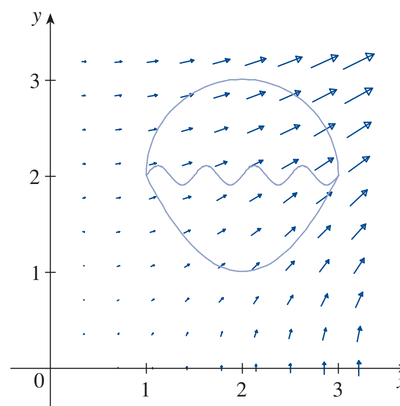
10. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + y/x)\,\mathbf{i} + (\ln x + x/y)\,\mathbf{j}$

---

11. La figura muestra el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2\rangle$ y tres curvas que parten de (1, 2) y terminan en (3, 2).

(a) Explique por qué $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tiene el mismo valor para las tres curvas.

(b) ¿Cuál es ese valor común?



12-18 (a) Determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ y (b) use el inciso (a) para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy^2)\,\mathbf{i} + 2x^2y\,\mathbf{j}$,
C es el arco de la hipérbola $y = 1/x$ de (1, 1) a $(4, \frac{1}{4})$

13. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y^3\,\mathbf{i} + x^3y^2\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 - 2t, t^3 + 2t\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$,
C es el arco de la parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$,
C es el segmento de recta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z + 2xz^2)\,\mathbf{i} + 2xyz\,\mathbf{j} + (xy^2 + 2x^2 z)\,\mathbf{k}$,
C: $x = \sqrt{t},\ y = t + 1,\ z = t^2,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz}\,\mathbf{i} + e^{xz}\,\mathbf{j} + xye^{xz}\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{k}$,
$0 \leqslant t \leqslant 2$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (x\cos y + \cos z)\,\mathbf{j} - y \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k},\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

19-20 Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral.

19. $\int_C \tan y\,dx + x\sec^2 y\,dy$,
C es cualquier trayectoria de $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy$,
C es cualquier trayectoria de $(0, 1)$ a $(1, 2)$

---

21. Suponga que se le pide determinar la curva que requiere el menor esfuerzo para que un campo de fuerzas **F** mueva una partícula de un punto a otro. Usted decide verificar primero si **F** es conservativo, y resulta que sí lo es. ¿Cómo respondería a esa petición?

22. Suponga que un experimento determina que la cantidad de trabajo requerido para que un campo de fuerzas **F** mueva una partícula del punto $(1, 2)$ al punto $(5, -3)$ a lo largo de una curva C_1 es 1.2 J, y que el trabajo realizado por **F** para mover la partícula a lo largo de otra curva C_2 entre los mismos dos puntos es 1.4 J. ¿Qué puede decir de **F**? ¿Por qué?

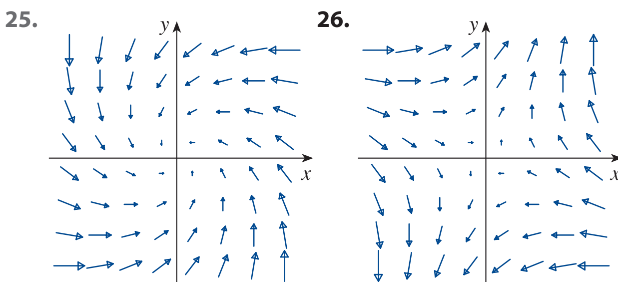
23-24 Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas **F** para mover un objeto de P a Q.

23. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j}$; $\quad P(1, 0), Q(2, 2)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$; $\quad P(1, 1), Q(4, 3)$

25-26 ¿El campo vectorial que se muestra en la figura es conservativo? Explique su respuesta.

25. **26.**



SAC **27.** Si $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (1 + x\cos y)\,\mathbf{j}$, use un diagrama para conjeturar si **F** es conservativo. Determine después si su conjetura es correcta.

28. Sea $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Halle curvas C_1 y C_2 que no sean cerradas y que satisfagan la ecuación.

(a) $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ (b) $\displaystyle\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 1$

29. Demuestre que si el campo vectorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es conservativo y P, Q, R tienen derivadas parciales continuas de primer orden, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

30. Use el ejercicio 29 para demostrar que la integral de línea $\int_C y\,dx + x\,dy + xyz\,dz$ no es independiente de la trayectoria.

31-34 Determine si el conjunto dado es o no (a) abierto, (b) conectado y (c) simplemente conectado.

31. $\{(x, y) \mid y < x^2\}$ **32.** $\{(x, y) \mid x + y \neq 1\}$

33. $\{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y < 1\}$

34. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$

---

35. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Demuestre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.
(b) Demuestre que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de la trayectoria. [*Sugerencia*: calcule $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ y $\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde C_1 y C_2 son las mitades superior e inferior del círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] ¿Esto contradice el teorema 6?

36. (a) Suponga que **F** es un campo de fuerzas cuadrado inverso, es decir,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguna constante c, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine el trabajo realizado por **F** para mover un objeto de un punto P_1 a lo largo de una trayectoria a un punto P_2 en términos de las distancias d_1 y d_2 desde estos puntos al origen.

(b) Un ejemplo de un campo cuadrado inverso es el campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, explicado en el ejemplo 16.1.4. Use el inciso (a) para hallar el trabajo realizado por el campo gravitacional cuando la Tierra se mueve del afelio (en una distancia máxima de 1.52×10^8 km desde el sol) al perihelio (en una distancia mínima de 1.47×10^8 km). (Use los valores $m = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg y $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.)

(c) Otro ejemplo de un campo cuadrado inverso es el campo de fuerzas eléctricas $\mathbf{F} = \varepsilon qQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, explicado en el ejemplo 16.1.5. Suponga que un electrón con una carga de -1.6×10^{-19} C se localiza en el origen. Una unidad de carga positiva está posicionada a una distancia de 10^{-12} m del electrón y se mueve a una posición a la mitad de esa distancia del electrón. Use el inciso (a) para determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas eléctricas. (Use el valor $\varepsilon = 8.985 \times 10^9$.)

16.4 Teorema de Green

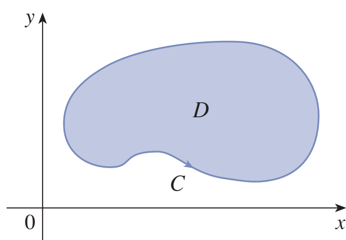


FIGURA 1

El teorema de Green da la relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple C y una integral doble en la región plana D acotada por C. (Véase la figura 1. Suponga que D consta de todos los puntos dentro de C, así como de todos los puntos en C.) Al enunciar el teorema de Green se usa la convención de que la **orientación positiva** de una curva cerrada simple C se refiere a un recorrido simple *en sentido contrario a las manecillas del reloj* de C. Así, si C está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, entonces la región D siempre está a la izquierda cuando el punto $\mathbf{r}(t)$ viaja a lo largo de C. (Véase la figura 2.)

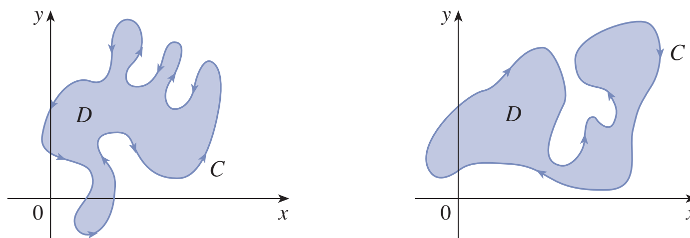


FIGURA 2 (a) Orientación positiva (b) Orientación negativa

Teorema de Green Sea C una curva cerrada simple con orientación positiva y suave por partes en el plano y sea D la región acotada por C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene D, entonces

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Recuerde que el miembro izquierdo de esta ecuación es otra manera de escribir $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$.

NOTA La notación

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{o} \qquad \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

se utiliza a veces para indicar que la integral de línea se calcula usando la orientación positiva de la curva cerrada C. Otra notación para la curva frontera con orientación positiva de D es ∂D, así que la ecuación en el teorema de Green puede escribirse como

1
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

El teorema de Green debería considerarse la contraparte del teorema fundamental del cálculo para las integrales dobles. Compare la ecuación 1 con el enunciado del teorema fundamental del cálculo, parte 2, en la ecuación siguiente:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En ambos casos hay una integral que implica derivadas (F', $\partial Q/\partial x$ y $\partial P/\partial y$) en el miembro izquierdo de la ecuación. Y en ambos casos el miembro derecho implica los valores de las funciones originales (F, Q y P) solo en la *frontera* del dominio. (En el caso unidimensional, el dominio es un intervalo $[a, b]$ cuya frontera consta de solo dos puntos, a y b.)

El teorema de Green no es fácil de comprobar en general, pero se puede dar una comprobación para el caso especial en el que la región es tanto tipo I como tipo II (véase la sección 15.2). Llámese a esas regiones como **regiones simples**.

George Green

El teorema de Green debe su nombre al científico autodidacta inglés George Green (1793-1841). Green trabajó de tiempo completo en la panadería de su padre desde los nueve años y aprendió matemáticas por sí solo usando libros de bibliotecas. En 1828 publicó privadamente *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, pero solo se imprimieron 100 ejemplares, la mayoría de los cuales fueron para sus amigos. Este folleto contenía un teorema equivalente al que ahora se conoce como teorema de Green, pero no fue ampliamente conocido en esa época. Finalmente, a los 40 años, Green ingresó a la Universidad de Cambridge como estudiante, pero murió cuatro años después de graduarse. En 1846 William Thomson (Lord Kelvin) halló una copia del ensayo de Green, comprendió su importancia y lo hizo reimprimir. Green fue el primero en tratar de formular una teoría matemática de la electricidad y el magnetismo. Su trabajo fue la base para las subsecuentes teorías electromagnéticas de Thomson, Stokes, Rayleigh y Maxwell.

COMPROBACIÓN DEL TEOREMA DE GREEN PARA EL CASO EN EL QUE D ES UNA REGIÓN SIMPLE Nótese que el teorema de Green se comprueba si se puede demostrar que

$$\boxed{2} \qquad \int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

y

$$\boxed{3} \qquad \int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

Compruebe la ecuación 2 expresando D como una región tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son funciones continuas. Esto permite calcular la integral doble en el miembro derecho de la ecuación 2 como sigue:

$$\boxed{4} \qquad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx$$

donde el último paso se sigue del teorema fundamental del cálculo.

Ahora se calcula el miembro izquierdo de la ecuación 2 descomponiendo C como la unión de las cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 que se muestran en la figura 3. En C_1 se toma x como el parámetro y se escriben las ecuaciones paramétricas como $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Así

$$\int_{C_1} P(x, y)\,dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx$$

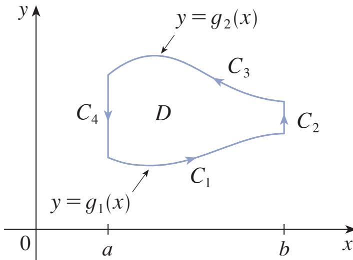


FIGURA 3

Obsérvese que C_3 va de derecha a izquierda, pero $-C_3$ va de izquierda a derecha, así que se pueden escribir las ecuaciones paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Por tanto

$$\int_{C_3} P(x, y)\,dx = -\int_{-C_3} P(x, y)\,dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$$

En C_2 o C_4 (cualquiera de las cuales podría reducirse a un solo punto), x es constante, así que $dx = 0$ y

$$\int_{C_2} P(x, y)\,dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y)\,dx$$

De ahí que

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_{C_1} P(x, y)\,dx + \int_{C_2} P(x, y)\,dx + \int_{C_3} P(x, y)\,dx + \int_{C_4} P(x, y)\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$$

Al comparar esta expresión con la de la ecuación 4 se ve que

$$\int_C P(x, y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

La ecuación 3 puede comprobarse de la misma manera, expresando D como una región tipo II (véase el ejercicio 30). Luego, añadiendo las ecuaciones 2 y 3, se obtiene el teorema de Green. ■

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, donde C es la curva triangular que consta de los segmentos de recta de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1) y de (0, 1) a (0, 0).

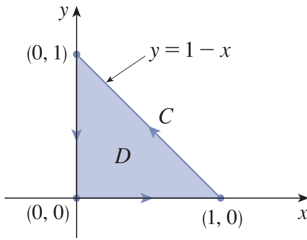


FIGURA 4

SOLUCIÓN Aunque la integral de línea dada podría evaluarse, como de costumbre, por los métodos de la sección 16.2, eso implicaría establecer tres integrales aparte a lo largo de los tres lados del triángulo, así que use en cambio el teorema de Green. Nótese que la región D encerrada por C es simple y que C tiene orientación positiva (véase la figura 4). Si se concede que $P(x, y) = x^4$ y $Q(x, y) = xy$, se tiene

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$ ■

EJEMPLO 2 Evalúe $\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUCIÓN La región D acotada por C es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 9$, así que cambie a coordenadas polares después de aplicar el teorema de Green:

En vez de usar coordenadas polares, se podría simplemente usar el hecho de que D es un disco de radio 3 y escribir

$$\iint_D 4\,dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

$$\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\operatorname{sen} x})\right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3)\,r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\,dr = 36\pi$$ ■

En los ejemplos 1 y 2 se determina que la integral doble era más fácil de evaluar que la integral de línea. (¡Intente establecer la integral de línea del ejemplo 2 y se convencerá!) Pero a veces es más fácil evaluar la integral de línea, y el teorema de Green se usa en la dirección inversa. Por ejemplo, si se sabe que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ en la curva C, el teorema de Green da

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

sin importar qué valores adopten P y Q en la región D.

Otra aplicación de la dirección inversa del teorema de Green es al calcular áreas. Como el área de D es $\iint_D 1\,dA$, se desea elegir P y Q de tal manera que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Hay varias posibilidades:

$$P(x, y) = 0 \qquad P(x, y) = -y \qquad P(x, y) = -\tfrac{1}{2}y$$

$$Q(x, y) = x \qquad Q(x, y) = 0 \qquad Q(x, y) = \tfrac{1}{2}x$$

El teorema de Green da entonces las fórmulas siguientes para el área de D:

5
$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

EJEMPLO 3 Determine el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCIÓN La elipse tiene ecuaciones paramétricas $x = a\cos t$ y $y = b\,\text{sen}\,t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Al usar la tercera fórmula de la ecuación 5, se tiene

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t)\,dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

■

La fórmula 5 puede usarse para explicar cómo funcionan los planímetros. Un **planímetro** es un instrumento mecánico que sirve para medir el área de una región trazando su curva frontera. Estos dispositivos son útiles en todas las ciencias: en biología para medir el área de hojas o alas, en medicina para medir el tamaño de secciones transversales de órganos o tumores, en ingeniería forestal para estimar el tamaño de regiones arboladas a partir de fotografías.



FIGURA 5
Un planímetro polar de Keuffel y Esser

La figura 5 muestra la operación de un planímetro polar: el polo está fijo y cuando el trazador se mueve a lo largo de la curva frontera de la región, la rueda se desliza en parte y gira en parte en posición perpendicular al brazo del trazador. El planímetro mide la distancia en que la rueda gira, la cual es proporcional al área de la región encerrada. La explicación como consecuencia de la fórmula 5 puede encontrarse en los artículos siguientes:

- R. W. Gatterman, "The planimeter as an example of Green's Theorem", *Amer. Math. Monthly*, vol. 88 (1981), pp. 701-704.
- Tanya Leise, "As the planimeter wheel turns", *College Math. Journal*, vol. 38 (2007), pp. 24-31.

Versiones ampliadas del teorema de Green

Aunque se ha demostrado el teorema de Green solo para el caso en el que D es simple, ahora puede ampliarse al caso en el que D es una unión finita de regiones simples. Por ejemplo, si D es la región que aparece en la figura 6, se puede escribir $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son ambas simples. La frontera de D_1 es $C_1 \cup C_3$ y la frontera de D_2 es $C_2 \cup (-C_3)$, así que, aplicando el teorema de Green a D_1 y D_2 por separado, se obtiene

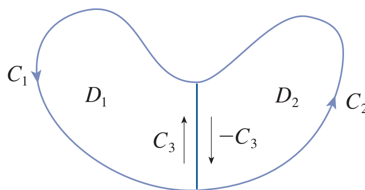


FIGURA 6

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

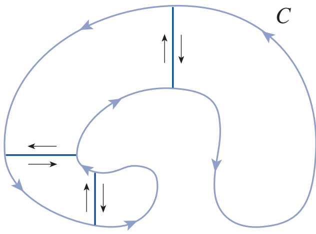


FIGURA 7

Si se suman estas dos ecuaciones, las integrales de línea a lo largo de C_3 y $-C_3$ se eliminan, así que se obtiene

$$\int_{C_1 \cup C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

lo cual es el teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$, ya que su frontera es $C = C_1 \cup C_2$.

El mismo tipo de argumento permite establecer el teorema de Green para cualquier unión finita de regiones simples no sobrepuestas (véase la figura 7).

EJEMPLO 4 Evalúe $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, donde C es la frontera de la región semianular D en el semiplano superior entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

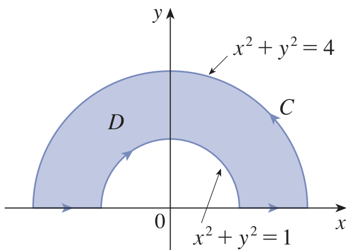


FIGURA 8

SOLUCIÓN Nótese que aunque D no es simple, el eje y la divide en dos regiones simples (véase la figura 8). En coordenadas polares se puede escribir

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

Por tanto, el teorema de Green da

$$\oint_C y^2 dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 (r \operatorname{sen} \theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \Big[\tfrac{1}{3}r^3\Big]_1^2 = \frac{14}{3}$$ ■

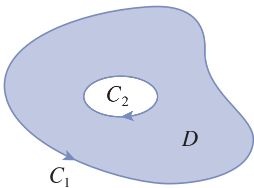


FIGURA 9

El teorema de Green puede prolongarse para aplicarse a regiones con agujeros, es decir regiones que no están simplemente conectadas. Observe que la frontera C de la región D en la figura 9 consta de dos curvas simples cerradas C_1 y C_2. Suponga que estas curvas frontera están orientadas de tal forma que la región D siempre está a la izquierda cuando se recorre la curva C. Así, la dirección positiva es en sentido contrario a las manecillas del reloj para la curva externa C_1, pero en el sentido de las manecillas del reloj para la curva interna C_2. Si se divide D en dos regiones D' y D'' por medio de las líneas que se muestran en la figura 10 y luego se aplica el teorema de Green tanto a D' como a D'', se obtiene

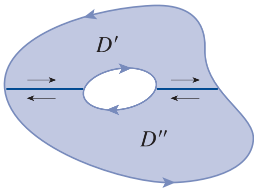


FIGURA 10

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \int_{\partial D'} P\,dx + Q\,dy + \int_{\partial D''} P\,dx + Q\,dy$$

Como las integrales de línea a lo largo de las rectas frontera comunes están en direcciones opuestas, se eliminan y se obtiene

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

el cual es el teorema de Green para la región D.

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para cada trayectoria cerrada simple con orientación positiva que encierra al origen.

SOLUCIÓN Como C es una trayectoria cerrada *arbitraria* que encierra al origen, es difícil calcular directamente la integral dada. Así, considere un círculo C' orientado

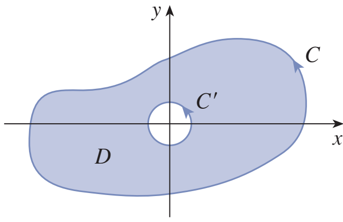


FIGURA 11

en sentido contrario a las manecillas del reloj con centro en el origen y radio a, donde a se elige lo suficientemente reducido para que C' resida dentro de C. (Véase la figura 11.) Sea D la región acotada por C y C'. Entonces, su frontera en orientación positiva es $C \cup (-C')$, así que la versión general del teorema de Green da

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0$$

Por tanto
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$$

es decir,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ahora calcule fácilmente esta última integral usando la parametrización dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Así

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \qquad \blacksquare$$

Se concluye esta sección usando el teorema de Green para examinar un resultado que fue enunciado en la sección precedente.

ESBOZO DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 16.3.6 Suponga que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ es un campo vectorial en una región abierta simplemente conectada D, que P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden y que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{a todo lo largo de } D$$

Si C es cualquier trayectoria cerrada simple en D y R es la región que C encierra, el teorema de Green da

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0\,dA = 0$$

Una curva que no es simple se cruza a sí misma en uno o más puntos y puede dividirse en varias curvas simples. Se ha demostrado que las integrales de línea de $\mathbf{F}$ alrededor de estas curvas simples son todas ellas de 0 y sumando estas integrales se ve que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C. En consecuencia, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D por el teorema 16.3.3. De esto se sigue que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo. $\blacksquare$

16.4 EJERCICIOS

1-4 Evalúe la integral de línea por dos métodos: (a) directamente y (b) usando el teorema de Green.

1. $\oint_C y^2\,dx + x^2 y\,dy$,
C es el rectángulo con vértices (0, 0), (5, 0), (5, 4) y (0, 4)

2. $\oint_C y\,dx - x\,dy$,
C es el círculo con centro en el origen y radio 4

3. $\oint_C xy\,dx + x^2 y^3\,dy$,
C es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2)

4. $\oint_C x^2y^2\,dx + xy\,dy$, C consta del arco de la parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ y de los segmentos de recta de $(1, 1)$ a $(0, 1)$ y de $(0, 1)$ a $(0, 0)$

5-10 Use el teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva con orientación positiva dada.

5. $\int_C ye^x\,dx + 2e^x\,dy$,
C es el rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$ y $(0, 4)$

6. $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$,
C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 1)$

7. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$,
C es la frontera de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$

8. $\int_C \cos y\,dx + x^2 \operatorname{sen} y\,dy$,
C es el rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(5, 2)$ y $(0, 2)$

9. $\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$, C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$

10. $\int_C xe^{-2x}\,dx + (x^4 + 2x^2y^2)\,dy$, C es la frontera de la región entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$

11-14 Use el teorema de Green para evaluar $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. (Verifique la orientación de la curva antes de aplicar el teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y\cos x - xy \operatorname{sen} x,\ xy + x\cos x\rangle$,
C es el triángulo de $(0, 0)$ a $(0, 4)$ a $(2, 0)$ a $(0, 0)$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^{-x} + y^2,\ e^{-y} + x^2\rangle$,
C consta del arco de la curva $y = \cos x$ de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ y del segmento de recta de $(\pi/2, 0)$ a $(-\pi/2, 0)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y,\ x \operatorname{sen} y\rangle$,
C es el círculo $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ orientado en el sentido de las manecillas del reloj

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x^2 + 1},\ \tan^{-1} x\rangle$, C es el triángulo de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ a $(0, 1)$ a $(0, 0)$

SAC **15-16** Verifique el teorema de Green usando un sistema algebraico computacional para evaluar tanto la integral de línea como la integral doble.

15. $P(x, y) = x^3y^4$, $\quad Q(x, y) = x^5y^4$
C consta del segmento de recta de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ seguido por el arco de la curva $y = \cos x$ de $(\pi/2, 0)$ a $(-\pi/2, 0)$

16. $P(x, y) = 2x - x^3y^5$, $\quad Q(x, y) = x^3y^8$,
C es la elipse $4x^2 + y^2 = 4$

17. Use el teorema de Green para determinar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$ para mover una partícula del origen a lo largo del eje x hacia $(1, 0)$, después a lo largo del segmento de recta hacia $(0, 1)$, y luego de regreso al origen a lo largo del eje y.

18. Una partícula parte del origen, se mueve a lo largo del eje x hasta $(5, 0)$, luego a lo largo del cuarto de círculo $x^2 + y^2 = 25$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ hasta el punto $(0, 5)$ y después por el eje y de vuelta al origen. Use el teorema de Green para hallar el trabajo realizado sobre esta partícula por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = \langle \operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} y + xy^2 + \frac{1}{3}x^3\rangle$.

19. Use una de las fórmulas en (5) para determinar el área bajo un arco del cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

20. Si un círculo C con radio 1 rueda a lo largo de la parte exterior del círculo $x^2 + y^2 = 16$, un punto fijo P en C traza una curva llamada *epicicloide*, con ecuaciones paramétricas $x = 5\cos t - \cos 5t$, $y = 5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t$. Grafique el epicicloide y use (5) para determinar el área que encierra.

21. (a) Si C es el segmento de recta que une el punto (x_1, y_1) con el punto (x_2, y_2), demuestre que

$$\int_C x\,dy - y\,dx = x_1y_2 - x_2y_1$$

(b) Si los vértices de un polígono, en sentido contrario a las manecillas del reloj, son (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n), demuestre que el área del polígono es

$$A = \tfrac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)]$$

(c) Determine el área del pentágono con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ y $(-1, 1)$.

22. Sea D una región acotada por una trayectoria cerrada simple C en el plano xy. Use el teorema de Green para comprobar que las coordenadas del centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de D son

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

donde A es el área de D.

23. Use el ejercicio 22 para determinar el centroide de una región de un cuarto de círculo de radio a.

24. Use el ejercicio 22 para determinar el centroide del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (a, b), donde $a > 0$ y $b > 0$.

25. Una lámina plana con densidad constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa una región en el plano xy acotada por una trayectoria cerrada simple C. Demuestre que sus momentos de inercia alrededor de los ejes son

$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_C y^3\,dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3}\oint_C x^3\,dy$$

26. Use el ejercicio 25 para determinar el momento de inercia de un disco circular de radio a con densidad constante ρ alrededor de un diámetro. (Compare con el ejemplo 15.4.4.)

27. Use el método del ejemplo 5 para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2xy\,\mathbf{i} + (y^2 - x^2)\,\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

y C es cualquier curva cerrada simple con orientación positiva que encierra al origen.

28. Calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = (2x^2 + 3y,\ 7x + y^3)$ y C es la curva frontera con orientación positiva de una región D que tiene área 5.

29. Si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial del ejemplo 5, demuestre que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las trayectorias cerradas simples que no pasan por ni encierran el origen.

30. Complete la comprobación del caso especial del teorema de Green comprobando la ecuación 3.

31. Use el teorema de Green para comprobar la fórmula de cambio de variables para una integral doble (fórmula 15.9.9) para el caso en que $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx\,dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv$$

Aquí R es la región en el plano xy que corresponde a la región S en el plano uv bajo la transformación dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$.

[*Sugerencia*: Nótese que el miembro izquierdo es $A(R)$ y aplique la primera parte de la ecuación 5. Convierta la integral de línea en ∂R a una integral de línea en ∂S y aplique el teorema de Green en el plano uv.]

16.5 Rotacional y divergencia

En esta sección se definirán dos operaciones que pueden realizarse en campos vectoriales y que desempeñan un papel básico en las aplicaciones del cálculo vectorial al flujo de fluidos y la electricidad y magnetismo. Cada una de estas operaciones se asemeja a la derivación, pero una de ellas produce un campo vectorial, mientras que la otra produce un campo escalar.

Rotacional

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y todas las derivadas parciales de P, Q y R existen, el rotacional de $\mathbf{F}$ es el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido por

1
$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Para ayudar a la memoria, reescriba la ecuación 1 usando la notación del operador. Introduzca el operador diferencial de vectores ∇ ("nabla" u operador "del") como

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Este elemento tiene significado cuando opera en una función escalar para producir el gradiente de f:

$$\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Si se concibe a ∇ como un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, se puede considerar también el producto cruz formal de ∇ con el campo vectorial $\mathbf{F}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= \text{rot } \mathbf{F}\end{aligned}$$

Así, la manera más fácil de recordar la definición 1 es por medio de la expresión simbólica

2
$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

SOLUCIÓN Usando la ecuación 2, se tiene

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k}$$

$$= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k}$$

$$= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$ ■

SAC La mayoría de los sistemas algebraicos computacionales tienen comandos que calculan el rotacional y la divergencia de campos vectoriales. Si usted tiene acceso a un SAC, use esos comandos para verificar las respuestas de los ejemplos y ejercicios de esta sección.

Recuerde que el gradiente de una función f de tres variables es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, así que puede calcular su rotacional. El teorema siguiente indica que el rotacional de un campo vectorial gradiente es $\mathbf{0}$.

3 Teorema Si f es una función de tres variables que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, entonces

$$\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

COMPROBACIÓN Se tiene

$$\text{rot}\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Nótese la semejanza con lo que se sabe por la sección 12.4: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para todos los vectores tridimensionales $\mathbf{a}$.

por el teorema de Clairaut. ■

Como un campo vectorial conservativo es aquel para el cual $\mathbf{F} = \nabla f$, el teorema 3 puede reformularse como sigue:

Compare esto con el ejercicio 16.3.29.

Si $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

Esto da una manera de verificar que un campo vectorial no es conservativo.

EJEMPLO 2 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ no es conservativo.

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 se demostró que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Esto demuestra que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ y en consecuencia, por lo visto antes de este ejemplo, $\mathbf{F}$ no es conservativo. ■

Lo contrario del teorema 3 no es cierto en general, pero el teorema siguiente establece que es cierto si **F** está definida en todas partes. (En términos más generales, es cierto si el dominio está simplemente conectado, es decir si "no tiene agujeros".) El teorema 4 es la versión tridimensional del teorema 16.3.6. Su comprobación requiere el teorema de Stokes y se esbozará al final de la sección 16.8.

4 **Teorema** Si **F** es un campo vectorial definido en la totalidad de $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces **F** es un campo vectorial conservativo.

EJEMPLO 3
(a) Demuestre que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$$

es un campo vectorial conservativo.
(b) Determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUCIÓN
(a) Calcule el rotacional de **F**:

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\,\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\,\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}$$

Como rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y el dominio de **F** es $\mathbb{R}^3$, **F** es un campo vectorial conservativo por el teorema 4.

(b) La técnica para determinar f se dio en la sección 16.3. Se tiene

5 $$f_x(x, y, z) = y^2z^3$$

6 $$f_y(x, y, z) = 2xyz^3$$

7 $$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Al integrar (5) con respecto a x, se obtiene

8 $$f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z)$$

Derivando (8) con respecto a y, se obtiene $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$, así que la comparación con (6) da $g_y(y, z) = 0$. Por tanto, $g(y, z) = h(z)$ y

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Entonces (7) da $h'(z) = 0$. Así

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$ ■

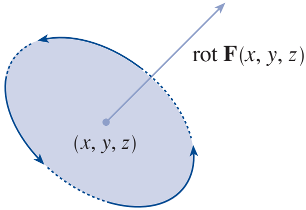


FIGURA 1

La razón del nombre *rotacional* es que el vector rotacional se asocia con rotaciones. Una relación se explica en el ejercicio 37. Otra ocurre cuando **F** representa el campo de velocidad en el flujo de fluidos (véase el ejemplo 16.1.3). Partículas cerca de (x, y, z) en el fluido tienden a rotar alrededor del eje que apunta en la dirección de rot $\mathbf{F}(x, y, z)$ y la longitud de este vector rotacional es una medida de lo rápido que se mueven las partículas alrededor del eje (véase la figura 1). Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en un punto P, el fluido está libre de rotaciones en P y **F** se llama **irrotacional** en P. En otras palabras, no hay ningún remolino en P. Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, una minúscula rueda de paletas se mueve con el fluido, pero no rota alrededor de su eje. Si rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, la rueda de paletas rota alrededor de su eje. Se dará una explicación más detallada en la sección 16.8 como consecuencia del teorema de Stokes.

Divergencia

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ y $\partial R/\partial z$ existen, entonces la **divergencia de F** es la función de tres variables definida por

9
$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Obsérvese que rot **F** es un campo vectorial, mientras que div **F** es un campo escalar. En términos del operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, la divergencia de **F** puede escribirse simbólicamente como el producto punto de ∇ y **F**:

10
$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

EJEMPLO 4 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine div **F**.

SOLUCIÓN Por la definición de divergencia (ecuación 9 o 10), se tiene

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$ ■

Si **F** es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, entonces rot **F** es también un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Como tal, se puede calcular su divergencia. El teorema siguiente muestra que el resultado es 0.

11 Teorema Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y P, Q y R tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\text{div rot}\,\mathbf{F} = 0$$

COMPROBACIÓN Usando las definiciones de divergencia y rotacional, se tiene

Nótese la analogía con el triple producto escalar: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

$$\begin{aligned}\text{div rot } \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\, \partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

porque los términos se eliminan en pares por el teorema de Clairaut. ■

EJEMPLO 5 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ no puede escribirse como el rotacional de otro campo vectorial, es decir, $\mathbf{F} \neq \text{rot } \mathbf{G}$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 4 se demostró que

$$\text{div } \mathbf{F} = z + xz$$

y por tanto $\text{div } \mathbf{F} \neq 0$. Si fuera cierto que $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$, el teorema 11 daría

$$\text{div } \mathbf{F} = \text{div rot } \mathbf{G} = 0$$

lo que contradice $\text{div } \mathbf{F} \neq 0$. Así, $\mathbf{F}$ no es el rotacional de otro campo vectorial. ■

La razón de esta interpretación de div **F** se explicará al final de la sección 16.9 como consecuencia del teorema de la divergencia.

Una vez más, la razón del nombre *divergencia* puede comprenderse en el contexto del flujo de fluidos. Si $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la velocidad de un fluido (o gas), entonces $\text{div } \mathbf{F}(x, y, z)$ representa la razón de cambio neta (con respecto al tiempo) de la masa del fluido (o gas) que fluye desde el punto (x, y, z) por unidad de volumen. En otras palabras, $\text{div } \mathbf{F}(x, y, z)$ mide la tendencia del fluido a divergir desde el punto (x, y, z). Si $\text{div } \mathbf{F} = 0$, se dice que **F** es **incompresible**.

Otro operador diferencial ocurre cuando se calcula la divergencia de un campo vectorial gradiente ∇f. Si f es una función de tres variables, se tiene

$$\text{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

y esta expresión ocurre tan a menudo que se abrevia como $\nabla^2 f$. El operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

se llama **operador de Laplace** a causa de su relación con la **ecuación de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

También se puede aplicar el operador de Laplace ∇^2 a un campo vectorial

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

en términos de sus componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}$$

Formas vectoriales del teorema de Green

Los operadores rotacional y de divergencia permiten reescribir el teorema de Green en versiones que serán útiles en el trabajo posterior. Suponga que la región plana D, su curva frontera C y las funciones P y Q satisfacen las hipótesis del teorema de Green. Entonces se considera el campo vectorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$. Su integral de línea es

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

y considerando a $\mathbf{F}$ como un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ con tercer componente 0, se tiene

$$\text{rot }\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Por tanto

$$(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y ahora se puede reescribir la ecuación del teorema de Green en la forma vectorial

12 $$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

La ecuación 12 expresa la integral de línea del componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de C como la integral doble del componente vertical de rot $\mathbf{F}$ en la región D encerrada por C. Ahora se deriva una fórmula similar que implica al componente *normal* de $\mathbf{F}$.

Si C está dada por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Entonces el vector tangente unitario (véase la sección 13.2) es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

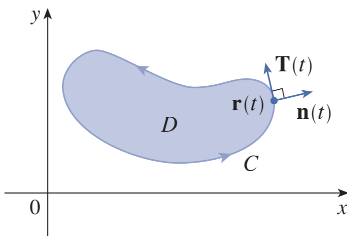


FIGURA 2

Usted puede verificar que el vector normal unitario externo a C está dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

(Véase la figura 2.) Así, de la ecuación 16.2.3 se tiene

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_a^b (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})(t)\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))\,y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))\,x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right]|\mathbf{r}'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt - Q(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt \\ &= \int_C P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dA\end{aligned}$$

por el teorema de Green. Pero el integrando en esta integral doble es justo la divergencia de **F**. Por lo que se tiene una segunda forma vectorial del teorema de Green.

13
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

Esta versión indica que la integral de línea del componente normal de **F** a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de **F** en la región D encerrada por C.

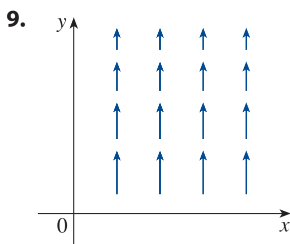
16.5 EJERCICIOS

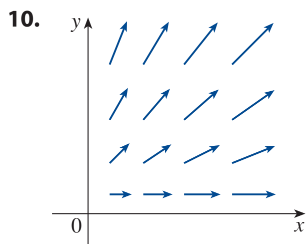
1-8 Determine (a) el rotacional y (b) la divergencia del campo vectorial.

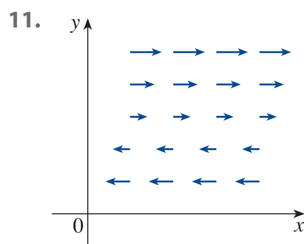
1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\,\mathbf{i} + x^2yz^2\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3yz^2\,\mathbf{j} + y^4z^3\,\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+z}\,\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{y}}{1+x}\,\mathbf{j} + \dfrac{\sqrt{z}}{1+y}\,\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(2y + 3z)\,\mathbf{i} + \ln(x + 3z)\,\mathbf{j} + \ln(x + 2y)\,\mathbf{k}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \arctan(xy), \arctan(yz), \arctan(zx) \rangle$

9-11 El campo vectorial **F** se muestra en el plano xy y parece igual en todos los demás planos horizontales. (En otras palabras, **F** es independiente de z y su componente z es 0.)

(a) ¿Div **F** es positiva, negativa o cero? Explique su respuesta.
(b) Determine si rot **F** = **0**. Si no, ¿en qué dirección apunta rot **F**?

9.


10.


11.


12. Sea f un campo escalar y **F** un campo vectorial. Diga si cada una de las expresiones siguientes es significativa. Si no lo es, explique por qué. Si lo es, diga si es un campo escalar o un campo vectorial.

(a) rot f (b) grad f
(c) div **F** (d) rot (grad f)
(e) grad **F** (f) grad(div **F**)
(g) div(grad f) (h) grad(div f)
(i) rot (rot **F**) (j) div(div **F**)
(k) (grad f) × (div **F**) (l) div(rot(grad f))

13-18 Determine si el campo vectorial es conservativo o no. Si lo es, halle una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^4\,\mathbf{i} + x^2z^4\,\mathbf{j} + 4x^2yz^3\,\mathbf{k}$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\cos y\,\mathbf{i} + xz\,\operatorname{sen} y\,\mathbf{j} + x\cos y\,\mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2\,\mathbf{i} + x^2yz^2\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz}\,\mathbf{i} + xze^{yz}\,\mathbf{j} + xye^{yz}\,\mathbf{k}$
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} yz\,\mathbf{i} + ze^x\cos yz\,\mathbf{j} + ye^x\cos yz\,\mathbf{k}$

19. ¿Existe un campo vectorial **G** en $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy \rangle$? Explique su respuesta.

20. ¿Existe un campo vectorial **G** en $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle x, y, z \rangle$? Explique su respuesta.

21. Demuestre que todo campo vectorial de la forma
$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$$
donde f, g, h son funciones derivables, es irrotacional.

22. Demuestre que todo campo vectorial de la forma
$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\,\mathbf{i} + g(x, z)\,\mathbf{j} + h(x, y)\,\mathbf{k}$$
es incompresible.

23-29 Compruebe la identidad, suponiendo que las derivadas parciales apropiadas existen y son continuas. Si f es un campo escalar y $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ son campos vectoriales, entonces $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ y $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ pueden ser definidas por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\,\mathbf{F}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\cdot\mathbf{G}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\times\mathbf{G}(x, y, z)$$

23. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

24. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$

25. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$

26. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}\mathbf{F} + (\nabla f)\times\mathbf{F}$

27. $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$

28. $\operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g) = 0$

29. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

30-32 Sea $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique cada identidad.

(a) $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla\cdot(r\mathbf{r}) = 4r$

(c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

31. Verifique cada identidad.

(a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$ (b) $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$

(c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ (d) $\nabla\ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Si $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, determine $\operatorname{div}\mathbf{F}$. ¿Existe un valor de p para el que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$?

---

33. Use el teorema de Green en la forma de ecuación 13 para comprobar la **primera identidad de Green**:

$$\iint_D f\nabla^2 g\,dA = \oint_C f(\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,ds - \iint_D \nabla f\cdot\nabla g\,dA$$

donde D y C satisfacen las hipótesis del teorema de Green y las derivadas parciales apropiadas de f y g existen y son continuas. (La cantidad $\nabla g\cdot\mathbf{n} = D_n g$ ocurre en la integral de línea. Esta es la derivada direccional en la dirección del vector normal $\mathbf{n}$ y se llama **derivada normal** de g.)

34. Use la primera identidad de Green (ejercicio 33) para comprobar la **segunda identidad de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,ds$$

donde D y C satisfacen las hipótesis del teorema de Green y las derivadas parciales apropiadas de f y g existen y son continuas.

35. Recuerde de la sección 14.3 que una función g se llama *armónica* en D si satisface la ecuación de Laplace, es decir $\nabla^2 g = 0$ en D. Use la primera identidad de Green (con las mismas hipótesis que en el ejercicio 33) para demostrar que si g es armónica en D, entonces $\oint_C D_n g\,ds = 0$. Aquí $D_n g$ es la derivada normal de g definida en el ejercicio 33.

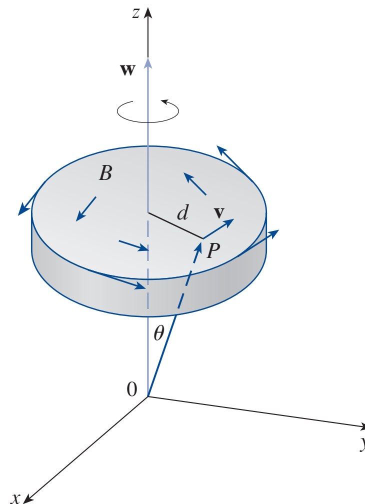
36. Use la primera identidad de Green para demostrar que si f es armónica en D y si $f(x, y) = 0$ en la curva frontera C, entonces $\iint_D |\nabla f|^2\,dA = 0$. (Suponga las mismas hipótesis que en el ejercicio 33.)

37. Este ejercicio demuestra una relación entre el vector rotacional y rotaciones. Sea B un cuerpo rígido que rota alrededor del eje z. La rotación puede ser descrita por el vector $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$, donde ω es la velocidad angular de B, es decir la velocidad tangencial de cualquier punto P en B dividida entre la distancia d del eje de rotación. Sea $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ el vector de posición de P.

(a) Considerando el ángulo θ de la figura, demuestre que el campo de velocidad de B está dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}$.

(b) Demuestre que $\mathbf{v} = -\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j}$.

(c) Demuestre que $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



38. Las ecuaciones de Maxwell que relacionan el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{H}$ cuando varían con el tiempo en una región que no contiene ninguna carga ni corriente pueden enunciarse como sigue:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

donde c es la velocidad de la luz. Use estas ecuaciones para comprobar lo siguiente:

(a) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$

(b) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

(c) $\nabla^2\mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$ [*Sugerencia:* Use el ejercicio 29.]

(d) $\nabla^2\mathbf{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

39. Se ha visto que todos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{F} = \nabla g$ satisfacen la ecuación rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y que todos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{F} =$ rot $\mathbf{G}$ satisfacen la ecuación div $\mathbf{F} = 0$ (suponiendo continuidad de las derivadas parciales apropiadas). Esto sugiere la pregunta: ¿existen ecuaciones que todas las funciones de la forma $f =$ div $\mathbf{G}$ deban satisfacer? Demuestre que la respuesta a esta pregunta es "No" comprobando que *cada* función continua f en $\mathbb{R}^3$ es la divergencia de algún campo vectorial.
[*Sugerencia*: sea $\mathbf{G}(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0\rangle$ donde $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z)\, dt$.]

16.6 Superficies paramétricas y sus áreas

Hasta aquí se han considerado tipos especiales de superficies: cilindros, superficies cuádricas, gráficas de funciones de dos variables y superficies de nivel de funciones de tres variables. Aquí se usarán funciones vectoriales para describir superficies más generales, llamadas *superficies paramétricas*, y se calcularán sus áreas. Luego se tomará la fórmula general del área de una superficie y se verá cómo se aplica a superficies especiales.

Superficies paramétricas

Igual que como se describió una curva en el espacio mediante una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ de un parámetro t, se puede describir una superficie mediante una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dos parámetros u y v. Suponga que

1 $$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

es una función con un vector como valor definida en una región D en el plano uv. Por lo que, x, y y z, las funciones componentes de $\mathbf{r}$, son funciones de dos variables u y v con dominio D. El conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ es tal que

2 $$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

y (u, v) varía a todo lo largo de D, se llama **superficie paramétrica** S y las ecuaciones 2 se llaman **ecuaciones paramétricas** de S. Cada elección de u y v da un punto en S; haciendo todas las elecciones, se obtiene la totalidad de S. En otras palabras, la superficie S es trazada por la punta del vector de posición $\mathbf{r}(u, v)$ conforme (u, v) se mueve por la región D. (Véase la figura 1.)

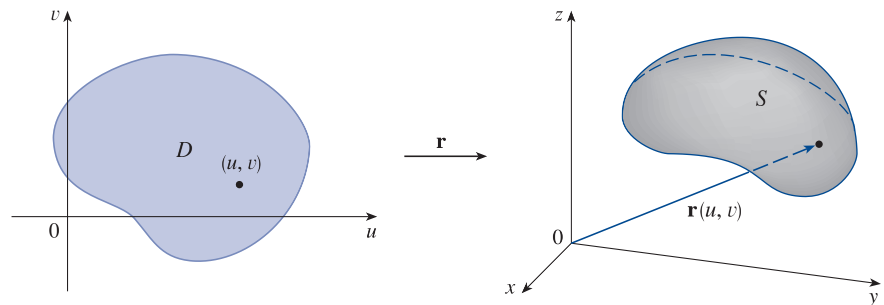


FIGURA 1
Una superficie paramétrica

EJEMPLO 1 Identifique y trace la superficie con ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} u\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas para esta superficie son

$$x = 2 \cos u \qquad y = v \qquad z = 2 \operatorname{sen} u$$

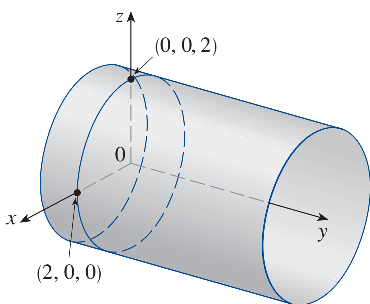


FIGURA 2

Así, para cualquier punto (x, y, z) en la superficie, se tiene

$$x^2 + z^2 = 4 \cos^2 u + 4 \operatorname{sen}^2 u = 4$$

Esto significa que las secciones transversales verticales paralelas al plano xz (es decir, con y constante) son todos los círculos con radio 2. Como $y = v$ y no hay ninguna restricción sobre v, la superficie es un cilindro circular con radio 2 cuyo eje es el eje y (véase la figura 2). ■

En el ejemplo 1 no se pusieron restricciones a los parámetros u y v, por tanto se obtuvo el cilindro entero. Si, por ejemplo, se restringe u y v escribiendo el dominio paramétrico como

$$0 \leqslant u \leqslant \pi/2 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 3$$

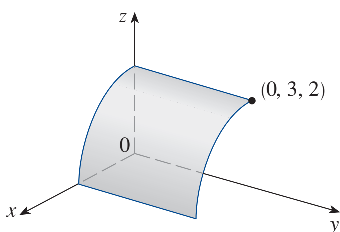


FIGURA 3

entonces $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, y se obtiene el cuarto de cilindro con longitud 3 ilustrado en la figura 3.

Si una superficie paramétrica S es dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces hay dos familias útiles de curvas que residen en S, una familia con u constante y otra con v constante. Estas familias corresponden a las rectas verticales y horizontales en el plano uv. Si se mantiene u constante poniendo $u = u_0$, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ se convierte en una función vectorial del parámetro v y define una curva C_1 que se tiende en S. (Véase la figura 4.)

TEC Visual 16.6 muestra versiones animadas de las figuras 4 y 5, con curvas reticulares móviles, para varias superficies paramétricas.

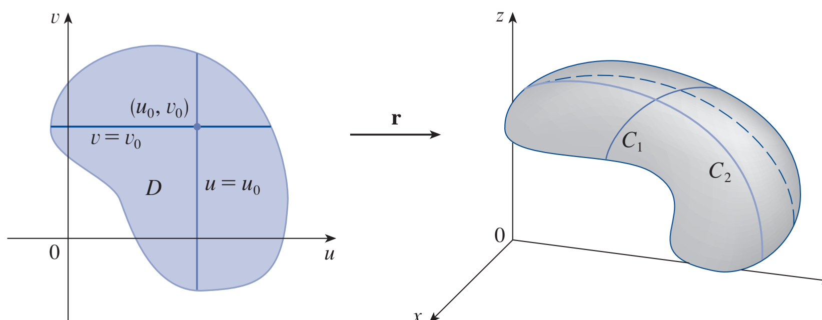


FIGURA 4

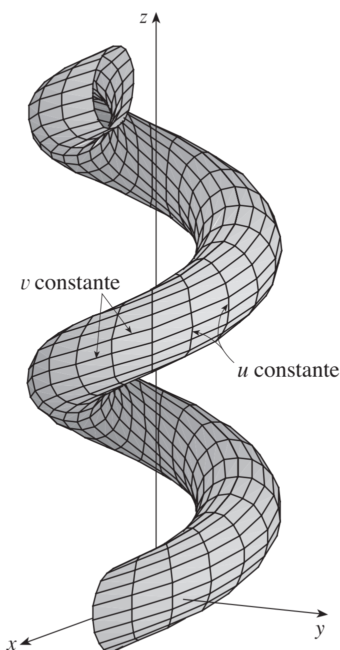


FIGURA 5

De igual forma, si se mantiene v constante poniendo $v = v_0$, se obtiene una curva C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que reside en S. Se llama a estas curvas **curvas reticulares**. (En el ejemplo 1, por citar un caso, las curvas reticulares obtenidas concediendo que u es constante son rectas horizontales, mientras que las curvas reticulares con v constante son círculos.) De hecho, cuando una computadora grafica una superficie paramétrica, usualmente describe la superficie trazando estas curvas reticulares, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Use un sistema algebraico computacional para graficar la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \operatorname{sen} v) \cos u, (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u, u + \cos v \rangle$$

¿Qué curvas reticulares tienen u constante? ¿Cuáles tienen v constante?

SOLUCIÓN Se grafica la porción de la superficie con dominio paramétrico $0 \leqslant u \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ en la figura 5. Tiene la apariencia de un tubo en espiral. Para identificar las curvas reticulares, se escriben las ecuaciones paramétricas correspondientes:

$$x = (2 + \operatorname{sen} v) \cos u \qquad y = (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u \qquad z = u + \cos v$$

Si v es constante, entonces sen v y cos v son constantes, así que las ecuaciones paramétricas se asemejan a las de la hélice en el ejemplo 13.1.4. De este modo, las curvas reticulares con v constante son las curvas en espiral de la figura 5. Se deduce que las

curvas reticulares con u constante deben ser las curvas que parecen círculos en la figura. Una evidencia adicional para esta afirmación es que si u se mantiene constante, $u = u_0$, entonces la ecuación $z = u_0 + \cos v$ muestra que los valores de z varían de $u_0 - 1$ a $u_0 + 1$. ■

En los ejemplos 1 y 2 se dio una ecuación vectorial y se pidió graficar la superficie paramétrica correspondiente. En los ejemplos siguientes, en cambio, se dará el problema más desafiante de encontrar una función vectorial que represente una superficie dada. En el resto de este capítulo, a menudo se tendrá que hacer precisamente eso.

EJEMPLO 3 Encuentre una función vectorial que represente el plano que pasa por el punto P_0 con vector de posición $\mathbf{r}_0$ y que contiene dos vectores no paralelos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

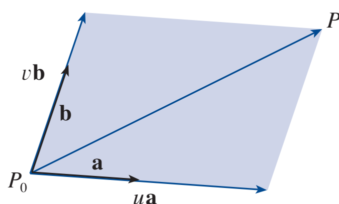


FIGURA 6

SOLUCIÓN Si P es cualquier punto en el plano, se puede pasar de P_0 a P moviéndose cierta distancia en la dirección de $\mathbf{a}$ y otra distancia en la dirección de $\mathbf{b}$. Así, hay escalares u y v tales que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. (La figura 6 ilustra cómo opera esto, por medio de la ley del paralelogramo, para el caso en el que u y v son positivas. Véase también el ejercicio 12.2.46.) Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de P, entonces

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Así, la ecuación vectorial del plano puede escribirse como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

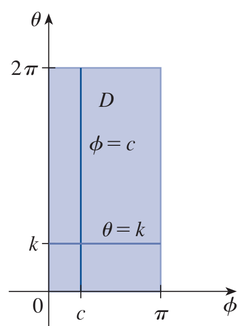
donde u y v son números reales.

Si se escribe $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, se pueden escribir las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) como sigue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$ ■

EJEMPLO 4 Encuentre la representación paramétrica de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



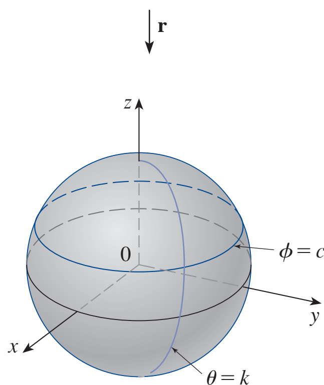


FIGURA 7

SOLUCIÓN La esfera tiene una representación simple $\rho = a$ en coordenadas esféricas, así que elija los ángulos ϕ y θ en coordenadas esféricas como los parámetros (véase la sección 15.8). Luego, al poner $\rho = a$ en la ecuación para la conversión de coordenadas esféricas a rectangulares (ecuaciones 15.8.1), se obtiene

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

como las ecuaciones paramétricas de la esfera. La ecuación vectorial correspondiente es

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{j} + a \cos \phi\, \mathbf{k}$$

Se tiene $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, así que el dominio paramétrico es el rectángulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Las curvas reticulares con ϕ constante son los círculos de latitud constante (incluido el ecuador). Las curvas reticulares con θ constante son los meridianos (semicírculos), los cuales unen los polos norte y sur (véase la figura 7). ■

NOTA En el ejemplo 4 se vio que las curvas reticulares para una esfera son curvas de latitud constante o longitud constante. Para una superficie paramétrica general, en realidad se hace un mapa y las curvas reticulares son similares a líneas de latitud y longitud. Describir un punto en una superficie paramétrica (como la de la figura 5) dando valores específicos de u y v es como dar la latitud y longitud de un punto.

Uno de los usos de las superficies paramétricas es el de gráficos por computadora. La figura 8 muestra el resultado de tratar de graficar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ despejando z en la ecuación y graficando los hemisferios superior e inferior por separado. Parte de la esfera parece faltar, a causa del sistema reticular rectangular usado por la computadora. La imagen que está mucho mejor de la figura 9 fue producida por una computadora usando las ecuaciones paramétricas determinadas en el ejemplo 4.

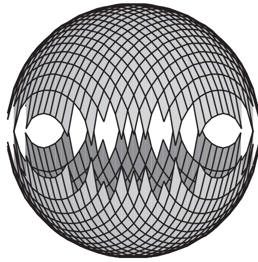


FIGURA 8

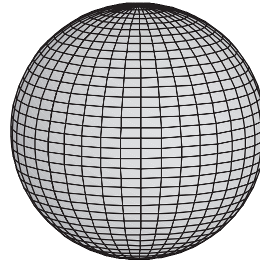


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Halle una representación paramétrica para el cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

SOLUCIÓN El cilindro tiene una representación simple $r = 2$ en coordenadas cilíndricas, así que se elige como parámetros θ y z en coordenadas cilíndricas. Entonces, las ecuaciones paramétricas del cilindro son

$$x = 2 \cos \theta \qquad y = 2 \operatorname{sen} \theta \qquad z = z$$

donde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant z \leqslant 1$. ■

EJEMPLO 6 Halle una función vectorial que represente al paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUCIÓN Si se considera a x y y como parámetros, las ecuaciones paramétricas son simplemente

$$x = x \qquad y = y \qquad z = x^2 + 2y^2$$

y la ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\,\mathbf{k}$$ ■

TEC En Module 16.6 usted puede investigar varias familias de superficies paramétricas.

En general, una superficie dada como la gráfica de una función de x y y, es decir con una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, siempre puede considerarse una superficie paramétrica tomando x y y como parámetros y escribiendo las ecuaciones paramétricas como

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Las representaciones paramétricas (también llamadas parametrizaciones) de superficies no son únicas. El ejemplo siguiente muestra dos maneras de parametrizar un cono.

EJEMPLO 7 Determine una representación paramétrica para la superficie $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, es decir la mitad superior del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUCIÓN 1 Una posible representación se obtiene eligiendo a x y y como parámetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Así, la ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$$

Para algunos propósitos, las representaciones paramétricas de las soluciones 1 y 2 son igualmente satisfactorias, pero la solución 2 podría ser preferible en ciertas situaciones. Si solo interesa la parte del cono que se encuentra bajo el plano $z = 1$, por ejemplo, todo lo que se tiene que hacer en la solución 2 es cambiar el dominio paramétrico a

$$0 \leqslant r \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN 2 Otra representación resulta de elegir como parámetros las coordenadas polares r y θ. Un punto (x, y, z) en el cono satisface $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ y $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Por lo que una ecuación vectorial para el cono es

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}$$

donde $r \geqslant 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. ■

Superficies de revolución

Las superficies de revolución pueden representarse paramétricamente y por tanto graficarse usando una computadora. Por ejemplo, considere la superficie S obtenida rotando la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alrededor del eje x, donde $f(x) \geqslant 0$. Sea θ el ángulo de rotación como se muestra en la figura 10. Si (x, y, z) es un punto en S, entonces

3 $$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\operatorname{sen}\theta$$

Por tanto, tome x y θ como parámetros y considere las ecuaciones 3 como ecuaciones paramétricas de S. El dominio paramétrico está dado por $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

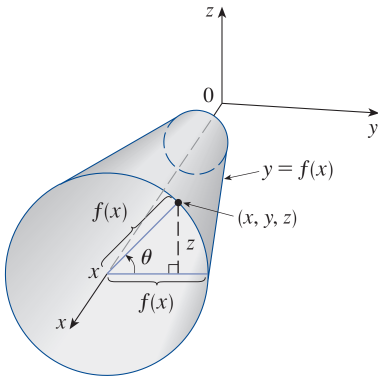


FIGURA 10

EJEMPLO 8 Determine ecuaciones paramétricas para la superficie generada rotando la curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, alrededor del eje x. Use estas ecuaciones para graficar la superficie de la revolución.

SOLUCIÓN Con base en las ecuaciones 3, las ecuaciones paramétricas son

$$x = x \qquad y = \operatorname{sen} x \cos\theta \qquad z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\theta$$

y el dominio paramétrico es $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Al usar una computadora para trazar estas ecuaciones y rotando después la imagen, se obtiene la gráfica de la figura 11. ■

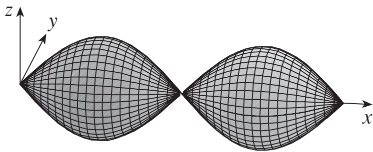


FIGURA 11

Se pueden adaptar las ecuaciones 3 para representar una superficie obtenida mediante revolución alrededor del eje y o z (véase el ejercicio 30).

Planos tangentes

Ahora se determinará el plano tangente a una superficie paramétrica S trazada por una función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

en un punto P_0 con vector de posición $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Si se mantiene constante a u poniendo $u = u_0$, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ se convierte en una función vectorial del parámetro v y define una curva reticular C_1 que está en S. (Véase la figura 12.) El vector tangente a C_1 en P_0 se obtiene tomando la derivada parcial de $\mathbf{r}$ con respecto a v:

4 $$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

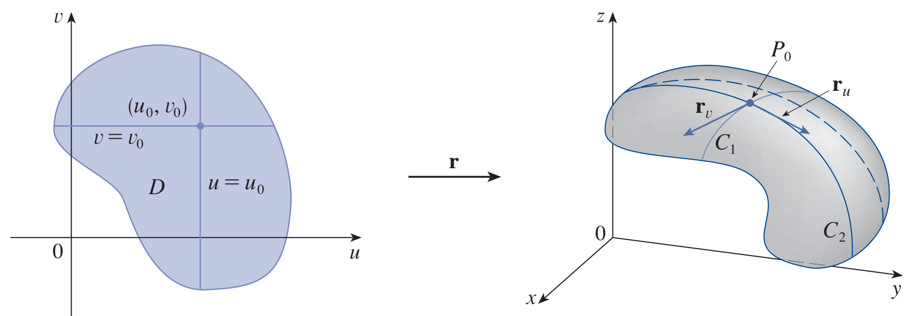


FIGURA 12

De igual forma, si se mantiene constante a v poniendo $v = v_0$, se obtiene la curva reticular C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que yace en S, y su vector tangente en P_0 es

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

Si $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ no es $\mathbf{0}$, la superficie S se llama **suave** (no tiene "esquinas"). Para una superficie suave, el **plano tangente** es el plano que contiene los vectores tangentes $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$, y el vector tangente $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es un vector normal al plano tangente.

La figura 13 muestra la superficie que se interseca a sí misma del ejemplo 9 y su plano tangente en (1, 1, 3).

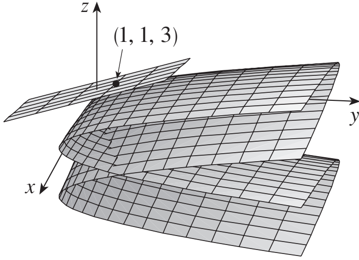


FIGURA 13

EJEMPLO 9 Determine el plano tangente a la superficie con ecuaciones paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ en el punto (1, 1, 3).

SOLUCIÓN Calcule primero los vectores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Así, un vector normal al plano tangente es

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

Nótese que el punto (1, 1, 3) corresponde a los valores paramétricos $u = 1$ y $v = 1$, así que el vector paramétrico ahí es

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en (1, 1, 3) es

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

o

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

■

Área de una superficie

Ahora se define el área de una superficie paramétrica general dada por la ecuación 1. Para mayor simplicidad, se empieza considerando una superficie cuyo dominio paramétrico D es un rectángulo y se divide en subrectángulos R_{ij}. Se elige (u_i^*, v_j^*) como la esquina inferior izquierda de R_{ij}. (Véase la figura 14.)

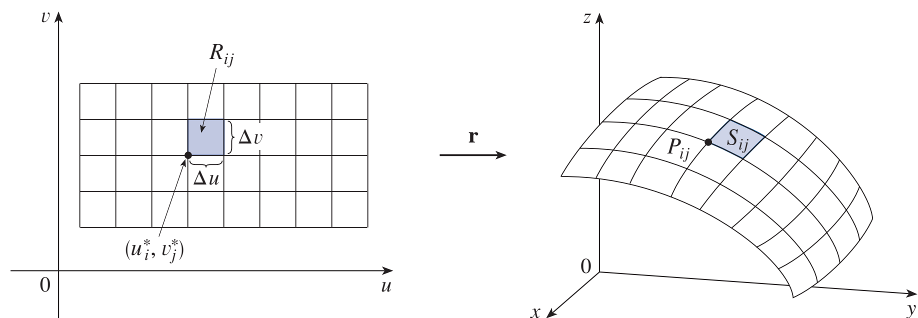


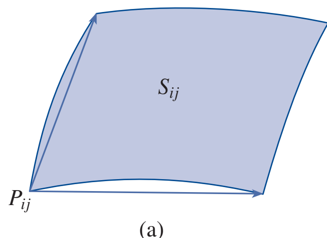
FIGURA 14
La imagen del subrectángulo R_{ij} es la parcela S_{ij}.

La parte S_{ij} de la superficie S que corresponde a R_{ij} se llama *parcela* y tiene el punto P_{ij} con vector de posición $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como una de sus esquinas. Sean

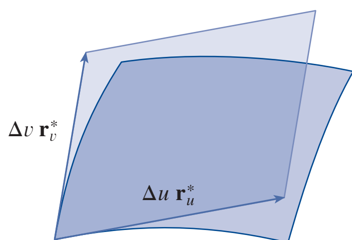
$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

los vectores tangentes en P_{ij}, dados por las ecuaciones 5 y 4.

La figura 15(a) muestra cómo las dos orillas de la parcela que se encuentran en P_{ij} pueden ser aproximadas por vectores. Estos vectores pueden ser aproximados a su vez por los vectores $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ y $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$, porque las derivadas parciales pueden ser aproximadas por cocientes de diferencias. Así, se aproxima S_{ij} mediante el paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ y $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$. Este paralelogramo aparece en la figura 15(b) y se ubica en el plano tangente a S en P_{ij}. El área de este paralelogramo es



(a)



(b)

FIGURA 15
Aproximación de una parcela por medio de un paralelogramo

$$|(\Delta u\, \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\, \Delta u\, \Delta v$$

así que una aproximación al área de S es

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\, \Delta u\, \Delta v$$

La intuición dice que esta aproximación mejora cuando se aumenta el número de subrectángulos, y se reconoce la doble suma como una suma de Riemann para la integral doble $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$. Esto motiva la definición siguiente.

6 Definición Si una superficie paramétrica suave S está dada por la ecuación

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

y S es cubierta solo una vez cuando (u, v) abarca todo el dominio paramétrico D, entonces el **área** de S es

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

donde $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

EJEMPLO 10 Determine el área de una esfera de radio a.

SOLUCIÓN En el ejemplo 4 se determinó la representación paramétrica

$$x = a \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = a\cos\phi$$

donde el dominio paramétrico es

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

Calcule primero el producto cruz de los vectores tangentes:

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\, \cos\theta & a\cos\phi\, \operatorname{sen}\theta & -a\operatorname{sen}\phi \\ -a\operatorname{sen}\phi\, \operatorname{sen}\theta & a\operatorname{sen}\phi\, \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\phi\, \cos\theta\,\mathbf{i} + a^2\operatorname{sen}^2\phi\, \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + a^2\operatorname{sen}\phi\, \cos\phi\,\mathbf{k}$$

Así

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi \, \cos^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^4\phi \, \operatorname{sen}^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2 \operatorname{sen}\phi$$

ya que $\phi \geqslant 0$ para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Por tanto, por la definición 6, el área de la esfera es

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| \, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$ ■

Área de la gráfica de una función

Para el caso especial de una superficie S con ecuación $z = f(x, y)$, donde (x, y) se sitúa en D y f tiene derivadas parciales continuas, se toma x y y como parámetros. Las ecuaciones paramétricas son

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

así que

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

y

7
$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Por tanto, se tiene

8
$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

y la fórmula del área en la definición 6 se convierte en

9
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Nótese la semejanza entre la fórmula del área en la ecuación 9 y la fórmula de la longitud de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

de la sección 8.1.

EJEMPLO 11 Halle el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se ubica bajo el plano $z = 9$.

SOLUCIÓN El plano interseca el paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Por tanto, la superficie dada se encuentra sobre el disco D con centro en el origen y radio 3.

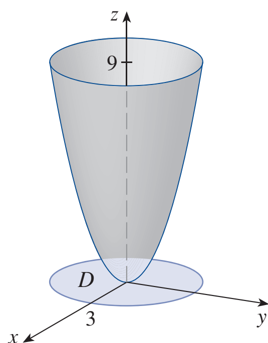


FIGURA 16

(Véase la figura 16.) Usando la fórmula 9, se tiene

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Al convertir a coordenadas polares se obtiene

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

■

Persiste la pregunta de si nuestra definición del área (6) es congruente con la fórmula del área del cálculo de una variable (8.2.4).

Considere la superficie S obtenida rotando la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ alrededor del eje x, donde $f(x) \geqslant 0$ y f' es continua. Por las ecuaciones 3 se sabe que las ecuaciones paramétricas de S son

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\text{sen}\,\theta \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Para calcular el área de S se necesitan los vectores tangenciales

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f'(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Así

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\,\text{sen}\,\theta \\ 0 & -f(x)\,\text{sen}\,\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= f(x)f'(x)\,\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\,\mathbf{j} - f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

y por tanto

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{[f(x)]^2[f'(x)]^2 + [f(x)]^2\cos^2\theta + [f(x)]^2\,\text{sen}^2\theta}$$

$$= \sqrt{[f(x)]^2[1 + [f'(x)]^2]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

porque $f(x) \geqslant 0$. En consecuencia, el área de S es

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta|\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Esta es precisamente la fórmula que se usó para definir el área de una superficie de revolución en el cálculo de una variable (8.2.4).

16.6 EJERCICIOS

1-2 Determine si los puntos P y Q están en la superficie dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u - 2v, 3 + u - v \rangle$
$P(4, -5, 1)$, $Q(0, 4, 6)$

2. $\mathbf{r}(u, v) = \langle 1 + u - v, u + v^2, u^2 - v^2 \rangle$
$P(1, 2, 1)$, $Q(2, 3, 3)$

3-6 Identifique la superficie con la ecuación vectorial dada.

3. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\,\mathbf{i} + (3 - v)\,\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + u \cos v\,\mathbf{j} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s \cos t, s \operatorname{sen} t, s \rangle$

6. $\mathbf{r}(s, t) = \langle 3 \cos t, s, \operatorname{sen} t \rangle, \quad -1 \leqslant s \leqslant 1$

7-12 Use una computadora para graficar la superficie paramétrica. Obtenga una impresión e indique en ella cuáles curvas reticulares tienen u constante y cuáles tienen v constante.

7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2, v^2, u + v \rangle$,
$-1 \leqslant u \leqslant 1, \ -1 \leqslant v \leqslant 1$

8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v^3, -v \rangle$,
$-2 \leqslant u \leqslant 2, \ -2 \leqslant v \leqslant 2$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^3, u \operatorname{sen} v, u \cos v \rangle$,
$-1 \leqslant u \leqslant 1, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

10. $x = \operatorname{sen} u, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} v$
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

11. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^5 \rangle$,
$-1 \leqslant u \leqslant 1, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

12. $x = \cos u, \quad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = \cos v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

13-18 Asocie la ecuaciones con las gráficas rotuladas I-VI y dé razones para sus respuestas. Determine qué familias de curvas reticulares tienen u constante y cuáles tienen v constante.

13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$

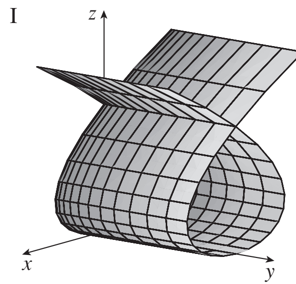
14. $\mathbf{r}(u, v) = uv^2\,\mathbf{i} + u^2 v\,\mathbf{j} + (u^2 - v^2)\,\mathbf{k}$

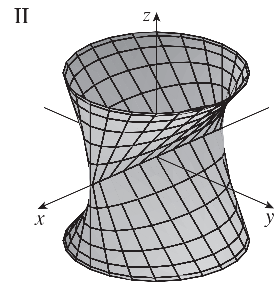
15. $\mathbf{r}(u, v) = (u^3 - u)\,\mathbf{i} + v^2\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k}$

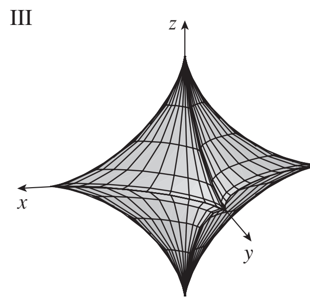
16. $x = (1 - |u|) \cos v, \quad y = (1 - |u|) \operatorname{sen} v, \quad z = u$

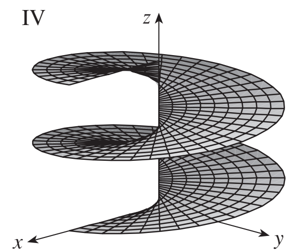
17. $x = \cos^3 u \cos^3 v, \quad y = \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \quad z = \operatorname{sen}^3 v$

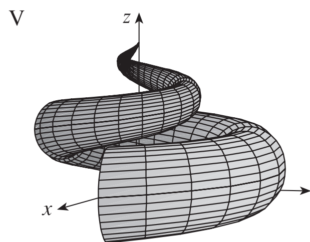
18. $x = \operatorname{sen} u, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} v$

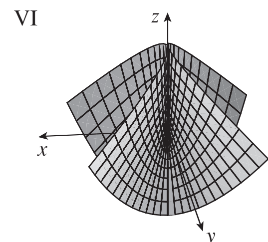
I


II


III


IV


V


VI


19-26 Halle una representación paramétrica para la superficie.

19. El plano que pasa por el origen y que contiene los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} - \mathbf{k}$

20. El plano que pasa por el punto $(0, -1, 5)$ y que contiene los vectores $\langle 2, 1, 4 \rangle$ y $\langle -3, 2, 5 \rangle$

21. La parte del cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que está entre los planos $x = 0$ y $x = 5$

22. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está entre los planos $z = -2$ y $z = 2$

23. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

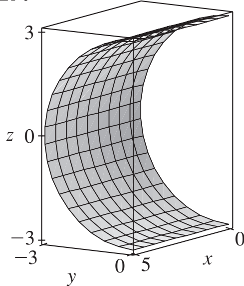
24. La parte del cilindro $x^2 + z^2 = 9$ que está sobre el plano xy y entre los planos $y = -4$ y $y = 4$

25. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que está entre los planos $z = 0$ y $z = 3\sqrt{3}$

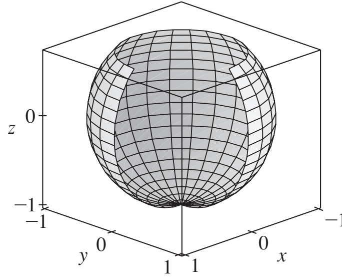
26. La parte del plano $z = x + 3$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

27-28 Use un dispositivo de graficación para producir una gráfica que se parezca a la que se da.

27.



28.



29. Halle ecuaciones paramétricas para la superficie obtenida rotando la curva $y = 1/(1 + x^2)$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ alrededor del eje x y úselas para graficar la superficie.

30. Halle ecuaciones paramétricas para la superficie obtenida rotando la curva $x = 1/y$, $y \geqslant 1$ alrededor del eje y y úselas para graficar la superficie.

31. (a) ¿Qué sucede con el tubo en espiral del ejemplo 2 (véase la figura 5) si reemplaza cos u por sen u y sen u por cos u?

(b) ¿Qué sucede si reemplaza cos u por cos $2u$ y sen u por sen $2u$?

32. La superficie con ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$y = 2\,\text{sen}\,\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$z = r\,\text{sen}(\theta/2)$$

donde $-\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, se llama **banda de Möbius**. Grafique esta superficie con varios puntos de vista. ¿Qué es inusual en ella?

33-36 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica dada en el punto especificado.

33. $x = u + v, \quad y = 3u^2, \quad z = u - v; \quad (2, 3, 0)$

34. $x = u^2 + 1, \quad y = v^3 + 1, \quad z = u + v; \quad (5, 2, 3)$

35. $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}; \quad u = 1, \ v = \pi/3$

36. $\mathbf{r}(u, v) = \text{sen}\,u\,\mathbf{i} + \cos u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + \text{sen}\,v\,\mathbf{k}$; $u = \pi/6, \ v = \pi/6$

SAC **37-38** Determine una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica dada en el punto especificado. Grafique la superficie y el plano tangente.

37. $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + u\cos v\,\mathbf{k}; \quad u = 1, \ v = 0$

38. $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u^2 - v^2)\,\mathbf{i} - v\,\mathbf{j} - u\,\mathbf{k}; \quad (-1, -1, -1)$

39-50 Encuentre el área de la superficie.

39. La parte del plano $3x + 2y + z = 6$ que está en el primer octante

40. La parte del plano con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, 2 - 3u, 1 + u - v\rangle$ que está dada por $0 \leqslant u \leqslant 2$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$

41. La parte del plano $x + 2y + 3z = 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 3$

42. La parte de la superficie $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está sobre el triángulo con vértices (0, 0), (0, 1) y (2, 1)

43. La parte de la superficie $y = 4x + z^2$ que está entre los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ y $z = 1$

44. La parte de la superficie $z = 4 - 2x^2 + y$ que está sobre el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1)

45. La parte de la superficie $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

46. La parte de la superficie $x = z^2 + y$ que está entre los planos $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ y $z = 2$

47. La parte del paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 16$

48. La parte del paraboloide $x = y^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$

49. La superficie con ecuaciones paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

50. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, donde $0 < a < b$

51. Si la ecuación de una superficie S es $z = f(x, y)$, donde $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, y usted sabe que $|f_x| \leqslant 1$ y $|f_y| \leqslant 1$, ¿qué puede decir de $A(S)$?

52-53 Determine el área de la superficie con cuatro decimales expresando el área en términos de una integral simple y usando su calculadora para estimar la integral.

52. La parte de la superficie $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

53. La parte de la superficie $z = \ln(x^2 + y^2 + 2)$ que está sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$

SAC **54.** Determine, con cuatro decimales, el área de la parte de la superficie $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está sobre el cuadrado $|x| + |y| \leqslant 1$. Ilustre graficando esta parte de la superficie.

55. (a) Use la regla del punto medio para integrales dobles (véase la sección 15.1) con seis cuadrados para estimar el área de la superficie $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar el área en el inciso (a) con cuatro decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).

SAC **56.** Determine el área de la superficie con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 v \rangle$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Enuncie su respuesta con cuatro decimales.

SAC **57.** Determine el área exacta de la superficie $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

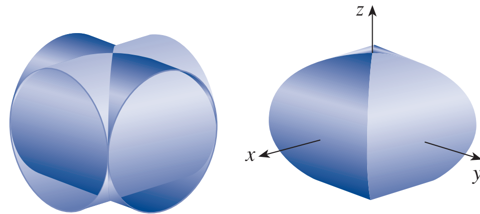
58. (a) Establezca pero no evalúe una integral doble para el área de la superficie con ecuaciones paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.
(b) Elimine los parámetros para demostrar que la superficie es un paraboloide elíptico y establezca otra integral doble para el área.
 (c) Use las ecuaciones paramétricas del inciso (a) con $a = 2$ y $b = 3$ para graficar la superficie.
SAC (d) Para el caso $a = 2$, $b = 3$, use un sistema algebraico computacional para hallar el área con cuatro decimales.

59. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = c \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ representan un elipsoide.
 (b) Use las ecuaciones paramétricas del inciso (a) para graficar el elipsoide para el caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
(c) Establezca pero no evalúe una integral doble para el área del elipsoide del inciso (b).

60. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{senh} u$, representan un hiperboloide de una hoja.
 (b) Use las ecuaciones paramétricas del inciso (a) para graficar el hiperboloide para el caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
(c) Establezca pero no evalúe una integral doble para el área de la parte del hiperboloide en el inciso (b) que está entre los planos $z = -3$ y $z = 3$.

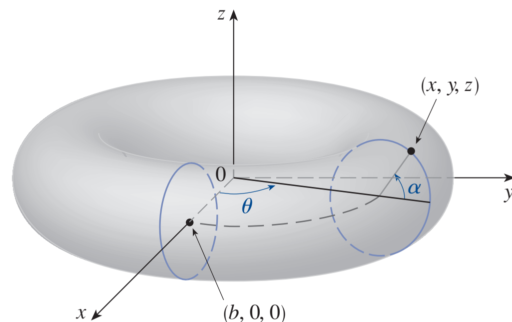
61. Determine el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

62. La figura muestra la superficie creada cuando el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ interseca el cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Determine el área de esta superficie.



63. Halle el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

64. (a) Halle una representación paramétrica para el toro obtenido al rotar alrededor del eje z el círculo en el plano xz con centro $(b, 0, 0)$ y radio $a < b$. [*Sugerencia*: tome como parámetros los ángulos θ y α que se muestran en la figura.]
 (b) Use las ecuaciones paramétricas determinadas en el inciso (a) para graficar el toro para varios valores de a y b.
(c) Use la representación paramétrica del inciso (a) para determinar el área del toro.



16.7 Integrales de superficie

La relación entre integrales de superficie y el área de una superficie es muy parecida a la relación entre integrales de línea y longitud de arco. Suponga que f es una función de tres variables cuyo dominio incluye una superficie S. Se definirá la integral de superficie de f en S de tal modo que, en el caso en el que $f(x, y, z) = 1$, el valor de la integral de superficie sea igual al área de S. Se comenzará con superficies paramétricas y después se tratará con el caso especial en el que S es la gráfica de una función de dos variables.

Superficies paramétricas

Suponga que una superficie S tiene una ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

Suponga primero que el dominio paramétrico D es un rectángulo y se divide en subrectángulos R_{ij} con dimensiones Δu y Δv. Luego la superficie S se divide en las parcelas S_{ij}

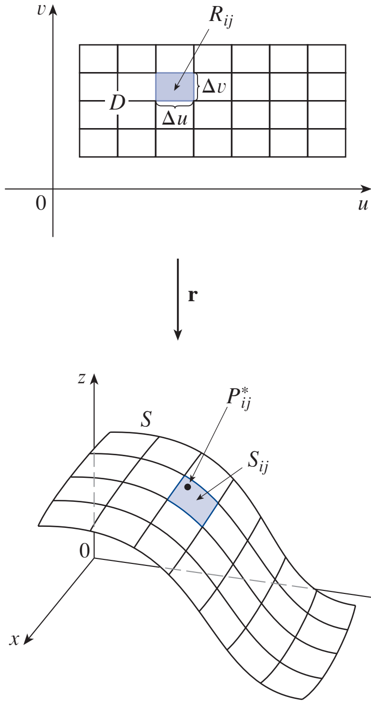


FIGURA 1

correspondientes, como en la figura 1. Se evalúa f en un punto P_{ij}^* en cada parcela, se multiplica por el área ΔS_{ij} de la parcela y se forma la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

Se toma entonces como límite el número de aumentos de parcelas y se define la **integral de superficie de *f* en la superficie *S*** como

$$\boxed{1} \qquad \iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

Nótese la analogía con la definición de una integral de línea (16.2.2) y también la analogía con la definición de una integral doble (15.1.5).

Para evaluar la integral de superficie de la ecuación 1 se aproxima el área de la parcela ΔS_{ij} por medio del área de un paralelogramo de aproximación en el plano tangente. En el análisis del área de una superficie en la sección 16.6 se hizo la aproximación

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u\, \Delta v$$

donde $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

son los vectores tangentes en una esquina de S_{ij}. Si los componentes son continuos y $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son diferentes de cero y no paralelos en el interior de D, se puede demostrar con base en la definición 1, aun si D no es un rectángulo, que

$$\boxed{2} \qquad \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Suponga que la superficie es cubierta solo una vez cuando (u, v) abarca D. El valor de la integral de superficie no depende de la parametrización usada.

Esto debería compararse con la fórmula para una integral de línea:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Obsérvese también que

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

La fórmula 2 permite calcular una integral de superficie convirtiéndola en una integral doble en el dominio paramétrico D. Al usar esta fórmula, recuerde que $f(\mathbf{r}(u, v))$ se evalúa escribiendo $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ en la fórmula para $f(x, y, z)$.

EJEMPLO 1 Calcule la integral de superficie $\iint_S x^2\, dS$, donde S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 16.6.4, use la representación paramétrica

$$x = \text{sen}\,\phi \cos\theta \qquad y = \text{sen}\,\phi\, \text{sen}\,\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

es decir, $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen}\,\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}$

Como en el ejemplo 16.6.10, se puede calcular que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \text{sen}\,\phi$$

Así, por la fórmula 2,

$$\iint_S x^2\,dS = \iint_D (\text{sen}\,\phi\cos\theta)^2\,|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}^2\phi\,\cos^2\theta\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\text{sen}^3\phi\,d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta\int_0^{\pi}(\text{sen}\,\phi - \text{sen}\,\phi\cos^2\phi)\,d\phi$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$ ■

Aquí se usan las identidades

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$
$$\text{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi$$

En cambio, se podrían usar las fórmulas 64 y 67 de la tabla de integrales, que se encuentra al final del libro.

Las integrales de superficie tienen aplicaciones similares a las de las integrales que ya se consideraron. Por ejemplo, si una hoja delgada (de lámina) tiene la forma de una superficie S y la densidad (masa por unidad de área) en el punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$, entonces la **masa** total de la hoja es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\,dS$$

y el **centro de masa** es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\,\rho(x, y, z)\,dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\,\rho(x, y, z)\,dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\,\rho(x, y, z)\,dS$$

Momentos de inercia también pueden definirse, como ya se hizo antes (véase el ejercicio 41).

Gráficas de funciones

Toda superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ puede considerarse una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y)$$

así que se tiene $\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$

Por tanto

3
$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Por consiguiente, en este caso, la fórmula 2 se convierte en

4 $$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

Fórmulas similares se aplican cuando es más conveniente proyectar S en el plano yz o el plano xz. Por ejemplo, si S es una superficie con ecuación $y = h(x, z)$ y D es su proyección en el plano xz, entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, h(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

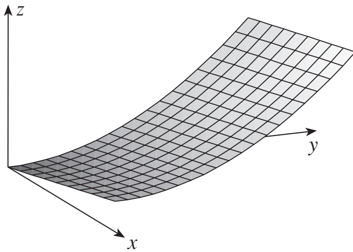


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Evalúe $\iint_S y\, dS$, donde S es la superficie $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. (Véase la figura 2.)

SOLUCIÓN Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

la fórmula 4 da

$$\iint_S y\, dS = \iint_D y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 dx\, \sqrt{2}\int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$ ■

Si S es una superficie suave por partes, es decir, una unión finita de superficies suaves $S_1, S_2, \ldots, S_n$ que intersecan solo a lo largo de sus fronteras, la integral de superficie de f en S está definida por

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)\, dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x, y, z)\, dS$$

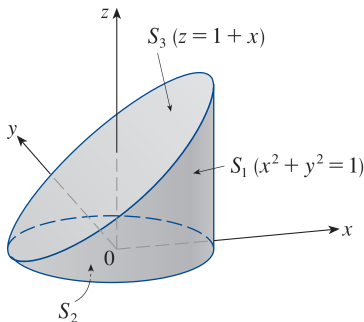


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_S z\, dS$, donde S es la superficie cuyos lados S_1 están dados por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cuya base S_2 es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en el plano $z = 0$ y cuya parte superior S_3 es la parte del plano $z = 1 + x$ que se ubica sobre S_2.

SOLUCIÓN La superficie S aparece en la figura 3. (Se ha cambiado la posición usual de los ejes para obtener un mejor aspecto de S.) Para S_1 se usan θ y z como parámetros (véase el ejemplo 16.6.5) y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

donde

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1 + x = 1 + \cos\theta$$

Por tanto

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

y
$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Así la integral de superficie en S_1 es

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} z\,dS &= \iint_D z\,|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[1 + 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\Big]\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Como S_2 está en el plano $z = 0$, se tiene

$$\iint_{S_2} z\,dS = \iint_{S_2} 0\,dS = 0$$

La superficie superior S_3 se halla sobre el disco unitario D y forma parte del plano $z = 1 + x$. Así, tomando $g(x, y) = 1 + x$ en la fórmula 4 y al convertir a coordenadas polares, se tiene

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} z\,dS &= \iint_D (1+x)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\theta)\sqrt{1+1+0}\;r\,dr\,d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r^2\cos\theta)\,dr\,d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\iint_S z\,dS &= \iint_{S_1} z\,dS + \iint_{S_2} z\,dS + \iint_{S_3} z\,dS \\ &= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\,\pi = \left(\tfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi\end{aligned}$$



Superficies orientadas

Para definir integrales de superficie de campos vectoriales, se debe descartar superficies no orientables como la banda de Möbius que aparece en la figura 4. [Este objeto debe su nombre al geómetra alemán August Möbius (1790-1868).] Usted puede construir una por sí mismo tomando una larga tira de papel de forma rectangular, dándole media vuelta y uniendo las orillas cortas como en la figura 5. Si una hormiga se arrastrara a lo largo de la banda de Möbius partiendo del punto P, terminaría en el “otro lado” de la banda (es decir, con el lado superior apuntando en la dirección opuesta). Entonces, si la hormiga siguiera arrastrándose en la misma dirección, acabaría de vuelta en el mismo punto P sin haber cruzado nunca una orilla. (Si usted ha construido una banda de Möbius, trate de dibujar a lápiz una línea intermedia.) Por tanto, una banda de Möbius tiene en realidad un solo lado. Usted puede graficar la banda de Möbius usando las ecuaciones paramétricas del ejercicio 16.6.32.

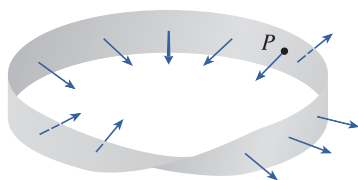


FIGURA 4
Una banda de Möbius

TEC Visual 16.7 muestra una banda de Möbius con un vector normal que puede moverse a lo largo de la superficie.



FIGURA 5
Construcción de una banda de Möbius

En lo sucesivo solo se considerarán superficies orientables (de dos lados). Comience con una superficie S que tiene un plano tangente en cada punto (x, y, z) en S (excepto en cualquier punto frontera). Hay dos vectores normales unitarios $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ en (x, y, z). (Véase la figura 6.)

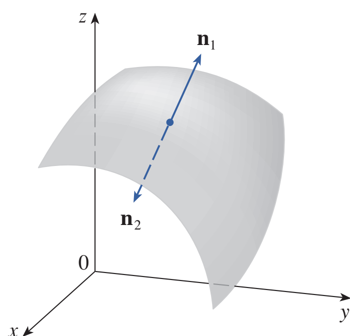


FIGURA 6

Es posible elegir un vector normal unitario $\mathbf{n}$ en cada uno de esos puntos (x, y, z) de tal forma que $\mathbf{n}$ varíe continuamente en S, y entonces S se llama una **superficie orientada** y la selección dada de $\mathbf{n}$ proporciona a S una **orientación**. Existen dos orientaciones posibles para cualquier superficie orientable (véase la figura 7).

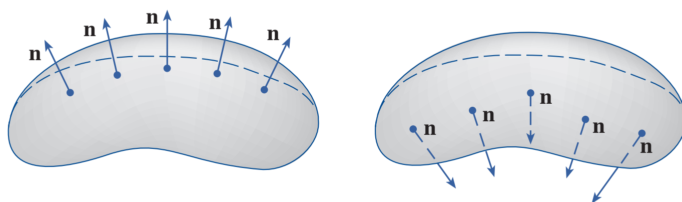


FIGURA 7
Las dos orientaciones de una superficie orientable

Para una superficie $z = g(x, y)$ dada como la gráfica de g, se usa la ecuación 3 para asociar con la superficie una orientación natural dada por el vector normal unitario

5
$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Como el componente $\mathbf{k}$ es positivo, esto da la orientación *hacia arriba* de la superficie.

Si S es una superficie orientable suave dada en forma paramétrica por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, es automáticamente provista con la orientación del vector normal unitario

6
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

y la orientación opuesta está dada por $-\mathbf{n}$. Por ejemplo, en el ejemplo 16.6.4 se determina la representación paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \text{ sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}$$

para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Luego, en el ejemplo 16.6.10 se determina que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \text{ sen}^2\phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \text{ sen}^2\phi \text{ sen } \theta \mathbf{j} + a^2 \text{ sen } \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

y

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \text{ sen } \phi$$

Así, la orientación inducida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ es definida por el vector normal unitario

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k} = \frac{1}{a}\mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Obsérvese que $\mathbf{n}$ apunta en la misma dirección que el vector de posición, es decir hacia fuera de la esfera (véase la figura 8). La orientación opuesta (hacia dentro) se habría obtenido si se hubiera invertido el orden de los parámetros porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$ (véase la figura 9).

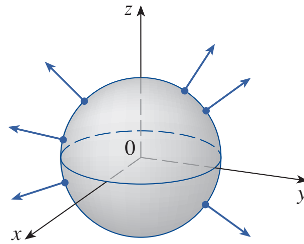


FIGURA 8
Orientación positiva

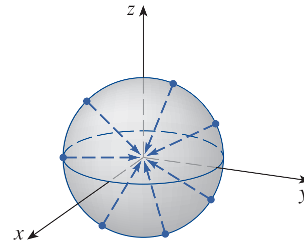


FIGURA 9
Orientación negativa

Para una **superficie cerrada**, es decir, una superficie que es la frontera de una región sólida E, la convención es que la **orientación positiva** es aquella para la que los vectores normales apuntan *hacia fuera* de E, y los normales que apuntan hacia dentro dan la orientación negativa (véanse las figuras 8 y 9).

Integrales de superficie de campos vectoriales

Suponga que S es una superficie orientada con vector normal unitario $\mathbf{n}$ e imagine un fluido con densidad $\rho(x, y, z)$ y campo de velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$ que fluye a través de S. (Conciba a S como una superficie imaginaria que no impide que el fluido fluya, como una red para pescar de un lado a otro de un río.) Entonces, la razón de flujo (masa por unidad de tiempo) por unidad de área es $\rho\mathbf{v}$. Si se divide S en pequeñas parcelas S_{ij}, como en la figura 10 (compare con la figura 1), S_{ij} es casi planar y por tanto se puede aproximar la masa de fluido por unidad de tiempo que cruza S_{ij} en la dirección del normal $\mathbf{n}$ mediante la cantidad

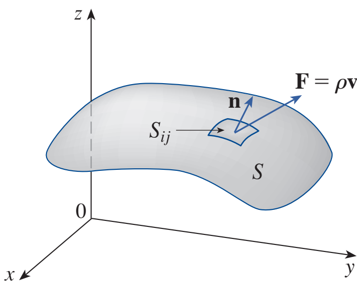


FIGURA 10

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

donde ρ, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$ son evaluados en algún punto en S_{ij}. (Recuerde que el componente del vector $\rho\mathbf{v}$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{n}$ es $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.) Al sumar estas cantidades y tomar el límite se obtiene, de acuerdo con la definición 1, la integral de superficie de la función $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ en S:

7 $$\iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS$$

y esto se interpreta físicamente como la razón de flujo por S.

Si se escribe $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{F}$ es también un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y la integral de la ecuación 7 se convierte en

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Una integral de superficie de esta forma ocurre con frecuencia en física, aun si $\mathbf{F}$ no es $\rho\mathbf{v}$, y se llama *integral de superficie* (o *integral de flujo*) de $\mathbf{F}$ en S.

8 Definición Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo definido en una superficie orientada S con vector normal unitario $\mathbf{n}$, entonces la **integral de superficie de F en *S*** es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se llama **flujo** de $\mathbf{F}$ por S.

En palabras, la definición 8 establece que la integral de superficie de un campo vectorial en S es igual a la integral de superficie de su componente normal en S (como se definió previamente).

Si S está dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces $\mathbf{n}$ está dado por la ecuación 6, y de la definición 8 y la ecuación 2 se tiene

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS$$

$$= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

donde D es el dominio paramétrico. Así se tiene

Compare la ecuación 9 con la expresión similar para evaluar integrales de línea de campos vectoriales en la definición 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

9
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

La figura 11 muestra el campo vectorial $\mathbf{F}$ del ejemplo 4 en puntos en la esfera unitaria.

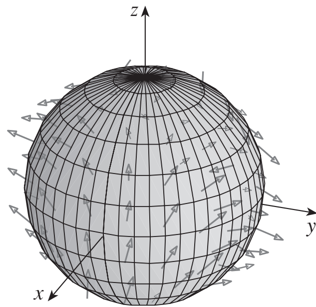


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Determine el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ a través de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 1, use la representación paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Entonces $\qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{k}$

y, del ejemplo 16.6.10,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \operatorname{sen}^2\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi \cos\theta\,\mathbf{k}$$

Por tanto

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos\phi \operatorname{sen}^2\phi \cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \cos\theta$$

y, por la fórmula 9, el flujo es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi \operatorname{sen}^2\theta)\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \left(\text{ya que } \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

por el mismo cálculo que en el ejemplo 1. ■

Si, por ejemplo, el campo vectorial del ejemplo 4 es un campo de velocidad que describe el flujo de un fluido con densidad 1, la respuesta, $4\pi/3$, representa la razón de flujo por la esfera unitaria en unidades de masa por unidad de tiempo.

En el caso de una superficie S dada por una gráfica $z = g(x, y)$, se puede concebir a x y y como parámetros y usar la ecuación 3 para escribir

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Por lo que la fórmula 9 se convierte en

10
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

Esta fórmula supone la orientación hacia arriba de S; para una orientación hacia abajo se multiplica por –1. Pueden elaborarse fórmulas similares si S está dada por $y = h(x, z)$ o $x = k(y, z)$. (Véanse los ejercicios 37 y 38.)

EJEMPLO 5 Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la frontera de la región sólida E encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

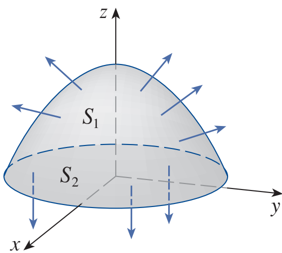


FIGURA 12

SOLUCIÓN S consta de una superficie parabólica superior S_1 y una superficie circular inferior S_2. (Véase la figura 12.) Como S es una superficie cerrada, use la convención de orientación positiva (hacia fuera). Esto significa que S_1 está orientada hacia arriba y se puede usar la ecuación 10, siendo D la proyección de S_1 en el plano xy, es decir el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Puesto que

$$P(x, y, z) = y \qquad Q(x, y, z) = x \qquad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

en S_1 y

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

se tiene

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

$$= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2]\, dA$$

$$= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \cos\theta \ \mathrm{sen}\,\theta - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos\theta \ \mathrm{sen}\,\theta)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4} + \cos\theta \ \mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta = \tfrac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}$$

El disco S_2 está orientado hacia abajo, así que su vector normal unitario es $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ y se tiene

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dS = \iint_D (-z)\, dA = \iint_D 0\, dA = 0$$

ya que $z = 0$ en S_2. Por último, por definición se calcula $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como la suma de las integrales de superficie de **F** en las piezas S_1 y S_2:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$ ■

Aunque se motiva la integral de superficie de un campo vectorial con el ejemplo de flujo de un fluido, este concepto también surge en otras situaciones físicas. Por ejemplo, si **E** es un campo eléctrico (véase el ejemplo 16.1.5), la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

se llama **flujo eléctrico** de **E** por la superficie S. Una de las leyes más importantes de la electrostática es la **ley de Gauss**, la cual sostiene que la carga neta encerrada por una superficie cerrada S es

11 $$Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

donde ε_0 es una constante (llamada permitividad del espacio libre) que depende de las unidades usadas. (En el sistema SI, $\varepsilon_0 \approx 8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$.) Por tanto, si el campo vectorial **F** en el ejemplo 4 representa un campo eléctrico, se puede concluir que la carga encerrada por S es $Q = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0$.

Otra aplicación de integrales de superficie ocurre en el estudio del flujo de calor. Suponga que la temperatura en un punto (x, y, z) en un cuerpo es $u(x, y, z)$. Entonces, el **flujo de calor** se define como el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -K\, \nabla u$$

donde K es una constante determinada experimentalmente llamada **conductividad** de la sustancia. La razón de flujo de calor por la superficie S en el cuerpo está dada entonces por la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

EJEMPLO 6 La temperatura u en una pelota de metal es proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la pelota. Determine la razón de flujo de calor por una esfera S de radio a con centro en el centro de la pelota.

SOLUCIÓN Al tomar el origen como el centro de la pelota, se tiene

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

donde C es la constante de proporcionalidad. Entonces, el flujo de calor es

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\,\nabla u = -KC(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

donde K es la conductividad del metal. En vez de emplear la parametrización usual de la esfera como en el ejemplo 4, se observa que el vector normal unitario hacia fuera respecto a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el punto (x, y, z) es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

así que $$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Pero en S se tiene $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, de manera que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. En consecuencia, la razón de flujo de calor por S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -2aKC \iint_S dS$$

$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3$$

■

16.7 EJERCICIOS

1. Sea S la superficie de la caja encerrada por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$. Aproxime $\iint_S \cos(x + 2y + 3z)\, dS$ con una suma de Riemann como en la definición 1, tomando las parcelas S_{ij} como los cuadrados que son las caras de la caja S y los puntos P_{ij}^* como los centros de los cuadrados.

2. Una superficie S consta del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, junto con sus discos superior e inferior. Suponga que sabe que f es una función continua con

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2 \qquad f(0, \pm 1, 0) = 3 \qquad f(0, 0, \pm 1) = 4$$

Estime el valor de $\iint_S f(x, y, z)\, dS$ con una suma de Riemann, tomando las parcelas S_{ij} como los cuatro cuartos de cilindro y los discos superior e inferior.

3. Sea H el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geqslant 0$, y suponga que f es una función continua con $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ y $f(-3, -4, 5) = 12$. Al dividir H en cuatro parcelas, estime el valor de $\iint_H f(x, y, z)\, dS$.

4. Suponga que $f(x, y, z) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, donde g es una función de una variable tal que $g(2) = -5$. Evalúe $\iint_S f(x, y, z)\, dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5-20 Evalúe la integral de superficie.

5. $\iint_S (x + y + z)\, dS$,
S es el paralelogramo con ecuaciones paramétricas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 1$

6. $\iint_S xyz\, dS$,
S es el cono con ecuaciones paramétricas $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$

7. $\iint_S y\, dS$, S es el helicoide con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \operatorname{sen} v, v \rangle$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

8. $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$,
S es la superficie con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2 \rangle$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$

9. $\iint_S x^2yz\, dS$,
S es la parte del plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está sobre el rectángulo $[0, 3] \times [0, 2]$

10. $\iint_S xz\, dS$,
S es la parte del plano $2x + 2y + z = 4$ que está en el primer octante

11. $\iint_S x^2z^2\, dS$,
S es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre los planos $z = 1$ y $z = 3$

12. $\iint_S y^2\, dS$,
S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el plano xy

13. $\iint_S z^2\, dS$,
S es la parte del paraboloide $x = y^2 + z^2$ dada por $0 \leqslant x \leqslant 1$

14. $\iint_S y^2z^2\, dS$,
S es la parte del cono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ dado por $0 \leqslant y \leqslant 5$

15. $\iint_S x\, dS$,
S es la superficie $y = x^2 + 4z$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

16. $\iint_S y^2\, dS$,
S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

17. $\iint_S (x^2z + y^2z)\, dS$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$

18. $\iint_S (x + y + z)\, dS$,
S es la parte del medio cilindro $x^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$, que está entre los planos $y = 0$ y $y = 2$

19. $\iint_S y\, dS$,
S es la parte del paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 4$

20. $\iint_S xz\, dS$,
S es la frontera de la región encerrada por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$ y $x + y = 5$

21-32 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para el campo vectorial dado $\mathbf{F}$ y la superficie orientada S. En otras palabras, determine el flujo de $\mathbf{F}$ por S. Para superficies cerradas, use la orientación positiva (hacia fuera).

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy}\,\mathbf{i} - 3ze^{xy}\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$
S es el paralelogramo del ejercicio 5 con orientación hacia arriba

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S es el helicoide del ejercicio 7 con orientación hacia arriba

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$, S es la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está sobre el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ y tiene orientación hacia arriba.

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geqslant 0$ orientado en la dirección del eje y positivo

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S es la esfera con radio 1 y centro en el origen

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$, S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$, orientado hacia abajo

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$,
S consta del paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ y el disco $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
S es la superficie $z = x \operatorname{sen} y$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ con orientación hacia arriba

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, con orientación hacia el origen

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 4x^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$, S es la superficie $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, con orientación hacia arriba

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S es la frontera del medio cilindro sólido $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + (z - y)\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del tetraedro con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

SAC **33.** Evalúe $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$ con cuatro decimales, donde S es la superficie $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

SAC **34.** Determine el valor exacto de $\iint_S xyz\, dS$, donde S es la superficie $z = x^2y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$

SAC **35.** Determine el valor de $\iint_S x^2y^2z^2\, dS$ con cuatro decimales, donde S es la parte del paraboloide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy.

SAC **36.** Halle el flujo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + z^2e^{x/5}\,\mathbf{k}$$

a través de la parte del cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está sobre el plano xy y entre los planos $x = -2$ y $x = 2$ con orientación hacia arriba. Ilustre con un sistema algebraico computacional para dibujar el cilindro y el campo vectorial en la misma pantalla.

37. Halle una fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ similar a la fórmula 10 para el caso en que S está dada por $y = h(x, z)$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario que apunta a la izquierda.

38. Halle una fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ similar a la fórmula 10 para el caso en que S está dada por $x = k(y, z)$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario que apunta al frente (es decir, hacia el espectador cuando los ejes se trazan en la forma habitual).

39. Halle el centro de masa del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$ si tiene densidad constante.

40. Determine la masa de un embudo delgado en forma de un cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 4$, si su función de densidad es $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

41. (a) Dé una expresión integral para el momento de inercia I_z alrededor del eje z de una hoja delgada en forma de una superficie S, si la función de densidad es ρ.
(b) Determine el momento de inercia alrededor del eje z del embudo del ejercicio 40.

42. Sea S la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está sobre el plano $z = 4$. Si S tiene densidad constante k, determine (a) el centro de masa y (b) el momento de inercia alrededor del eje z.

43. Un fluido tiene una densidad 870 kg/m^3 y fluye con velocidad $\mathbf{v} = z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, donde x, y y z se miden en metros y los componentes de $\mathbf{v}$ en metros por segundo. Determine la razón de flujo hacia fuera por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

44. El agua de mar tiene una densidad de 1025 kg/m^3 y fluye en un campo de velocidad $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, donde x, y y z se miden en metros y los componentes de $\mathbf{v}$ en metros por segundo. Determine la razón de flujo hacia fuera por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$.

45. Use la ley de Gauss para determinar la carga contenida en el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$ si el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$$

46. Use la ley de Gauss para determinar la carga encerrada por el cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ si el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

47. La temperatura en el punto (x, y, z) en una sustancia con conductividad $K = 6.5$ es $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine la razón de flujo de calor hacia dentro por la superficie cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

48. La temperatura en un punto en una pelota con conductividad K es inversamente proporcional a la distancia del centro de la pelota. Determine la razón de flujo de calor por una esfera S de radio a con centro en el centro de la pelota.

49. Sea $\mathbf{F}$ un campo cuadrado inverso, es decir $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = c\mathbf{r}/|\,\mathbf{r}\,|^3$ para alguna constante c, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Demuestre que el flujo de $\mathbf{F}$ por una esfera S con centro en el origen es independiente del radio de S.

16.8 Teorema de Stokes

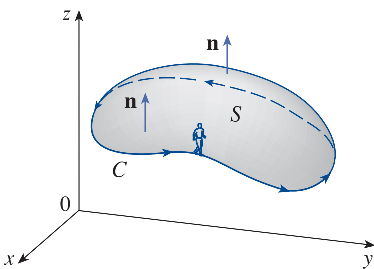


FIGURA 1

El teorema de Stokes puede considerarse una versión en dimensiones superiores del teorema de Green. Mientras que el teorema de Green relaciona una integral doble en una región plana D con una integral de línea alrededor de su curva frontera plana, el teorema de Stokes relaciona una integral de superficie en una superficie S con una integral de línea alrededor de la curva frontera de S (la cual es una curva en el espacio). La figura 1 muestra una superficie orientada con vector normal uniforme $\mathbf{n}$. La orientación de S induce la **orientación positiva de la curva frontera C** que aparece en la figura. Esto significa que si usted camina en la dirección positiva alrededor de C con la cabeza en la dirección de $\mathbf{n}$, entonces la superficie siempre estará a su izquierda.

Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada, suave por partes y acotada por una curva frontera cerrada simple suave por partes, C, con orientación positiva. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Puesto que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \text{y} \qquad \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

George Stokes

El teorema de Stokes toma su nombre del físico matemático irlandés Sir George Stokes (1819-1903). Stokes fue profesor de la Universidad de Cambridge (de hecho, ocupó el mismo puesto que Newton, profesor lucasiano de matemáticas) y fue especialmente notable por sus estudios de luz y flujo de fluidos. Lo que se llama teorema de Stokes en realidad fue descubierto por el físico escocés Sir William Thomson (1824-1907, conocido como Lord Kelvin). Stokes se enteró de este teorema en una carta de Thomson en 1850 y pidió a sus alumnos comprobarlo en un examen en la Universidad de Cambridge en 1854. No se sabe si alguno de esos estudiantes fue capaz de hacer eso.

el teorema de Stokes establece que la integral de línea alrededor de la curva frontera de S del componente tangencial de **F** es igual a la integral de superficie en S del componente normal del rotacional de **F**.

La curva frontera con orientación positiva de la superficie orientada S suele escribirse como ∂S, así que el teorema de Stokes puede expresarse como

1
$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Existe una analogía entre el teorema de Stokes, el teorema de Green y el teorema fundamental del cálculo. Como antes, hay una integral que implica derivadas en el miembro izquierdo de la ecuación 1 (recuerde que rot **F** es una especie de derivada de **F**) y el miembro derecho implica los valores de **F** solo en la *frontera* de S.

De hecho, en el caso especial en el que la superficie S es plana y se tiende en el plano xy con orientación hacia arriba, el vector normal unitario es **k**, la integral de superficie se convierte en una integral doble y el teorema de Stokes se convierte en

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Este es precisamente el vector del teorema de Green dado en la ecuación 16.5.12. Se ve así que el teorema de Green es en realidad un caso especial del teorema de Stokes.

Aunque el teorema de Stokes es demasiado difícil para comprobarse en su plena generalidad, se puede dar una comprobación cuando S es una gráfica y **F**, S y C se comportan sin irregularidades.

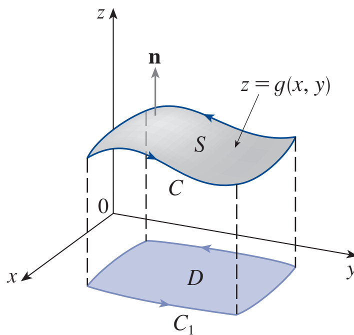


FIGURA 2

COMPROBACIÓN DE UN CASO ESPECIAL DEL TEOREMA DE STOKES Suponga que la ecuación de S es $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde g tiene derivadas parciales continuas de segundo orden y D es una región plana simple cuya curva frontera C_1 corresponde a C. Si la orientación de S es hacia arriba, entonces la orientación positiva de C corresponde a la orientación positiva de C_1. (Véase la figura 2.) También se da que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, donde las derivadas parciales de P, Q y R son continuas.

Como S es una gráfica de una función, se puede aplicar la fórmula 16.7.10 con **F** reemplazada por rot **F**. El resultado es

2
$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA$$

donde las derivadas parciales de P, Q y R se evalúan en $(x, y, g(x, y))$. Si

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

es una representación paramétrica de C_1, una representación paramétrica de C es

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = g(x(t), y(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Esto permite, con la ayuda de la regla de la cadena, evaluar la integral de línea como sigue:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \right) \right] dt$$

$$= \int_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x} \right)\frac{dx}{dt} + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y} \right)\frac{dy}{dt} \right] dt$$

$$= \int_{C_1} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA$$

donde se ha usado el teorema de Green en el último paso. Luego, usando de nuevo la regla de la cadena y recordando que P, Q y R son funciones de x, y y z, además que z es en sí misma una función de x y y, se obtiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \right) \right] dA$$

Cuatro de los términos de esta integral doble se eliminan y los seis términos restantes pueden disponerse para coincidir con el lado derecho de la ecuación 2. Por consiguiente

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$ ■

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ y C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C en sentido contrario a las manecillas del reloj, cuando se mira desde arriba.)

SOLUCIÓN La curva C (una elipse) aparece en la figura 3. Aunque $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ podría evaluarse directamente, es más fácil usar el teorema de Stokes. Primero calcule

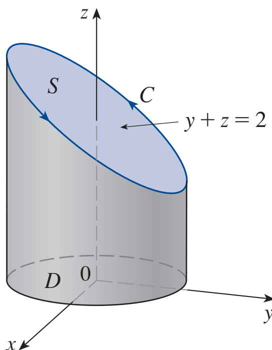


FIGURA 3

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k}$$

Aunque hay muchas superficies con frontera C, la elección más conveniente es la región elíptica S en el plano $y + z = 2$ acotado por C. Si se orienta S hacia arriba, entonces C tiene la

orientación positiva inducida. La proyección D de S en el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, así que al usar la ecuación 16.7.10 con $z = g(x, y) = 2 - y$, se tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$$ ■

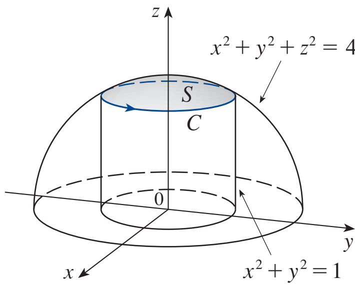


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Use el teorema de Stokes para calcular la integral $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ y S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el plano xy. (Véase la figura 4.)

SOLUCIÓN Para hallar la curva frontera C se resuelven las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$. Al restar, se obtiene $z^2 = 3$, así que $z = \sqrt{3}$ (ya que $z > 0$). De este modo, C es el círculo dado por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. Una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

así que $$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Igualmente se tiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3} \cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{3} \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$$

Por tanto, por el teorema de Stokes,

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3} \cos t \operatorname{sen} t + \sqrt{3} \operatorname{sen} t \cos t \right) dt$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$ ■

Adviértase que en el ejemplo 2 se calcula una integral de superficie simplemente conociendo los valores de $\mathbf{F}$ en la curva frontera C. Esto significa que si se tiene otra superficie orientada con la misma curva frontera C, ¡se obtiene exactamente el mismo valor para la integral de superficie!

En general, si S_1 y S_2 son superficies orientadas con la misma curva frontera orientada C y ambas satisfacen las hipótesis del teorema de Stokes, entonces

3 $$\iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Este hecho es útil cuando es difícil integrar en una superficie pero fácil integrar en la otra.

Ahora se usa el teorema de Stokes para arrojar un poco de luz sobre el significado del vector rotacional. Suponga que C es una curva orientada cerrada y $\mathbf{v}$ representa el campo de velocidad en el flujo de fluidos. Considere la integral de línea

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

y recuerde que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ es el componente de $\mathbf{v}$ en la dirección del vector tangente unitario $\mathbf{T}$. Esto significa que cuanto más se acerca la dirección de $\mathbf{v}$ a la dirección de $\mathbf{T}$, mayor es el valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Así, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ es una medida de la tendencia del fluido a moverse alrededor de C y se llama la **circulación** de $\mathbf{v}$ alrededor de C. (Véase la figura 5.)

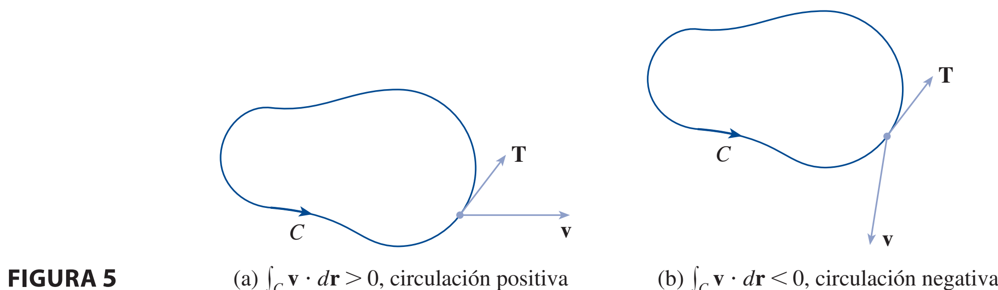


FIGURA 5 (a) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} > 0$, circulación positiva (b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} < 0$, circulación negativa

Sea ahora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el fluido y S_a un disco pequeño con radio a y centro P_0. Entonces $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos los puntos P en S_a, porque rot $\mathbf{F}$ es continua. Así, por el teorema de Stokes, se obtiene la aproximación de la circulación alrededor del círculo frontera C_a:

$$\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2$$

Imagine una minúscula rueda de paletas colocada en el fluido en un punto P, como en la figura 6; la rueda de paletas rota más rápido cuando su eje es paralelo a rot $\mathbf{v}$.

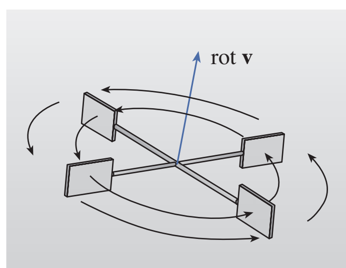


FIGURA 6

Esta aproximación mejora cuando $a \to 0$ y se tiene

4 $$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

La ecuación 4 da la relación entre el rotacional y la circulación. Indica que rot $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ es una medida del efecto de rotación del fluido alrededor del eje $\mathbf{n}$. El efecto de rotación es mayor alrededor del eje paralelo a rot $\mathbf{v}$.

Por último, se menciona que el teorema de Stokes puede usarse para comprobar el teorema 16.5.4 (el cual establece que si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en la totalidad de $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo). Por el trabajo previo (teoremas 16.3.3 y 16.3.4) se sabe que $\mathbf{F}$ es conservativo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas las trayectorias cerradas C. Dada C, suponga que se puede encontrar una superficie orientable S cuya frontera sea C. (Esto puede hacerse, pero la comprobación requiere técnicas avanzadas.) Entonces, el teorema de Stokes da

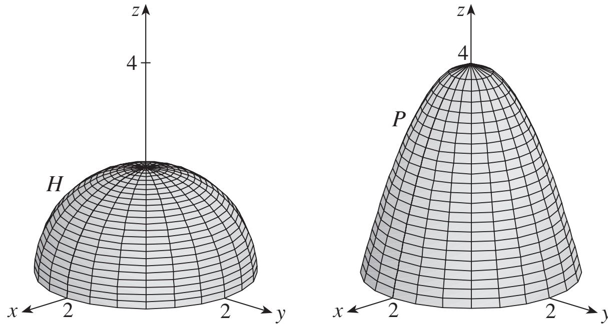
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Una curva que no es simple puede dividirse en varias curvas simples, y las integrales en torno a esas curvas simples son todas ellas 0. Sumando esas integrales se obtiene $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C.

16.8 EJERCICIOS

1. Se muestran un hemisferio H y una porción P de un paraboloide. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas. Explique por qué

$$\iint_H \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



2-6 Use el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} z\, \mathbf{i} + y^2\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$,
S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy, orientado hacia arriba

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^y\, \mathbf{i} + x \cos y\, \mathbf{j} + xz \operatorname{sen} y\, \mathbf{k}$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $y \geqslant 0$ orientado en la dirección del eje y positivo

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\, \mathbf{i} + y^2z^2\, \mathbf{j} + xyz\, \mathbf{k}$,
S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientado hacia arriba

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\, \mathbf{i} + xy\, \mathbf{j} + x^2yz\, \mathbf{k}$,
S consta de la parte superior y los cuatro lados (pero no de la base) del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, orientado hacia fuera

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\, \mathbf{i} + e^{xz}\, \mathbf{j} + x^2z\, \mathbf{k}$,
S es la mitad del elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que está a la derecha del plano xz, orientado en la dirección del eje y positivo.

7-10 Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. En cada caso C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista desde arriba.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\, \mathbf{i} + (y + z^2)\, \mathbf{j} + (z + x^2)\, \mathbf{k}$,
C es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\, \mathbf{i} + 2xz\, \mathbf{j} + e^{xy}\, \mathbf{k}$,
C es el círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + yz\, \mathbf{j} + zx\, \mathbf{k}$, C es la frontera de la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ en el primer octante

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\, \mathbf{i} + xz\, \mathbf{j} + (x + y)\, \mathbf{k}$, C es la curva de intersección del plano $z = y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

11. (a) Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\, \mathbf{i} + xy^2\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$$

y C es la curva de intersección del plano $x + y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista desde arriba.


(b) Grafique tanto el plano como el cilindro con dominios elegidos de tal forma que usted pueda ver la curva C y la superficie que usó en el inciso (a).


(c) Determine ecuaciones paramétricas para C y úselas para graficar C.

12. (a) Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\, \mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$ y C es la curva de intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, vista desde arriba.


(b) Grafique tanto el paraboloide hiperbólico como el cilindro con dominios elegidos de tal forma que usted pueda ver la curva C y la superficie que usó en el inciso (a).


(c) Determine ecuaciones paramétricas para C y úselas para graficar C.

13-15 Verifique que el teorema de Stokes es cierto para el campo vectorial $\mathbf{F}$ y la superficie S dados.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} - 2\, \mathbf{k}$,
S es el cono $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$ orientado hacia abajo

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yz\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + 3x\, \mathbf{k}$,
S es la parte del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano $z = 1$, orientado hacia arriba

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\, \mathbf{i} + z\, \mathbf{j} + x\, \mathbf{k}$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geqslant 0$, orientado en la dirección del eje y positivo

16. Sea C una curva suave cerrada simple que se encuentra en el plano $x + y + z = 1$. Demuestre que la integral de línea

$$\int_C z\, dx - 2x\, dy + 3y\, dz$$

depende solo del área de la región encerrada por C y no de la forma de C ni de su ubicación en el plano.

17. Una partícula se mueve a lo largo de segmentos de recta del origen a los puntos $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$ y de vuelta al origen bajo la influencia del campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\, \mathbf{i} + 2xy\, \mathbf{j} + 4y^2\, \mathbf{k}$$

Halle el trabajo realizado.

18. Evalúe

$$\int_C (y + \operatorname{sen} x)\, dx + (z^2 + \cos y)\, dy + x^3\, dz$$

donde C es la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. [*Sugerencia*: observe que C yace en la superficie $z = 2xy$.]

19. Si S es una esfera y $\mathbf{F}$ satisface las hipótesis del teorema de Stokes, demuestre que $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponga que S y C satisfacen las hipótesis del teorema de Stokes y que f, g tienen derivadas parciales continuas de segundo orden. Use los ejercicios 24 y 26 de la sección 16.5 para demostrar lo siguiente.

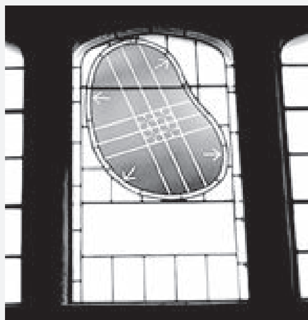
(a) $\int_C (f\,\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f\,\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\int_C (f\,\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

PROYECTO DE REDACCIÓN TRES HOMBRES Y DOS TEOREMAS

La fotografía muestra un vitral en la Universidad de Cambridge en honor a George Green.



Cortesía de © Masters and Fellows of Gonville and Caius College, Cambridge University, Inglaterra.

Aunque dos de los más importantes teoremas en cálculo vectorial llevan los nombres de George Green y George Stokes, un tercer hombre, William Thomson (también conocido como Lord Kelvin), desempeñó un papel significativo en la formulación, diseminación y aplicación de esos dos resultados. A esos tres hombres les interesó cómo podían ayudar aquellos dos teoremas a explicar y predecir fenómenos físicos en electricidad, magnetismo y flujo de fluidos. Los hechos básicos de este caso se dan en las notas al margen de las páginas 1097 y 1135.

Escriba un reporte sobre los orígenes históricos del teorema de Green y el teorema de Stokes. Explique las semejanzas y relación entre los teoremas. Exponga los papeles que Green, Thomson y Stokes desempeñaron en el descubrimiento de estos teoremas y en volverlos ampliamente conocidos. Muestre cómo ambos teoremas surgieron de la investigación de la electricidad y magnetismo, fueron usados posteriormente para estudiar varios problemas físicos.

El diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente de información tanto biográfica como científica. El libro de Hutchinson [5] hace un recuento de la vida de Stokes y el libro de Thompson [8] es una biografía de Lord Kelvin. Los artículos de Grattan-Guinness [3] y Gray [4] y el libro de Cannell [1] dan información de referencia sobre la extraordinaria vida y obras de Green. Información histórica y matemática adicional se encuentra en los libros de Katz [6] y Kline [7].

1. D. M. Cannell, George Green, *Mathematician and Physicist, 1793-1841: The Background to His Life and Work* (Filadelfia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001).

2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York, Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Green de P. J. Wallis en el volumen XV y los artículos sobre Thomson de Jed Buchwald y sobre Stokes de E. M. Parkinson en el volumen XIII.

3. I. Grattan-Guinness, "Why Did George Green Write his Essay of 1828 on Electricity and Magnetism?", *Amer. Math. Monthly*, vol. 102 (1995), pp. 387-396.

4. J. Gray, "There Was a Jolly Miller", *The New Scientist*, vol. 139 (1993), pp. 24-27.

5. G. E. Hutchinson, *The Enchanted Voyage and Other Studies* (Westport, CT, Greenwood Press, 1978).

6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (New York, HarperCollins, 1993), pp. 678-680.

7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York, Oxford University Press, 1972), pp. 683-685.

8. Sylvanus P. Thompson, *The Life of Lord Kelvin* (New York, Chelsea, 1976).

16.9 El teorema de la divergencia

En la sección 16.5 se reescribió el teorema de Green en una versión vectorial como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

donde C es la curva frontera con orientación positiva de la región plana D. Si se quisiera prolongar este teorema a campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$, se podría hacer la conjetura de que

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dV$$

donde S es la superficie frontera de la región sólida E. Resulta que la ecuación 1 es cierta, bajo hipótesis apropiadas, y se llama teorema de la divergencia. Nótese su semejanza con el teorema de Green y el teorema de Stokes en cuanto que relaciona la integral de una derivada de una función (div $\mathbf{F}$ en este caso) en una región con la integral de la función original $\mathbf{F}$ en la frontera de la región.

En esta etapa tal vez usted desee repasar los varios tipos de regiones en los que se pudo evaluar integrales triples en la sección 15.6. Se enunciará y comprobará el teorema de la divergencia para regiones E que son simultáneamente de los tipos 1, 2 y 3 y se llamará a esas regiones **regiones sólidas simples**. (Por ejemplo, regiones acotadas por elipsoides o cajas rectangulares son regiones sólidas simples.) La frontera de E es una superficie cerrada, y se usa la convención, presentada en la sección 16.7, de que la orientación positiva es hacia fuera; es decir, de que el vector normal unitario $\mathbf{n}$ está dirigido hacia fuera de E.

El teorema de la divergencia también se conoce como teorema de Gauss, en honor al gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quien descubrió este teorema durante su investigación sobre la electrostática. En Europa oriental el teorema de la divergencia se conoce como teorema de Ostrogradsky, en honor al matemático ruso Mijail Ostrogradsky (1801-1862), quien publicó este resultado en 1826.

El teorema de la divergencia Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con orientación positiva (hacia fuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Así, el teorema de la divergencia sostiene que, en las condiciones dadas, el flujo de $\mathbf{F}$ por la superficie de frontera de E es igual a la integral triple de la divergencia de $\mathbf{F}$ en E.

COMPROBACIÓN Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

así que

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

Si $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario hacia fuera de S, la integral de superficie en el miembro izquierdo del teorema de la divergencia es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Por tanto, para comprobar el teorema de la divergencia basta con comprobar las tres

ecuaciones siguientes:

2 $$\iint_S P\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV$$

3 $$\iint_S Q\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV$$

4 $$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Para comprobar la ecuación 4 se usa el hecho de que E es una región tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xy. Por la ecuación 15.6.6 se tiene

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\,dz\right] dA$$

y por tanto, por el teorema fundamental del cálculo,

5 $$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \big[R\big(x, y, u_2(x, y)\big) - R\big(x, y, u_1(x, y)\big)\big]\,dA$$

La superficie frontera S consta de tres piezas: la superficie inferior S_1, la superficie superior S_2 y posiblemente una superficie vertical S_3, ubicada sobre la curva frontera de D. (Véase la figura 1. Podría ocurrir que S_3 no aparezca, como en el caso de una esfera.) Adviértase que en S_3 se tiene $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$, porque $\mathbf{k}$ es vertical y $\mathbf{n}$ horizontal, de modo que

$$\iint_{S_3} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_3} 0\,dS = 0$$

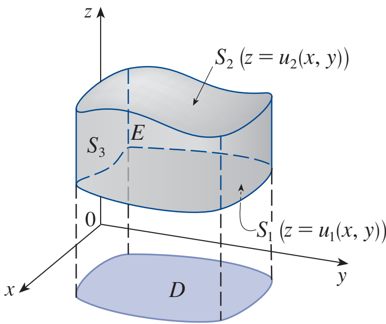


FIGURA 1

Así, independientemente de si hay una superficie vertical o no, se puede escribir

6 $$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_2} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

La ecuación de S_2 es $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, y el vector normal hacia fuera $\mathbf{n}$ apunta hacia arriba, así que de la ecuación 16.7.10 (con $\mathbf{F}$ reemplazada por $R\,\mathbf{k}$) se tiene

$$\iint_{S_2} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D R(x, y, u_2(x, y))\,dA$$

En S_1 se tiene $z = u_1(x, y)$, pero aquí el normal hacia fuera $\mathbf{n}$ apunta hacia abajo, así que se multiplica por -1:

$$\iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_D R(x, y, u_1(x, y))\,dA$$

Por consiguiente, la ecuación 6 da

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \big[R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))\big]\,dA$$

La comparación con la ecuación 5 muestra que

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Nótese que el método de comprobación del teorema de la divergencia es muy similar al del teorema de Green.

Las ecuaciones 2 y 3 se comprueban en forma similar usando las expresiones para E como región tipo 2 o tipo 3, respectivamente. ■

EJEMPLO 1 Determine el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ en la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Primero se calcula la divergencia de **F**:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

La esfera unitaria S es la frontera de la pelota unitaria B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Así, el teorema de la divergencia da el flujo como

La solución del ejemplo 1 debería compararse con la solución del ejemplo 16.7.4.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_B 1\,dV = V(B) = \tfrac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$ ■

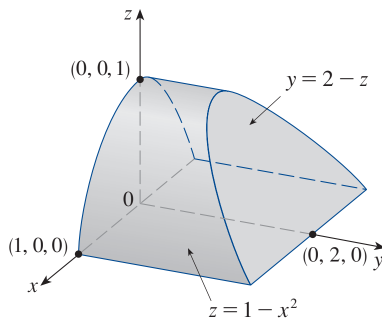


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Evalúe $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\mathbf{j} + \text{sen}(xy)\,\mathbf{k}$$

y S es la superficie de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, así como $y + z = 2$. (Véase la figura 2.)

SOLUCIÓN Sería extremadamente difícil evaluar directamente la integral de superficie dada. (Se tendrían que evaluar cuatro integrales de superficie correspondientes a las cuatro piezas de S.) Además, la divergencia de **F** es mucho menos complicada que la propia **F**:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + e^{xz^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\text{sen}\,xy) = y + 2y = 3y$$

Por tanto, use el teorema de la divergencia para transformar la integral de superficie dada en una integral triple. La manera más fácil de evaluar la integral triple es expresar E como una región tipo 3:

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\right\}$$

Entonces se tiene

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_E 3y\,dV$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\,dy\,dz\,dx = 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\frac{(2-z)^2}{2}\,dz\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(x^2+1)^3 - 8\right] dx$$

$$= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\,dx = \frac{184}{35}$$ ■

Aunque se ha comprobado el teorema de la divergencia solo para regiones sólidas simples, puede demostrarse para regiones que son uniones finitas de regiones sólidas simples. (El procedimiento es similar al que se usó en la sección 16.4 para ampliar el teorema de Green.)

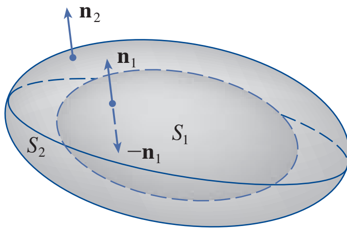


FIGURA 3

Por ejemplo, considere la región E que se ubica entre las superficies cerradas S_1 y S_2, donde S_1 está dentro de S_2. Sean $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ los vectores normales hacia fuera de S_1 y S_2. Entonces, la superficie frontera de E es $S = S_1 \cup S_2$ y su vector normal $\mathbf{n}$ está dado por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ en S_1 y por $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ en S_2. (Véase la figura 3.) Al aplicar el teorema de la divergencia a S se obtiene

$$\boxed{7} \qquad \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, dS$$

$$= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

EJEMPLO 3 En el ejemplo 16.1.5 se considera el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

donde la carga eléctrica Q se localiza en el origen y $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ es un vector de posición. Use el teorema de la divergencia para demostrar que el flujo eléctrico de $\mathbf{E}$ por cualquier superficie cerrada S_2 que encierra al origen es

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\varepsilon Q$$

SOLUCIÓN La dificultad es que no se tiene una ecuación explícita para S_2, porque es *cualquier* superficie cerrada que encierra al origen. La más simple de esas superficies sería una esfera, así que sea S_1 una esfera pequeña con radio a y centro en el origen. Usted puede verificar que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. (Véase el ejercicio 23.) Por tanto, la ecuación 7 da

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

La cuestión de este cálculo es que se puede calcular la integral de superficie en S_1 porque S_1 es una esfera. El vector normal en $\mathbf{x}$ es $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. En consecuencia

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

ya que la ecuación de S_1 es $|\mathbf{x}| = a$. Así se tiene

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q$$

Esto indica que el flujo eléctrico de $\mathbf{E}$ es $4\pi\varepsilon Q$ a través de *cualquier* superficie cerrada S_2 que contenga al origen. [Este es un caso especial de la ley de Gauss (ecuación 16.7.11) para una carga. La relación entre ε y ε_0 es $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.] ■

Otra aplicación del teorema de la divergencia ocurre en el flujo de fluidos. Sea $\mathbf{v}(x, y, z)$ el campo de velocidad de un fluido con densidad constante ρ. Entonces $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ es la razón de flujo por unidad de área. Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto en el fluido y B_a una pelota con centro P_0 y radio a muy pequeño, entonces div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ para todos los puntos P en B_a, ya que div $\mathbf{F}$ es continua. Se aproxima el flujo en la esfera frontera S_a como sigue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \text{div}\, \mathbf{F}\, dV \approx \iiint_{B_a} \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\, dV = \text{div}\, \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Esta aproximación mejora cuando $a \to 0$ y sugiere que

8 $$\text{div}\, \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

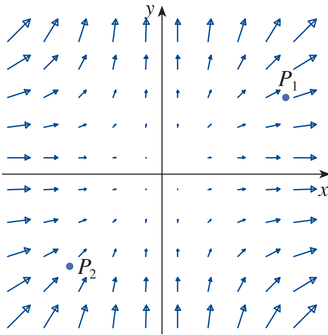


FIGURA 4
El campo vectorial $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y2\,\mathbf{j}$

La ecuación 8 indica que div $\mathbf{F}(P_0)$ es la razón neta de flujo hacia fuera por unidad de volumen en P_0. (Esta es la razón del nombre *divergencia*.) Si div $\mathbf{F}(P) > 0$, el flujo neto es hacia fuera cerca de P y P se llama **fuente**. Si div $\mathbf{F}(P) < 0$, el flujo neto es hacia dentro cerca de P y P se llama **sumidero**.

Para el campo vectorial en la figura 4, parece que los vectores que terminan cerca de P_1 son más cortos que los vectores que empiezan cerca de P_1. Así, el flujo neto es hacia fuera cerca de P_1, de modo que div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ y P_1 es una fuente. Cerca de P_2, por su parte, las flechas entrantes son más largas que las salientes. Aquí el flujo neto es hacia dentro, así que div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ y P_2 es un sumidero. Se puede usar la fórmula para $\mathbf{F}$ para confirmar esta impresión. Como $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, se tiene div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, la cual es positiva cuando $y > -x$. Así, los puntos arriba de la recta $y = -x$ son fuentes y los que están abajo son sumideros.

16.9 EJERCICIOS

1-4 Verifique que el teorema de la divergencia es cierto para el campo vectorial $\mathbf{F}$ en la región E.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$,
E es el cubo acotado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} + 4z^2\,\mathbf{k}$,
E es el sólido encerrado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 9$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$,
E es la pelota sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
E es el sólido acotado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy

5-15 Use el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; es decir, calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z\,\mathbf{i} + xy^2z^3\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$,
S es la superficie de la caja acotada por los planos de coordenadas y los planos $x = 3$, $y = 2$ y $z = 1$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$,
S es la superficie de la caja encerrada por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ y $z = c$, donde a, b y c son números positivos

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\text{sen}\, y\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} + xz\,\text{sen}\, y\,\mathbf{k}$,
S es la "esfera gorda" $x^8 + y^8 + z^8 = 8$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^y\,\mathbf{i} + (z - e^y)\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$,
S es el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del tetraedro encerrado por los planos de coordenadas y el plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

donde a, b, y c son números positivos

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^3 + y^3)\,\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\,\mathbf{j} - 3y^2z\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano xy

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy + 2xz)\,\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{j} + (xy - z^2)\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = y - 2$ y $z = 0$

13. $\mathbf{F} = |\,\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S consta del hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en el plano xy

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4\,\mathbf{i} - x^3z^2\,\mathbf{j} + 4xy^2z\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = x + 2$ y $z = 0$

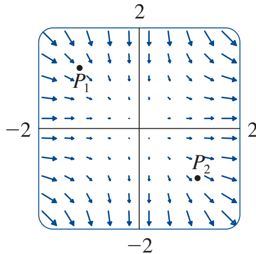
SAC **15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \tan z\,\mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2}\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido que está sobre el plano xy y bajo la superficie $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

SAC **16.** Use un sistema algebraico computacional para trazar el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos^2 y\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 y \cos^4 z\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^5 z \cos^6 x\,\mathbf{k}$ en el cubo cortado del primer octante por los planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ y $z = \pi/2$. Calcule después el flujo por la superficie del cubo.

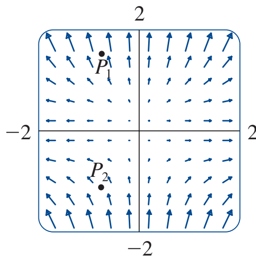
17. Use el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x\,\mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \tan z)\,\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$ y S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Sugerencia*: nótese que S no es una superficie cerrada. Calcule primero integrales en S_1 y S_2, donde S_1 es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, orientado hacia abajo, y $S_2 = S \cup S_1$.]

18. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = z \tan^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine el flujo de $\mathbf{F}$ por la parte del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está sobre el plano $z = 1$ y orientado hacia arriba.

19. Se muestra un campo vectorial $\mathbf{F}$. Use la interpretación de divergencia derivada en esta sección para determinar si $\operatorname{div} \mathbf{F}$ es positiva o negativa en P_1 y en P_2.



20. (a) ¿Los puntos P_1 y P_2 son fuentes o sumideros para el campo vectorial $\mathbf{F}$ que se muestra en la figura? Dé una explicación basada exclusivamente en la imagen.
(b) Dado que $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, use la definición de divergencia para verificar su respuesta al inciso (a).



SAC **21-22** Trace el campo vectorial y conjeture dónde $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ y dónde $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$. Calcule después $\operatorname{div} \mathbf{F}$ para verificar sus suposiciones.

21. $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2 \rangle$ **22.** $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2, y^2 \rangle$

23. Verifique que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ para el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}.$$

24. Use el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)\, dS$$

donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25-30 Compruebe cada identidad, suponiendo que S y E satisfagan las condiciones del teorema de la divergencia y que las funciones escalares y componentes de los campos vectoriales tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

25. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante

26. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

27. $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ **28.** $\iint_S D_{\mathbf{n}} f\, dS = \iiint_E \nabla^2 f\, dV$

29. $\iint_S (f \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

30. $\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f)\, dV$

31. Suponga que S y E satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y que f es una función escalar con derivadas parciales continuas. Compruebe que

$$\iint_S f\mathbf{n}\, dS = \iiint_E \nabla f\, dV$$

Esta superficie e integrales triples de funciones vectoriales son vectores definidos integrando cada función componente. [*Sugerencia*: comience aplicando el teorema de la divergencia a $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario.]

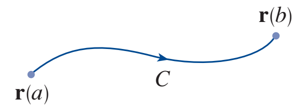
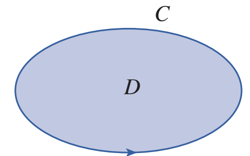
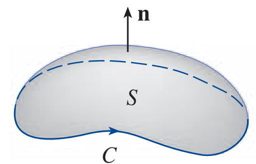
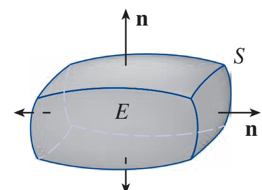
32. Un sólido ocupa una región E con superficie S y está sumergido en un líquido con densidad constante ρ. Se establece un sistema de coordenadas de tal forma que el plano xy coincida con la superficie del líquido, y valores positivos de z se miden hacia abajo en el líquido. Entonces, la presión a la profundidad z es $p = \rho g z$, donde g es la aceleración debida a la gravedad (véase la sección 8.3). La fuerza boyante total sobre el sólido debida a la distribución de la presión está dada por la integral de superficie

$$\mathbf{F} = -\iint_S p\mathbf{n}\, dS$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario externo. Use el resultado del ejercicio 31 para demostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, donde W es el peso del líquido desplazado por el sólido. (Nótese que $\mathbf{F}$ está dirigido hacia arriba porque z está dirigida hacia abajo.) El resultado es el *principio de Arquímedes*: la fuerza boyante sobre un objeto es igual al peso del líquido desplazado.

16.10 Resumen

Los principales resultados de este capítulo son todos ellos versiones en dimensiones superiores del teorema fundamental del cálculo. Para ayudarle a recordarlas, se han reunido aquí (sin hipótesis) para que pueda advertir más fácilmente su semejanza esencial. Obsérvese que en cada caso se tiene una integral de una "derivada" en una región en el miembro izquierdo, y el miembro derecho implica los valores de la función original solo en la *frontera* de la región.

Teorema fundamental del cálculo	$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$	
Teorema fundamental para integrales de línea	$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$	
Teorema de Green	$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$	
Teorema de Stokes	$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	
Teorema de la divergencia	$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$	

16 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. ¿Qué es un campo vectorial? Dé tres ejemplos que tengan significado físico.
2. (a) ¿Qué es un campo vectorial conservativo?
   (b) ¿Qué es una función potencial?
3. (a) Escriba la definición de la integral de línea de una función escalar f a lo largo de una curva suave C con respecto a la longitud de arco.
   (b) ¿Cómo se evalúa tal integral de línea?
   (c) Escriba expresiones para la masa y centro de masa de un alambre delgado en forma de una curva C si el alambre tiene una función de densidad lineal $\rho(x, y)$.
   (d) Escriba las definiciones de las integrales de línea a lo largo de C de una función escalar f con respecto a x, y y z.
   (e) ¿Cómo se evalúan estas integrales de línea?
4. (a) Defina la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.
   (b) Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas, ¿qué representa esta integral de línea?
   (c) Si $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$, ¿cuál es la relación entre la integral de línea de $\mathbf{F}$ y las integrales de línea de las funciones componentes P, Q y R?
5. Enuncie el teorema fundamental para las integrales de línea.
6. (a) ¿Qué significa decir que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria?
   (b) Si usted sabe que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, ¿qué puede decir de $\mathbf{F}$?
7. Enuncie el teorema de Green.
8. Escriba expresiones para el área encerrada por una curva C en términos de las integrales de línea alrededor de C.
9. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.
   (a) Defina rot $\mathbf{F}$. (b) Defina div $\mathbf{F}$.
   (c) Si $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad en flujo de fluidos, ¿cuáles son las interpretaciones físicas de rot $\mathbf{F}$ y div $\mathbf{F}$?
10. Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, ¿cómo se determina si $\mathbf{F}$ es conservativo? ¿Y si $\mathbf{F}$ fuera un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$?
11. (a) ¿Qué es una superficie paramétrica? ¿Qué son sus curvas reticulares?
    (b) Escriba una expresión para el área de una superficie paramétrica.
    (c) ¿Cuál es el área de una superficie dada por una ecuación $z = g(x, y)$?
12. (a) Escriba la definición de la integral de superficie de una función escalar f en una superficie S.
    (b) ¿Cómo se evalúa esa integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?
    (c) ¿Y si S estuviera dada por una ecuación $z = g(x, y)$?
    (d) Si una hoja delgada tiene la forma de una superficie S y la densidad en (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$, escriba expresiones para la masa y centro de masa de la hoja.
13. (a) ¿Qué es una superficie orientada? Dé un ejemplo de una superficie no orientable.
    (b) Defina la integral de superficie (o flujo) de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en una superficie orientada S con vector normal unitario $\mathbf{n}$.
    (c) ¿Cómo se evalúa esa integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?
    (d) ¿Y si S estuviera dada por una ecuación $z = g(x, y)$?
14. Enuncie el teorema de Stokes.
15. Enuncie el teorema de la divergencia.
16. ¿En qué sentidos son similares el teorema fundamental para las integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia?

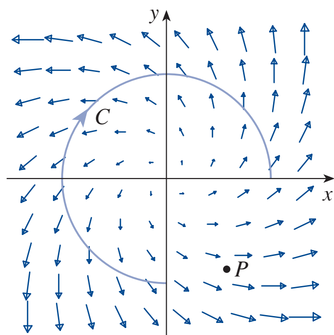
EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, entonces div $\mathbf{F}$ es un campo vectorial.
2. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, entonces rot $\mathbf{F}$ es un campo vectorial.
3. Si f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en $\mathbb{R}^3$, entonces $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \nabla f) = 0$.
4. Si f tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^3$ y C es cualquier círculo, entonces $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$.
5. Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ y $P_y = Q_x$ en una región abierta D, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.
6. $\int_{-C} f(x, y)\,ds = -\int_C f(x, y)\,ds$
7. Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son campos vectoriales y div $\mathbf{F}$ = div $\mathbf{G}$, entonces $\mathbf{F} = \mathbf{G}$.
8. El trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo para mover una partícula alrededor de una trayectoria cerrada es cero.
9. Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son campos vectoriales, entonces
$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$$
10. Si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son campos vectoriales, entonces
$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$$
11. Si S es una esfera y $\mathbf{F}$ un campo vectorial constante, entonces $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.
12. Hay un campo vectorial $\mathbf{F}$ tal que
$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
13. El área de la región acotada por la curva cerrada simple con orientación positiva y suave por partes C es $A = \oint_C y\,dx$.

EJERCICIOS

1. Se muestran un campo vectorial **F**, una curva C y un punto P.
(a) ¿$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o cero? Explique su respuesta.
(b) ¿Es div **F** (P) positiva, negativa o cero? Explique su respuesta.



2-9 Evalúe la integral de línea.

2. $\int_C x\, ds$,
C es el arco de la parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$

3. $\int_C yz \cos x\, ds$,
C: $x = t$, $y = 3 \cos t$, $z = 3 \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

4. $\int_C y\, dx + (x + y^2)\, dy$, C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ con orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj

5. $\int_C y^3\, dx + x^2\, dy$, C es el arco de la parábola $x = 1 - y^2$ de $(0, -1)$ a $(0, 1)$

6. $\int_C \sqrt{xy}\, dx + e^y\, dy + xz\, dz$,
C está dada por $\mathbf{r}(t) = t^4\, \mathbf{i} + t^2\, \mathbf{j} - t^3\, \mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

7. $\int_C xy\, dx + y^2\, dy + yz\, dz$,
C es el segmento de recta de $(1, 0, -1)$ a $(3, 4, 2)$

8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = xy\, \mathbf{i} + x^2\, \mathbf{j}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + (1 + t)\, \mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

9. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\, \mathbf{i} + xz\, \mathbf{j} + (x + y)\, \mathbf{k}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\, \mathbf{i} + t^3\, \mathbf{j} - t\, \mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

10. Determine el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} + y\, \mathbf{k}$$

para mover una partícula del punto $(3, 0, 0)$ al punto $(0, \pi/2, 3)$ a lo largo de
(a) una recta
(b) la hélice $x = 3 \cos t$, $y = t$, $z = 3 \operatorname{sen} t$

11-12 Demuestre que **F** es un campo vectorial conservativo. Determine después una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\, \mathbf{i} + (e^y + x^2 e^{xy})\, \mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\, \mathbf{i} + x \cos y\, \mathbf{j} - \operatorname{sen} z\, \mathbf{k}$

13-14 Demuestre que **F** es conservativo y use este hecho para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva dada.

13. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^2 - 2xy^3)\, \mathbf{i} + (2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)\, \mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = (t + \operatorname{sen} \pi t)\, \mathbf{i} + (2t + \cos \pi t)\, \mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\, \mathbf{i} + (xe^y + e^z)\, \mathbf{j} + ye^z\, \mathbf{k}$,
C es el segmento de recta de $(0, 2, 0)$ a $(4, 0, 3)$

15. Verifique que el teorema de Green es cierto para la integral de línea $\int_C xy^2\, dx - x^2y\, dy$, donde C consta de la parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ y del segmento de recta de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

16. Use el teorema de Green para evaluar

$$\int_C \sqrt{1 + x^3}\, dx + 2xy\, dy$$

donde C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 3)$.

17. Use el teorema de Green para evaluar $\int_C x^2y\, dx - xy^2\, dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$ con orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj.

18. Halle rot **F** y div **F** si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \operatorname{sen} y\, \mathbf{i} + e^{-y} \operatorname{sen} z\, \mathbf{j} + e^{-z} \operatorname{sen} x\, \mathbf{k}$$

19. Demuestre que no existe un campo vectorial **G** tal que

$$\operatorname{rot} \mathbf{G} = 2x\, \mathbf{i} + 3yz\, \mathbf{j} - xz^2\, \mathbf{k}$$

20. Si **F** y **G** son campos vectoriales cuyas funciones componentes tienen primeras derivadas parciales continuas, demuestre que

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

21. Si C es cualquier curva simple plana cerrada suave por partes y f y g son funciones derivables, demuestre que $\int_C f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$.

22. Si f y g son funciones dos veces derivables, demuestre que

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

23. Si f es una función armónica, es decir $\nabla^2 f = 0$, demuestre que la integral de línea $\int f_y\, dx - f_x\, dy$ es independiente de la trayectoria en cualquier región simple D.

24. (a) Trace la curva C con ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(b) Halle $\int_C 2xe^{2y}\, dx + (2x^2e^{2y} + 2y \cot z)\, dy - y^2 \csc^2 z\, dz$.

25. Halle el área de la parte de la superficie $z = x^2 + 2y$ que está arriba del triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2).

26. (a) Determine una ecuación del plano tangente en el punto (4, –2, 1) a la superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = v^2\,\mathbf{i} - uv\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant u \leqslant 3,\ -3 \leqslant v \leqslant 3$$


(b) Use una computadora para graficar la superficie S y el plano tangente determinado en el inciso (a).
(c) Establezca pero no evalúe una integral para el área de S.
SAC (d) Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + y^2}\,\mathbf{j} + \frac{y^2}{1 + z^2}\,\mathbf{k}$$

determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ con cuatro decimales.

27-30 Evalúe la integral de superficie.

27. $\iint_S z\, dS$, donde S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está bajo el plano $z = 4$

28. $\iint_S (x^2z + y^2z)\, dS$, donde S es la parte del plano $z = 4 + x + y$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

29. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con orientación hacia fuera

30. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ bajo el plano $z = 1$ con orientación hacia arriba

---

31. Verifique que el teorema de Stokes es cierto para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy y S tiene orientación hacia arriba.

32. Use el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + z^3e^{xy}\,\mathbf{k}$, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que está sobre el plano $z = 1$ y S está orientada hacia arriba.

33. Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ y C es el triángulo con vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj, visto desde arriba.

34. Use el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ y S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$.

35. Verifique que el teorema de la divergencia es cierto para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, donde E es la pelota unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

36. Calcule el flujo hacia fuera de

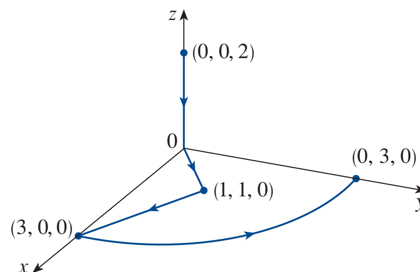
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

por el elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

37. Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\,\mathbf{i} + (x^3z - 3x)\,\mathbf{j} + (x^3y - 2z)\,\mathbf{k}$$

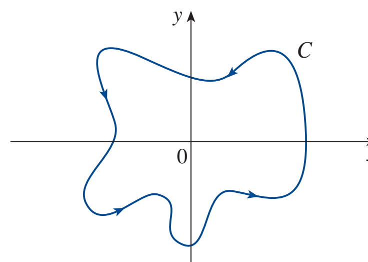
Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva con punto inicial (0, 0, 2) y punto terminal (0, 3, 0) que aparece en la figura.



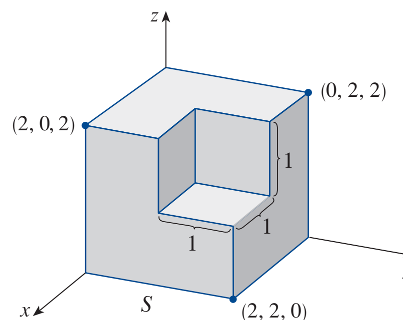
38. Sea

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y)\,\mathbf{i} + (2y^3 + 2x^2y + 2x)\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Evalúe $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C se muestra en la figura.



39. Determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la superficie orientada hacia fuera que se muestra en la figura (la superficie frontera de un cubo de la que se ha quitado un cubo unitario de esquina).



40. Si los componentes de $\mathbf{F}$ tienen segundas derivadas parciales continuas y S es la superficie frontera de una región sólida simple, demuestre que $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

41. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, y S es una superficie suave orientada con una curva frontera simple cerrada suave con orientación positiva C, demuestre que

$$\iint_S 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_C (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

Problemas adicionales

1. Sea S una superficie paramétrica suave y P un punto tal que cada recta que parte de P interseca S a lo sumo una vez. El **ángulo sólido** $\Omega(S)$ subtendido por S en P es un conjunto de rectas que parten de P y pasan por S. Sea $S(a)$ la intersección de $\Omega(S)$ con la superficie de la esfera con centro P y radio a. Entonces, la medida del ángulo sólido (en *esterradianes*) se define como

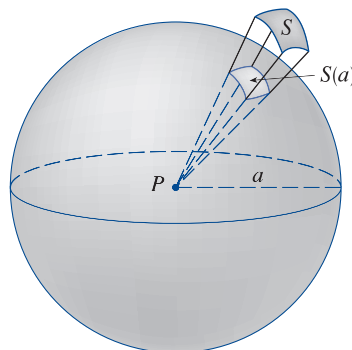
$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Aplique el teorema de la divergencia a la parte de $\Omega(S)$ entre $S(a)$ y S para demostrar que

$$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector radio de P a cualquier punto en S, $r = |\mathbf{r}|$, y el vector normal unitario $\mathbf{n}$ se aleja de P.

Esto demuestra que la definición de la medida de un ángulo sólido es independiente del radio a de la esfera. Así, la medida del ángulo sólido es igual al área subtendida sobre una esfera *unitaria*. (Nótese la analogía con la definición de la medida radián.) El ángulo sólido total subtendido por una esfera en su centro es entonces de 4π esterradianes.



2. Determine la curva cerrada simple con orientación positiva C para la cual el valor de la integral de línea

$$\int_C (y^3 - y)\, dx - 2x^3\, dy$$

es un máximo.

3. Sea C una curva cerrada simple en el espacio, suave por partes, ubicada en un plano con vector normal unitario $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ y con orientación positiva con respecto a $\mathbf{n}$. Demuestre que el área del plano encerrada por C es

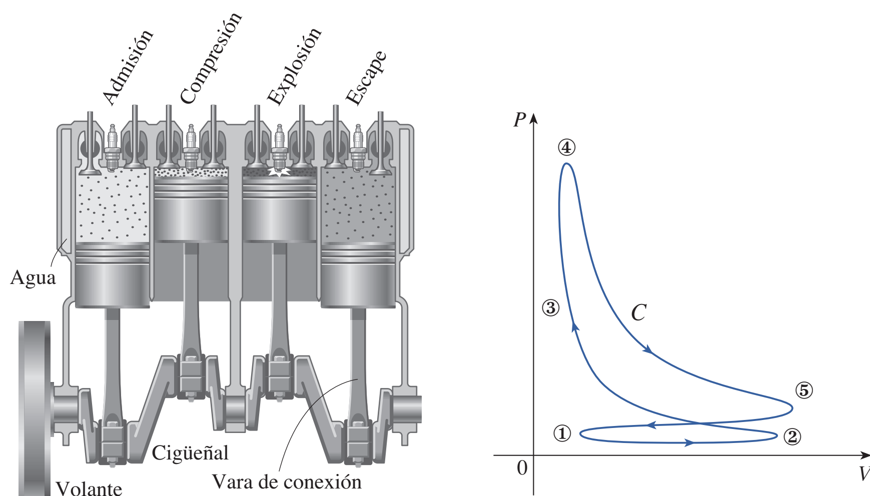
$$\tfrac{1}{2}\int_C (bz - cy)\, dx + (cx - az)\, dy + (ay - bx)\, dz$$

 **4.** Investigue la forma de la superficie con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} u$, $y = \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen}(u + v)$. Empiece graficando la superficie desde varios puntos de vista. Explique la apariencia de las gráficas determinando las trazas en los planos horizontales $z = 0$, $z = \pm 1$ y $z = \pm\frac{1}{2}$.

5. Compruebe la identidad siguiente:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

6. La figura describe la sucesión de eventos en cada cilindro de un motor de combustión interna de cuatro cilindros. Cada pistón sube y baja y está conectado mediante un brazo de báscula a un cigüeñal giratorio. Sean $P(t)$ y $V(t)$ la presión y el volumen dentro de un cilindro en el momento t, donde $a \leqslant t \leqslant b$ da el tiempo requerido para un ciclo completo. La gráfica muestra cómo varían P y V a lo largo de un ciclo de un motor de cuatro tiempos.



Durante el tiempo de admisión (de ① a ②) una mezcla de aire y gasolina a presión atmosférica entra a un cilindro a través de la válvula de admisión cuando el pistón baja. Entonces el pistón comprime rápidamente la mezcla con las válvulas cerradas en el tiempo de compresión (de ② a ③), durante el cual la presión aumenta y el volumen disminuye. En ③ la bujía inflama el combustible, lo que eleva la temperatura y la presión a un volumen casi constante en ④. Luego, con las válvulas cerradas, la rápida expansión obliga a bajar al pistón durante el tiempo de potencia (de ④ a ⑤). La válvula de descarga se abre, la temperatura y presión descienden y la energía mecánica almacenada en un volante giratorio empuja el pistón hacia arriba, expulsando los productos residuales de la válvula de descarga en el tiempo de escape. La válvula de descarga se cierra y la de admisión se abre. Se vuelve entonces a ① y el ciclo comienza de nuevo.

(a) Demuestre que el trabajo realizado sobre el pistón durante un ciclo de un motor de cuatro tiempos es $W = \int_C P\, dV$, donde C es la curva en el plano PV que se muestra en la figura.

[*Sugerencia*: sea $x(t)$ la distancia del pistón a la punta del cilindro y nótese que la fuerza sobre el pistón es $\mathbf{F} = AP(t)\,\mathbf{i}$, donde A es el área de la punta del pistón. Entonces $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C_1 está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}$, $a \leqslant t \leqslant b$. Un enfoque alternativo es trabajar directamente con sumas de Riemann.]

(b) Use la fórmula 16.4.5 para demostrar que el trabajo es la diferencia de las áreas encerradas por los dos lazos de C.

17 Ecuaciones diferenciales de segundo orden



El movimiento de un amortiguador en una motocicleta es descrito por las ecuaciones diferenciales que se resolverán en la sección 17.3.

LAS IDEAS BÁSICAS DE LAS ECUACIONES diferenciales se explicaron en el capítulo 9; principalmente las ecuaciones de primer orden. En este capítulo se estudiarán las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y se aprenderá cómo pueden aplicarse para resolver problemas concernientes a las vibraciones de resortes y el análisis de circuitos eléctricos. También se verá cómo las series infinitas pueden usarse para resolver ecuaciones diferenciales.

17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden

Una **ecuación diferencial lineal de segundo orden** tiene la forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \tag{1}$$

donde P, Q, R y G son funciones continuas. En la sección 9.1 se vio que las ecuaciones de este tipo surgen con el estudio del movimiento de un resorte. En la sección 17.3 se abordará más esta aplicación, así como la aplicación a circuitos eléctricos.

En esta sección se estudiará el caso en el que $G(x) = 0$, para todas las x, en la ecuación 1. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones lineales **homogéneas**. Así, la forma de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \tag{2}$$

Si $G(x) \neq 0$ para algunas x, la ecuación 1 es **no homogénea** y se analizará en la sección 17.2.

Dos hechos básicos permiten resolver ecuaciones lineales homogéneas. El primero de ellos indica que si se conocen dos soluciones y_1 y y_2 de una ecuación de ese tipo, entonces la **combinación lineal** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución.

3 Teorema Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea (2) y c_1 y c_2 son cualesquiera constantes, entonces la función

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

también es una solución de la ecuación 2.

COMPROBACIÓN Como y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación 2, se tiene

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

y

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Por tanto, usando las reglas básicas de la derivación, se tiene

$$\begin{aligned}
P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \\
&= P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2] \\
&= c_1(0) + c_2(0) = 0
\end{aligned}$$

Así, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución de la ecuación 2. ■

El otro hecho que se necesita está dado por el teorema siguiente, que se comprueba en cursos más avanzados el cual sostiene que la solución general es una combinación lineal de dos soluciones **linealmente independientes** y_1 y y_2. Esto significa que ni y_1 ni y_2 son un múltiplo constante uno de otro. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x^2$ son linealmente dependientes, pero $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$ son linealmente independientes.

4 Teorema Si y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 2 en un intervalo y $P(x)$ nunca es de 0, entonces la solución general está dada por

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

El teorema 4 es muy útil porque indica que si se conocen *dos* soluciones particulares linealmente independientes, se conocen *todas* las soluciones.

En general, no es fácil descubrir soluciones particulares de una ecuación lineal de segundo orden. Pero siempre es posible hacerlo si las funciones coeficientes P, Q y R son funciones constantes, es decir, si la ecuación diferencial tiene la forma

5 $$ay'' + by' + cy = 0$$

donde a, b, y c son constantes y $a \neq 0$.

No es difícil pensar en algunas probables candidatas a soluciones particulares de la ecuación 5 si se enuncia verbalmente la ecuación. Se debe buscar una función y tal que una constante multiplicada por su segunda derivada y'' sumada a otra constante multiplicada por y' sumada a una tercera constante multiplicada por y sea igual a 0. Se sabe que la función exponencial $y = e^{rx}$ (donde r es una constante) tiene la propiedad de que su derivada es un múltiplo constante de sí misma: $y' = re^{rx}$. Además, $y'' = r^2e^{rx}$. Si se sustituyen estas expresiones en la ecuación 5, se verá que $y = e^{rx}$ es una solución si

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

o

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Pero e^{rx} nunca es 0. Así, $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación 5 si r es una raíz de la ecuación

6 $$ar^2 + br + c = 0$$

La ecuación 6 se llama **ecuación auxiliar** (o **ecuación característica**) de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Note que es una ecuación algebraica que se obtiene de la ecuación diferencial reemplazando y'' por r^2, y' por r, así como y por 1.

A veces las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar pueden determinarse por factorización. En otros casos se les determina usando la fórmula cuadrática:

7 $$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se destacan tres casos de acuerdo con el signo del discriminante $b^2 - 4ac$.

CASO I $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$

En este caso las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar son reales y distintas, de modo que $y_1 = e^{r_1x}$ y $y_2 = e^{r_2x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 5. (Observe que e^{r_2x} no es un múltiplo constante de e^{r_1x}.) Así, por el teorema 4, se tiene el hecho siguiente.

8 Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ son reales y desiguales, la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

En la figura 1 las gráficas de las soluciones básicas $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^{-3x}$ de la ecuación diferencial del ejemplo 1 aparecen en azul fuerte y azul claro respectivamente. Algunas de las demás soluciones, combinaciones lineales de f y g, se muestran en negro.

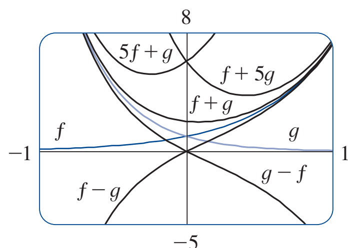


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $y'' + y' - 6y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

cuyas raíces son $r = 2, -3$. Por tanto, por (8), la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$$

Podría verificarse que es en efecto una solución derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial. ■

EJEMPLO 2 Resuelva $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$.

SOLUCIÓN Para resolver la ecuación auxiliar $3r^2 + r - 1 = 0$, use la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Como las raíces son reales y distintas, la solución general es

$$y = c_1e^{(-1+\sqrt{13})x/6} + c_2e^{(-1-\sqrt{13})x/6}$$ ■

CASO II $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$

En este caso $r_1 = r_2$; es decir, las raíces de la ecuación auxiliar son reales e iguales. Se denota con r el valor común de r_1 y r_2. Entonces, de las ecuaciones 7, se tiene

9 $$r = -\frac{b}{2a} \quad \text{de modo que} \quad 2ar + b = 0$$

Se sabe que $y_1 = e^{rx}$ es una solución de la ecuación 5. Ahora se verifica que $y_2 = xe^{rx}$ es también una solución:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0 \end{aligned}$$

En el primer término, $2ar + b = 0$ por las ecuaciones 9; en el segundo término, $ar^2 + br + c = 0$ porque r es una raíz de la ecuación auxiliar. Como $y_1 = e^{rx}$ y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones linealmente independientes, el teorema 4 proporciona la solución general.

10 Si la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tiene solo una raíz real r, entonces la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

La figura 2 muestra las soluciones básicas $f(x) = e^{-3x/2}$ y $g(x) = xe^{-3x/2}$ del ejemplo 3 y otros miembros de la familia de soluciones. Note que todas ellas se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$.

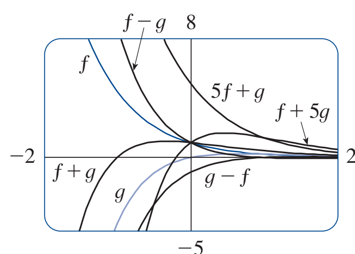


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar $4r^2 + 12r + 9 = 0$ puede factorizarse como

$$(2r + 3)^2 = 0$$

así que la única raíz es $r = -\frac{3}{2}$. Por (10) la solución general es

$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}$$ ■

CASO III $b^2 - 4ac < 0$

En este caso las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar son números complejos. (Véase el apéndice H para información sobre los números complejos.) Se puede escribir

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

donde α y β son números reales. [De hecho, $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.] Entonces, usando la ecuación de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

del apéndice H, se escribe la solución de la ecuación diferencial como

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x) \end{aligned}$$

donde $c_1 = C_1 + C_2$, $c_2 = i(C_1 - C_2)$. Esto da todas las soluciones (reales o complejas) de la ecuación diferencial. Las soluciones son reales cuando las constantes c_1 y c_2 son reales. El análisis se resume como sigue.

11 Si las raíces de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ son los números complejos $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, entonces la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x)$$

La figura 3 muestra las gráficas de las soluciones del ejemplo 4, $f(x) = e^{3x} \cos 2x$ y $g(x) = e^{3x}$ sen $2x$, junto con algunas combinaciones lineales. Todas las soluciones se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$.

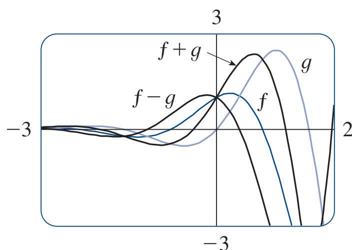


FIGURA 3

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 - 6r + 13 = 0$. Por la fórmula cuadrática, las raíces son

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por (11), la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x)$$ ■

Problemas de valor inicial y valor frontera

Un **problema de valor inicial** para la ecuación 1 o 2 de segundo orden consiste en determinar una solución y de la ecuación diferencial que también satisfaga condiciones iniciales de la forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1$$

donde y_0 y y_1 son constantes dadas. Si P, Q, R y G son continuas en un intervalo y $P(x) \neq 0$ ahí, entonces un teorema que se encuentra en libros más avanzados garantiza la existencia y singularidad de una solución a este problema de valor inicial. Los ejemplos 5 y 6 ilustran la técnica para resolver un problema de esta clase.

EJEMPLO 5 Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN Por el ejemplo 1 se sabe que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Al derivar esta solución se obtiene

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

La figura 4 muestra la gráfica de la solución del problema de valor inicial del ejemplo 5. Compare con la figura 1.

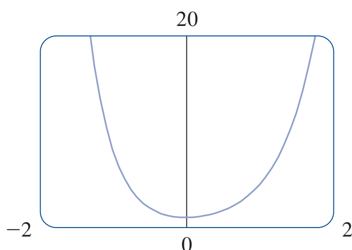


FIGURA 4

Para satisfacer las condiciones iniciales se requiere que

12 $$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

13 $$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0$$

De (13), se tiene $c_2 = \frac{2}{3}c_1$, de modo que (12) da

$$c_1 + \tfrac{2}{3}c_1 = 1 \qquad c_1 = \tfrac{3}{5} \qquad c_2 = \tfrac{2}{5}$$

Así, la solución requerida del problema de valor inicial es

$$y = \tfrac{3}{5}e^{2x} + \tfrac{2}{5}e^{-3x}$$ ■

EJEMPLO 6 Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$, o $r^2 = -1$, cuyas raíces son $\pm i$. Así, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ y como $e^{0x} = 1$, la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \text{ sen } x$$

Dado que $$y'(x) = -c_1 \text{ sen } x + c_2 \cos x$$

La solución del ejemplo 6 se grafica en la figura 5. Parece una curva seno desplazada y, en efecto, usted puede verificar que otra manera de escribir la solución es

$y = \sqrt{13}\ \text{sen}(x + \phi)$ donde $\tan \phi = \frac{2}{3}$

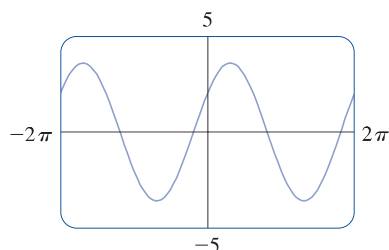


FIGURA 5

las condiciones iniciales se convierten en

$$y(0) = c_1 = 2 \qquad y'(0) = c_2 = 3$$

Por tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = 2 \cos x + 3 \text{ sen } x$$ ■

Un **problema de valor frontera** para la ecuación 1 o 2 consiste en determinar una solución y de la ecuación diferencial que también satisfaga condiciones frontera de la forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

En contraste con la situación para los problemas de valor inicial, un problema de valor frontera no siempre tiene una solución. El método se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resuelva el problema de valor frontera

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad (r + 1)^2 = 0$$

cuya única raíz es $r = -1$. En consecuencia, la solución general es

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

La figura 6 muestra la gráfica de la solución del problema de valor frontera del ejemplo 7.

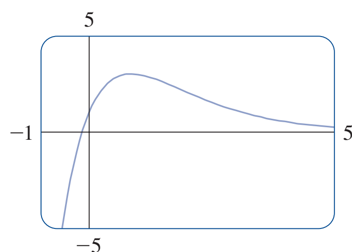


FIGURA 6

Las condiciones de frontera se satisfacen si

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

La primera condición da $c_1 = 1$, de manera que la segunda condición se convierte en

$$e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

Al despejar c_2 en esta ecuación multiplicando primero por e, se obtiene

$$1 + c_2 = 3e \qquad \text{de modo que} \qquad c_2 = 3e - 1$$

Así, la solución del problema de valor frontera es

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$ ■

Resumen: soluciones de $ay'' + by' + c = 0$

Raíces de $ar^2 + br + c = 0$	Solución general
r_1, r_2 reales y distintas	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$
r_1, r_2 complejas: $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \text{ sen } \beta x)$

17.1 EJERCICIOS

1-13 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $y'' - y' - 6y = 0$

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$

3. $y'' + 2y = 0$

4. $y'' + y' - 12y = 0$

5. $4y'' + 4y' + y = 0$

6. $9y'' + 4y = 0$

7. $3y'' = 4y'$

8. $y = y''$

9. $y'' - 4y' + 13y = 0$

10. $3y'' + 4y' - 3y = 0$

11. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0$

12. $\dfrac{d^2R}{dt^2} + 6\dfrac{dR}{dt} + 34R = 0$

13. $3\dfrac{d^2V}{dt^2} + 4\dfrac{dV}{dt} + 3V = 0$

14-16 Grafique las dos soluciones básicas junto con varias soluciones más de la ecuación diferencial. ¿Qué rasgos tienen en común las soluciones?

14. $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

16. $2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$

17-24 Resuelva el problema de valor inicial.

17. $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

18. $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

19. $9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

20. $3y'' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -4$

21. $2y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$

22. $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

23. $y'' - y' - 12y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

24. $2y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3$

25-32 Resuelva el problema de valor frontera, si es posible.

25. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y(\pi/8) = 2$

26. $y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$

27. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(\pi/4) = 3$

28. $y'' = 4y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$

29. $y'' = y', \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$

30. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y(2) = 0$

31. $y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2$

32. $y'' + 4y' + 20y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = e^{-2\pi}$

33. Sea L un número real diferente de cero.
(a) Demuestre que el problema de valor frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ tiene solo la solución trivial $y = 0$ para los casos $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$.
(b) Para el caso $\lambda > 0$, determine los valores de λ para los cuales este problema tiene una solución no trivial y dé la solución correspondiente.

34. Si a, b y c son constantes positivas y $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, demuestre que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

35. Considere el problema de valor frontera $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(a) = c$, $y(b) = d$.
(a) Si este problema tiene una solución única, ¿cómo se relacionan a y b?
(b) Si este problema no tiene solución, ¿cómo se relacionan a, b, c y d?
(c) Si este problema tiene soluciones infinitas, ¿cómo se relacionan a, b, c y d?

17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas

En esta sección se aprenderá a resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x) \qquad \boxed{1}$$

donde a, b y c son constantes y G es una función continua. La ecuación homogénea asociada

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \boxed{2}$$

se llama **ecuación complementaria** y desempeña un papel importante en la solución de la ecuación no homogénea original (1).

3 Teorema La solución general de la ecuación diferencial no homogénea (1) puede escribirse como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

donde y_p es una solución particular de la ecuación 1 y y_c es la solución general de la ecuación complementaria 2.

COMPROBACIÓN Se verifica que si y es una solución de la ecuación 1, entonces $y - y_p$ es una solución de la ecuación complementaria 2. En efecto

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= ay'' - ay_p'' + by' - by_p' + cy - cy_p \\ &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= G(x) - G(x) = 0 \end{aligned}$$

Esto demuestra que todas las soluciones son de la forma $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$. Es fácil verificar que todas las funciones de esta forma son una solución. ■

Por la sección 17.1 se sabe cómo resolver la ecuación complementaria. (Recuerde que la solución es $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación 2.) Por tanto, el teorema 3 establece que se conoce la solución general de la ecuación no homogénea tan pronto como se conoce una solución particular y_p. Hay dos métodos para determinar una solución particular: el método de coeficientes indeterminados es directo pero solo opera para una clase restringida de funciones G. El método de variación de parámetros opera para todas las funciones G, pero usualmente es más difícil de aplicar en la práctica.

El método de coeficientes indeterminados

Se ilustrará primero el método de coeficientes indeterminados para la ecuación

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

donde $G(x)$ es un polinomio. Es razonable suponer que existe una solución particular y_p que es un polinomio del mismo grado que G, porque si y es un polinomio, $ay'' + by' + cy$ también es un polinomio. Por tanto, se sustituye $y_p(x)$ = un polinomio (del mismo grado que G) en la ecuación diferencial y se determinan los coeficientes.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar de $y'' + y' - 2y = 0$ es

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

con raíces $r = 1, -2$. Así, la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

Como $G(x) = x^2$ es un polinomio de grado 2, se busca una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Entonces, $y_p' = 2Ax + B$ y $y_p'' = 2A$, así que al sustituir en la ecuación diferencial dada se tiene

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

o
$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

La figura 1 muestra cuatro soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1 en términos de la solución particular y_p y las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-2x}$.

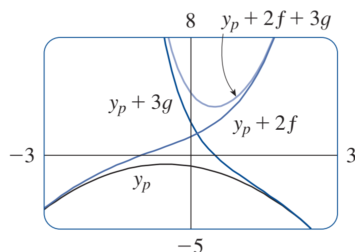


FIGURA 1

Los polinomios son iguales cuando sus coeficientes son iguales. Así

$$-2A = 1 \qquad 2A - 2B = 0 \qquad 2A + B - 2C = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$A = -\tfrac{1}{2} \qquad B = -\tfrac{1}{2} \qquad C = -\tfrac{3}{4}$$

Una solución particular es entonces

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

y, por el teorema 3, la solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$ ■

Si $G(x)$ (el miembro derecho de la ecuación 1) es de la forma Ce^{kx}, donde C y k son constantes, se toma como solución de prueba una función de la misma forma, $y_p(x) = Ae^{kx}$, porque las derivadas de e^{kx} son múltiplos constantes de e^{kx}.

EJEMPLO 2 Resuelva $y'' + 4y = e^{3x}$.

La figura 2 muestra soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2 en términos de y_p y las funciones $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = \operatorname{sen} 2x$. Note que todas las soluciones se aproximan a ∞ cuando $x \to \infty$ y que todas las soluciones (excepto y_p) parecen funciones seno cuando x es negativa.

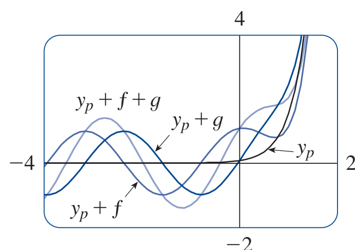


FIGURA 2

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 4 = 0$ con raíces $\pm 2i$, así que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

Para una solución particular se prueba $y_p(x) = Ae^{3x}$. Entonces, $y_p' = 3Ae^{3x}$ y $y_p'' = 9Ae^{3x}$. Al sustituir en la ecuación diferencial se tiene

$$9Ae^{3x} + 4(Ae^{3x}) = e^{3x}$$

así que $13Ae^{3x} = e^{3x}$ y $A = \frac{1}{13}$. Por consiguiente, una solución particular es

$$y_p(x) = \tfrac{1}{13}e^{3x}$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{13}e^{3x}$$ ■

Si $G(x)$ es $C \cos kx$ o $C \operatorname{sen} kx$, entonces, debido a las reglas de derivación de las funciones seno y coseno, se toma como solución particular de prueba una función de la forma

$$y_p(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$$

EJEMPLO 3 Resuelva $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Se prueba una solución particular

$$y_p(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

Entonces, $y_p' = -A \operatorname{sen} x + B \cos x \qquad y_p'' = -A \cos x - B \operatorname{sen} x$

así que la sustitución en la ecuación diferencial da

$$(-A \cos x - B \operatorname{sen} x) + (-A \operatorname{sen} x + B \cos x) - 2(A \cos x + B \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

o $$(-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Esto es cierto si

$$-3A + B = 0 \qquad \text{y} \qquad -A - 3B = 1$$

La solución de este sistema es

$$A = -\tfrac{1}{10} \qquad B = -\tfrac{3}{10}$$

de modo que una solución particular es

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{10} \cos x - \tfrac{3}{10} \operatorname{sen} x$$

En el ejemplo 1 se determinó que la solución de la ecuación complementaria es $y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Así, la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \tfrac{1}{10}(\cos x + 3 \operatorname{sen} x)$$ ■

Si $G(x)$ es un producto de funciones de los tipos precedentes, entonces se toma como solución de prueba un producto de funciones del mismo tipo. Por ejemplo, al resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x \cos 3x$$

se probaría

$$y_p(x) = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \operatorname{sen} 3x$$

Si $G(x)$ es una suma de funciones de estos tipos, se usa el fácilmente verificable *principio de superposición*, el cual sostiene que si y_{p_1} y y_{p_2} son soluciones de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \qquad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

respectivamente, entonces $y_{p_1} + y_{p_2}$ es una solución de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$

EJEMPLO 4 Resuelva $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 - 4 = 0$ con raíces ± 2, así que la solución de la ecuación complementaria es $y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$. Para la ecuación $y'' - 4y = xe^x$ se prueba con

$$y_{p_1}(x) = (Ax + B)e^x$$

Entonces $y_{p_1}' = (Ax + A + B)e^x$, $y_{p_1}'' = (Ax + 2A + B)e^x$, así que la sustitución en la ecuación da

$$(Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + B)e^x = xe^x$$

o $$(-3Ax + 2A - 3B)e^x = xe^x$$

Así, $-3A = 1$ y $2A - 3B = 0$, de modo que $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{9}$, y

$$y_{p_1}(x) = \left(-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)e^x$$

Para la ecuación $y'' - 4y = \cos 2x$, se prueba

En la figura 3 se muestra la solución particular $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ de la ecuación diferencial del ejemplo 4. Las demás soluciones se dan en términos de $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^{-2x}$.

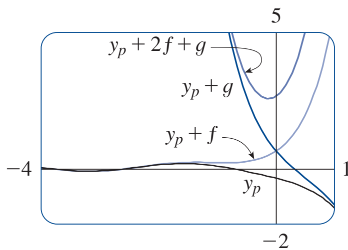


FIGURA 3

$$y_{p_2}(x) = C\cos 2x + D\,\mathrm{sen}\,2x$$

La sustitución da

$$-4C\cos 2x - 4D\,\mathrm{sen}\,2x - 4(C\cos 2x + D\,\mathrm{sen}\,2x) = \cos 2x$$

o

$$-8C\cos 2x - 8D\,\mathrm{sen}\,2x = \cos 2x$$

Por tanto, $-8C = 1$, $-8D = 0$ y

$$y_{p_2}(x) = -\tfrac{1}{8}\cos 2x$$

Por el principio de superposición, la solución general es

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{9}\right)e^x - \tfrac{1}{8}\cos 2x$$ ■

Por último, se señala que la solución de prueba recomendada y_p resulta ser a veces una solución de la ecuación complementaria, y por tanto no puede ser una solución de la ecuación no homogénea. En tales casos, se multiplica la solución de prueba recomendada por x (o por x^2 si es necesario) para que ningún término en $y_p(x)$ sea una solución de la ecuación complementaria.

EJEMPLO 5 Resuelva $y'' + y = \mathrm{sen}\,x$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$ con raíces $\pm i$, así que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\,x$$

Ordinariamente, se usaría la solución de prueba

$$y_p(x) = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$$

pero se observa que esta es una solución de la ecuación complementaria, así que se prueba en cambio

$$y_p(x) = Ax\cos x + Bx\,\mathrm{sen}\,x$$

Entonces

$$y_p'(x) = A\cos x - Ax\,\mathrm{sen}\,x + B\,\mathrm{sen}\,x + Bx\cos x$$

$$y_p''(x) = -2A\,\mathrm{sen}\,x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\,\mathrm{sen}\,x$$

La sustitución en la ecuación diferencial da

$$y_p'' + y_p = -2A\,\mathrm{sen}\,x + 2B\cos x = \mathrm{sen}\,x$$

Las gráficas de cuatro soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 5 se muestran en la figura 4.

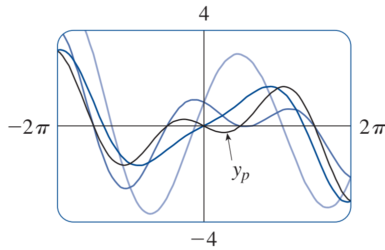


FIGURA 4

así que $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$ y

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x \cos x$$

La solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}x \cos x$$ ■

Se resume el método de coeficientes indeterminados como sigue:

Resumen del método de coeficientes indeterminados

1. Si $G(x) = e^{kx}P(x)$, donde P es un polinomio de grado n, pruebe $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de enésimo grado (cuyos coeficientes se determinan sustituyendo en la ecuación diferencial).

2. Si $G(x) = e^{kx}P(x) \cos mx$ o $G(x) = e^{kx}P(x) \operatorname{sen} mx$, donde P es un polinomio de enésimo grado, pruebe

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x) \cos mx + e^{kx}R(x) \operatorname{sen} mx$$

donde Q y R son polinomios de enésimo grado.

Modificación: si cualquier término de y_p es una solución de la ecuación complementaria, multiplique y_p por x (o por x^2 si es necesario).

EJEMPLO 6 Determine la forma de la solución de prueba para la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x$.

SOLUCIÓN Aquí $G(x)$ tiene la forma de la parte 2 del resumen, donde $k = 2$, $m = 3$ y $P(x) = 1$. Así, a primera vista, la forma de la solución de prueba sería

$$y_p(x) = e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$

Pero la ecuación auxiliar es $r^2 - 4r + 13 = 0$, con raíces $r = 2 \pm 3i$, así que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$$

Esto significa que se tiene que multiplicar la solución de prueba sugerida por x. Así, se usa en cambio

$$y_p(x) = xe^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$ ■

El método de variación de parámetros

Suponga que ya ha resuelto la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ y escrito la solución como

4 $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes. Reemplace las constantes (o parámetros) c_1 y c_2 en la ecuación 4 por las funciones arbitrarias $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Busque

una solución particular de la ecuación no homogénea $ay'' + by' + cy = G(x)$ de la forma

$$\boxed{5} \qquad y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

(Este método se llama **variación de parámetros** porque se han variado los parámetros c_1 y c_2 para convertirlos en funciones.) Al derivar la ecuación 5 se obtiene

$$\boxed{6} \qquad y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$$

Como u_1 y u_2 son funciones arbitrarias, se puede imponer dos condiciones. Una condición es que y_p sea una solución de la ecuación diferencial; se puede elegir la otra condición para simplificar nuestros cálculos. En vista de la expresión en la ecuación 6, imponga la condición de que

$$\boxed{7} \qquad u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

Entonces $$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = G$$

u

$$\boxed{8} \qquad u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Pero y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación complementaria, de modo que

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

y la ecuación 8 se simplifica como

$$\boxed{9} \qquad a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Las ecuaciones 7 y 9 forman un sistema de dos ecuaciones con las funciones desconocidas u_1' y u_2'. Después de resolver este sistema quizá se podría integrar para determinar u_1 y u_2, y entonces la solución particular estaría dada por la ecuación 5.

EJEMPLO 7 Resuelva la ecuación $y'' + y = \tan x$, $0 < x < \pi/2$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$ con raíces $\pm i$, así que la solución de $y'' + y = 0$ es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$. Usando variación de parámetros, se busca una solución de la forma

$$y_p(x) = u_1(x) \operatorname{sen} x + u_2(x) \cos x$$

Entonces $$y_p' = (u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x) + (u_1 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x)$$

Establezca

$$\boxed{10} \qquad u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0$$

Entonces $$y_p'' = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2 \cos x$$

Para que y_p sea una solución, se debe tener

$$\boxed{11} \qquad y_p'' + y_p = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x = \tan x$$

Al resolver las ecuaciones 10 y 11 se obtiene

$$u_1'(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \cos x \, \tan x$$

$$u_1' = \operatorname{sen} x \qquad u_1(x) = -\cos x$$

(Se busca una solución particular, de manera que no se necesita una constante de integración aquí.) Entonces, de la ecuación 10 se obtiene

$$u_2' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} u_1' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

La figura 5 muestra cuatro soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 7.

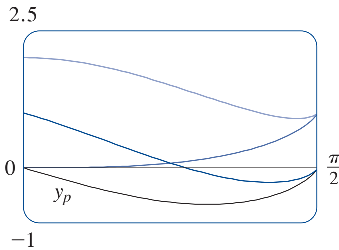


FIGURA 5

Así $$u_2(x) = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x)$$

(Note que $\sec x + \tan x > 0$ para $0 < x < \pi/2$). Por tanto

$$y_p(x) = -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x)] \cos x$$

$$= -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$ ■

17.2 EJERCICIOS

1-10 Resuelva la ecuación diferencial o el problema de valor inicial usando el método de coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 2y' - 8y = 1 - 2x^2$

2. $y'' - 3y' = \operatorname{sen} 2x$

3. $9y'' + y = e^{2x}$

4. $y'' - 2y' + 2y = x + e^x$

5. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$

6. $y'' + 2y' + 5y = 1 + e^x$

7. $y'' - 2y' + 5y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

8. $y'' - y = xe^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

9. $y'' - y' = xe^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

10. $y'' - 4y = e^x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

11-12 Grafique la solución particular y varias soluciones más. ¿Qué características tienen estas soluciones en común?

11. $y'' + 3y' + 2y = \cos x$ **12.** $y'' + 4y = e^{-x}$

13-18 Escriba una solución de prueba para el método de coeficientes indeterminados. No determine los coeficientes.

13. $y'' + 9y = e^{2x} + x^2 \operatorname{sen} x$

14. $y'' + 9y' = xe^{-x} \cos \pi x$

15. $y'' - 3y' + 2y = e^x + \operatorname{sen} x$

16. $y'' + 3y' - 4y = (x^3 + x)e^x$

17. $y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$

18. $y'' + 4y = e^{3x} + x \operatorname{sen} 2x$

19-22 Resuelva la ecuación diferencial usando (a) coeficientes indeterminados y (b) variación de parámetros.

19. $4y'' + y = \cos x$

20. $y'' - 2y' - 3y = x + 2$

21. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

22. $y'' - y' = e^x$

23-28 Resuelva la ecuación diferencial usando el método de variación de parámetros.

23. $y'' + y = \sec^2 x,\ \ 0 < x < \pi/2$

24. $y'' + y = \sec^3 x,\ \ 0 < x < \pi/2$

25. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

26. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$

27. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

28. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

17.3 Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden tienen varias aplicaciones en las ciencias y la ingeniería. En esta sección se explorarán dos de ellas: la vibración de resortes y circuitos eléctricos.

Resortes vibratorios

Se tiene el movimiento de un objeto con masa m en el extremo de un resorte vertical (como en la figura 1) u horizontal sobre una superficie nivelada (como en la figura 2).

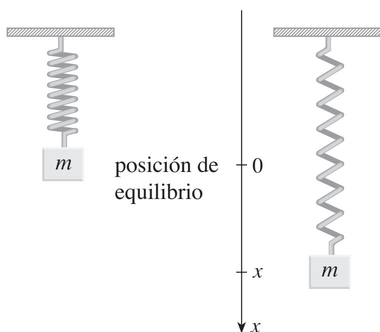


FIGURA 1

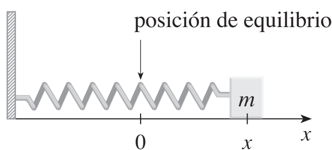


FIGURA 2

En la sección 6.4 se estudió la ley de Hooke, la cual sostiene que si el resorte se estira (o comprime) x unidades de su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x:

$$\text{fuerza de restauración} = -kx$$

donde k es una constante positiva (llamada **constante de resorte**). Si se ignora toda fuerza de resistencia externa (debida a resistencia del aire o fricción), de acuerdo con la segunda ley de Newton (fuerza igual a masa por aceleración), se tiene

$$\boxed{1} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{o} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Su ecuación auxiliar es $mr^2 + k = 0$ con raíces $r = \pm\omega i$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$. Así, la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

la cual también puede escribirse como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ (frecuencia)

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{(amplitud)}$$

$$\cos\delta = \frac{c_1}{A} \qquad \operatorname{sen}\delta = -\frac{c_2}{A} \quad (\delta \text{ es el ángulo de fase})$$

(Véase el ejercicio 17.) Este tipo de movimiento se llama **movimiento armónico simple**.

EJEMPLO 1 Un resorte con masa de 2 kg tiene una longitud natural de 0.5 m. Se requiere una fuerza de 25.6 N para mantenerlo estirado en una longitud de 0.7 m. Si el resorte es estirado a una longitud de 0.7 m y luego soltado con una velocidad inicial de 0, determine la posición de la masa en cualquier momento t.

SOLUCIÓN Con base en la ley de Hooke, la fuerza requerida para estirar el resorte es

$$k(0.2) = 25.6$$

así que $k = 25.6/0.2 = 128$. Al usar este valor de la constante de resorte k, junto con $m = 2$ en la ecuación 1, se tiene

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

Como en el análisis general previo, la solución de esta ecuación es

2 $$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t$$

Se da la condición inicial de que $x(0) = 0.2$. Pero, de la ecuación 2, $x(0) = c_1$. Por tanto $c_1 = 0.2$. Derivando la ecuación 2 se obtiene

$$x'(t) = -8c_1 \operatorname{sen} 8t + 8c_2 \cos 8t$$

Puesto que la velocidad inicial se da como $x'(0) = 0$, se tiene $c_2 = 0$, así que la solución es

$$x(t) = 0.2 \cos 8t$$ ■

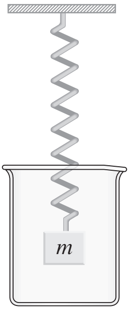


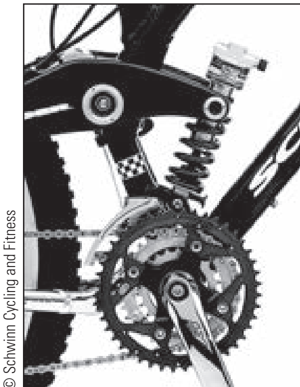
FIGURA 3

Vibraciones amortiguadas

A continuación se considerará el movimiento de un resorte sujeto a una fuerza de fricción (en el caso del resorte horizontal de la figura 2) o a una fuerza de amortiguación (en el caso en que un resorte vertical se mueva a través de un fluido, como en la figura 3). Un ejemplo es la fuerza de amortiguación provista por un amortiguador en un automóvil o una bicicleta.

Se ha supuesto que la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad de la masa y que actúa en la dirección opuesta al movimiento. (Esto ha sido confirmado, al menos aproximadamente, por algunos experimentos físicos.) Así

$$\text{fuerza de amortiguación} = -c\frac{dx}{dt}$$



donde c es una constante positiva llamada **constante de amortiguación**. En este caso, entonces, la segunda ley de Newton da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{fuerza de restauración} + \text{fuerza de amortiguación} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

o

3 $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

La ecuación 3 es una ecuación diferencial lineal de segundo orden y su ecuación auxiliar es $mr^2 + cr + k = 0$. Las raíces son

$$\boxed{4} \qquad r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

De acuerdo con la sección 17.1, se deben analizar tres casos.

CASO I $c^2 - 4mk > 0$ (sobreamortiguación)
En este caso, r_1 y r_2 son raíces reales distintas y

$$x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$$

Como c, m y k son positivas, se tiene $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$, así que las raíces r_1 y r_2 dadas por las ecuaciones 4 deben ser negativas. Esto indica que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$. Gráficas representativas de x como una función de t aparecen en la figura 4. Adviértase que no ocurren oscilaciones. (Es posible que la masa pase por la posición de equilibrio una vez, pero solo una vez.) Esto se debe a que $c^2 > 4mk$ significa que hay una vigorosa fuerza de amortiguación (aceite o grasa de alta viscosidad) en comparación con un resorte débil o una masa reducida.

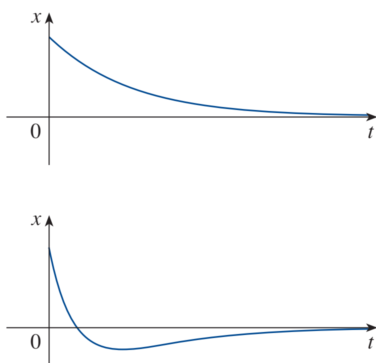


FIGURA 4
Sobreamortiguación

CASO II $c^2 - 4mk = 0$ (amortiguación crítica)
Este caso corresponde a raíces iguales

$$r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$$

y la solución está dada por

$$x = (c_1 + c_2t)e^{-(c/2m)t}$$

Esto es similar al caso I, y las gráficas representativas se parecen a las de la figura 4 (véase el ejercicio 12), pero la amortiguación es apenas suficiente para suprimir las vibraciones. Cualquier decremento en la viscosidad del fluido conduce a las vibraciones del caso siguiente.

CASO III $c^2 - 4mk < 0$ (subamortiguación)
Aquí las raíces son complejas:

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \omega i$$

donde
$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

La solución está dada por

$$x = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

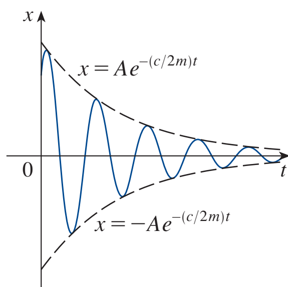


FIGURA 5
Subamortiguación

Se observa que hay oscilaciones amortiguadas por el factor $e^{-(c/2m)t}$. Como $c > 0$ y $m > 0$, se tiene $-(c/2m) < 0$, así que $e^{-(c/2m)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Esto implica que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$; es decir, el movimiento decae a 0 a medida que el tiempo aumenta. Una gráfica representativa se muestra en la figura 5.

EJEMPLO 2 Suponga que el resorte del ejemplo 1 está sumergido en un fluido con constante de amortiguación $c = 40$. Determine la posición de la masa en cualquier momento t si parte de la posición de equilibrio y recibe un empujón para empezar con una velocidad inicial de 0.6 m/s.

SOLUCIÓN Del ejemplo 1, la masa es $m = 2$ y la constante de resorte $k = 128$, así que la ecuación diferencial (3) se convierte en

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + 20r + 64 = (r + 4)(r + 16) = 0$ con raíces -4 y -16, de modo que el movimiento está sobreamortiguado y la solución es

La figura 6 muestra la gráfica de la función de posición para el movimiento sobreamortiguado del ejemplo 2.

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-16t}$$

Dado que $x(0) = 0$, así que $c_1 + c_2 = 0$. Al derivar se obtiene

$$x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 16c_2e^{-16t}$$

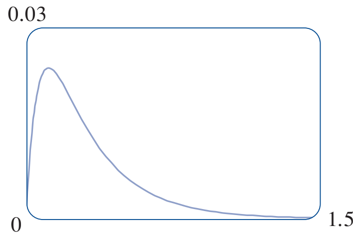


FIGURA 6

de manera que $$x'(0) = -4c_1 - 16c_2 = 0.6$$

Como $c_2 = -c_1$, esto da $12c_1 = 0.6$ o $c_1 = 0.05$. Por tanto

$$x = 0.05(e^{-4t} - e^{-16t})$$ ■

Vibraciones forzadas

Suponga que, además de la fuerza de restauración y la fuerza de amortiguación, el movimiento del resorte se ve afectado por una fuerza externa $F(t)$. Entonces, la segunda ley de Newton da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{fuerza de restauración} + \text{fuerza de amortiguación} + \text{fuerza externa}$$

$$= -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Así, en lugar de la ecuación homogénea (3), el movimiento del resorte es gobernado ahora por la siguiente ecuación diferencial no homogénea:

5 $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

El movimiento del resorte puede determinarse por los métodos de la sección 17.2.

Un tipo de fuerza externa de ocurrencia común es una función de fuerza periódica

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t \qquad \text{donde} \qquad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}$$

En este caso, y en ausencia de una fuerza de amortiguación ($c = 0$), en el ejercicio 9 se le pedirá usar el método de coeficientes indeterminados para demostrar que

6 $$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t$$

Si $\omega_0 = \omega$, la frecuencia aplicada refuerza la frecuencia natural y el resultado son vibraciones de gran amplitud. Este es el fenómeno de la **resonancia** (véase el ejercicio 10).

Circuitos eléctricos

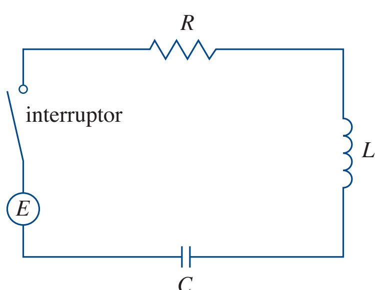


FIGURA 7

En las secciones 9.3 y 9.5 se usaron ecuaciones separables y lineales de primer orden para analizar circuitos eléctricos que contengan una resistencia e inductor (véase la figura 9.3.5 o la figura 9.5.4) o una resistencia y capacitor (véase el ejercicio 9.5.29). Ahora que se sabe cómo resolver ecuaciones lineales de segundo orden, se está en posibilidad de analizar el circuito que aparece en la figura 7. Este contiene una fuerza electromotriz E (provista por una batería o generador), una resistencia R, un inductor L y un capacitor C, en serie. Si la carga sobre el capacitor en el momento t es $Q = Q(t)$, entonces la corriente es la razón de cambio de Q con respecto a t: $I = dQ/dt$. Como en la sección 9.5, se sabe por la física que las caídas de voltaje por la resistencia, inductor y capacitor son

$$RI \qquad L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{Q}{C}$$

respectivamente. La ley del voltaje de Kirchhoff establece que la suma de estas caídas de voltaje es igual al voltaje provisto:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Como $I = dQ/dt$, esta ecuación se convierte en

7 $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Si la carga Q_0 y la corriente I_0 son conocidas en el momento 0, se tienen las condiciones iniciales

$$Q(0) = Q_0 \qquad Q'(0) = I(0) = I_0$$

y el problema de valor inicial puede resolverse por los métodos de la sección 17.2.

Una ecuación diferencial para la corriente puede obtenerse derivando la ecuación 7 con respecto a t y recordando que $I = dQ/dt$:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

EJEMPLO 3 Determine la carga y corriente en el momento t en el circuito de la figura 7 si $R = 40\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 16 \times 10^{-4}$ F, $E(t) = 100\cos 10t$ y la carga y corriente iniciales son de 0.

SOLUCIÓN Con los valores dados de L, R, C y $E(t)$, la ecuación 7 se convierte en

8
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100\cos 10t$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + 40r + 625 = 0$ con raíces

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

así que la solución de la ecuación complementaria es

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1\cos 15t + c_2\operatorname{sen} 15t)$$

Para el método de coeficientes indeterminados se prueba la solución particular

$$Q_p(t) = A\cos 10t + B\operatorname{sen} 10t$$

Entonces
$$Q_p'(t) = -10A\operatorname{sen} 10t + 10B\cos 10t$$

$$Q_p''(t) = -100A\cos 10t - 100B\operatorname{sen} 10t$$

Al sustituir en la ecuación 8 se tiene

$$(-100A\cos 10t - 100B\operatorname{sen} 10t) + 40(-10A\operatorname{sen} 10t + 10B\cos 10t)$$
$$+ 625(A\cos 10t + B\operatorname{sen} 10t) = 100\cos 10t$$

o
$$(525A + 400B)\cos 10t + (-400A + 525B)\operatorname{sen} 10t = 100\cos 10t$$

Igualando coeficientes se tiene

$$525A + 400B = 100 \qquad \text{o} \qquad 21A + 16B = 4$$
$$-400A + 525B = 0 \qquad \text{o} \qquad -16A + 21B = 0$$

La solución de este sistema es $A = \frac{84}{697}$ y $B = \frac{64}{697}$, así que una solución particular es

$$Q_p(t) = \frac{1}{697}(84\cos 10t + 64\operatorname{sen} 10t)$$

y la solución general es

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t)$$
$$= e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \operatorname{sen} 15t) + \tfrac{4}{697}(21 \cos 10t + 16 \operatorname{sen} 10t)$$

Al imponer la condición inicial $Q(0) = 0$ se obtiene

$$Q(0) = c_1 + \tfrac{84}{697} = 0 \qquad c_1 = -\tfrac{84}{697}$$

Para imponer la otra condición inicial, se deriva primero para determinar la corriente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2) \cos 15t + (-15c_1 - 20c_2) \operatorname{sen} 15t]$$
$$+ \tfrac{40}{697}(-21 \operatorname{sen} 10t + 16 \cos 10t)$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \tfrac{640}{697} = 0 \qquad c_2 = -\tfrac{464}{2091}$$

Así, la fórmula para la carga es

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63 \cos 15t - 116 \operatorname{sen} 15t) + (21 \cos 10t + 16 \operatorname{sen} 10t)\right]$$

y la expresión para la corriente es

$$I(t) = \tfrac{1}{2091}[e^{-20t}(-1920 \cos 15t + 13060 \operatorname{sen} 15t) + 120(-21 \operatorname{sen} 10t + 16 \cos 10t)]$$

■

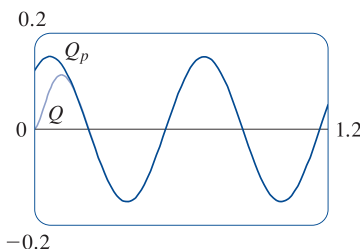


FIGURA 8

NOTA 1 En el ejemplo 3 la solución para $Q(t)$ consta de dos partes. Como $e^{-20t} \to 0$ cuando $t \to \infty$ y tanto cos $15t$ como sen $15t$ son funciones acotadas,

$$Q_c(t) = \tfrac{4}{2091} e^{-20t}(-63 \cos 15t - 116 \operatorname{sen} 15t) \to 0 \qquad \text{cuando} \quad t \to \infty$$

Así, para valores grandes de t,

$$Q(t) \approx Q_p(t) = \tfrac{4}{697}(21 \cos 10t + 16 \operatorname{sen} 10t)$$

y por esta razón $Q_p(t)$ se llama **solución de estado estacionario**. La figura 8 muestra cómo se compara la gráfica de la solución de estado estacionario con la gráfica de Q en este caso.

5 $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

7 $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

NOTA 2 Al comparar las ecuaciones 5 y 7 se observa que son matemáticamente idénticas. Esto sugiere que las analogías de la tabla siguiente entre situaciones físicas son, a primera vista, tan diferentes.

Sistema de resortes		Circuito eléctrico	
x	desplazamiento	Q	carga
dx/dt	velocidad	$I = dQ/dt$	corriente
m	masa	L	inductancia
c	constante de amortiguación	R	resistencia
k	constante de resorte	$1/C$	elastancia
$F(t)$	fuerza externa	$E(t)$	fuerza electromotriz

También se pueden transferir otras ideas de una situación a la otra. Por ejemplo, la solución de estado estacionario analizada en la nota 1 tiene sentido en el sistema de resortes. Y el fenómeno de la resonancia en el sistema de resortes puede ser trasladado a los circuitos eléctricos con el significado útil de resonancia eléctrica.

17.3 EJERCICIOS

1. Un resorte tiene una longitud natural de 0.75 m y una masa de 5 kg. Una fuerza de 25 N es necesaria para mantener estirado el resorte en una longitud de 1 m. Si el resorte es estirado a una longitud de 1.1 m y luego soltado con velocidad 0, determine la posición de la masa después de t segundos.

2. Un resorte con masa de 8 kg se mantiene estirado 0.4 m más allá de su longitud natural por una fuerza de 32 N. El resorte parte de su posición de equilibrio y recibe una velocidad inicial de 1 m/s. Determine la posición de la masa en cualquier momento t.

3. Un resorte con masa de 2 kg tiene una constante de amortiguación de 14, y se requiere una fuerza de 6 N para mantenerlo estirado 0.5 m más allá de su longitud natural. El resorte es estirado 1 m más allá de su longitud natural y luego soltado con velocidad cero. Determine la posición de la masa en cualquier momento t.

4. Una fuerza de 13 N se necesita para mantener un resorte con masa de 2 kg estirado 0.25 m más allá de su longitud natural. La constante de amortiguación del resorte es $c = 8$.
(a) Si la masa parte de la posición de equilibrio con una velocidad de 0.5 m/s, halle su posición en el momento t.
(b) Grafique la función de posición de la masa.

5. Para el resorte del ejercicio 3, halle la masa que produciría amortiguación crítica.

6. Para el resorte del ejercicio 4, halle la constante de amortiguación que produciría amortiguación crítica.

7. Un resorte tiene masa de 1 kg y su constante de resorte es de $k = 100$. Es soltado en un punto 0.1 m arriba de su posición de equilibrio. Grafique la función de posición para los valores siguientes de la constante de amortiguación c: 10, 15, 20, 25, 30. ¿Qué tipo de amortiguación ocurre en cada caso?

8. Un resorte tiene masa de 1 kg y su constante de amortiguación es de $c = 10$. El resorte parte de su posición de equilibrio con una velocidad de 1 m/s. Grafique la función de posición para los valores siguientes de la constante de resorte k: 10, 20, 25, 30, 40. ¿Qué tipo de amortiguación ocurre en cada caso?

9. Suponga que un resorte tiene masa m y constante de resorte k y sea $\omega = \sqrt{k/m}$. Suponga que la constante de amortiguación es tan reducida que la fuerza de amortiguación es insignificante. Si se aplica una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$, donde $\omega_0 \neq \omega$, use el método de coeficientes indeterminados para demostrar que el movimiento de la masa es descrito por la ecuación 6.

10. Al igual que en el ejercicio 9, considere un resorte con masa m, constante de resorte k y constante de amortiguación $c = 0$ y sea $\omega = \sqrt{k/m}$. Si se aplica una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (la frecuencia aplicada es igual a la frecuencia natural), use el método de coeficientes indeterminados para demostrar que el movimiento de la masa está dado por

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{2m\omega} t \operatorname{sen} \omega t$$

11. Demuestre que si $\omega_0 \neq \omega$, pero ω/ω_0 es un número racional, el movimiento descrito por la ecuación 6 es periódico.

12. Considere un resorte sujeto a una fuerza de fricción o de amortiguación.
(a) En el caso críticamente amortiguado, el movimiento está dado por $x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$. Demuestre que la gráfica de x cruza el eje t siempre que c_1 y c_2 tengan signos opuestos.
(b) En el caso sobreamortiguado, el movimiento está dado por $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, donde $r_1 > r_2$. Determine una condición sobre las magnitudes relativas de c_1 y c_2 en la cual la gráfica de x cruza el eje t en un valor positivo de t.

13. Un circuito en serie consta de un resistor con $R = 20\ \Omega$, un inductor con $L = 1$ H, un capacitor con $C = 0.002$ F y una batería de 12 V. Si la carga y corriente iniciales son de 0, determine la carga y corriente en el momento t.

14. Un circuito en serie contiene un resistor con $R = 24\ \Omega$, un inductor con $L = 2$ H, un capacitor con $C = 0.005$ F y una batería de 12 V. La carga inicial es de $Q = 0.001$ C y la corriente inicial de 0.
(a) Determine la carga y corriente en el momento t.
(b) Grafique las funciones de carga y corriente.

15. La batería del ejercicio 13 es reemplazada por un generador que produce un voltaje de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$. Determine la carga en el momento t.

16. La batería del ejercicio 14 es reemplazada por un generador que produce un voltaje de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$.
(a) Determine la carga en el momento t.
(b) Grafique la función de carga.

17. Verifique que la solución de la ecuación 1 puede escribirse en la forma $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$.

18. La figura muestra un péndulo con longitud L y el ángulo θ desde la vertical al péndulo. Se puede demostrar que θ, como una función de tiempo, satisface la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Para valores pequeños de θ se puede usar la aproximación lineal $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, y entonces la ecuación diferencial se vuelve lineal.

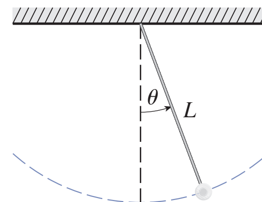
(a) Determine la ecuación de movimiento de un péndulo con longitud de 1 m si θ es inicialmente de 0.2 rad y la velocidad angular inicial es $d\theta/dt = 1$ rad/s.

(b) ¿Cuál es el ángulo máximo desde la vertical?

(c) ¿Cuál es el período del péndulo (es decir, el tiempo para completar una oscilación de ida y vuelta)?

(d) ¿Cuándo estará en posición vertical por primera vez?

(e) ¿Cuál es la velocidad angular cuando el péndulo es vertical?



17.4 Soluciones con series de potencias

Muchas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse explícitamente en términos de combinaciones finitas de funciones simples conocidas. Esto es cierto aun para una ecuación de apariencia tan sencilla como

1 $$y'' - 2xy' + y = 0$$

Pero es importante poder resolver ecuaciones como la ecuación 1, porque surgen de problemas físicos y, en particular, en relación con la ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica. En tal caso, se usa el método de series de potencias; es decir, se busca una solución de la forma

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

El método consiste en sustituir esta expresión en la ecuación diferencial y determinar los valores de los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Esta técnica se asemeja al método de coeficientes indeterminados expuesto en la sección 17.2.

Antes de usar series de potencias para resolver la ecuación 1, se ilustrará el método en la ecuación más simple $y'' + y = 0$ del ejemplo 1. Es cierto que ya se conoce cómo resolver esta ecuación mediante las técnicas de la sección 17.1, pero es más fácil entender el método de las series de potencias cuando se aplica a esta ecuación más sencilla.

EJEMPLO 1 Use series de potencias para resolver la ecuación $y'' + y = 0$.

SOLUCIÓN Suponga que hay una solución de la forma

2 $$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Se puede derivar series de potencias término por término, de modo que

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

3 $$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Al escribir los primeros términos de (4), usted puede ver que es igual a (3). Para obtener (4), se reemplaza n por $n + 2$, y se comienza la suma en 0 en lugar de 2.

A fin de comparar más fácilmente las expresiones para y y y'', se reescribe y'' como sigue:

4 $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)c_{n+2}x^n$$

Al sustituir las expresiones de las ecuaciones 2 y 4 en la ecuación diferencial, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

o

5 $$\sum_{n=0}^{\infty} [(n + 2)(n + 1)c_{n+2} + c_n]x^n = 0$$

Si dos series de potencias son iguales, los coeficientes correspondientes deben ser iguales. Por tanto, los coeficientes de x^n en la ecuación 5 deben ser de 0:

$$(n + 2)(n + 1)c_{n+2} + c_n = 0$$

6 $$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n + 1)(n + 2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

La ecuación 6 se llama *relación de recursión*. Si c_0 y c_1 son conocidas, esta ecuación permite determinar recursivamente los coeficientes restantes poniendo $n = 0, 1, 2, 3,...$ en sucesión.

Ponga $n = 0$: $$c_2 = -\frac{c_0}{1 \cdot 2}$$

Ponga $n = 1$: $$c_3 = -\frac{c_1}{2 \cdot 3}$$

Ponga $n = 2$: $$c_4 = -\frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!}$$

Ponga $n = 3$: $$c_5 = -\frac{c_3}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{c_1}{5!}$$

Ponga $n = 4$: $$c_6 = -\frac{c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{4!\,5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{6!}$$

Ponga $n = 5$: $$c_7 = -\frac{c_5}{6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{5!\,6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{7!}$$

En este momento ya puede identificarse el patrón:

Para los coeficientes pares, $c_{2n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{(2n)!}$

Para los coeficientes impares, $c_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{c_1}{(2n + 1)!}$

Al poner estos valores en la ecuación 2, se escribe la solución como

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots$$

$$= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)$$

$$+ c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Note que hay dos constantes arbitrarias, c_0 y c_1. ■

NOTA 1 Se reconocen las series obtenidas en el ejemplo 1 como la serie de Maclaurin para cos x y sen x, respectivamente. (Véanse la ecuaciones 11.10.16 y 11.10.15.) Por tanto, se podría escribir la solución como

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x$$

Pero usualmente no se pueden expresar soluciones de ecuaciones diferenciales de series de potencias en términos de funciones conocidas.

EJEMPLO 2 Resuelva $y'' - 2xy' + y = 0$.

SOLUCIÓN Suponga que hay una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Entonces $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

y $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

como en el ejemplo 1. Al sustituir en la ecuación diferencial se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n-1) c_n] x^n = 0$$

Esta ecuación es cierta si los coeficientes de x^n son 0:

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n-1) c_n = 0$$

7 $$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} c_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Esta relación de recursión se resuelve poniendo $n = 0, 1, 2, 3,...$ sucesivamente en la ecuación 7:

$$\text{Ponga } n = 0: \qquad c_2 = \frac{-1}{1 \cdot 2} c_0$$

$$\text{Ponga } n = 1: \qquad c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} c_1$$

$$\text{Ponga } n = 2: \qquad c_4 = \frac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\frac{3}{4!} c_0$$

$$\text{Ponga } n = 3: \qquad c_5 = \frac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \frac{1 \cdot 5}{5!} c_1$$

$$\text{Ponga } n = 4: \qquad c_6 = \frac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\frac{3 \cdot 7}{4!\, 5 \cdot 6} c_0 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} c_0$$

$$\text{Ponga } n = 5: \qquad c_7 = \frac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5!\, 6 \cdot 7} c_1 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1$$

$$\text{Ponga } n = 6: \qquad c_8 = \frac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0$$

$$\text{Ponga } n = 7: \qquad c_9 = \frac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1$$

En general, los coeficientes pares están dados por

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} c_0$$

y los coeficientes impares por

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} c_1$$

La solución es

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

$$= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!}x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!}x^8 - \cdots\right)$$

$$+ c_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!}x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!}x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!}x^9 + \cdots\right)$$

u

8
$$y = c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n}\right)$$

$$+ c_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}\right)$$



NOTA 2 En el ejemplo 2 se tuvo que *suponer* que la ecuación diferencial tenía una solución con series de potencias. Pero ahora se podría verificar directamente que la función dada por la ecuación 8 es en efecto una solución.

NOTA 3 A diferencia de la situación del ejemplo 1, las series de potencias que surgen en la solución del ejemplo 2 no definen funciones elementales. Las funciones

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}$$

y

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

son funciones perfectamente satisfactorias, pero no pueden expresarse en términos de funciones conocidas. Se pueden usar estas expresiones de series de potencias para y_1 y y_2 para calcular valores aproximados de las funciones e incluso graficarlas. La figura 1 muestra las primeras sumas parciales $T_0, T_2, T_4, \ldots$ (polinomios de Taylor) para $y_1(x)$, y se observa cómo convergen en y_1. De igual manera se pueden graficar lo mismo y_1 que y_2, como en la figura 2.

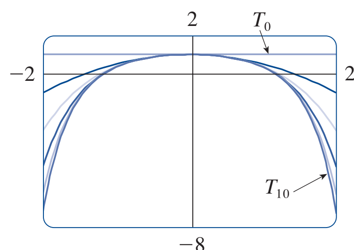


FIGURA 1

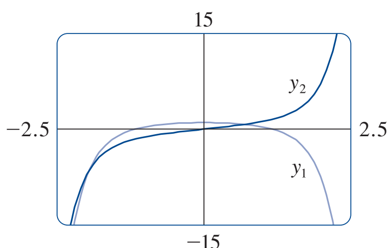


FIGURA 2

NOTA 4 Si se pidiera resolver el problema de valor inicial

$$y'' - 2xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

se observaría del teorema 11.10.5 que

$$c_0 = y(0) = 0 \qquad c_1 = y'(0) = 1$$

Esto simplificaría los cálculos en el ejemplo 2, ya que todos los coeficientes pares serían de 0. La solución al problema de valor inicial es

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

17.4 EJERCICIOS

1-11 Use series de potencias para resolver la ecuación diferencial.

1. $y' - y = 0$

2. $y' = xy$

3. $y' = x^2 y$

4. $(x-3)y' + 2y = 0$

5. $y'' + xy' + y = 0$

6. $y'' = y$

7. $(x-1)y'' + y' = 0$

8. $y'' = xy$

9. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

10. $y'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11. $y'' + x^2 y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

12. La solución del problema de valor inicial

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

se llama función de Bessel de orden 0.

(a) Resuelva el problema de valor inicial para determinar un desarrollo de series de potencias para la función de Bessel.



(b) Grafique varios polinomios de Taylor hasta llegar a uno que parezca una buena aproximación de la función de Bessel en el intervalo $[-5, 5]$.

17 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
(b) Escriba la ecuación auxiliar.
(c) ¿Cómo se usan las raíces de la ecuación auxiliar para resolver la ecuación diferencial? Escriba la forma de la solución para cada uno de los tres casos que puedan ocurrir.

2. (a) ¿Qué es un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de segundo orden?
(b) ¿Qué es un problema de valor frontera para una ecuación de ese tipo?

3. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
(b) ¿Cuál es la ecuación complementaria? ¿Cómo ayuda esta a resolver la ecuación diferencial original?
(c) Explique cómo funciona el método de coeficientes indeterminados.
(d) Explique cómo funciona el método de variación de parámetros.

4. Mencione dos aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

5. ¿Cómo se usan las series de potencias para resolver una ecuación diferencial?

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si y_1 y y_2 son soluciones de $y'' + y = 0$, entonces $y_1 + y_2$ también es una solución de la ecuación.

2. Si y_1 y y_2 son soluciones de $y'' + 6y' + 5y = x$, entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución de la ecuación.

3. La solución general de $y'' - y = 0$ puede escribirse como

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x$$

4. La ecuación $y'' - y = e^x$ tiene una solución particular de la forma

$$y_p = Ae^x$$

EJERCICIOS

1-10 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $4y'' - y = 0$

2. $y'' - 2y' + 10y = 0$

3. $y'' + 3y = 0$

4. $y'' + 8y' + 16y = 0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x\cos x$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \operatorname{sen} 2x$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = 1 + e^{-2x}$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \csc x, \quad 0 < x < \pi/2$

11-14 Resuelva el problema de valor inicial.

11. $y'' + 6y' = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 12$

12. $y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

13. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

14. $9y'' + y = 3x + e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

15-16 Resuelva el problema de valor frontera, si es posible.

15. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1$

16. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -e^{-2\pi}$

17. Use series de potencias para resolver el problema de valor inicial

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

18. Use series de potencias para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - xy' - 2y = 0$$

19. Un circuito en serie contiene un resistor con $R = 40\ \Omega$, un inductor con $L = 2$ H, un capacitor con $C = 0.0025$ F y una batería de 12 V. La carga inicial es de $Q = 0.01$ C y la corriente inicial de 0. Determine la carga en el momento t.

20. Un resorte con masa de 2 kg tiene una constante de amortiguación de 16, y una fuerza de 12.8 N lo mantiene estirado 0.2 m más allá de su longitud natural. Determine la posición de la masa en el momento t si parte de la posición de equilibrio con una velocidad de 2.4 m/s.

21. Suponga que la Tierra es una esfera sólida de densidad uniforme con masa M y radio $R = 6370$ km. Para una partícula de masa m dentro de la Tierra a una distancia r del centro de la Tierra, la fuerza gravitacional que atrae la partícula al centro es

$$F_r = \frac{-GM_r m}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y M_r la masa de la Tierra dentro de la esfera de radio r.

(a) Demuestre que $F_r = \dfrac{-GMm}{R^3}\, r$.

(b) Suponga que se perfora un agujero a través de la Tierra a lo largo de un diámetro. Demuestre que si una partícula de masa m es separada del resto en la superficie y arrojada al agujero, entonces la distancia $y = y(t)$ de la partícula desde el centro de la Tierra en el momento t está dada por

$$y''(t) = -k^2 y(t)$$

donde $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

(c) Concluya del inciso (b) que la partícula es sometida a movimiento armónico simple. Determine el período T.

(d) ¿Con qué velocidad pasa la partícula por el centro de la Tierra?

Apéndices

A Números, desigualdades y valores absolutos

El cálculo se basa en el sistema de números reales. Comienza con los **enteros**:

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

Después se construyen los **números racionales**, los cuales son razones de enteros. Así, cualquier número racional r puede expresarse como

$$r = \frac{m}{n} \quad \text{donde } m \text{ y } n \text{ son enteros y } n \neq 0$$

Ejemplos son

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que la división entre 0 siempre se descarta, así que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas o determinadas.) Algunos números reales, como $\sqrt{2}$, no pueden expresarse como una razón de enteros, debido a ello se llaman **números irracionales**. Se puede demostrar, con grados variables de dificultad, que los siguientes también son números irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \operatorname{sen} 1° \qquad \log_{10} 2$$

El conjunto de todos los números reales suele denotarse con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando se usa la palabra *número* sin calificarlo, se refiere a "número real".

Todos los números tienen una representación decimal. Si el número es racional, el decimal correspondiente es repetitivo. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.317171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite hasta el infinito.) Por otra parte, si el número es irracional, los decimales no tienen un patrón repetitivo:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si se detiene el desarrollo decimal de cualquier número en cierto lugar, se obtiene una aproximación del número. Por ejemplo, se puede escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo $\approx$ se lee como "es aproximadamente igual a". Cuantos más decimales se conserven, mejor será la aproximación obtenida.

Los números reales pueden representarse con puntos en una recta, como en la figura 1. La dirección positiva (a la derecha) se indica con una flecha. Elija un punto de referencia arbitrario O, llamado **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x es representado por el punto en la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ es representado por el punto x unidades a la izquierda del origen. Así, cada número real es representado por un punto en la recta, y cada punto P en la recta corresponde exactamente a un número real. El número asociado con el punto P se llama la **coordenada**

de P y la recta se llama entonces **recta de coordenadas**, o **recta de números reales** o simplemente **recta real**. A menudo se identifica el punto con su coordenada y se piensa un número como si fuera un punto en la recta real.

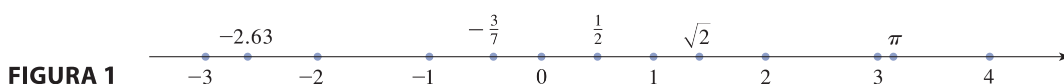


FIGURA 1

Los números reales están ordenados. Se dice que *a es menor que b* y se escribe $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a se sitúa a la izquierda de b en la recta numérica. (En forma equivalente, se dice que *b es mayor* que a y se escribe $b > a$.) El símbolo $a \leqslant b$ significa que $a < b$ o $a = b$ y se lee "a es menor que o igual a b" (De manera similar se puede interpretar el símbolo $b \geqslant a$). Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas:

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -3 > -\pi \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad \sqrt{2} \leqslant 2 \qquad 2 \leqslant 2$$

De aquí en adelante se usará el concepto de *notación de conjuntos*. Un **conjunto** es una colección de objetos, los cuales se llaman **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$. Si S y T son conjuntos, su **unión** $S \cup T$ es el conjunto que consta de todos los elementos en S o T (o tanto en S como en T). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$ que consta de todos los elementos que están tanto en S como en T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T. El conjunto vacío, denotado por $\emptyset$, es el conjunto que no contiene ningún elemento.

Algunos conjuntos pueden describirse enlistando sus elementos entre llaves. Por ejemplo, el conjunto A que consta de todos los enteros positivos menores que 7 puede escribirse como

$$A = \{1, 2, 3, 4. 5, 6\}$$

También podría escribirse A en *notación de construcción de conjuntos* como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

lo que se lee "A es el conjunto de x tal que x es un entero y $0 < x < 7$".

Intervalos

Algunos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, ocurren con frecuencia en el cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Por ejemplo, si $a < b$, el **intervalo abierto** de a a b consta de todos los números entre a y b y se denota con el símbolo (a, b). Usando la notación de construcción de conjuntos, se puede escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$



FIGURA 2
Intervalo abierto (a, b)

Observe que los puntos extremos del intervalo –es decir, a y b– se excluyen. Esto lo indican los paréntesis curvos ( ) y los puntos abiertos en la figura 2. El **intervalo cerrado** de a a b es el conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$



FIGURA 3
Intervalo cerrado $[a, b]$

Aquí se incluyen los puntos extremos del intervalo, como se indica en los paréntesis cuadrados [ ] y los puntos sólidos en la figura 3. También es posible incluir únicamente un punto extremo en un intervalo, como se advierte en la tabla 1.

También debe considerarse intervalos infinitos como

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

Esto no significa que ∞ ("infinito") sea un número. La notación (a, ∞) se refiere al conjunto de todos los números mayores que a, así que el símbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se extiende indefinidamente en la dirección positiva.

1 Tabla de intervalos

En la tabla 1 se enlistan los nueve posibles tipos de intervalos, de cuyo análisis se concluye que siempre se da por supuesto que $a < b$.

Notación	Descripción del conjunto	Imagen
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

Desigualdades

Cuando se trabaja con desigualdades, se han de considerar las reglas siguientes.

2 Reglas para desigualdades

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
5. Si $0 < a < b$, entonces $1/a > 1/b$.

La regla 1 establece que se puede sumar cualquier número en ambos miembros de una desigualdad, y la regla 2 que dos desigualdades pueden sumarse. Sin embargo, con la multiplicación hay que ser cuidadosos. La regla 3 sostiene que se pueden multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número *positivo*, pero la regla 4 estipula que **si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, se invertirá la dirección de la desigualdad**. Por ejemplo, si la desigualdad $3 < 5$ se multiplica por 2, se obtiene $6 > 10$, pero si se la multiplica por -2 se obtiene $-6 > -10$. Por último, la regla 5 establece que si se toman recíprocas, se invierte la dirección de una desigualdad (siempre que los números sean positivos).

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $1 + x < 7x + 5$.

SOLUCIÓN La desigualdad dada se satisface para algunos valores de x pero no para otros. *Resolver* una desigualdad significa determinar el conjunto de números x para los cuales la desigualdad es verdadera. Esto se llama *conjunto de soluciones*.

Primero se resta 1 de cada miembro de la desigualdad (usando la regla 1 con $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

Después se resta $7x$ de ambos miembros (regla 1 con $c = -7x$):

$$-6x < 4$$

Ahora se dividen ambos miembros entre -6 (regla 4 con $c = -\frac{1}{6}$):

$$x > -\tfrac{4}{6} = -\tfrac{2}{3}$$

Todos estos pasos pueden invertirse, así que el conjunto de soluciones consta de todos los números mayores que $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $(-\frac{2}{3}, \infty)$. ■

EJEMPLO 2 Resuelva las desigualdades $4 \leqslant 3x - 2 < 13$.

SOLUCIÓN Aquí el conjunto de soluciones consta de todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades. Al usar las reglas dadas en (2), se ve que las desigualdades siguientes son equivalentes:

$$4 \leqslant 3x - 2 < 13$$

$$6 \leqslant 3x < 15 \qquad \text{(se suma 2)}$$

$$2 \leqslant x < 5 \qquad \text{(se divide entre 3)}$$

Por tanto, el conjunto de soluciones es $[2, 5)$. ■

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

SOLUCIÓN Primero se factoriza el miembro izquierdo:

$$(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$$

Se sabe que la ecuación correspondiente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tiene las soluciones 2 y 3. Los números 2 y 3 dividen la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

Un método visual para resolver el ejemplo 3 es usar un dispositivo de graficación para graficar la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ (como en la figura 4) y observar que la curva se sitúa en o bajo el eje x cuando $2 \leqslant x \leqslant 3$.

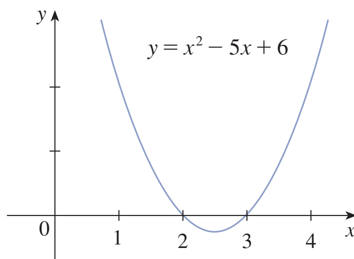


FIGURA 4

En cada uno de estos intervalos se determinan los signos de los factores. Por ejemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0$$

Luego se registran estos signos en la tabla siguiente:

Intervalo	$x - 2$	$x - 3$	$(x - 2)(x - 3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Otro método para obtener la información en la tabla es con *valores de prueba*. Por ejemplo, si se usa el valor de prueba $x = 1$ para el intervalo $(-\infty, 2)$, la sustitución en $x^2 - 5x + 6$ da

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

El polinomio $x^2 - 5x + 6$ no cambia de signo dentro de ninguno de los tres intervalos, así que se concluye que es positivo en $(-\infty, 2)$.

Luego, según la tabla, $(x - 2)(x - 3)$ es negativo cuando $2 < x < 3$. Así, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ es

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3]$$

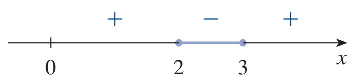


FIGURA 5

Observe que se han incluido los puntos extremos 2 y 3, porque se busca valores de x tales que el producto sea negativo o cero. La solución se ilustra en la figura 5. ■

EJEMPLO 4 Resuelva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUCIÓN Primero se trasladan todos los términos diferentes de cero a uno de los lados del signo de la desigualdad y se factoriza la expresión resultante:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{o} \qquad x(x - 1)(x + 4) > 0$$

Como en el ejemplo 3, se resuelve la ecuación correspondiente $x(x - 1)(x + 4) = 0$ y se usan las soluciones $x = -4$, $x = 0$ y $x = 1$ para dividir la recta real en cuatro intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. En cada intervalo, el producto mantiene un signo constante, los cuales se enlistan en la tabla siguiente:

Intervalo	x	$x - 1$	$x + 4$	$x(x - 1)(x + 4)$
$x < -4$	−	−	−	−
$-4 < x < 0$	−	−	+	+
$0 < x < 1$	+	−	+	−
$x > 1$	+	+	+	+



FIGURA 6

Entonces, en la tabla se lee que el conjunto de soluciones es

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ o } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

La solución se ilustra en la figura 6. ■

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales. Las distancias siempre son positivas o de 0, así que se tiene

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para cualquier número } a$$

Por ejemplo:

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general, se tiene:

3
$$|a| = a \qquad \text{si } a \geqslant 0$$
$$|a| = -a \qquad \text{si } a < 0$$

Recuerde que si a es negativo, $-a$ es positivo.

EJEMPLO 5 Exprese $|3x - 2|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

SOLUCIÓN

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } 3x-2 \geqslant 0 \\ -(3x-2) & \text{si } 3x-2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2-3x & \text{si } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

■

Recuerde que el símbolo $\sqrt{\ }$ significa "la raíz cuadrada positiva de". Así, $\sqrt{r} = s$ significa $s^2 = r$ y $s \geqslant 0$. Por tanto, la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera. Es verdadera solo cuando $a \geqslant 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, así se tiene que $\sqrt{a^2} = -a$. En vista de (3), se tiene entonces la ecuación

4 $$\sqrt{a^2} = |a|$$

la cual es cierta para todos los valores de a.

En los ejercicios se dan sugerencias para demostrar las propiedades siguientes.

5 Propiedades de los valores absolutos Suponga que a y b son cualesquiera números reales y que n es un entero. Entonces,

1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$ **3.** $|a^n| = |a|^n$

Para resolver ecuaciones o desigualdades que implican valores absolutos, suele ser muy útil usar los enunciados siguientes.

6 Suponga que $a > 0$. Entonces,

4. $|x| = a$ si, y solo si $x = \pm a$

5. $|x| < a$ si, y solo si $-a < x < a$

6. $|x| > a$ si, y solo si $x > a$ o $x < -a$

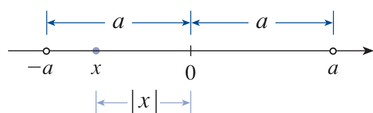


FIGURA 7

Por ejemplo, la desigualdad $|x| < a$ indica que la distancia de x al origen es menor que a, y en la figura 7 puede verse que eso es cierto si, y solo si, x se sitúa entre $-a$ y a.

Si a y b son cualesquiera números reales, la distancia entre a y b es el valor absoluto de la diferencia, es decir $|a - b|$, lo cual también es igual a $|b - a|$. (Véase la figura 8.)

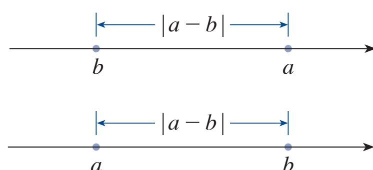


FIGURA 8
Longitud de un segmento de recta $= |a - b|$

EJEMPLO 6 Resuelva $|2x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN Por la propiedad 4 de (6), $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$2x - 5 = 3 \qquad \text{o} \qquad 2x - 5 = -3$$

Así, $2x = 8$ o $2x = 2$. Por tanto, $x = 4$ o $x = 1$. ■

EJEMPLO 7 Resuelva $|x - 5| < 2$.

SOLUCIÓN 1 Por la propiedad 5 de (6), $|x - 5| < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

En consecuencia, al sumar 5 a cada miembro se tiene

$$3 < x < 7$$

y el conjunto de soluciones es el intervalo abierto (3, 7).

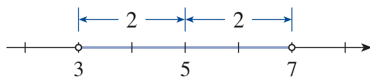


FIGURA 9

SOLUCIÓN 2 Geométricamente, el conjunto de soluciones consta de todos los números x cuya distancia desde 5 es menor que 2. En la figura 9 se ve que este es el intervalo (3, 7). ■

EJEMPLO 8 Resuelva $|3x + 2| \geqslant 4$.

SOLUCIÓN Por las propiedades 4 y 6 de (6), $|3x + 2| \geqslant 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{o} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

En el primer caso $3x \geqslant 2$, lo cual da $x \geqslant \frac{2}{3}$. En el segundo caso, $3x \leqslant -6$, lo cual da $x \leqslant -2$. Así, el conjunto de soluciones es

$$\left\{x \mid x \leqslant -2 \ \text{ o } \ x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = (-\infty, -2] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right)$$ ■

Otra propiedad importante del valor absoluto, llamada desigualdad del triángulo, se utiliza con frecuencia no solo en el cálculo, sino también en las matemáticas en general.

7 **La desigualdad del triángulo** Si a y b son cualesquiera números reales, entonces

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Observe que si los números a y b son positivos o negativos, los dos miembros de la desigualdad del triángulo en realidad son iguales. Pero si a y b tienen signos opuestos, el miembro izquierdo implica una sustracción mas no el derecho. Esto hace que la desigualdad del triángulo parezca razonable, pero puede comprobarse de la manera siguiente.

Note que

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

siempre es cierta, porque a es igual a $|a|$ o $-|a|$. El enunciado correspondiente para b es

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Al sumar estas desigualdades se obtiene:

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Si ahora se aplican las propiedades 4 y 5 (con x reemplazada por $a + b$ y a por $|a| + |b|$), se obtiene:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

lo cual es lo que se quería demostrar.

EJEMPLO 9 Si $|x - 4| < 0.1$ y $|y - 7| < 0.2$, use la desigualdad del triángulo para estimar $|(x + y) - 11|$.

SOLUCIÓN A fin de usar la información dada, se emplea la desigualdad del triángulo con $a = x - 4$ y $b = y - 7$:

$$\begin{aligned} |(x + y) - 11| &= |(x - 4) + (y - 7)| \\ &\leqslant |x - 4| + |y - 7| \\ &< 0.1 + 0.2 = 0.3 \end{aligned}$$

Así, $$|(x + y) - 11| < 0.3$$ ■

A EJERCICIOS

1-12 Reescriba la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$

2. $|5| - |-23|$

3. $|-\pi|$

4. $|\pi - 2|$

5. $|\sqrt{5} - 5|$

6. $||-2| - |-3||$

7. $|x - 2|$ si $x < 2$

8. $|x - 2|$ si $x > 2$

9. $|x + 1|$

10. $|2x - 1|$

11. $|x^2 + 1|$

12. $|1 - 2x^2|$

13-38 Resuelva la desigualdad en términos de intervalos e ilustre el conjunto de soluciones en la recta de números reales.

13. $2x + 7 > 3$

14. $3x - 11 < 4$

15. $1 - x \leqslant 2$

16. $4 - 3x \geqslant 6$

17. $2x + 1 < 5x - 8$

18. $1 + 5x > 5 - 3x$

19. $-1 < 2x - 5 < 7$

20. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

21. $0 \leqslant 1 - x < 1$

22. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$

23. $4x < 2x + 1 \leqslant 3x + 2$

24. $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$

25. $(x - 1)(x - 2) > 0$

26. $(2x + 3)(x - 1) \geqslant 0$

27. $2x^2 + x \leqslant 1$

28. $x^2 < 2x + 8$

29. $x^2 + x + 1 > 0$

30. $x^2 + x > 1$

31. $x^2 < 3$

32. $x^2 \geqslant 5$

33. $x^3 - x^2 \leqslant 0$

34. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$

35. $x^3 > x$

36. $x^3 + 3x < 4x^2$

37. $\dfrac{1}{x} < 4$

38. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

39. La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura en grados Celsius y F la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Qué intervalo en la escala de Celsius corresponde al rango de temperatura $50 \leqslant F \leqslant 95$?

40. Use la relación entre C y F dada en el ejercicio 39 para determinar el intervalo en la escala de Fahrenheit correspondiente al rango de temperatura $20 \leqslant C \leqslant 30$.

41. Cuando el aire seco se mueve hacia arriba, se expande, y al hacerlo se enfría a razón de alrededor de 1 °C por cada 100 m de ascenso, hasta aproximadamente 12 km.
(a) Si la temperatura en la superficie es de 20 °C, escriba una fórmula para la temperatura a la altura h.
(b) ¿Qué rango de temperatura es de esperar si un avión despega y alcanza una altura máxima de 5 km?

42. Si una pelota se lanza hacia arriba desde el tejado de un edificio de 30 m de altura con una velocidad inicial de 10 m/s, la altura h sobre la superficie t segundos después será

$$h = 30 + 10t - 5t^2$$

¿Durante qué intervalo de tiempo la pelota estará al menos 15 m sobre la superficie?

43-46 Despeje x en cada ecuación.

43. $|2x| = 3$

44. $|3x + 5| = 1$

45. $|x + 3| = |2x + 1|$

46. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

47-56 Resuelva la desigualdad.

47. $|x| < 3$

48. $|x| \geqslant 3$

49. $|x - 4| < 1$

50. $|x - 6| < 0.1$

51. $|x + 5| \geqslant 2$

52. $|x + 1| \geqslant 3$

53. $|2x - 3| \leqslant 0.4$

54. $|5x - 2| < 6$

55. $1 \leqslant |x| \leqslant 4$

56. $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

57-58 Despeje x, suponiendo que a, b y c son constantes positivas.

57. $a(bx - c) \geqslant bc$

58. $a \leqslant bx + c < 2a$

59-60 Despeje x, suponiendo que a, b y c son constantes negativas.

59. $ax + b < c$

60. $\dfrac{ax + b}{c} \leqslant b$

---

61. Suponga que $|x - 2| < 0.01$ y $|y - 3| < 0.04$. Use la desigualdad del triángulo para demostrar que $|(x + y) - 5| < 0.05$

62. Demuestre que si $|x + 3| < \frac{1}{2}$, entonces $|4x + 13| < 3$.

63. Demuestre que si $a < b$, entonces $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

64. Use la regla 3 para comprobar la regla 5 de (2).

65. Compruebe que $|ab| = |a||b|$. [*Sugerencia*: Use la ecuación 4.]

66. Compruebe que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

67. Demuestre que si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

68. Compruebe que $|x - y| \geqslant |x| - |y|$. [*Sugerencia:* use la desigualdad del triángulo con $a = x - y$ y $b = y$.]

69. Demuestre que la suma, diferencia y producto de números racionales son números racionales.

70. (a) ¿La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional?
(b) ¿El producto de dos números irracionales es siempre un número irracional?

B Rectas y geometría usando coordenadas

Así como los puntos en una recta pueden identificarse con números reales asignándoles coordenadas, como se describió en el apéndice A, los puntos en un plano pueden reconocerse con pares ordenados de números reales. Para comenzar se dibujan dos rectas de coordenadas perpendiculares que intersecan en el origen O en cada recta. Usualmente una recta es horizontal con dirección positiva a la derecha y se llama eje x; la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba y se le denomina eje y.

Cualquier punto P en el plano puede localizarse mediante un par ordenado único de números como sigue. Dibuje rectas que pasan por P perpendiculares a los ejes x y y, las cuales intersecan los ejes en puntos con coordenadas a y b, como se muestra en la figura 1. Entonces, al punto P se le asigna el par ordenado (a, b). El primer número a se llama **coordenada *x*** de P; el segundo número b se llama **coordenada *y*** de P. Se dice que P es el punto con coordenadas (a, b) y se denota el punto con el símbolo $P(a, b)$. Varios puntos han sido rotulados con sus coordenadas en la figura 2.

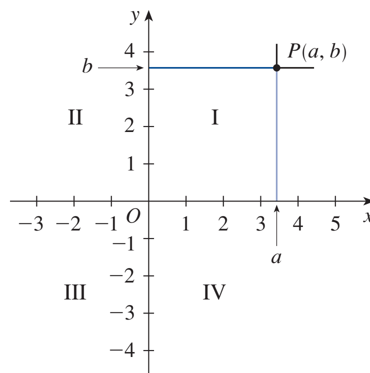


FIGURA 1

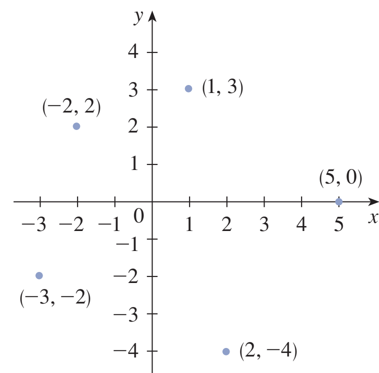


FIGURA 2

Al invertir el proceso precedente podemos empezar con un par ordenado (a, b) y llegar al correspondiente punto P. A menudo, el punto P se identifica con el par ordenado (a, b) y se le llama "el punto (a, b)". [Aunque la notación usada para un intervalo abierto

(a, b) es la misma que la notación usada para un punto (a, b), podrá saber por el contexto qué significado es el correcto.]

Este sistema de coordenadas se llama **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas** en honor del matemático francés René Descartes (1596-1650), aunque otro francés, Pierre Fermat (1601-1665), inventó los principios de la geometría analítica en la misma época que Descartes. El plano provisto con este sistema de coordenadas se llama **plano de coordenadas** o **plano cartesiano** y se denota con $\mathbb{R}^2$.

Los ejes x y y se llaman **ejes de coordenadas** y dividen el plano cartesiano en cuatro cuadrantes, rotulados como I, II, III y IV en la figura 1. Nótese que el primer cuadrante consta de aquellos puntos cuyas coordenadas x y y son ambas positivas.

EJEMPLO 1 Describa y trace las regiones dadas por los conjuntos siguientes.

(a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ (c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUCIÓN

(a) Los puntos cuyas coordenadas x son 0 o positivas se ubican en el eje y o a la derecha de él, como lo indica la región sombreada de la figura 3(a).

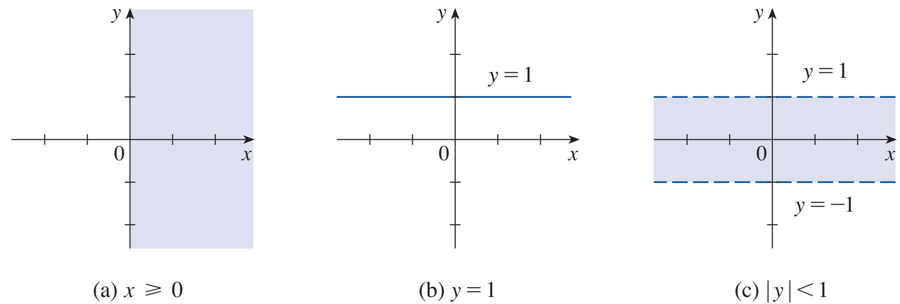


FIGURA 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

(b) El conjunto de todos los puntos con coordenada $y = 1$ es una recta horizontal una unidad arriba del eje x [véase la figura 3(b)].

(c) Recuérdese del apéndice A que

$$|y| < 1 \qquad \text{si, y solo si,} \qquad -1 < y < 1$$

La región dada consta de aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas y se sitúan entre –1 y 1. Así, la región consta de todos los puntos que se hallan entre (pero no en) las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$. [Estas rectas aparecen como líneas punteadas en la figura 3(c) para indicar que los puntos en estas rectas no se ubican en el conjunto.] ■

Recuerde del apéndice A que la distancia entre los puntos a y b en una recta numérica es $|a - b| = |b - a|$. Así, la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_3(x_2, y_1)$ en una recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$ y la distancia entre $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_2, y_1)$ en una recta vertical debe ser $|y_2 - y_1|$. (Véase la figura 4.)

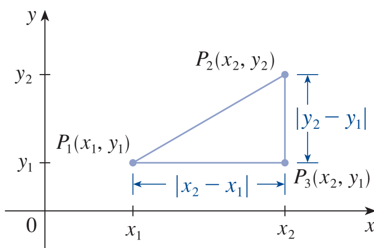


FIGURA 4

Para determinar la distancia $|P_1P_2|$ entre cualesquiera dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, nótese que el triángulo $P_1P_2P_3$ en la figura 4 es un triángulo rectángulo, así que por el teorema de Pitágoras se tiene

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1 Fórmula de la distancia La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO 2 La distancia entre (1, –2) y (5, 3) es

$$\sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$ ■

Rectas

Si se desea encontrar una ecuación de una recta dada L; tal ecuación se satisface por las coordenadas de los puntos en L y por ningún otro punto. Para determinar la ecuación de L se usa su pendiente, la cual es una medida de lo pronunciado de la recta.

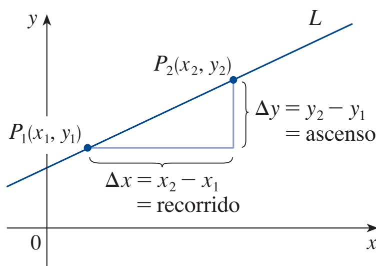


FIGURA 5

2 Definición La pendiente de una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no se define.

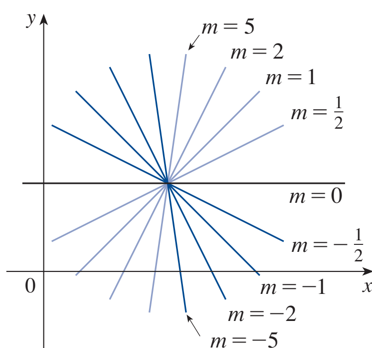


FIGURA 6

Así, la pendiente de una recta es la razón del cambio en y, Δy, en relación con el cambio en x, Δx. (Véase la figura 5.) La pendiente es por tanto la razón de cambio de y con respecto a x. El hecho de que la línea sea recta significa que la razón de cambio es constante.

La figura 6 muestra varias rectas con sus pendientes. Observe que las rectas con pendiente positiva se inclinan arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan abajo a la derecha. Note también que las rectas más pronunciadas son aquellas para las cuales el valor absoluto de la pendiente es mayor, y que una recta horizontal tiene pendiente 0.

Se determina ahora una ecuación de la recta que pasa por un punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ rectas en esta recta si, y solo si, la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m; es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede reescribir de la manera siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

y se observa que esta ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por tanto, es una ecuación de la recta dada.

3 Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta Una ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 3 Determine una ecuación de la recta que pasa por $(1, -7)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Usando (3) con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, y $y_1 = -7$, se obtiene una ecuación de la recta como

$$y + 7 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$

lo que puede reescribirse como

$$2y + 14 = -x + 1 \qquad \text{o} \qquad x + 2y + 13 = 0$$

■

EJEMPLO 4 Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos (–1, 2) y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN Por la definición 2, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

Al usar la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, se obtiene

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1)$$

lo que se simplifica como $\qquad 3x + 2y = 1$ ■

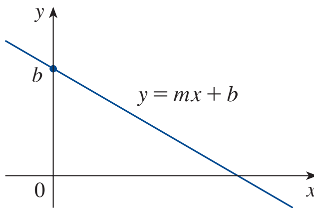


FIGURA 7

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente m e intersección b en y. (Véase la figura 7.) Esto significa que interseca el eje y en el punto $(0, b)$, así que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x_1 = 0$ y $y_1 = b$, se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica de la manera siguiente.

> **4** **Forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta** Una ecuación de la recta con pendiente m e intersección b en y es
>
> $$y = mx + b$$

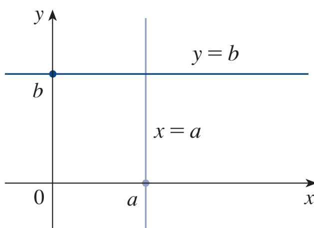


FIGURA 8

En particular, si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, así que su ecuación es $y = b$, donde b es la intersección en y (véase la figura 8). Una recta vertical no tiene pendiente, pero se puede escribir su ecuación como $x = a$, donde a es la intersección en x, porque la coordenada x de todos los puntos en la recta es a.

Observe que la ecuación de cada recta puede escribirse en la forma

5 $$Ax + By + C = 0$$

porque una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$ ($A = 1$, $B = 0$, $C = -a$) y una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$ ($A = -m$, $B = 1$, $C = -b$). A la inversa, si a partir de una ecuación general de primer grado, es decir, una ecuación de la forma (5), donde A, B y C son constantes y A y B no son ambas 0, se puede demostrar que esa es la ecuación de una recta. Si $B = 0$, la ecuación se convierte

en $Ax + C = 0$ o $x = -C/A$, lo que representa una recta vertical con intersección en x $-C/A$. Si $B \neq 0$, la ecuación puede reescribirse despejando y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

y se reconoce como la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta ($m = -A/B$, $b = -C/B$). En consecuencia, una ecuación de la forma (5) se llama **ecuación lineal** o **ecuación general de una recta**. Para abreviar, a menudo se dice “la recta $Ax + By + C = 0$” en lugar de “la recta cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$”.

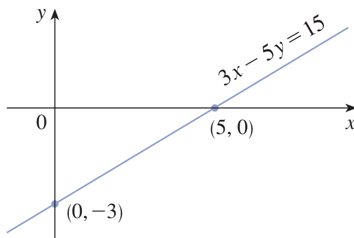


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la ecuación $3x - 5y = 15$.

SOLUCIÓN Como la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para dibujar la gráfica, se puede determinar dos puntos en la recta, de los cuales los más fáciles de encontrar son las intersecciones. Al sustituir $y = 0$ (la ecuación del eje x) en la ecuación dada, se obtiene $3x = 15$, así que $x = 5$ es la intersección en x. Al sustituir $x = 0$ en la ecuación, se observa que la intersección en y es -3. Esto permite trazar la gráfica como en la figura 9. ■

EJEMPLO 6 Grafique la desigualdad $x + 2y > 5$.

SOLUCIÓN Se pide trazar la gráfica del conjunto $\{(x, y) \mid x + 2y > 5\}$ y se empieza despejando y en la desigualdad:

$$x + 2y > 5$$
$$2y > -x + 5$$
$$y > -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

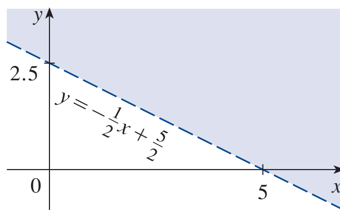


FIGURA 10

Compare esta desigualdad con la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, la cual representa una recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ e intersección en y $\frac{5}{2}$. Observe que la gráfica dada consta de puntos cuyas coordenadas y son *mayores* que aquellas en la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Así, la gráfica es la región que se encuentra *arriba* de la línea, como se ilustra en la figura 10. ■

Rectas paralelas y perpendiculares

Las pendientes pueden usarse para demostrar que las rectas son paralelas o perpendiculares. Los hechos siguientes son comprobados, por ejemplo, en *Precalculus: Mathematics for Calculus*, séptima ed., por Stewart, Redlin y Watson (Belmont, California, 2016).

6 Rectas paralelas y perpendiculares

1. Dos rectas no verticales son paralelas si, y solo si, tienen la misma pendiente.
2. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si, y solo si, $m_1m_2 = -1$; es decir, si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EJEMPLO 7 Determine una ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN La recta dada puede escribirse en la forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

la cual está en forma de pendiente-intersección con $m = -\frac{2}{3}$. Rectas paralelas tienen la misma pendiente, así que la recta requerida tiene pendiente $-\frac{2}{3}$ y su ecuación en forma punto-pendiente es

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Esta ecuación puede escribirse como $2x + 3y = 16$. ■

EJEMPLO 8 Demuestre que las rectas $2x + 3y = 1$ y $6x - 4y - 1 = 0$ son perpendiculares.

SOLUCIÓN Las ecuaciones pueden escribirse como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

de lo que se deduce que las pendientes son

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1m_2 = -1$, las rectas son perpendiculares. ■

B EJERCICIOS

1-6 Determine la distancia entre los puntos.

1. $(1, 1)$, $(4, 5)$

2. $(1, -3)$, $(5, 7)$

3. $(6, -2)$, $(-1, 3)$

4. $(1, -6)$, $(-1, -3)$

5. $(2, 5)$, $(4, -7)$

6. (a, b), (b, a)

7-10 Determine la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

7. $P(1, 5)$, $Q(4, 11)$

8. $P(-1, 6)$, $Q(4, -3)$

9. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$

10. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

11. Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ y $C(-4, 3)$ es isósceles.

12. (a) Demuestre que el triángulo con vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ y $C(2, -2)$ es un triángulo rectángulo usando la proposición recíproca del teorema de Pitágoras.
(b) Use pendientes para demostrar que ABC es un triángulo rectángulo.
(c) Determine el área del triángulo.

13. Demuestre que los puntos $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$ y $(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

14. (a) Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3,11)$ y $C(5, 15)$ son colineales (están en la misma línea) y compruebe que $|AB| + |BC| = |AC|$.
(b) Use pendientes para demostrar que A, B y C son colineales.

15. Demuestre que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

16. Demuestre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

17-20 Trace la gráfica de la ecuación.

17. $x = 3$

18. $y = -2$

19. $xy = 0$

20. $|y| = 1$

21-36 Halle una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

21. Que pasa por $(2, -3)$, pendiente 6

22. Que pasa por $(-1, 4)$, pendiente –3

23. Que pasa por $(1, 7)$, pendiente $\frac{2}{3}$

24. Que pasa por $(-3, -5)$, pendiente $-\frac{7}{2}$

25. Que pasa por $(2, 1)$ y $(1, 6)$

26. Que pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$

27. Pendiente 3, intersección en $y = -2$

28. Pendiente $\frac{2}{5}$, intersección en $y = 4$

29. Intersección en $x = 1$, intersección en $y = -3$

30. Intersección en $x = -8$, intersección en $y = 6$

31. Que pasa por $(4, 5)$, paralela al eje x

32. Que pasa por $(4, 5)$, paralela al eje y

33. Que pasa por $(1, -6)$, paralela a la recta $x + 2y = 6$

34. Intersección en $y = 6$, paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

35. Que pasa por $(-1, -2)$, perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Que pasa por $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$, perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

37-42 Halle la pendiente e intersección en y de la recta y dibuje su gráfica.

37. $x + 3y = 0$

38. $2x - 5y = 0$

39. $y = -2$

40. $2x - 3y + 6 = 0$

41. $3x - 4y = 12$

42. $4x + 5y = 10$

43-52 Trace la región en el plano xy.

43. $\{(x, y) \mid x < 0\}$

44. $\{(x, y) \mid y > 0\}$

45. $\{(x, y) \mid xy < 0\}$

46. $\{(x, y) \mid x \geqslant 1 \text{ y } y < 3\}$

47. $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2\}$

48. $\{(x, y) \mid |x| < 3 \text{ y } |y| < 2\}$

49. $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ y } x \leqslant 2\}$

50. $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$

51. $\{(x, y) \mid 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$

52. $\{(x, y) \mid -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\}$

53. Determine un punto en el eje y que sea equidistante de $(5, -5)$ y $(1, 1)$.

54. Demuestre que el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

55. Determine el punto medio del segmento de recta que une los puntos dados.
(a) $(1, 3)$ y $(7, 15)$
(b) $(-1, 6)$ y $(8, -12)$

56. Determine las longitudes de las medianas del triángulo con vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ y $C(8, 2)$. (Una mediana es un segmento de recta desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.)

57. Demuestre que las rectas $2x - y = 4$ y $6x - 2y = 10$ no son paralelas y determine su punto de intersección.

58. Demuestre que las rectas $3x - 5y + 19 = 0$ y $10x + 6y - 50 = 0$ son perpendiculares y determine su punto de intersección.

59. Encuentre una ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento de recta que une a los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$.

60. (a) Encuentre ecuaciones para los lados del triángulo con vértices $P(1, 0)$, $Q(3, 4)$ y $R(-1, 6)$.
(b) Encuentre ecuaciones para las medianas de este triángulo. ¿Dónde se intersecan?

61. (a) Demuestre que si las intersecciones en x y y de una recta son números diferentes de cero, a y b, respectivamente, la ecuación de la recta puede ponerse en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta ecuación se llama **forma de dos intersecciones** de una ecuación de una recta. También se conoce como forma simétrica o ecuación canónica de la recta.
(b) Use el inciso (a) para determinar una ecuación de la recta cuya intersección en x es 6 y cuya intersección en y es –8.

62. Kelly sale de Winnipeg a las 2:00 PM y conduce al oeste con una velocidad constante a lo largo de la autopista Trans-Canada. Pasa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, a las 4:00 PM.
(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.
(b) Dibuje la gráfica de la ecuación en el inciso (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

C Gráficas de ecuaciones de segundo grado

En el apéndice B se vio que una ecuación de primer grado, o lineal, $Ax + By + C = 0$ representa una recta. En esta sección analizará ecuaciones de segundo grado como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y = x^2 + 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1$$

las cuales representan un círculo, una parábola, una elipse y una hipérbola, respectivamente.

La gráfica de una ecuación de ese tipo en x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación y ofrece una representación visual de la ecuación. A la inversa, dada una curva en el plano xy, quizá tenga que determinar una ecuación que la represente, es decir, una ecuación satisfecha por las coordenadas de los puntos en la curva y por ningún otro punto. Esta es la otra mitad del principio básico de la geometría analítica formulado por Descartes y Fermat. La idea es que si una curva geométrica puede representarse con una ecuación algebraica, las reglas del álgebra pueden usarse para analizar el problema geométrico.

Círculos

Como un ejemplo de este tipo de problema, determine una ecuación del círculo con radio r y centro (h, k). Por definición, el círculo es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya

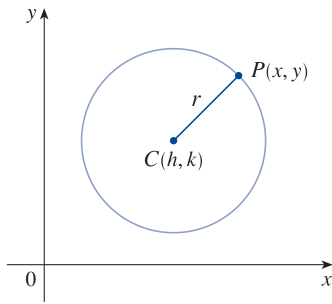


FIGURA 1

distancia desde el centro $C(h, k)$ es r. (Véase la figura 1.) Así, P está en el círculo si, y solo si, $|PC| = r$. Con base en la fórmula de la distancia se tiene

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

o, en forma equivalente, al elevar al cuadrado ambos miembros se obtiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Esta es la ecuación deseada.

1 **Ecuación de un círculo** Una ecuación del círculo con centro (h, k) y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen (0, 0), la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r$$

EJEMPLO 1 Determine una ecuación del círculo con radio 3 y centro $(2, -5)$.

SOLUCIÓN De la ecuación 1 con $r = 3$, $h = 2$ y $k = -5$ se obtiene

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

■

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ demostrando primero que representa un círculo y determinando después su centro y radio.

SOLUCIÓN Primero se agrupan los términos x y los y como sigue:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7$$

Después se completa el cuadrado dentro de cada grupo, añadiendo las constantes apropiadas (los cuadrados de la mitad de los coeficientes de x y y) a ambos miembros de la ecuación:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

o

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 3$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación estándar de un círculo (1), se ve que $h = -1$, $k = 3$ y $r = \sqrt{3}$, así que la ecuación dada representa un círculo con centro (–1, 3) y radio $\sqrt{3}$, como se traza en la figura 2.

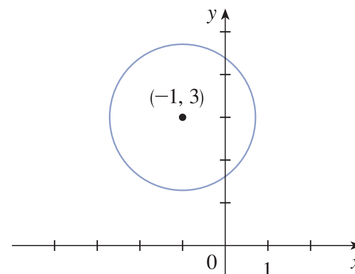


FIGURA 2
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

■

Parábolas

Las propiedades geométricas de las parábolas se examinan en la sección 10.5. Aquí se considerará una parábola como una gráfica de una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

EJEMPLO 3 Dibuje la gráfica de la parábola $y = x^2$.

SOLUCIÓN Establezca una tabla de valores, trace los puntos y únalos con una curva suave para obtener la gráfica de la figura 3.

x	$y = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

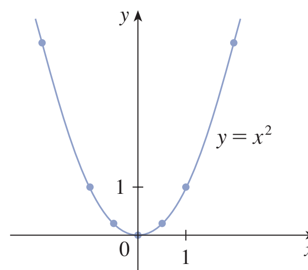


FIGURA 3

La figura 4 muestra las gráficas de varias parábolas con ecuaciones de la forma $y = ax^2$ para distintos valores del número a. En cada caso, el *vértice*, el punto donde la parábola cambia de dirección, es el origen. Vea que la parábola $y = ax^2$ se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia bajo si $a < 0$ (como en la figura 5).

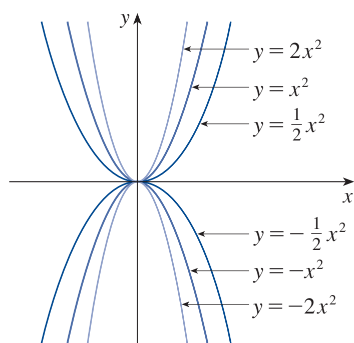
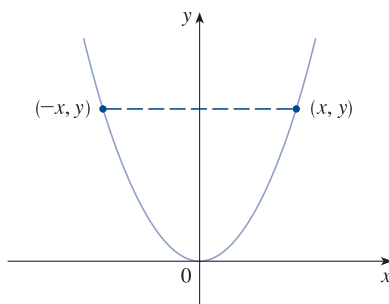
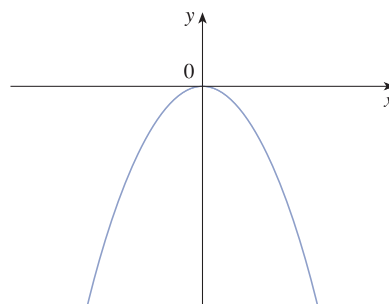


FIGURA 4



(a) $y = ax^2, \ a > 0$



(b) $y = ax^2, \ a < 0$

FIGURA 5

Nótese que si (x, y) satisface $y = ax^2$, lo mismo hace $(-x, y)$. Esto corresponde al hecho geométrico de que si la mitad derecha de la gráfica se refleja a través del eje y, se obtiene la mitad izquierda de la gráfica. Se dice que la gráfica es **simétrica con respecto al eje *y***.

> La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y si la ecuación no cambia cuando x se reemplaza por $-x$.

Si se intercambia x y y en la ecuación $y = ax^2$, el resultado es $x = ay^2$, la que también representa una parábola. (Intercambiar x y y equivale a reflejar a través de la recta diagonal $y = x$.) La parábola $x = ay^2$ se abre a la derecha si $a > 0$ y a la izquierda si $a < 0$.

(Véase la figura 6.) Esta vez la parábola es simétrica con respecto al eje x, porque si (x, y) satisface $x = ay^2$, también lo hace $(x, -y)$.

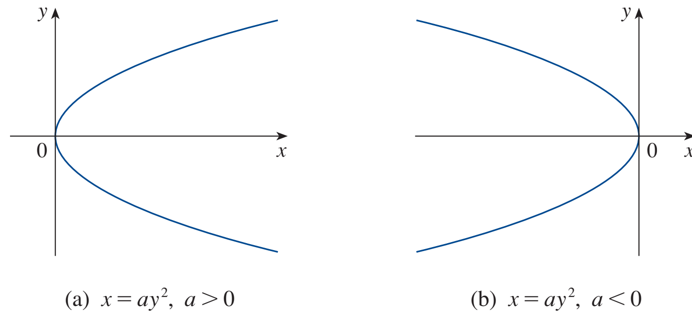


FIGURA 6 (a) $x = ay^2$, $a > 0$ (b) $x = ay^2$, $a < 0$

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje x si la ecuación no cambia cuando y es reemplazada por $-y$.

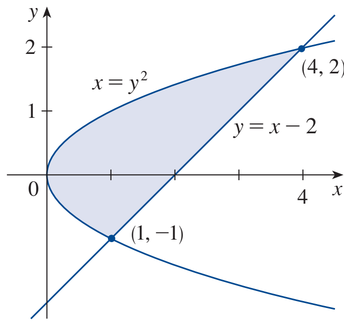


FIGURA 7

EJEMPLO 4 Trace la región acotada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = x - 2$.

SOLUCIÓN Primero determine los puntos de intersección resolviendo las dos ecuaciones. Al sustituir $x = y + 2$ en la ecuación $x = y^2$ se obtiene $y + 2 = y^2$, lo que da

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

así que $y = 2$ o -1. De este modo, los puntos de intersección son $(4, 2)$ y $(1, -1)$, y se dibuja la recta $y = x - 2$ que pasa por esos puntos. Luego se traza la parábola $x = y^2$ en referencia a la figura 6(a) y haciendo que la parábola pase por $(4, 2)$ y $(1, -1)$. La región acotada por $x = y^2$ y $y = x - 2$ representa la región finita cuyas fronteras son estas curvas. Esta región se muestra en la figura 7. ■

■ Elipses

La curva con ecuación

2
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b son números positivos, se llama **elipse** en posición estándar. (Las propiedades geométricas de las elipses se estudian en la sección 10.5.) Obsérvese que la ecuación 2 no cambia si x es reemplazada por $-x$ o y es reemplazada por $-y$, de manera que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes. Como recurso adicional para trazar la elipse, se determinan sus intersecciones.

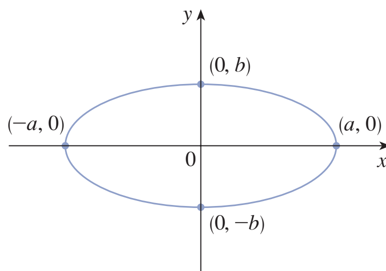


FIGURA 8
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Las **intersecciones en *x*** de una gráfica son las coordenadas x de los puntos donde la gráfica interseca el eje x. Se determinan estableciendo $y = 0$ en la ecuación de la gráfica.
Las **intersecciones en *y*** son las coordenadas y de los puntos donde la gráfica interseca el eje y. Se determinan estableciendo $x = 0$ en su ecuación.

Si se establece $y = 0$ en la ecuación 2, se obtiene $x^2 = a^2$, así que las intersecciones en x son $\pm a$. Al establecer $x = 0$, se obtiene $y^2 = b^2$, así que las intersecciones en y son $\pm b$. Usando esta información junto con la simetría se traza la elipse en la figura 8. Si $a = b$, la elipse es un círculo con radio a.

EJEMPLO 5 Trace la gráfica $9x^2 + 16y^2 = 144$.

SOLUCIÓN Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación está ahora en la forma estándar para una elipse (2), así se tiene que $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ y $b = 3$. Las intersecciones en x son ± 4; las intersecciones en y son ± 3. El trazo de la gráfica está en la figura 9.

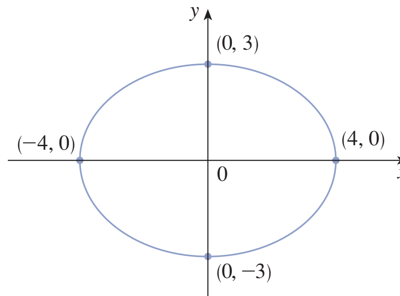


FIGURA 9
$9x^2 + 16y^2 = 144$

■

Hipérbolas

La curva con ecuación

3
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

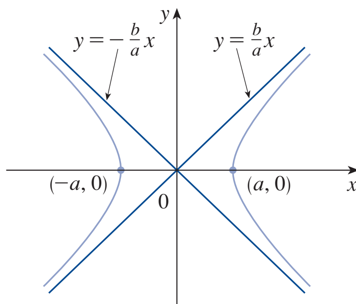


FIGURA 10
La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

se llama **hipérbola** en posición estándar. De nueva cuenta, la ecuación 3 no cambia cuando x es reemplazada por $-x$ o y es reemplazada por $-y$, de manera que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes. Para determinar las intersecciones en x se establece $y = 0$ y se obtiene $x^2 = a^2$ y $x = \pm a$. Sin embargo, si se escribe $x = 0$ en la ecuación 3, se obtiene $y^2 = -b^2$, lo cual es imposible, así que no hay intersección en y. De hecho, de la ecuación 3 se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

lo que indica que $x^2 \geqslant a^2$, así que $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Por tanto, se tiene $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola consta de dos partes, llamadas *ramas*, cuyo trazo se muestra en la figura 10.

Al dibujar la hipérbola es mejor trazar primero sus *asíntotas*, que son las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ que aparecen en la figura 10. Ambas ramas de la hipérbola aproximan las asíntotas; es decir, se acercan arbitrariamente a las asíntotas. Esto implica la idea de un límite, que se analiza en el capítulo 2. (Véase también el ejercicio 4.5.73.)

Intercambiando los papeles de x y y, se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

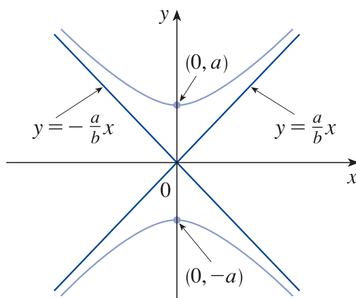


FIGURA 11
La hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

la cual también representa una hipérbola como se observa en la figura 11.

EJEMPLO 6 Trace la curva $9x^2 - 4y^2 = 36$.

SOLUCIÓN Al dividir ambos miembros entre 36 se obtiene

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

la cual es la forma estándar de la ecuación de una hipérbola (ecuación 3). Como $a^2 = 4$, las intersecciones en x son ± 2. Como $b^2 = 9$, se tiene $b = 3$ y las asíntotas son $y = \pm\frac{3}{2}x$. La hipérbola se muestra en la figura 12.

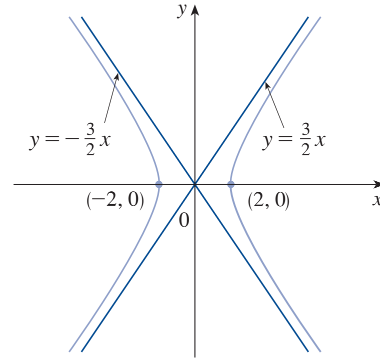


FIGURA 12
La hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$

■

Si $b = a$, una hipérbola tiene la ecuación $x^2 - y^2 = a^2$ (o $y^2 - x^2 = a^2$) y se llama *hipérbola equilátera* [véase la figura 13(a)]. Sus asíntotas son $y = \pm x$, las cuales son perpendiculares. Si una hipérbola equilátera rota 45°, las asíntotas se convierten en los ejes x y y, y se puede demostrar que la nueva ecuación de la hipérbola es $xy = k$, donde k es una constante [véase la figura 13(b)].

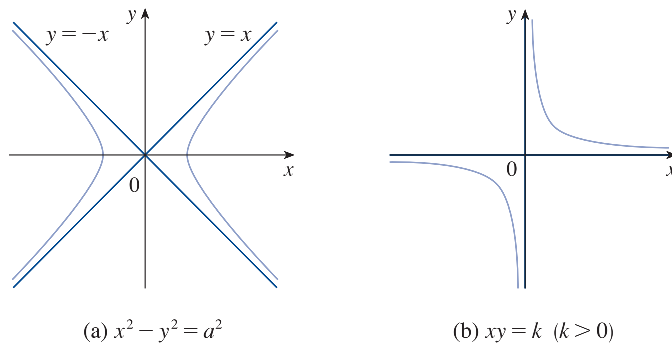


FIGURA 13
Hipérbolas equiláteras

■ Cónicas desplazadas

Recuérdese que una ecuación del círculo con centro en el origen y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$, pero si el centro es el punto (h, k), la ecuación del círculo se convierte en

$$(x - h)^2 + (y - k)^2$$

De igual forma, si se toma la elipse con ecuación

4 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y se la traslada (desplaza) de tal modo que su centro sea el punto (h, k), su ecuación se convierte en

$$\boxed{5} \qquad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(Véase la figura 14.)

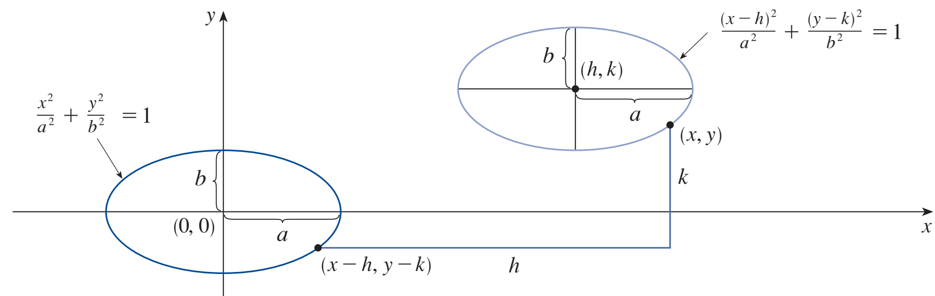


FIGURA 14

Advierta que al desplazar la elipse, se reemplaza x por $x - h$ y y por $y - k$ en la ecuación 4 para obtener la ecuación 5. Se usa el mismo procedimiento para desplazar la parábola $y = ax^2$ de tal modo que su vértice (el origen) se convierta en el punto (h, k) como en la figura 15. Al reemplazar x por $x - h$ y y por $y - k$, se observa que la nueva ecuación es

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{o} \qquad y = a(x - h)^2 + k$$

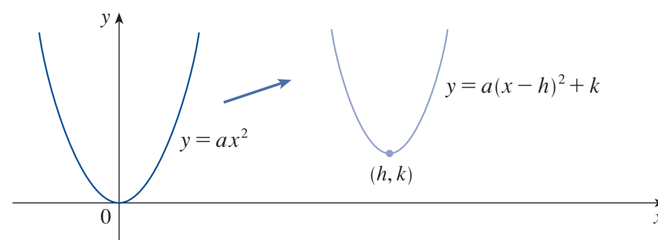


FIGURA 15

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la ecuación $y = 2x^2 - 4x + 1$.

SOLUCIÓN Primero se completa el cuadrado:

$$y = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2(x - 1)^2 - 1$$

De esta forma la ecuación representa la parábola obtenida desplazando $y = 2x^2$ de tal manera que su vértice esté en el punto $(1, -1)$. La gráfica se muestra en la figura 16.

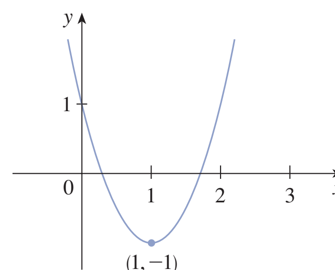


FIGURA 16
$y = 2x^2 - 4x + 1$

■

EJEMPLO 8 Trace la curva $x = 1 - y^2$.

SOLUCIÓN Esta vez comience con la parábola $x = -y^2$ (como en la figura 6 con $a = -1$) y desplace una unidad a la derecha para obtener la gráfica de $x = 1 - y^2$. (Véase la figura 17.)

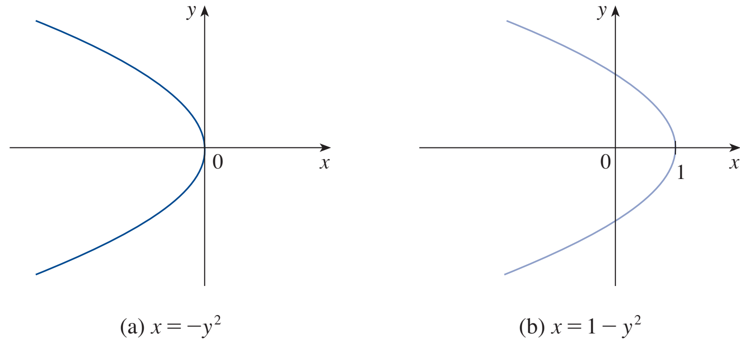


FIGURA 17 (a) $x = -y^2$ (b) $x = 1 - y^2$

C EJERCICIOS

1-4 Determine una ecuación de un círculo que satisfaga las condiciones dadas.

1. Centro $(3, -1)$, radio 5.

2. Centro $(-2, -8)$, radio 10.

3. Centro en el origen, que pasa por $(4, 7)$.

4. Centro $(-1, 5)$, que pasa por $(-4, -6)$.

5-9 Demuestre que la ecuación representa un círculo y determine el centro y el radio.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

7. $x^2 + y^2 + x = 0$

8. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$

9. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

10. ¿En qué condición sobre los coeficientes a, b y c la ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ representa un círculo? Cuando esa condición se satisface, determine el centro y radio del círculo.

11-32 Identifique el tipo de curva y trace la gráfica. No trace puntos. Solo use las gráficas estándar dadas en las figuras 5, 6, 8, 10 y 11 y desplácelas de ser necesario.

11. $y = -x^2$

12. $y^2 - x^2 = 1$

13. $x^2 + 4y^2 = 16$

14. $x = -2y^2$

15. $16x^2 - 25y^2 = 400$

16. $25x^2 + 4y^2 = 100$

17. $4x^2 + y^2 = 1$

18. $y = x^2 + 2$

19. $x = y^2 - 1$

20. $9x^2 - 25y^2 = 225$

21. $9y^2 - x^2 = 9$

22. $2x^2 + 5y^2 = 10$

23. $xy = 4$

24. $y = x^2 + 2x$

25. $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$

26. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$

27. $y = x^2 - 6x + 13$

28. $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$

29. $x = 4 - y^2$

30. $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

31. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$

32. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

33-34 Trace la región acotada por las curvas.

33. $y = 3x, \quad y = x^2$

34. $y = 4 - x^2, \quad x - 2y = 2$

35. Determine una ecuación de la parábola con vértice $(1, -1)$ que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(3, 3)$.

36. Determine una ecuación de la elipse con centro en el origen que pasa por los puntos $(1, -10\sqrt{2}/3)$ y $(-2, 5\sqrt{5}/3)$.

37-40 Trace la gráfica del conjunto.

37. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

38. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

39. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2 - 1\}$

40. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}$

D Trigonometría

Ángulos

Los ángulos pueden medirse en grados o en radianes (abreviados como rad). El ángulo dado por una revolución completa contiene 360°, lo cual es lo mismo que 2π rad. Por tanto,

1
$$\pi \text{ rad} = 180°$$

y

2
$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.3° \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}$$

EJEMPLO 1

(a) Determine la medida en radianes de 60°.
(b) Exprese $5\pi/4$ en grados.

SOLUCIÓN

(a) En la ecuación 1 o 2 para convertir de grados a radianes se multiplica por $\pi/180$. Así,

$$60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(b) Para convertir de radianes a grados se multiplica por $180/\pi$. Entonces,

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225°$$

En cálculo, se usan radianes para medir ángulos excepto cuando se indica lo contrario. En la tabla siguiente se muestra la correspondencia entre medidas en grados y en radianes de algunos ángulos comunes.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

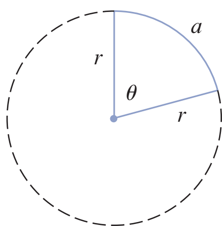


FIGURA 1

La figura 1 muestra un sector de un círculo con ángulo central θ y radio r que subtiende un arco con longitud a. Como la longitud del arco es proporcional al tamaño del ángulo, y como el círculo entero tiene circunferencia $2\pi r$ y ángulo central 2π, se tiene

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Al despejar θ y a en esta ecuación se obtiene

3
$$\theta = \frac{a}{r} \qquad a = r\theta$$

Recuérdese que las ecuaciones 3 son válidas solo cuando θ se mide en radianes.

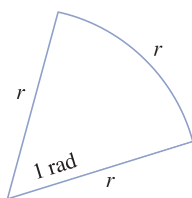


FIGURA 2

En particular, si se pone $a = r$ en la ecuación 3, se observa que un ángulo de 1 rad es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco de longitud igual al radio del círculo (véase la figura 2).

EJEMPLO 2

(a) Si el radio de un círculo es de 5 cm, ¿qué ángulo está subtendido por un arco de 6 cm?
(b) Si un círculo tiene un radio de 3 cm, ¿cuál es la longitud de un arco subtendido por un ángulo central de $3\pi/8$ rad?

SOLUCIÓN

(a) Usando la ecuación 3 con $a = 6$ y $r = 5$, se observa que el ángulo es

$$\theta = \tfrac{6}{5} = 1.2 \text{ rad}$$

(b) Con $r = 3$ y $\theta = 3\pi/8$ rad, la longitud de arco es

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8} \text{ cm}$$ ■

La **posición estándar** de un ángulo ocurre cuando se coloca su vértice en el origen de un sistema de coordenadas y su lado inicial en el eje x positivo, como en la figura 3. Un ángulo **positivo** se obtiene rotando el lado inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta que coincida con el lado terminal. De igual forma, ángulos **negativos** se obtienen mediante rotación en el sentido de las manecillas del reloj, como en la figura 4.

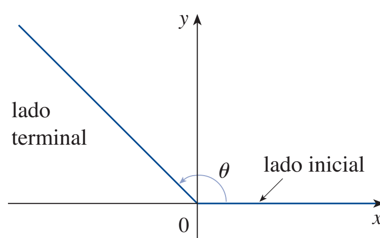


FIGURA 3 $\theta \geqslant 0$

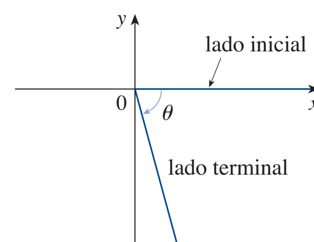


FIGURA 4 $\theta < 0$

La figura 5 muestra varios ejemplos de ángulos en posición estándar. Nótese que ángulos diferentes pueden tener el mismo lado terminal. Por ejemplo, los ángulos $3\pi/4$, $-5\pi/4$ y $11\pi/4$ tienen los mismos lados inicial y terminal porque

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

y 2π rad representa una vuelta completa.

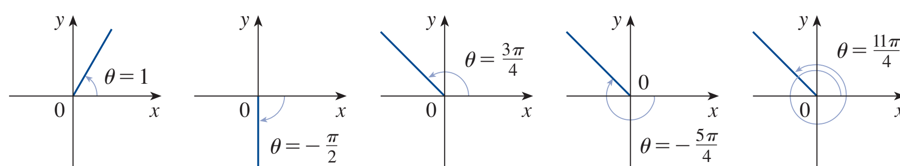


FIGURA 5
Ángulos en posición estándar

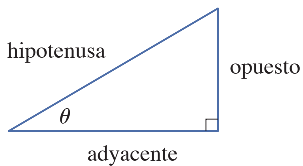


FIGURA 6

Las funciones trigonométricas

Para un ángulo agudo θ las seis funciones trigonométricas se definen como razones de longitudes de los lados de un triángulo rectángulo como se muestra a continuación (véase la figura 6).

4
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

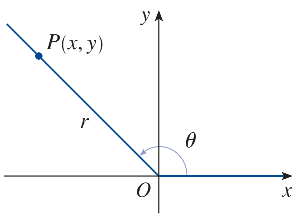


FIGURA 7

Esta definición no se aplica a los ángulos obtusos ni negativos, así que para un ángulo general θ en posición estándar sea $P(x, y)$ cualquier punto en el lado terminal de θ y r la distancia $|OP|$, como en la figura 7. Entonces se define

5
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Si $r = 1$ en la definición 5 y dibuja un círculo unitario con centro en el origen y rotula θ como en la figura 8, las coordenadas de P son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Como la división entre 0 es indefinida, $\tan\theta$ y $\sec\theta$ se indeterminan cuando $x = 0$ y $\csc\theta$ y $\cot\theta$ lo hacen cuando $y = 0$. Adviértase que las definiciones en (4) y (5) son congruentes cuando θ es un ángulo agudo.

Si θ es un número, la convención es que $\operatorname{sen}\theta$ significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es θ. Por ejemplo, la expresión sen 3 implica que se trata de un ángulo de 3 rad. Cuando se determina una aproximación por calculadora de este número, se debe recordar fijar nuestra calculadora en modo de radianes, y después se obtiene

$$\operatorname{sen} 3 \approx 0.14112$$

Si se desea conocer el seno del ángulo 3°, se escribiría sen 3° y con nuestra calculadora en modo de grados hallaría que

$$\operatorname{sen} 3^\circ \approx 0.05234$$

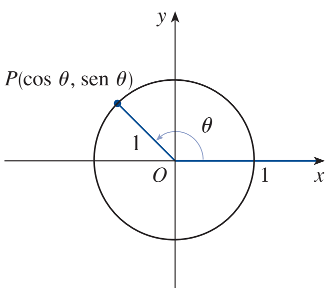


FIGURA 8

Las razones trigonométricas exactas para ciertos ángulos pueden obtenerse de los triángulos de la figura 9. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

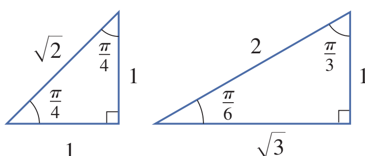


FIGURA 9

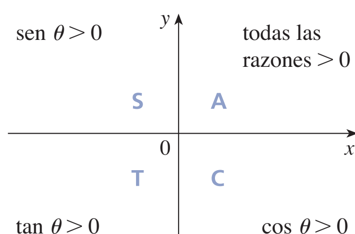


FIGURA 10

Los signos de las funciones trigonométricas para ángulos en cada uno de los cuatro cuadrantes pueden recordarse por medio de la regla "Antes Solo Tomaba Cálculo" que aparece en la figura 10.

EJEMPLO 3 Determine las razones trigonométricas exactas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUCIÓN En la figura 11 un punto en la recta terminal para $\theta = 2\pi/3$ es $P(-1, \sqrt{3})$. Por tanto, tomando,

$$x = -1 \qquad y = \sqrt{3} \qquad r = 2$$

en las definiciones de las razones trigonométricas se tiene que

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\csc \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec \frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \cot \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

■

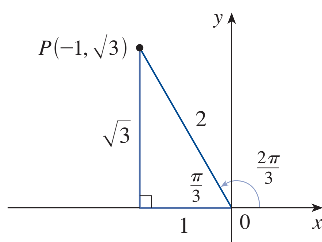


FIGURA 11

La tabla siguiente da algunos valores de sen θ y cos θ determinados por el método del ejemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

EJEMPLO 4 Si $\cos \theta = \frac{2}{5}$ y $0 < \theta\ \pi/2$, halle las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN Como $\cos \theta = \frac{2}{5}$, se puede indicar que la hipotenusa tiene longitud 5 y el lado adyacente longitud 2 en la figura 12. Si el lado opuesto tiene longitud x, entonces el teorema de Pitágoras da $x^2 + 4 = 25$, así que $x^2 = 21$, $x = \sqrt{21}$. Ahora se puede usar el diagrama para escribir las otras cinco funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \tan \theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\csc \theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec \theta = \frac{5}{2} \qquad \cot \theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

■

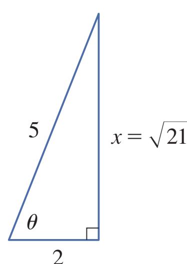


FIGURA 12

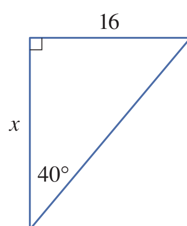


FIGURA 13

EJEMPLO 5 Use una calculadora para aproximar el valor de x en la figura 13.

SOLUCIÓN En el diagrama se observa que

$$\tan 40° = \frac{16}{x}$$

Por tanto,

$$x = \frac{16}{\tan 40°} \approx 19.07$$

■

Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una relación entre funciones trigonométricas. Las más elementales son las siguientes, las cuales son consecuencias inmediatas de las definiciones de las funciones trigonométricas.

6

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Para la identidad siguiente, observe la figura 7. La fórmula de la distancia (o, de modo equivalente, el teorema de Pitágoras) que $x^2 + y^2 = r^2$. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Se comprueba así una de las identidades trigonométricas más útiles:

7

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Si se dividen ambos miembros de la ecuación 7 entre $\cos^2\theta$ y se usan las ecuaciones 6, se obtiene

8

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

De igual forma, si se dividen ambos miembros de la ecuación 7 entre $\operatorname{sen}^2\theta$, se obtiene

9

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Las identidades

10a

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

10b

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

Las funciones impares y pares se estudian en la sección 1.1.

indican que el seno es una función impar y el coseno una función par. Son fáciles de comprobar dibujando un diagrama que muestre a θ y $-\theta$ en posición estándar (véase el ejercicio 39).

Como los ángulos θ y $\theta + 2\pi$ tienen el mismo lado terminal, se tiene

11

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Estas identidades indican que las funciones seno y coseno son periódicas, con período 2π.

Las identidades trigonométricas restantes son todas ellas consecuencia de dos identidades básicas, llamadas **fórmulas de la adición**:

12a $$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

12b $$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Las comprobaciones de estas fórmulas de la adición se esbozan en los ejercicios 85, 86 y 87.

Al sustituir $-y$ por y en las ecuaciones 12a y 12b y al usar las ecuaciones 10a y 10b, se obtienen las siguientes **fórmulas de la sustracción**:

13a $$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

13b $$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Entonces, dividiendo las fórmulas en las ecuaciones 12 o las ecuaciones 13, se obtienen las fórmulas correspondientes para $\tan(x \pm y)$:

14a $$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

14b $$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Si $y = x$ en las fórmulas de la adición (12), se obtienen las **fórmulas de doble ángulo**:

15a $$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

15b $$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Entonces, con el uso de la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se obtienen las formas alternas siguientes de las fórmulas de doble ángulo para $\cos 2x$:

16a $$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

16b $$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

Si ahora se despejan $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ en estas ecuaciones, se obtienen las **fórmulas de medio ángulo** siguientes, las cuales son útiles en el cálculo integral:

17a $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

17b $$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Por último, se enuncian las **fórmulas del producto**, que pueden deducirse de las ecuaciones 12 y 13:

18a $$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$

18b $$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

18c $$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

Existen muchas identidades trigonométricas, pero las que se han enunciado son las de uso más frecuente en cálculo. Si olvidara alguna de las identidades de los ejemplos 13-18, recuerde que pueden deducirse de las ecuaciones 12a y 12b.

EJEMPLO 6 Halle todos los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ tales que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula de doble ángulo (15a), se reescribe la ecuación dada como

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} x(1 - 2\cos x) = 0$$

En consecuencia, hay dos posibilidades:

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{o} \qquad 1 - 2\cos x = 0$$

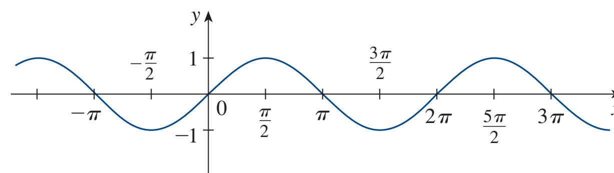
$$x = 0, \pi, 2\pi \qquad\qquad \cos x = \tfrac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

La ecuación dada tiene cinco soluciones: $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ y 2π. ■

Gráficas de las funciones trigonométricas

La gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, que aparece en la figura 14(a), se obtiene trazando puntos para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ usando después la naturaleza periódica de la función (de la ecuación 11) para completar la gráfica. Note que los ceros de la función seno ocurren en los



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

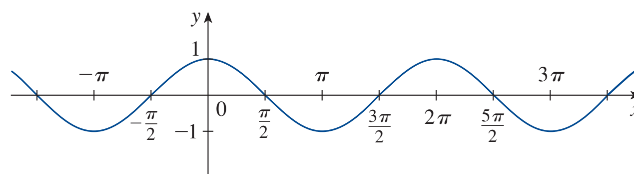


FIGURA 14

(b) $g(x) = \cos x$

múltiplos enteros de π, es decir

$$\text{sen } x = 0 \quad \text{siempre que } x = n\pi, \quad n \text{ un entero}$$

Debido a la identidad

$$\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(que puede verificarse usando la ecuación 12a), la gráfica del coseno se obtiene desplazando la gráfica del seno con $\pi/2$ a la izquierda [véase la figura 14(b)]. Observe que para las funciones seno y coseno, el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Así, para todos los valores de x se tiene

$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

Las gráficas de las cuatro funciones trigonométricas restantes aparecen en la figura 15 con sus dominios. Note que la tangente y la cotangente tienen rango $(-\infty, \infty)$, mientras que la cosecante y la secante tienen rango $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Estas cuatro funciones son periódicas: tangente y cotangente tienen período π, mientras que cosecante y secante tienen período 2π.

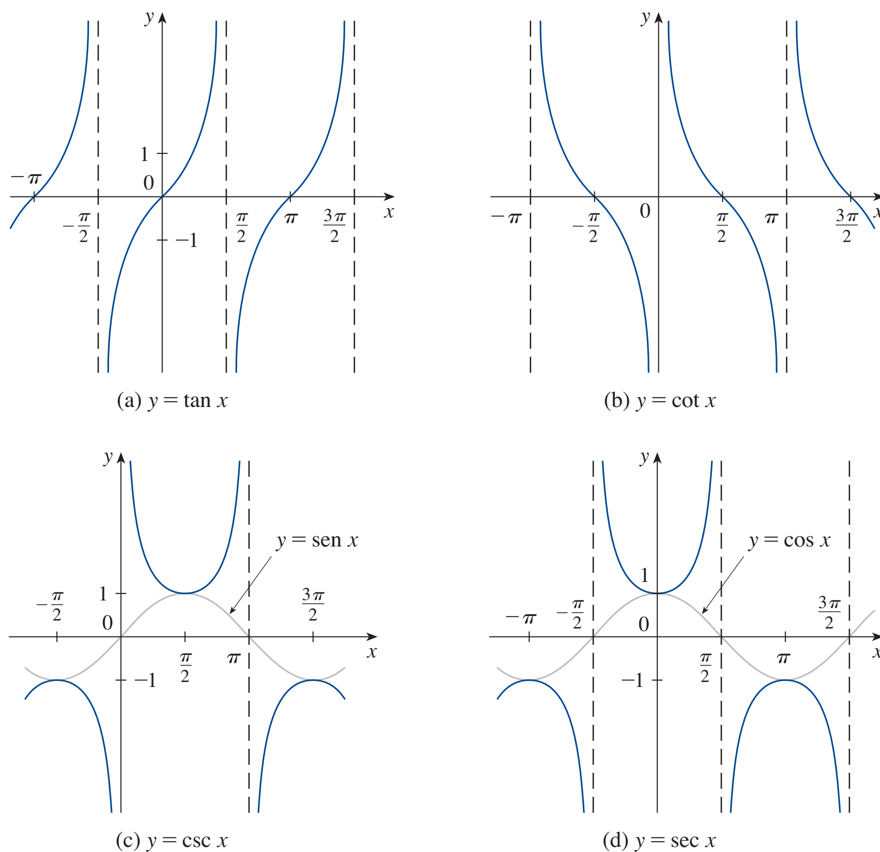


FIGURA 15

D EJERCICIOS

1-6 Convierta de grados a radianes.

1. $210°$ **2.** $300°$ **3.** $9°$

4. $-315°$ **5.** $900°$ **6.** $36°$

7-12 Convierta de radianes a grados.

7. 4π **8.** $-\dfrac{7\pi}{2}$ **9.** $\dfrac{5\pi}{12}$

10. $\dfrac{8\pi}{3}$ **11.** $-\dfrac{3\pi}{8}$ **12.** 5

13. Determine la longitud de un arco circular subtendido por un ángulo de $\pi/12$ rad si el radio del círculo es de 36 cm.

14. Si un círculo tiene radio de 10 cm, determine la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 72°.

15. Un círculo tiene radio de 1.5 m. ¿Qué ángulo es subtendido en el centro del círculo por un arco de 1 m de largo?

16. Determine el radio de un sector circular con ángulo $3\pi/4$ y longitud de arco de 6 cm.

17-22 Dibuje en posición estándar el ángulo cuya medida se da.

17. $315°$ **18.** $-150°$ **19.** $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

20. $\dfrac{7\pi}{3}$ rad **21.** 2 rad **22.** -3 rad

23-28 Determine las razones trigonométricas exactas para el ángulo cuya medida en radianes se da.

23. $\dfrac{3\pi}{4}$ **24.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **25.** $\dfrac{9\pi}{2}$

26. -5π **27.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **28.** $\dfrac{11\pi}{4}$

29-34 Encuentre las razones trigonométricas restantes.

29. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

30. $\tan\alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

31. $\sec\phi = -1.5, \quad \dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$

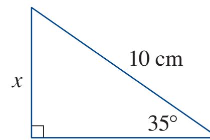
32. $\cos x = -\dfrac{1}{3}, \quad \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

33. $\cot\beta = 3, \quad \pi < \beta < 2\pi$

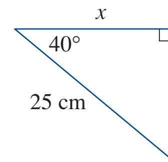
34. $\csc\theta = -\dfrac{4}{3}, \quad \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

35-38 Encuentre con cinco decimales la longitud del lado x.

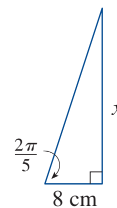
35.



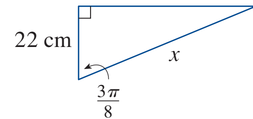
36.



37.



38.



39-41 Compruebe cada ecuación.

39. (a) Ecuación 10a
(b) Ecuación 10b

40. (a) Ecuación 14a
(b) Ecuación 14b

41. (a) Ecuación 18a
(b) Ecuación 18b
(c) Ecuación 18c

42-58 Compruebe la identidad.

42. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

43. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **44.** $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

45. $\operatorname{sen}\theta \, \cot\theta = \cos\theta$ **46.** $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

47. $\sec y - \cos y = \tan y \, \operatorname{sen} y$

48. $\tan^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha \, \operatorname{sen}^2\alpha$

49. $\cot^2\theta + \sec^2\theta = \tan^2\theta + \csc^2\theta$

50. $2 \csc 2t = \sec t \csc t$

51. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

52. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

53. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

54. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y)$

55. $\dfrac{\operatorname{sen}\phi}{1 - \cos\phi} = \csc\phi + \cot\phi$

56. $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos x \cos y}$

57. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} 2\theta \cos \theta$

58. $\cos 3\theta = 4 \cos^3\theta - 3 \cos \theta$

59-64 Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x y y se sitúan entre 0 y $\pi/2$, evalúe la expresión.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$

60. $\cos(x + y)$

61. $\cos(x - y)$

62. $\operatorname{sen}(x - y)$

63. $\operatorname{sen} 2y$

64. $\cos 2y$

65-72 Determine todos los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfacen la ecuación.

65. $2 \cos x - 1 = 0$

66. $3 \cot^2 x = 1$

67. $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$

68. $|\tan x| = 1$

69. $\operatorname{sen} 2x = \cos x$

70. $2 \cos x + \operatorname{sen} 2x = 0$

71. $\operatorname{sen} x = \tan x$

72. $2 + \cos 2x = 3 \cos x$

73-76 Determine todos los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfacen la desigualdad.

73. $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$

74. $2 \cos x + 1 > 0$

75. $-1 < \tan x < 1$

76. $\operatorname{sen} x > \cos x$

77-82 Grafique la función, comience con las gráficas en las figuras 14 y 15 y aplique las transformaciones de la sección 1.3 donde sea apropiado.

77. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

78. $y = \tan 2x$

79. $y = \dfrac{1}{3}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

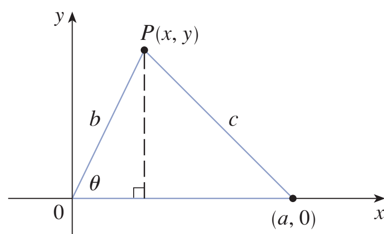
80. $y = 1 + \sec x$

81. $y = |\operatorname{sen} x|$

82. $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

83. Compruebe la ley de los cosenos: si un triángulo tiene lados con longitudes a, b y c y θ es el ángulo entre los lados con longitudes a y b, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$$

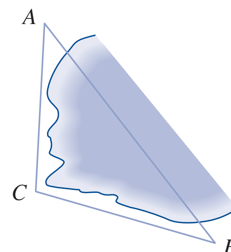


[*Sugerencia*: Introduzca un sistema de coordenadas de tal forma que θ esté en posición estándar, como en la figura. Exprese x y y en términos de θ y use después la fórmula de la distancia para calcular c.]

84. A fin de determinar la distancia $|AB|$ de un extremo a otro de una caleta, un punto C se ubicó como en la figura y se registraron las medidas siguientes:

$$\angle C = 103° \qquad |AC| = 820 \text{ m} \qquad |BC| = 910 \text{ m}$$

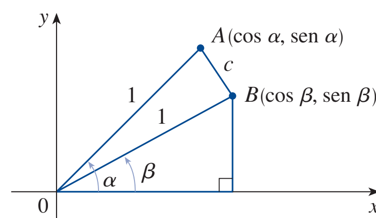
Use la ley de los cosenos del ejercicio 83 para hallar la distancia requerida.



85. Use la figura para comprobar la fórmula de la sustracción

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

[*Sugerencia*: calcule c^2 de dos formas (usando la ley de los cosenos del ejercicio 83 y también la fórmula de la distancia) y compare ambas expresiones.]



86. Use la fórmula del ejercicio 85 para comprobar la fórmula de la adición para el coseno (12b).

87. Use la fórmula de la adición para el coseno y las identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen} \theta \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

para comprobar la fórmula de la sustracción (13a) para la función seno.

88. Demuestre que el área de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo incluido θ es

$$A = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

89. Halle el área del triángulo ABC con cinco decimales si

$$|AB| = 10 \text{ cm} \qquad |BC| = 3 \text{ cm} \qquad \angle ABC = 107°$$

E Notación sigma

Una manera conveniente de escribir sumas es usando la letra griega Σ (sigma mayúscula, correspondiente a nuestra letra S), llamada **notación sigma**.

Esto indica que hay que terminar con $i = n$.

Esto indica que hay que sumar.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

Esto indica que hay que comenzar con $i = m$.

1 Definición Si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ son números reales y m y n son enteros tales que $m \leqslant n$, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Con notación de funciones, la definición 1 puede escribirse como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Así, el símbolo $\Sigma_{i=m}^{n}$ indica una suma en la que la letra i (llamada índice de sumatoria) adopta valores enteros consecutivos iniciados en m y terminados en n, es decir $m, m+1, \ldots, n$. También otras letras pueden usarse como índice de sumatoria.

EJEMPLO 1

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{i^2+3} = \frac{1-1}{1^2+3} + \frac{2-1}{2^2+3} + \frac{3-1}{3^2+3} = 0 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$

(f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ ■

EJEMPLO 2 Escriba la suma $2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ en notación sigma.

SOLUCIÓN Una suma en notación sigma puede escribirse de diferentes maneras, por ejemplo:

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3$$

o

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^3$$

o

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)^3$$ ■

El teorema siguiente ofrece tres reglas simples para trabajar con la notación sigma.

2 Teorema Si c es cualquier constante (es decir, no depende de i), entonces

(a) $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$ (b) $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

(c) $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$

COMPROBACIÓN Para ver por qué estas reglas son ciertas, todo lo que se tiene que hacer es escribir ambos miembros en forma desarrollada. La regla (a) es simple: la propiedad distributiva de los números reales:

$$ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

La regla (b) se sigue de las propiedades asociativa y conmutativa:

$$(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)$$

La regla (c) se comprueba en forma similar. ■

EJEMPLO 3 Determine $\sum_{i=1}^{n} 1$.

SOLUCIÓN

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ términos}} = n$$ ■

EJEMPLO 4 Compruebe la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUCIÓN Esta fórmula puede comprobarse mediante inducción matemática (véase la página 72) o por el método siguiente, usado por el matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) cuando tenía diez años de edad.

Escriba la suma S dos veces, una vez en el orden usual y la otra en orden inverso:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

Sumando verticalmente todas las columnas, se obtiene

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

En el miembro derecho hay n términos, cada uno de los cuales es $n + 1$, así que

$$2S = n(n+1) \quad \text{o} \quad S = \frac{n(n+1)}{2}$$ ■

EJEMPLO 5 Compruebe la fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SOLUCIÓN 1 Sea S la suma deseada, comience con la *suma telescópica* (o suma que colapsa):

La mayoría de los términos se eliminan en pares.

$$\sum_{i=1}^{n} [(1 + i)^3 - i^3] = (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + \cdots + [(n + 1)^3 - \cancel{n^3}]$$
$$= (n + 1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n$$

Por otro lado, usando el teorema 2 y los ejemplos 3 y 4 se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} [(1 + i)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n} [3i^2 + 3i + 1] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 3S + 3\frac{n(n + 1)}{2} + n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Así se tiene

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Al despejar S en esta ecuación, se obtiene

$$3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

o

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Principio de inducción matemática
Sea S_n un enunciado que implica al entero positivo n. Suponga que
1. S_1 es cierto.
2. Si S_k es cierto, entonces S_{k+1} es cierto.

Así, S_n es cierto para todos los enteros positivos n.

Véanse las páginas 72 y 74 para un análisis más completo de la inducción matemática.

SOLUCIÓN 2 Sea S_n la fórmula dada.

1. S_1 es cierto porque $1^2 = \dfrac{1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

2. Suponga que S_k es cierta; es decir,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$$

Entonces

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k + 1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k + 1)^2$$
$$= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2$$
$$= (k + 1)\frac{k(2k + 1) + 6(k + 1)}{6}$$
$$= (k + 1)\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}$$
$$= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$
$$= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]}{6}$$

Así, S_{k+1} es cierta.

Por el principio de inducción matemática, S_n es cierta para todas las n. ■

Se enlistan los resultados de los ejemplos 3, 4 y 5 con un resultado similar para los cubos (véanse los ejercicios 37-40) como teorema 3. Estas fórmulas son necesarias para determinar áreas y evaluar integrales en el capítulo 5.

3 Teorema Sea c una constante y n un entero positivo. Entonces

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

SOLUCIÓN Usando los teoremas 2 y 3 se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3) &= \sum_{i=1}^{n} (4i^3 - 3i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i \\ &= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)[2n(n+1) - 3]}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 3)}{2}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right]$.

El tipo de cálculo en el ejemplo 7 surge en el capítulo 5 cuando se evalúan áreas.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{n^3} i^2 + \frac{3}{n}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n}\cdot n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) + 3\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\cdot 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 3\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 + 3 = 4\end{aligned}$$

■

E EJERCICIOS

1-10 Escriba la suma en forma desarrollada.

1. $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

2. $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$

3. $\sum_{i=4}^{6} 3^i$

4. $\sum_{i=4}^{6} i^3$

5. $\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

6. $\sum_{k=5}^{8} x^k$

7. $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$

8. $\sum_{j=n}^{n+3} j^2$

9. $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j$

10. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

11-20 Escriba la suma en notación sigma.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

12. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

13. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$

14. $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \cdots + \frac{23}{27}$

15. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

16. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$

17. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

19. $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

20. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

21-35 Determine el valor de la suma.

21. $\sum_{i=4}^{8} (3i - 2)$

22. $\sum_{i=3}^{6} i(i + 2)$

23. $\sum_{j=1}^{6} 3^{j+1}$

24. $\sum_{k=0}^{8} \cos k\pi$

25. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n$

26. $\sum_{i=1}^{100} 4$

27. $\sum_{i=0}^{4} (2^i + i^2)$

28. $\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i}$

29. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

30. $\sum_{i=1}^{n} (2 - 5i)$

31. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 4)$

32. $\sum_{i=1}^{n} (3 + 2i)^2$

33. $\sum_{i=1}^{n} (i + 1)(i + 2)$

34. $\sum_{i=1}^{n} i(i + 1)(i + 2)$

35. $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - i - 2)$

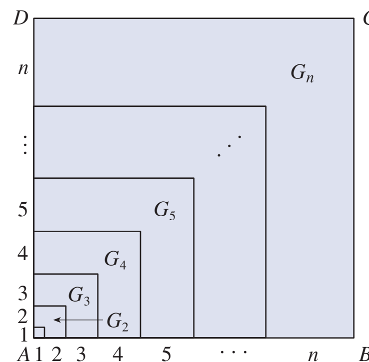
36. Determine el número n tal que $\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

37. Compruebe la fórmula (b) del teorema 3.

38. Compruebe la fórmula (e) del teorema 3 usando inducción matemática.

39. Compruebe la fórmula (e) del teorema 3 usando un método similar al del ejemplo 5, solución 1 [comience con $(1 + i)^4 - i^4$].

40. Compruebe la fórmula (e) del teorema 3 usando el método siguiente, publicado por Abu Bekr Mohammed ibn Alhusain Alkarchi alrededor de 1010 d. C. La figura muestra un cuadrado $ABCD$ cuyos lados AB y AD han sido divididos en segmentos de longitudes $1, 2, 3, \ldots, n$. Así, los lados del cuadrado tienen longitud $n(n + 1)/2$, de modo que el área es $[n(n + 1)/2]^2$. Pero el área también es la suma de las áreas de los n "gnomos" $G_1, G_2, \ldots, G_n$ mostrados en la figura. Demuestre que el área de G_i es i^3 y concluya que la fórmula (e) es verdadera.



41. Evalúe cada suma telescópica.

(a) $\sum_{i=1}^{n} [i^4 - (i - 1)^4]$

(b) $\sum_{i=1}^{100} (5^i - 5^{i-1})$

(c) $\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

(d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$

42. Compruebe la desigualdad del triángulo generalizada:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

43-46 Halle el límite.

43. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$

44. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1\right]$

45. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

46. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3 - 2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right]$

47. Compruebe la fórmula para la suma de una serie geométrica finita con primer término a y razón común $r \neq 1$.

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

48. Evalúe $\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{2^{i-1}}$.

49. Evalúe $\sum_{i=1}^{n} (2i + 2^i)$.

50. Evalúe $\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}(i + j)\right]$.

F Demostración de teoremas

En este apéndice se presentan comprobaciones de varios teoremas enunciados en el cuerpo principal del texto. Las secciones a las que corresponden se indican al margen.

Sección 2.3

Leyes de los límites Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = cL$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = LM$

5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

COMPROBACIÓN DE LA LEY 4 Si admite que $\varepsilon > 0$ está dada y desea determinar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x)\,g(x) - LM| < \varepsilon$$

A fin de obtener los términos que contienen $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$, se suma y resta $Lg(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]| \\ &\leqslant |[f(x) - L]g(x)| + |L[g(x) - M]| \qquad \text{(desigualdad del triángulo)} \\ &= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M|\end{aligned}$$

Si lo que se quiere es que cada uno de estos términos sea menor que $\varepsilon/2$.

Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)}$$

Asimismo, hay un número $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces

$$|g(x) - M| < 1$$

y por tanto

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leqslant |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, hay un número $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_3 \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces se tiene $0 < |x - a| < \delta_1$, $0 < |x - a| < \delta_2$ y $0 < |x - a| < \delta_3$, así puede combinar las desigualdades para obtener

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &\leqslant |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}(1 + |M|) + |L| \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = LM$. ■

COMPROBACIÓN DE LA LEY 3 Si se toma $g(x) = c$ de la ley 4, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [cf(x)] &= \lim_{x \to a} [g(x)f(x)] = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) \\ &= c \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{(por la ley 7)} \end{aligned}$$

■

COMPROBACIÓN DE LA LEY 2 Al usar la ley 1 y la ley 3 con $c = -1$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x) \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \end{aligned}$$

■

COMPROBACIÓN DE LA LEY 5 Se demuestra primero que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Para hacerlo, hay que demostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon$$

Obsérvese que $$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|}$$

Se sabe que el numerador puede reducirse, y también que el denominador no es pequeño cuando x está cerca de a. Como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$, si se tiene

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

y por tanto $$\begin{aligned} |M| = |M - g(x) + g(x)| &\leqslant |M - g(x)| + |g(x)| \\ &< \frac{|M|}{2} + |g(x)| \end{aligned}$$

Con ello se demuestra que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{entonces} \qquad |g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

así que, para estos valores de x,

$$\frac{1}{|Mg(x)|} = \frac{1}{|M||g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$$

Asimismo, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{entonces} \qquad |g(x) - M| < \frac{M^2}{2}\varepsilon$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, para $0 < |x - a| < \delta$, se tiene

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2} \frac{M^2}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

De lo cual se desprende $\text{lím}_{x \to a} 1/g(x) = 1/M$. Por último, usando la ley 4, se obtiene

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$ ■

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todas las x en un intervalo abierto que contiene a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

entonces $L \leqslant M$.

COMPROBACIÓN Use el método de comprobación por contradicción. Suponga, si es posible, que $L > M$. La ley 2 de los límites sostiene que

$$\lim_{x \to a} [g(x) - f(x)] = M - L$$

Así, para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < \varepsilon$$

En particular, tomando $\varepsilon = L - M$ (y reparando en que $L - M > 0$ por hipótesis), se tiene un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < L - M$$

Como $b \leqslant |b|$ para cualquier número b, se tiene que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad [g(x) - f(x)] - (M - L) < L - M$$

lo que se simplifica como

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad g(x) < f(x)$$

Pero esto contradice $f(x) \leqslant g(x)$. Así, la desigualdad $L > M$ debe ser falsa. Por tanto, $L \leqslant M$. ■

3 El teorema de compresión Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todas las x en un intervalo abierto que contiene a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces $$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

COMPROBACIÓN Si se acepta que $\varepsilon > 0$ está dada. Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

es decir que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{entonces} \qquad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Como $\lim_{x \to a} h(x) = L$, hay un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{entonces} \qquad |h(x) - L| < \varepsilon$$

es decir que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{entonces} \qquad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$, así que

$$L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$$

En particular, $$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

así que $|g(x) - L| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. ■

Sección 2.5

Teorema Si f es una función continua inyectiva definida en un intervalo (a, b), su función inversa f^{-1} también es continua.

COMPROBACIÓN Primero se demuestra que si f es tanto inyectiva como continua en (a, b), debe ser creciente o decreciente en (a, b). Si no fuera creciente ni decreciente, existirían números x_1, x_2, y x_3 en (a, b) con $x_1 < x_2 < x_3$ tales que $f(x_2)$ no se situaría entre $f(x_1)$ y $f(x_3)$. Hay dos posibilidades: (i) $f(x_3)$ se ubica entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ o (ii) $f(x_1)$ se ubica entre $f(x_2)$ y $f(x_3)$. (Dibuje un diagrama.) En el caso (i), se aplica el teorema del valor intermedio a la función continua f para obtener un número c entre x_1 y x_2 tal que $f(c) = f(x_3)$. En el caso (ii), el teorema del valor intermedio da un número c entre x_2 y x_3 tal que $f(c) = f(x_1)$. En cualquier caso, se ha contradicho el hecho de que f es inyectiva.

Suponga, para aclarar, que f es creciente en (a, b). Tome cualquier número y_0 en el dominio de f^{-1} y confirme que $f^{-1}(y_0) = x_0$; es decir, que x_0 es el número en (a, b) tal que $f(x_0) = y_0$. Para demostrar que f^{-1} es continua en y_0, tome cualquier $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esté contenido en el intervalo (a, b). Como f es creciente, esto traza los números en el intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sobre los números en el intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ y f^{-1} invierte la correspondencia. Si se concede que δ denota el menor de los números $\delta_1 = y_0 - f(x_0 + \varepsilon)$ y $\delta_2 = f(x_0 - \varepsilon) - y_0$, el intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ está contenido en el intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$, así que las

imágenes de f^{1} están en el intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ por f^{-1}. (Véase el diagrama con flechas de la figura 1.) Se ha determinado entonces un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad |y - y_0| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

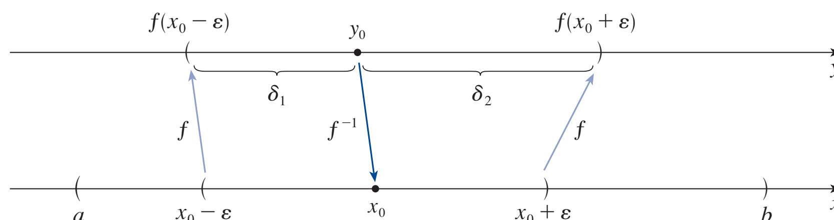


FIGURA 1

Esto demuestra que $\lim_{y \to y_0} f^{-}(y) = f^{-1}(y_0)$, así que f^{-1} es continua en cualquier número y_0 en su dominio. ■

> **8 Teorema** Si f es continua en b y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces
>
> $$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$$

COMPROBACIÓN Si se establece que $\varepsilon > 0$ está dada, se desea encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad \big|f\big(g(x)\big) - f(b)\big| < \varepsilon$$

Como f es continua en b, se tiene

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$$

así que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |y - b| < \delta_1 \qquad \text{entonces} \qquad |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |g(x) - b| < \delta_1$$

Al combinar estos dos enunciados, se observa que cada vez que $0 < |x - a| < \delta$, se tiene $|g(x) - b| < \delta_1$, lo que implica que $|f\big(g(x)\big) - f(b)| < \varepsilon$. Así, se ha comprobado que $\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$. ■

Sección 3.3

La comprobación del resultado siguiente se confirma cuando se comprueba que $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$.

> **Teorema** Si $0 < \theta < \pi/2$, entonces $\theta \leqslant \tan\theta$.

COMPROBACIÓN La figura 2 muestra un sector de un círculo con centro O, ángulo central θ y radio 1. Entonces

$$|AD| = |OA| \tan\theta = \tan\theta$$

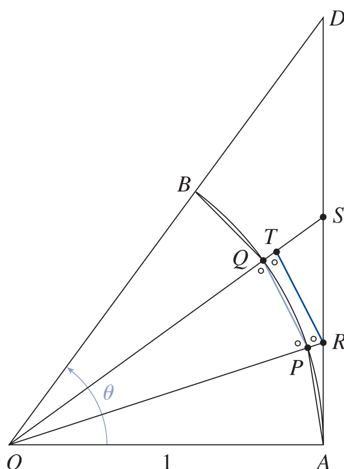


FIGURA 2

Se aproxima el arco AB mediante un polígono inscrito que consta de n segmentos de recta iguales y se considera un segmento PQ típico. Se extienden las líneas OP y OQ para que se encuentren con AD en los puntos R y S. Entonces se traza $RT \parallel PQ$ como en la figura 2. Observe que

$$\angle RTO = \angle PQO < 90^\circ$$

así que $\angle RTS > 90^\circ$. Por tanto, se tiene

$$|PQ| < |RT| < |RS|$$

Si se suma n de esas desigualdades, se obtiene

$$L_n < |AD| = \tan\theta$$

donde L_n es la longitud del polígono inscrito. Así, por el teorema 2.3.2, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} L_n \leqslant \tan\theta$$

Pero la longitud de arco se define en la ecuación 8.1.1 como el límite de las longitudes de polígonos inscritos, así que

$$\theta = \lim_{n\to\infty} L_n \leqslant \tan\theta$$ ■

Sección 4.3

Prueba de concavidad
(a) Si $f''(x) > 0$ para todas las x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
(b) Si $f''(x) < 0$ para todas las x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

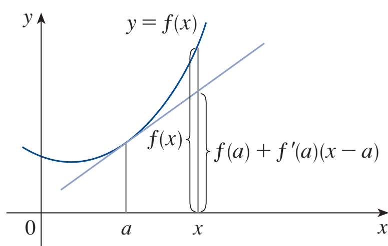


FIGURA 3

COMPROBACIÓN DE (a) Sea a cualquier número en I. Hay que demostrar que la curva $y = f(x)$ se encuentra arriba de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$. La ecuación de esta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Así que hay que demostrar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

cada vez que $x \in I$ $(x \neq a)$. (Véase la figura 3.)

Se toma primero el caso en el que $x > a$. Al aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[a, x]$, se obtiene un número c, con $a < c < x$, tal que

1 $$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

Como $f'' > 0$ en I, por la prueba creciente/decreciente se sabe que f' es creciente en I. Así, como $a < c$, se tiene

$$f'(a) < f'(c)$$

de modo que se multiplica esta desigualdad por el número positivo $x - a$ y se obtiene

2 $$f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a)$$

Ahora se suma $f(a)$ en ambos miembros de esa desigualdad:

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(a) + f'(c)(x - a)$$

Pero de la ecuación 1 se tiene $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$. Así, esta desigualdad se convierte en

$$\boxed{3} \qquad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

que es lo que se deseaba comprobar.

Para el caso en el que $x < a$, se tiene $f'(c) < f'(a)$, pero la multiplicación por el número negativo $x - a$ invierte la desigualdad, así que obtenemos (2) y (3) como antes. ■

Sección 4.4

A fin de confirmar la comprobación de la regla de L'Hôpital, primero necesita una generalización del teorema del valor medio. El teorema siguiente toma su nombre de otro matemático francés, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Véase la semblanza biográfica de Cauchy en la página 109.

1 Teorema del valor medio de Cauchy Suponga que las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), y que $g'(x) \neq 0$ para todas las x en (a, b). Entonces, hay un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Note que si toma el caso especial en el que $g(x) = x$, entonces $g'(c) = 1$ y el teorema 1 es solo el teorema ordinario del valor medio. Además, el teorema 1 puede comprobarse en forma similar. Usted puede verificar que todo lo que hay que hacer es cambiar la función h dada en la ecuación 4.2.4 por la función

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

y aplicar el teorema de Rolle como lo hizo antes.

Regla de L'Hôpital Suponga que f y g son derivables y que $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite sobre el miembro derecho existe (o es ∞ o $-\infty$).

COMPROBACIÓN DE LA REGLA DE L'HÔPITAL Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Sea

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Debe demostrar que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Defina

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Entonces, F es continua en I, ya que f es continua en $\{x \in I \mid x \neq a\}$ y

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)$$

De igual forma, G es continua en I. Sea $x \in I$ y $x > a$. Entonces, F y G son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x) y $G' \neq 0$ ahí (ya que $F' = f'$ y $G' = g'$). En consecuencia, por el teorema del valor medio de Cauchy, hay un número y tal que $a < y < x$ y

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aquí se ha usado el hecho de que, por definición, $F(a) = 0$ y $G(a) = 0$. Ahora, si se acepta que $x \to a^+$, entonces $y \to a^+$ (ya que $a < y < x$), así que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y\to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Un argumento similar demuestra que el límite de la mano izquierda también es L. Por tanto,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Esto comprueba la regla de L'Hôpital para el caso en el que a es finita.

Si a es infinita, se concede que $t = 1/x$. Entonces, $t \to 0^+$ cuando $x \to \infty$, así tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \qquad \text{(por la regla de L'Hôpital para } a \text{ finita)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■

Sección 11.8

A fin de comprobar el teorema 11.8.4, primero necesita los resultados siguientes.

Teorema

1. Si una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ converge cuando $x = b$ (donde $b \neq 0$), converge cada vez que $|x| < |b|$.
2. Si una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ diverge cuando $x = d$ (donde $d \neq 0$), diverge cada vez que $|x| > |d|$.

COMPROBACIÓN DE 1 Suponga que $\Sigma\, c_n b^n$ converge. Entonces, por el teorema 11.2.6, tenemos $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$. De acuerdo con la definición 11.1.2 con $\varepsilon = 1$, hay un entero positivo N tal que $|c_n b^n| < 1$ cada vez que $n \geqslant N$. Así, para $n \geqslant N$, se tiene

$$|c_n x^n| = \left|\frac{c_n b^n x^n}{b^n}\right| = |c_n b^n|\left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n$$

Si $|x| < |b|$, entonces $|x/b| < 1$, así que $\Sigma\, |x/b|^n$ es una serie geométrica convergente. En consecuencia, por la prueba de comparación, la serie $\Sigma_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ es convergente. Así, la serie $\Sigma\, c_n x^n$ es absolutamente convergente, y por tanto convergente. ■

COMPROBACIÓN DE 2 Suponga que $\Sigma\, c_n d^n$ diverge. Si x es cualquier número tal que $|x| > |d|$, entonces $\Sigma\, c_n x^n$ no puede converger, porque, por la parte 1, la convergencia de $\Sigma\, c_n x^n$ implicaría la convergencia de $\Sigma\, c_n d^n$. Por tanto, $\Sigma\, c_n x^n$ diverge cada vez que $|x| > |d|$. ■

Teorema Para una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ hay únicamente tres posibilidades:

1. La serie converge solo cuando $x = 0$.
2. La serie converge para todas las x.
3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x| < \mathrm{R}$ y diverge si $|x| > R$.

COMPROBACIÓN Suponga que ni el caso 1 ni el caso 2 son verdaderos. Entonces, hay números diferentes de cero b y d tales que $\Sigma\, c_n x^n$ converge para $x = b$ y diverge para $x = d$. Por tanto, el conjunto $S = \{x \mid \Sigma\, c_n x^n \text{ converge}\}$ no está vacío. Por el teorema precedente, la serie diverge si $|x| > |d|$, así que $|x| \leqslant |d|$ para todas las $x \in S$. Esto indica que $|d|$ es un límite superior para el conjunto S. Así, por el axioma de integridad (véase la sección 11.1), S tiene un límite superior mínimo R. Si $|x| > R$, entonces $x \notin S$, así que $\Sigma\, c_n x^n$ diverge. Si $|x| < R$, entonces $|x|$ no es un límite superior para S y por tanto existe $b \in S$ tal que $b > |x|$. Como $b \in S$, $\Sigma\, c_n x^n$ converge, así que, por el teorema precedente, $\Sigma\, c_n x^n$ converge. ■

4 Teorema Para una serie de potencias $\Sigma\, c_n (x - a)^n$ hay únicamente tres posibilidades:

1. La serie converge solo cuando $x = a$.
2. La serie converge para todas las x.
3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$.

COMPROBACIÓN Si se cambia de variable $u = x - a$, la serie de potencias se convierte en $\Sigma\, c_n u^n$ y se aplica el teorema precedente a esta serie. En el caso 3, se tiene convergencia para $|u| < R$ y divergencia para $|u| > \mathrm{R}$.
Así, se tiene convergencia para $|x - a| < R$ y divergencia para $|x - a| > R$. ■

Sección 14.3

Teorema de Clairaut Suponga que f se define en un disco D que contiene el punto (a, b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

COMPROBACIÓN Para valores reducidos de h, $h \neq 0$, considérese la diferencia

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a + h, b)] - [f(a, b + h) - f(a, b)]$$

Nótese que si se concede que $g(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$, entonces

$$\Delta(h) = g(a + h) - g(a)$$

Por el teorema del valor medio, hay un número c entre a y $a + h$ tal que

$$g(a + h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Al aplicar nuevamente el teorema del valor medio, esta vez a f_x, se obtiene un número d entre b y $b + h$ tal que

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Al combinar estas ecuaciones, se obtiene

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Si $h \to 0$, entonces $(c, d) \to (a, b)$, así que la continuidad de f_{xy} en (a, b) da

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

De igual forma, escribiendo

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

y usando el teorema del valor medio dos veces y la continuidad de f_{yx} en (a, b), se obtiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

De esto se sigue que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

Sección 14.4

8 Teorema Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es derivable en (a, b).

COMPROBACIÓN Sea

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

De acuerdo con (14.4.7), para comprobar que f es derivable en (a, b) se tiene que demostrar que puede escribir Δz en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\, \Delta x + f_y(a, b)\, \Delta y + \varepsilon_1\, \Delta x + \varepsilon_2\, \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

En referencia a la figura 4, se establece

$$\boxed{1} \qquad \Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]$$

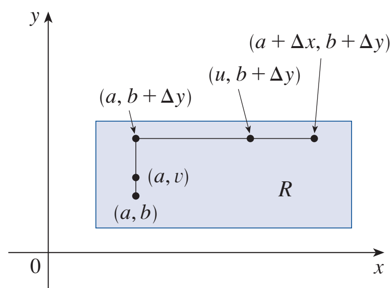


FIGURA 4

Observe que la función de una variable

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

está definida en el intervalo $[a, a + \Delta x]$ y $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$. Si se aplica el teorema del valor medio a g, se obtiene

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u)\,\Delta x$$

donde u es algún número entre a y $a + \Delta x$. En términos de f, esta ecuación se convierte en

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x$$

Esta ecuación ofrece una expresión para la primera parte del miembro derecho de la ecuación 1. Para la segunda parte se concede que $h(y) = f(a, y)$. Entonces, h es una función de una variable definida en el intervalo $[b, b + \Delta y]$ y $h'(y) = f_y(a, y)$.
Una segunda aplicación del teorema del valor medio da entonces

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v)\,\Delta y$$

donde v es algún número entre b y $b + \Delta y$. En términos de f, esto se convierte en

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v)\,\Delta y$$

Ahora se sustituyen estas expresiones en la ecuación 1 y se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, v)\,\Delta y \\
&= f_x(a, b)\,\Delta x + [f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)]\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y \\
&\qquad + [f_y(a, v) - f_y(a, b)]\,\Delta y \\
&= f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y
\end{aligned}$$

donde
$$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$

$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Como $(u, b + \Delta y) \to (a, b)$ y $(a, v) \to (a, b)$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ y como f_x y f_y son continuas en (a, b), vemos que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Por consiguiente, f es derivable en (a, b). ■

G El logaritmo definido como una integral

El tratamiento de funciones exponenciales y logarítmicas ha dependido hasta ahora de la intuición, que se basa en evidencias numéricas y visuales. (Véanse las secciones 1.4, 1.5 y 3.1.) Aquí se usará el teorema fundamental del cálculo para dar un tratamiento alternativo que brinde un fundamento más firme a esas funciones.

En vez de empezar con b^x y definiendo $\log_b x$ como su inversa, esta vez se comenzará definiendo $\ln x$ como una integral y luego se definirá la función exponencial como su inversa. Tenga en mente que no usará ninguna de las definiciones y resultados previos concernientes a funciones exponenciales y logarítmicas.

El logaritmo natural

En principio, se define primero $\ln x$ como una integral.

1 Definición La **función logarítmica natural** es la función definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

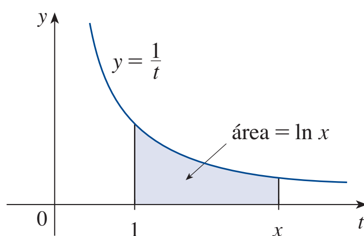


FIGURA 1

La existencia de esta función depende del hecho de que la integral de una función continua siempre existe. Si $x > 1$, entonces $\ln x$ puede interpretarse geométricamente como el área bajo la hipérbola $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$. (Véase la figura 1.) Para $x = 1$, se tiene

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

Para $0 < x < 1$,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$$

así que $\ln x$ es el negativo del área mostrada en la figura 2.

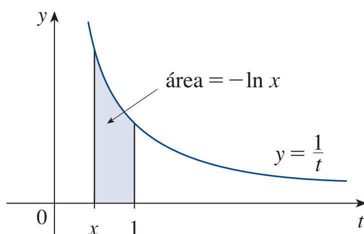


FIGURA 2

EJEMPLO 1

(a) Mediante la comparación de áreas, demuestre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.

(b) Use la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar el valor de $\ln 2$.

SOLUCIÓN

(a) Se puede interpretar $\ln 2$ como el área bajo la curva $y = 1/t$ de 1 a 2. En la figura 3 se observa que esta área es más grande que el área del rectángulo $BCDE$ y más pequeña que el área del trapezoide $ABCD$. Así, se tiene

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < \tfrac{3}{4}$$

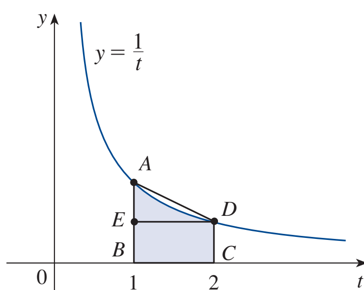


FIGURA 3

(b) Si se usa la regla del punto medio con $f(t) = 1/t$, $n = 10$, y $\Delta t = 0.1$, se obtiene

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx (0.1)[f(1.05) + f(1.15) + \cdots + f(1.95)]$$

$$= (0.1)\left(\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.15} + \cdots + \frac{1}{1.95}\right) \approx 0.693$$ ■

Adviértase que la integral que define a $\ln x$ es exactamente el tipo de integral que se analizó en la parte 1 del teorema fundamental del cálculo (véase la sección 5.3). De hecho, usando ese teorema, se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

así que

2
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Aquí se emplea esta regla de derivación para comprobar las propiedades siguientes de la función logarítmica.

3 Leyes de los logaritmos Si x y y son números positivos y r es un número racional, entonces

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r\ln x$

COMPROBACIÓN

1. Sea $f(x) = \ln(ax)$, donde a es una constante positiva. Entonces, al usar la ecuación 2 y la regla de la cadena, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x}$$

Por tanto, $f(x)$ y $\ln x$ tienen la misma derivada, así que deben diferir por una constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Si se desarrolla $x = 1$ en esta ecuación, se obtiene $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Así,

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Si ahora se reemplaza la constante a por cualquier número y, se tiene

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

2. Al usar la ley 1 con $x = 1/y$, se tiene

$$\ln\frac{1}{y} + \ln y = \ln\left(\frac{1}{y}\cdot y\right) = \ln 1 = 0$$

así que
$$\ln\frac{1}{y} = -\ln y$$

Al usar la ley 1 otra vez, se tiene

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

La comprobación de la ley 3 se deja como ejercicio. ■

A fin de graficar $y = \ln x$, primero se determinan sus límites:

4 (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

COMPROBACIÓN

(a) Usando la ley 3 con $x = 2$ y $r = n$ (donde n es cualquier entero positivo), se tiene $\ln(2^n) = n \ln 2$. Ahora $\ln 2 > 0$, así que esto demuestra que $\ln(2^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Pero $\ln x$ es una función creciente, ya que su derivada $1/x > 0$. Así, $\ln x \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

(b) Si se concede que $t = 1/x$, entonces $t \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. Por tanto, usando (a), se plantea

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to \infty} (-\ln t) = -\infty \qquad \blacksquare$$

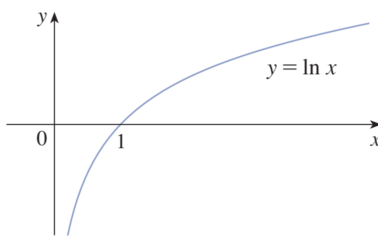


FIGURA 4

Si $y = \ln x$, $x > 0$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

lo que demuestra que $\ln x$ es creciente y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$. Al colocar esta información junto con (4), se traza la gráfica de $y = \ln x$ en la figura 4.

Como $\ln 1 = 0$ y $\ln x$ es una función creciente continua que adopta valores arbitrariamente grandes, el teorema del valor intermedio demuestra que hay un número donde $\ln x$ adopta el valor 1. (Véase la figura 5.) Este importante número es denotado como e.

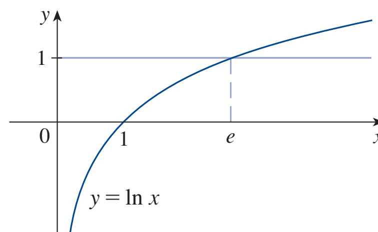


FIGURA 5

5 Definición e es el número tal que $\ln e = 1$.

Se demostrará (en el teorema 19) que esta definición es congruente con la definición previa de e.

La función exponencial natural

Como ln es una función creciente, es inyectiva y por tanto tiene una función inversa, que denota con exp. Así, de acuerdo con la definición de una función inversa,

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

6 $$\exp(x) = y \iff \ln y = x$$

y las ecuaciones de eliminación son

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

7 $$\exp(\ln x) = x \qquad \text{y} \qquad \ln(\exp x) = x$$

En particular, se tiene

$$\exp(0) = 1 \quad \text{ya que} \quad \ln 1 = 0$$
$$\exp(1) = e \quad \text{ya que} \quad \ln e = 1$$

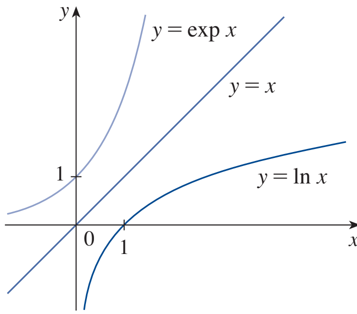


FIGURA 6

Se obtiene la gráfica de $y = \exp x$ al reflejar la gráfica de $y = \ln x$ a través de la recta $y = x$. (Véase la figura 6.) El dominio de exp es el rango de ln, es decir $(-\infty, \infty)$; el rango de exp es el dominio de ln, es decir $(0, \infty)$.

Si r es cualquier número racional, la tercera ley de los logaritmos da

$$\ln(e^r) = r \ln e = r$$

En consecuencia, por (6), $$\exp(r) = e^r$$

Así, $\exp(x) = e^x$ cada vez que x es un número racional. Esto nos lleva a definir e^x, aun para valores irracionales de x, mediante la ecuación

$$\boxed{e^x = \exp(x)}$$

En otras palabras, por las razones dadas, definimos e^x como la inversa de la función $\ln x$. En esta notación, (6) se convierte en

8 $$e^x = y \iff \ln y = x$$

y las ecuaciones de eliminación (7) se convierten en

9 $$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

10 $$\ln(e^x) = x \qquad \text{para todas las } x$$

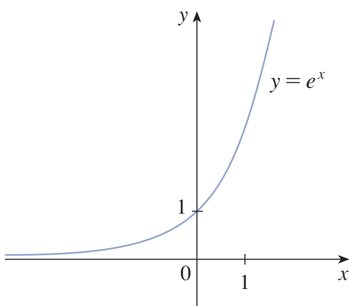


FIGURA 7
La función exponencial natural

La función exponencial natural $f(x) = e^x$ es una de las funciones de más frecuente ocurrencia en el cálculo y sus aplicaciones, así que es importante familiarizarse con su gráfica (figura 7) y sus propiedades (las cuales se derivan del hecho de que esta función es la inversa de la función logarítmica natural).

Propiedades de la función exponencial La función exponencial $f(x) = e^x$ es una función creciente continua con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Así, $e^x > 0$ para todas las x. Igualmente,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Entonces, el eje x es una asíntota natural de $f(x) = e^x$.

Ahora se verifica que f tiene las demás propiedades esperadas de una función exponencial.

11 **Leyes de los exponentes** Si x y y son números reales y r es un número racional, entonces

1. $e^{x+y} = e^x e^y$ **2.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ **3.** $(e^x)^r = e^{rx}$

COMPROBACIÓN DE LA LEY 1 Usando la primera ley de los logaritmos y la ecuación 10, se tiene

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$$

Como ln es una función inyectiva, de esto se sigue que $e^x e^y = e^{x+y}$.

Las leyes 2 y 3 se comprueban en forma similar (véanse los ejercicios 6 y 7). Como se verá, la ley 3 en realidad es válida cuando r es cualquier número real. ■

Ahora comprobaremos la fórmula de derivación para e^x.

12 $$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

COMPROBACIÓN La función $y = e^x$ es derivable porque es la función inversa de $y = \ln x$, la cual se sabe que es derivable con derivada diferente de cero. Para determinar su derivada, se usa el método de la función inversa. Sea $y = e^x$. Entonces $\ln y = x$ y, derivando implícitamente esta última ecuación con respecto a x, se obtiene

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$ ■

Funciones exponenciales generales

Si $b > 0$ y r es cualquier número racional, entonces por (9) y (11)

$$b^r = (e^{\ln b})^r = e^{r \ln b}$$

En consecuencia, aun para números irracionales x, *se define*

13 $$b^x = e^{x \ln b}$$

Así, por ejemplo,

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx e^{1.20} \approx 3.32$$

La función $f(x) = b^x$ se llama **función exponencial con base *b***. Nótese que b^x es positiva para todas las x, porque e^x es positiva para todas las x.

La definición 13 permite prolongar una de las leyes de los logaritmos. Ya se conoce que $\ln(b^r) = r \ln b$ cuando r es racional. Pero si ahora se sabe que r es *cualquier* número real, de la definición 13 se tiene

$$\ln b^r = \ln(e^{r \ln b}) = r \ln b$$

Así,

14 $$\ln b^r = r \ln b \qquad \text{para cualquier número real } r$$

Las leyes generales de los exponentes se encuentran de la definición 13 junto con las leyes de los exponentes para e^x.

15 **Leyes de los exponentes** Si x y y son números reales y $a, b > 0$, entonces

1. $b^{x+y} = b^x b^y$ **2.** $b^{x-y} = b^x/b^y$ **3.** $(b^x)^y = b^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

COMPROBACIÓN

1. Usando la definición 13 y las leyes de los exponentes para e^x, se tiene

$$b^{x+y} = e^{(x+y)\ln b} = e^{x\ln b + y\ln b}$$
$$= e^{x\ln b}e^{y\ln b} = b^x b^y$$

3. Usando la ecuación 14 se obtiene

$$(b^x)^y = e^{y\ln(b^x)} = e^{yx\ln b} = e^{xy\ln b} = b^{xy}$$

Las comprobaciones restantes se dejan como ejercicios. ■

La fórmula de derivación para funciones exponenciales también es consecuencia de la definición 13:

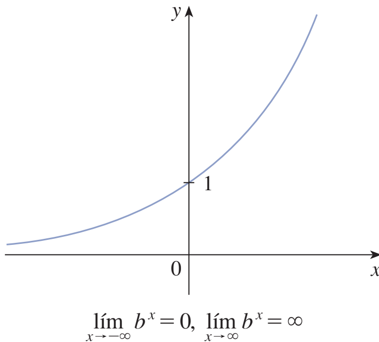


FIGURA 8 $y = b^x$, $b > 1$

16 $$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

COMPROBACIÓN

$$\frac{d}{dx}(b^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln b}) = e^{x\ln b}\frac{d}{dx}(x\ln b) = b^x \ln b$$ ■

Si $b > 1$, entonces $\ln b > 0$, así que $(d/dx)\, b^x = b^x \ln b > 0$, lo que demuestra que $y = b^x$ es creciente (véase la figura 8). Si $0 < b < 1$, entonces $\ln b < 0$, así que $y = b^x$ es decreciente (véase la figura 9).

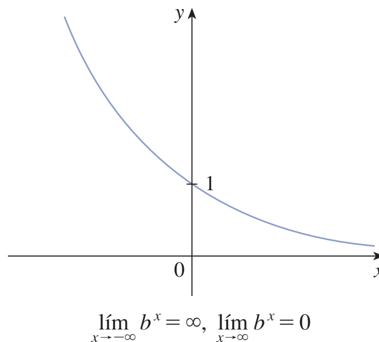


FIGURA 9 $y = b^x$, $0 < b < 1$

■ Funciones logarítmicas generales

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces $f(x) = b^x$ es una función inyectiva. Su función inversa se llama **función logarítmica con base *b*** y se denota con $\log_b$. Así,

17 $$\log_b x = y \quad \Longleftrightarrow \quad b^y = x$$

En particular, se observa que

$$\log_e x = \ln x$$

Las leyes de los logaritmos son similares a las del logaritmo natural y pueden deducirse de las leyes de los exponentes (véase el ejercicio 10).

Para derivar $y = \log_b x$, se escribe la ecuación como $b^y = x$. De la ecuación 14 se tiene $y \ln b = \ln x$, así que

$$\log_b x = y = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Como $\ln b$ es una constante, se puede derivar de la manera siguiente:

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln b}$$

18
$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

El número *e* expresado como un límite

En esta sección se definirá e como el número tal que $\ln e = 1$. El teorema siguiente indica que este es igual al número e definido en la sección 3.1 (véase la ecuación 3.6.5).

19
$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

COMPROBACIÓN Sea $f(x) = \ln x$. Entonces $f'(x) = 1/x$, así que $f'(1) = 1$. Pero, por la definición de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\ln(1 + x) = \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}$$

Debido a que $f'(1) = 1$, se tiene

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Entonces, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial, se tiene

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$ ■

G EJERCICIOS

1. (a) Mediante la comparación de áreas, demuestre que

$$\tfrac{1}{3} < \ln 1.5 < \tfrac{5}{12}$$

(b) Use la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar $\ln 1.5$.

2. Consulte el ejemplo 1.

(a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/t$ que es paralela a la recta secante AD.

(b) Use el inciso (a) para demostrar que $\ln 2 > 0.66$.

3. Mediante la comparación de áreas, demuestre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n - 1}$$

4. (a) Mediante la comparación de áreas, demuestre que $\ln 2 < 1 < \ln 3$.

(b) Deduzca que $2 < e < 3$.

5. Compruebe la tercera ley de los logaritmos. (*Sugerencia*: comience demostrando que ambos miembros de la ecuación tienen la misma derivada.)

6. Compruebe la segunda ley de los exponentes para e^x [véase (11)].

7. Compruebe la tercera ley de los exponentes para e^x [véase (11)].

8. Compruebe la segunda ley de los exponentes [véase (15)].

9. Compruebe la cuarta ley de los exponentes [véase (15)].

10. Deduzca de (15) las siguientes leyes de los logaritmos:
(a) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
(b) $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$
(c) $\log_b(x^y) = y \log_b x$

H Números complejos

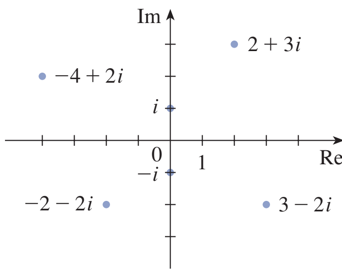


FIGURA 1
Números complejos como puntos en el plano de Argand

Un **número complejo** puede representarse con una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es un símbolo con la propiedad de que $i^2 = -1$. El número complejo $a + bi$ puede representarse también con el par ordenado (a, b) y trazarse como un punto en un plano (llamado plano de Argand) como en la figura 1. Así, el número complejo $i = 0 + 1 \cdot i$ se identifica con el punto (0, 1).

La **parte real** del número complejo $a + bi$ es el número real a y la **parte imaginaria** es el número real b. Así, la parte real de $4 - 3i$ es 4 y la parte imaginaria es –3. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** si $a = c$ y $b = d$, es decir si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. En el plano de Argand, el eje horizontal se llama eje real y el eje vertical se llama eje imaginario.

La suma y diferencia de dos números complejos se definen sumando o restando sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por ejemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

El producto de números complejos se define de tal forma que las usuales leyes conmutativa y distributiva sean válidas:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di)\\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Como $i^2 = -1$, esto se convierte en

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i)\\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$ ■

La división de números complejos es muy parecida a la racionalización del denominador de una expresión racional. Para el número complejo $z = a + bi$, se define su **conjugado complejo** como $\bar{z} = a - bi$. Para determinar el cociente de dos números complejos se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado complejo del denominador.

EJEMPLO 2 Exprese el número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado complejo de $2 + 5i$, es decir $2 - 5i$, y se aprovecha el resultado del ejemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29} i$$ ■

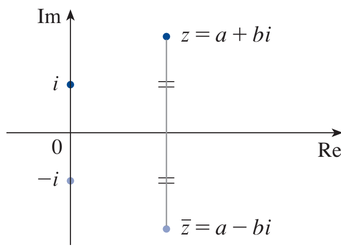


FIGURA 2

La interpretación geométrica del conjugado complejo se muestra en la figura 2: $\bar{z}$ es el reflejo de z a través del eje real. Se enlistan algunas de las propiedades del conjugado complejo en el recuadro siguiente. Las comprobaciones se encuentran después de la definición y se solicitarán en el ejercicio 18.

Propiedades de los conjugados

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

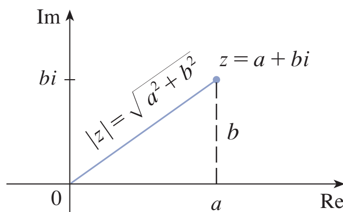


FIGURA 3

El **módulo**, o **valor absoluto**, $|z|$ de un número complejo $z = a + bi$ es su distancia del origen. En la figura 3 se observa que si $z = a + bi$, entonces

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

así que

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Esto explica que el procedimiento de división del ejemplo 2 opere en general:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Como $i^2 = -1$, se puede concebir a i como una raíz cuadrada de –1. Pero observe que también $(-i)^2 = i^2 = -1$, así que $-i$ es también una raíz cuadrada de –1. Se dice que i es la **raíz cuadrada principal** de -1 y se escribe $\sqrt{-1} = i$. En general, si c es cualquier número positivo, se escribe

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Con esta convención, la derivación y fórmula usuales de las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son válidas aun si $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 3 Determine las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula cuadrática, se tiene

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$ ■

Observe que las soluciones de la ecuación del ejemplo 3 son conjugados complejos entre sí. En general, las soluciones de cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes reales a, b y c son siempre conjugados complejos. (Si z es real, $\overline{z} = z$, así que z es su propia conjugada.)

Se ha visto que si se permiten números complejos como soluciones, todas las ecuaciones cuadráticas tendrán una solución. En términos más generales, es cierto que todas las ecuaciones polinomiales

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grado al menos uno tiene una solución entre los números complejos. Este hecho se conoce como teorema fundamental del álgebra y fue comprobado por Gauss.

Forma polar

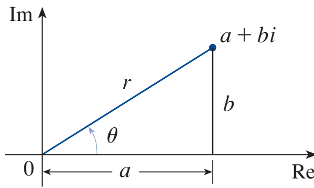


FIGURA 4

Sabemos que cualquier número complejo $z = a + bi$ puede ser considerado un punto (a, b) y que cualquier punto de este tipo puede representarse con coordenadas polares (r, θ), con $r \geqslant 0$. De hecho,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

como en la figura 4. Entonces se tiene

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)i$$

Así, se puede escribir cualquier número complejo z en la forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

donde $\qquad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad$ y $\qquad \tan\theta = \dfrac{b}{a}$

El ángulo θ se llama **argumento** de z y se escribe $\theta = \arg(z)$. Note que $\arg(z)$ no es único; cualesquiera dos argumentos de z difieren por un múltiplo entero de 2π.

EJEMPLO 4 Escriba los números siguientes en forma polar.

(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUCIÓN

(a) Se tiene $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\tan\theta = 1$, así que se puede tomar $\theta = \pi/4$. Por tanto, la forma polar es

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Aquí se tiene $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ y $\tan\theta = -1/\sqrt{3}$. Como w reside en el cuarto cuadrante, se toma $\theta = -\pi/6$ y

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

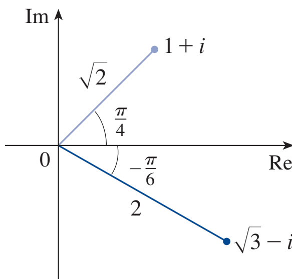


FIGURA 5

Los números z y w aparecen en la figura 5. ■

La forma polar de los números complejos aporta una idea de la multiplicación y la división. Sean

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

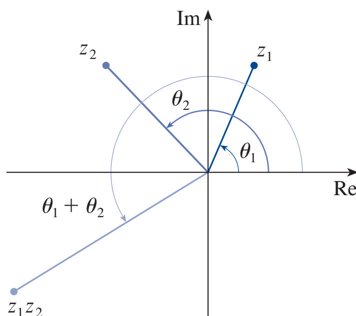


FIGURA 6

dos números complejos escritos en forma polar. Entonces,

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

Por tanto, usando las fórmulas de la adición para el coseno y el seno, se tiene

1 $$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Esta fórmula establece que *para multiplicar dos números complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos*. (Véase la figura 6.)

Un argumento similar que usa las fórmulas de la sustracción del seno y el coseno indica que *para dividir dos números complejos se dividen los módulos y se restan los argumentos*.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0$$

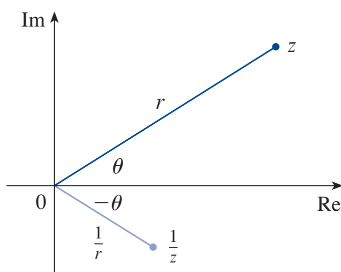


FIGURA 7

En particular, tomando $z_1 = 1$ y $z_2 = z$ (y por tanto $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \theta$, se obtiene lo siguiente, que se ilustra en la figura 7.

$$\text{Si} \quad z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta).$$

EJEMPLO 5 Determine el producto de los números complejos $1 + i$ y $\sqrt{3} - i$ en forma polar.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 se tiene

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

y $$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Así, por la ecuación 1,

$$\begin{aligned} (1 + i)(\sqrt{3} - i) &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

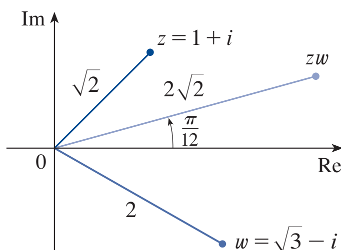


FIGURA 8

Esto se ilustra en la figura 8. ■

El uso repetido de la fórmula 1 muestra cómo calcular potencias de un número complejo. Si

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

entonces $$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

y $$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

En general, se obtiene el resultado siguiente, que toma su nombre del matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

2 Teorema de De Moivre Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces

$$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Esto indica que *para tomar la enésima potencia de un número complejo, se toma la enésima potencia del módulo y se multiplica el argumento por n.*

EJEMPLO 6 Determine $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUCIÓN Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, del ejemplo 4(a) se desprende que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tiene la forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Así, por el teorema de De Moivre,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

■

El teorema de De Moivre también puede usarse para determinar las enésimas raíces de números complejos. Una raíz enésima del número complejo z es un número complejo w tal que

$$w^n = z$$

Al escribir estos dos números en forma trigonométrica como

$$w = s(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \qquad \text{y} \qquad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

y usar el teorema de De Moivre, se obtiene

$$s^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

La igualdad de estos dos números complejos muestra que

$$s^n = r \qquad \text{o} \qquad s = r^{1/n}$$

y $$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\theta$$

Del hecho de que seno y coseno tienen período 2π se establece que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Así,
$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Como esta expresión da un valor diferente de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, se tiene lo siguiente.

3 Raíces de un número complejo Sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y sea n un entero positivo. Entonces, z tiene n raíces enésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Note que cada una de las enésimas raíces de z tiene módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Así, todas las raíces enésimas de z se sitúan en el círculo de radio $r^{1/n}$ en el plano complejo. Asimismo, como el argumento de cada enésima raíz sucesiva excede al argumento de la raíz previa en $2\pi/n$, se observa que las enésimas raíces de z están igualmente espaciadas en ese círculo.

EJEMPLO 7 Halle las seis raíces sextas de $z = -8$ y grafique esas raíces en el plano complejo.

SOLUCIÓN En forma trigonométrica, $z = 8(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$. Al aplicar la ecuación 3 con $n = 6$ se obtiene

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Se calculan las seis raíces sextas de -8 tomando $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en esta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

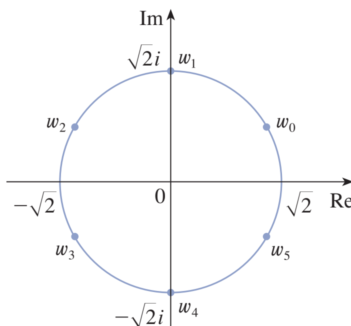


FIGURA 9
Las seis raíces sextas de $z = -8$

Todos estos puntos se ubican en el círculo de radio $\sqrt{2}$, como se muestra en la figura 9. ■

Exponenciales complejas

La expresión e^z debe tener un significado cuando $z = x + iy$ es un número complejo. La teoría de la serie infinita desarrollada en el capítulo 11 puede prolongarse al caso en el que los términos son números complejos. Usando como guía la serie de Taylor para e^x (11.10.11), se define

4 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

y resulta que esta función exponencial compleja tiene las mismas propiedades que la función exponencial real. En particular, es cierto que

5 $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Si $z = iy$, donde y es un número real, en la ecuación 4, y se usan los hechos de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

Se obtiene
$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Aquí se ha usado la serie de Taylor para $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$ (ecuaciones 11.10.16 y 11.10.15). El resultado es una fórmula famosa, llamada **fórmula de Euler**:

6 $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Al combinar la fórmula de Euler con la ecuación 5 se obtiene

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

EJEMPLO 8 Evalúe (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

El resultado del ejemplo 8(a) podría escribirse así

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta ecuación relaciona los cinco números más famosos de todas las matemáticas: 0, 1, e, i y π.

SOLUCIÓN

(a) Con base en la ecuación de Euler (6) se tiene

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando la ecuación 7 se obtiene

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$ ■

Por último, se observa que la ecuación de Euler brinda un método más fácil para comprobar el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

H EJERCICIOS

1-14 Evalúe la expresión y escriba su respuesta en la forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$

2. $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$

4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$

6. $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$

8. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$

10. $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3

12. i^{100}

13. $\sqrt{-25}$

14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15-17 Determine el conjugado complejo y el módulo del número.

15. $12 - 5i$

16. $-1 + 2\sqrt{2}\, i$

17. $-4i$

18. Compruebe las propiedades siguientes de los números complejos.

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(b) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

(c) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, donde n es un entero positivo

[*Sugerencia*: escriba $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19-24 Determine todas las soluciones de la ecuación.

19. $4x^2 + 9 = 0$

20. $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$

22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$

24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25-28 Escriba el número en forma polar con argumento entre 0 y 2π.

25. $-3 + 3i$

26. $1 - \sqrt{3}\, i$

27. $3 + 4i$

28. $8i$

29-32 Determine formas polares para zw, z/w y $1/z$ poniendo primero z y w en forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}\, i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4\left(\sqrt{3} + i\right), \quad w = -3 - 3i$

33-36 Halle la potencia indicada usando el teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$

34. $\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)^5$

35. $\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^5$

36. $(1 - i)^8$

37-40 Halle las raíces indicadas. Trace las raíces en el plano complejo.

37. Las raíces octavas de 1

38. Las raíces quintas de 32

39. Las raíces cúbicas de i

40. Las raíces cúbicas de $1 + i$

41-46 Escriba el número en la forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$

42. $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$

44. $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$

46. $e^{\pi+i}$

47. Use el teorema de De Moivre con $n = 3$ para expresar $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

48. Use la fórmula de Euler para comprobar las fórmulas siguientes para $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Si $u(x) = f(x) + ig(x)$ es una función con valores complejos de una variable real x y las partes real e imaginaria $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables de x, la derivada de u se define como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Use esto junto con la ecuación 7 para comprobar que si $F(x) = e^{rx}$, entonces $F'(x) = re^{rx}$ cuando $r = a + bi$ es un número complejo.

50. (a) Si u es una función con valores complejos de una variable real, su integral indefinida $\int u(x)\,dx$ es una antiderivada de u. Evalúe

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando las partes real e imaginaria de la integral del inciso (a), evalúe las integrales reales

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

(c) Compare con el método usado en el ejemplo 7.1.4.

I Respuestas a los ejercicios con número impar

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1 ■ PÁGINA 19

1. Sí

3. (a) 3 (b) -0.2 (c) 0, 3 (d) -0.8 (e) $[-2, 4]$, $[-1, 3]$ (f) $[-2, 1]$

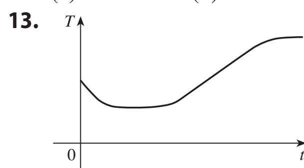
5. $[-85, 115]$

7. No

9. Sí, $[-3, 2]$, $[-3, -2) \cup [-1, 3]$

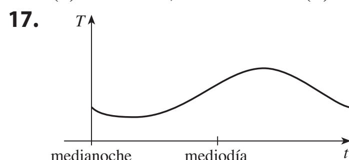
11. (a) 13.8°C (b) 1990 (c) 1910, 2005 (d) $[13.5, 14.5]$

13.

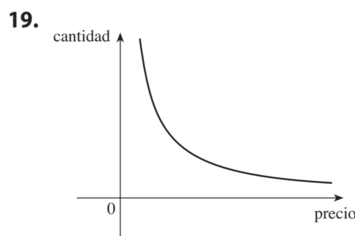


15. (a) 500 MW; 730 MW (b) 4 AM; mediodía; sí

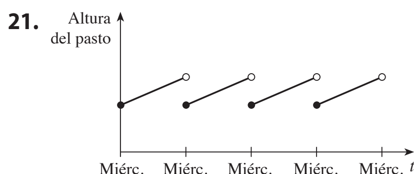
17.



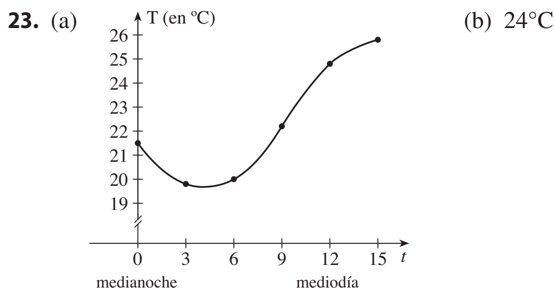
19.



21.



23. (a)



(b) 24°C

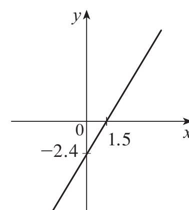
25. 12, 16, $3a^2 - a + 2$, $3a^2 + a + 2$, $3a^2 + 5a + 4$, $6a^2 - 2a + 4$, $12a^2 - 2a + 2$, $3a^4 - a^2 + 2$, $9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4$, $3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

27. $-3 - h$ **29.** $-1/(ax)$

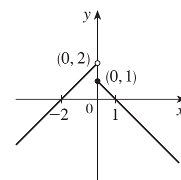
31. $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$ **33.** $(-\infty, \infty)$

35. $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ **37.** $[0, 4]$

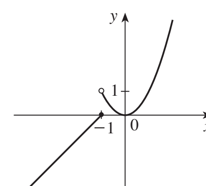
39. $(-\infty, \infty)$



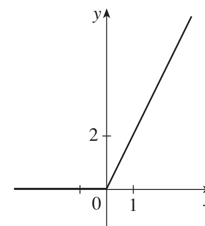
41. $-1, 1, -1$



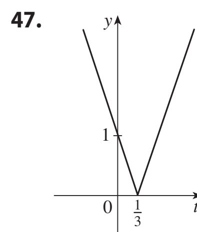
43. $-2, 0, 4$



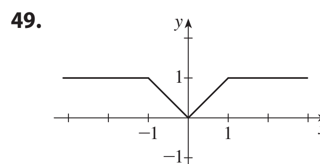
45.



47.



49.



51. $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$, $1 \leqslant x \leqslant 5$ **53.** $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

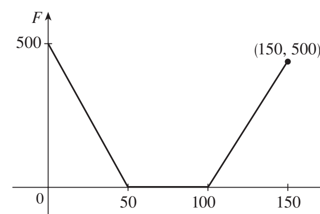
55. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x - 6 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$

57. $A(L) = 10L - L^2$, $0 < L < 10$

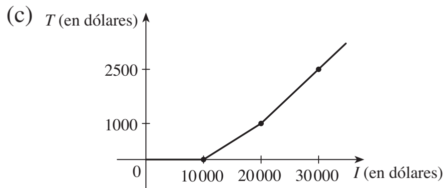
59. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4$, $x > 0$ **61.** $S(x) = x^2 + (8/x)$, $x > 0$

63. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x$, $0 < x < 6$

65. $F(x) = \begin{cases} 10(50 - x) & \text{si } 0 \leqslant x < 50 \\ 0 & \text{si } 50 \leqslant x \leqslant 100 \\ 10(x - 100) & \text{si } x > 100 \end{cases}$



67. (a)



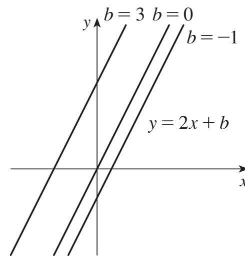
(b) \$400, \$1900

(c)

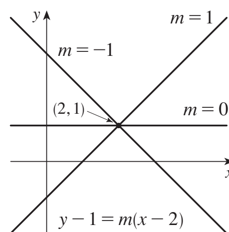
69. f es impar, g es par **71.** (a) $(-5, 3)$ (b) $(-5, -3)$
73. Impar
75. Ninguno de los dos
77. Par
79. Par; impar; ninguno de los dos (a menos que $f = 0$ o $g = 0$)

EJERCICIOS 1.2 ■ PÁGINA 33

1. (a) Logarítmica (b) Raíz (c) Racional (d) Polinomio, grado 2 (e) Exponencial (f) Trigonométrica
3. (a) h (b) f (c) g
5. $\{x \mid x \neq \pi/2 + 2n\pi\}$, n un entero
7. (a) $y = 2x + b$, donde b es la intersección en y.

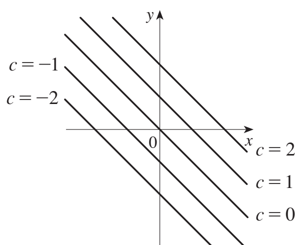


(b) $y = mx + 1 - 2m$, donde m es la pendiente.



(c) $y = 2x - 3$

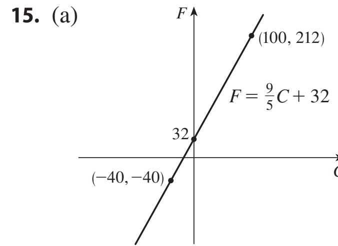
9. Sus gráficas tienen pendiente -1.



11. $f(x) = -3x(x + 1)(x - 2)$

13. (a) 8.34, cambio en mg por cada cambio de 1 año (b) 8.34

15. (a)



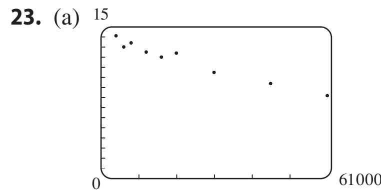
(b) $\frac{9}{5}$, cambio en °F por cada cambio de 1 °C; 32, temperatura Fahrenheit correspondiente a 0 °C

17. (a) $T = \frac{9}{68}N + \frac{88}{17}$ (b) $\frac{9}{68}$, cambio en °C por cada chirrido por cambio de un minuto (c) 25 °C

19. (a) $P = 0.10d + 1.05$ (b) 59.5 m

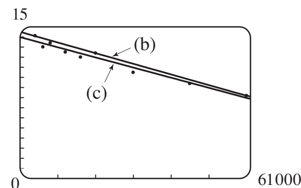
21. (a) Coseno (b) Lineal

23. (a)



Un modelo lineal es apropiado.

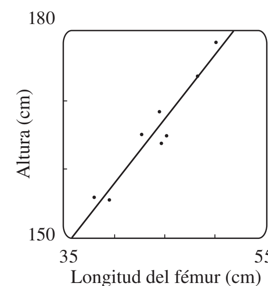
(b) $y = -0.000105x + 14.521$



(c) $y = -0.00009979x + 13.951$
(d) Alrededor de 11.5 por 100 de población
(e) Alrededor de 6%
(f) No

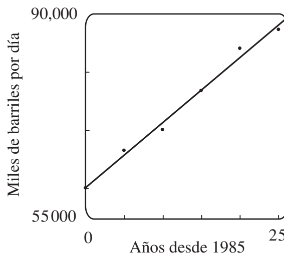
25. (a) Véase gráfica en el inciso (b).

(b) $y = 1.88074x + 82.64974$



(c) 182.3 cm

27. (a) Un modelo lineal es apropiado. Véase la gráfica en el inciso (b). (b) $y = 1116.64x + 60\,188.33$



(c) En miles de barriles por día: 79 171 y 90 338

29. Cuatro veces más brillante

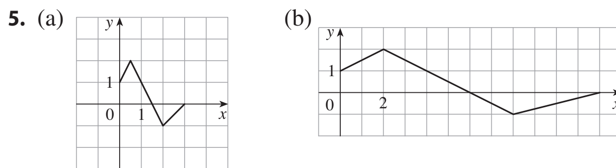
27. (a) $N = 3.1046A^{0.308}$ (b) 18

EJERCICIOS 1.3 ■ PÁGINA 42

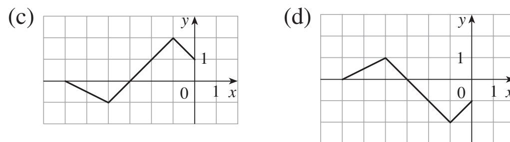
1. (a) $y = f(x) + 3$ (b) $y = f(x) - 3$ (c) $y = f(x - 3)$ (d) $y = f(x + 3)$ (e) $y = -f(x)$ (f) $y = f(-x)$ (g) $y = 3f(x)$ (h) $y = \frac{1}{3}f(x)$

3. (a) 3 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 2

5. (a) (b)

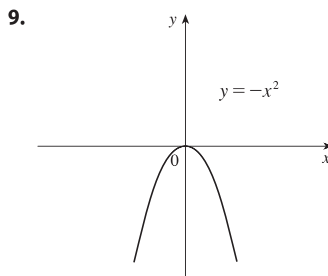


(c) (d)

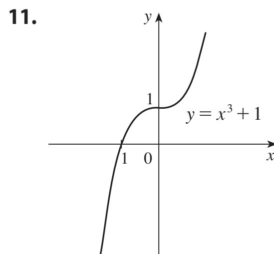


7. $y = -\sqrt{-x^2 - 5x - 4} - 1$

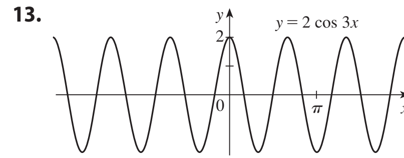
9.



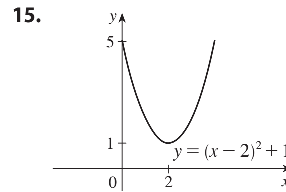
11.



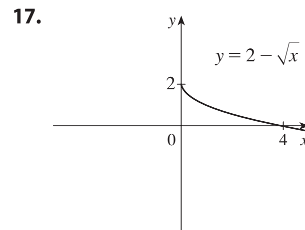
13.



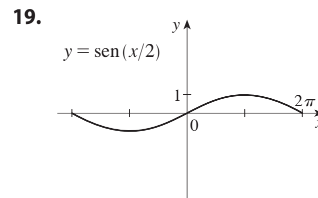
15.



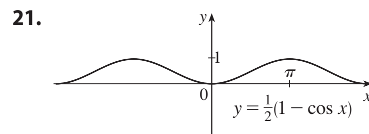
17.



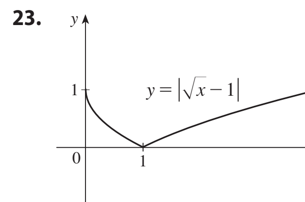
19.



21.



23.

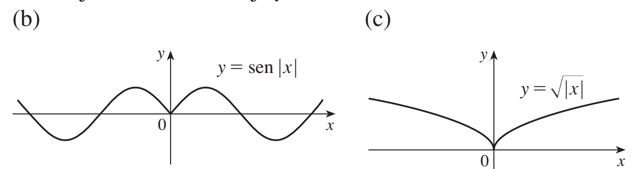


25. $L(t) = 12 + 2\,\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$

27. $D(t) = 5\cos[(\pi/6)(t - 6.75)] + 7$

29. (a) La porción de la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha del eje y es reflejada a través del eje y.

(b) (c)



31. (a) $(f+g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1,\ (-\infty, \infty)$
(b) $(f-g)(x) = x^3 - x^2 + 1,\ (-\infty, \infty)$
(c) $(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2,\ (-\infty, \infty)$
(d) $(f/g)(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{3x^2 - 1},\ \left\{x \mid x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

33. (a) $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 3x + 5,\ (-\infty, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 33x + 30,\ (-\infty, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = 9x + 20,\ (-\infty, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x,\ (-\infty, \infty)$

35. (a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{4x - 2},\ \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$
(b) $(g \circ f)(x) = 4\sqrt{x+1} - 3,\ [-1, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1},\ [-1, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = 16x - 15,\ (-\infty, \infty)$

37. (a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{(x+2)(x+1)},\ \{x \mid x \neq -2, -1\}$
(b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2},\ \{x \mid x \neq -1, 0\}$
(c) $(f \circ f)(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2+1)},\ \{x \mid x \neq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = \dfrac{2x + 3}{3x + 5},\ \{x \mid x \neq -2, -\frac{5}{3}\}$

39. $(f \circ g \circ h)(x) = 3\ \mathrm{sen}(x^2) - 2$

41. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^6 + 4x^3 + 1}$

43. $g(x) = 2x + x^2,\ f(x) = x^4$

45. $g(x) = \sqrt[3]{x},\ f(x) = x/(1+x)$

47. $g(t) = t^2,\ f(t) = \sec t \tan t$

49. $h(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x - 1,\ f(x) = \sqrt{x}$

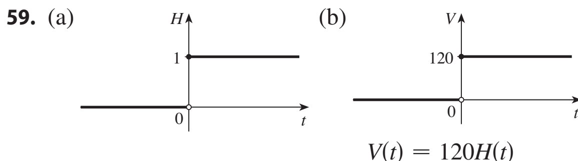
51. $h(t) = \cos t,\ g(t) = \mathrm{sen}\ t,\ f(t) = t^2$

53. (a) 4 (b) 3 (c) 0 (d) No existe; $f(6) = 6$ no está en el dominio de g. (e) 4 (f) -2

55. (a) $r(t) = 60t$ (b) $(A \circ r)(t) = 3600\pi t^2$; el área del círculo es una función de tiempo

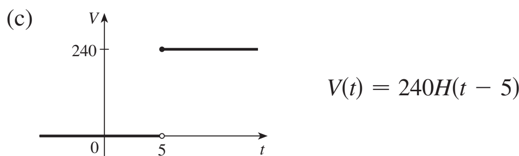
57. (a) $s = \sqrt{d^2 + 36}$ (b) $d = 30t$
(c) $(f \circ g)(t) = \sqrt{900t^2 + 36}$; la distancia entre el faro y el barco como una función del tiempo transcurrido desde el mediodía

59. (a) (b)



$V(t) = 120H(t)$

(c)



$V(t) = 240H(t - 5)$

61. Sí; $m_1 m_2$

63. (a) $f(x) = x^2 + 6$ (b) $g(x) = x^2 + x - 1$

65. Sí

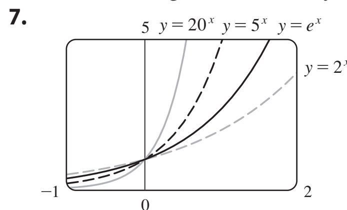
EJERCICIOS 1.4 ■ PÁGINA 53

1. (a) 4 (b) $x^{-4/3}$

3. (a) $16b^{12}$ (b) $648y^7$

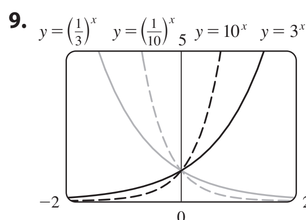
5. (a) $f(x) = b^x,\ b > 0$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $(0, \infty)$
(d) Véanse las figuras 4(c), 4(b) y 4(a), respectivamente

7.



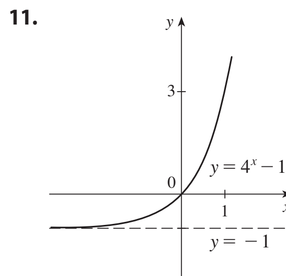
Todos se aproximan a 0 cuando x → −∞, todos pasan por (0, 1) y todos son crecientes. Cuanto mayor es la base, más rápida es la razón de incremento.

9.

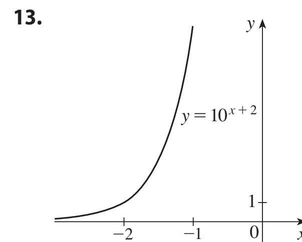


Las funciones con base mayor que 1 son crecientes y aquellas con base menor que 1 son decrecientes. Estas últimas son reflexiones de aquellas, a través del eje y.

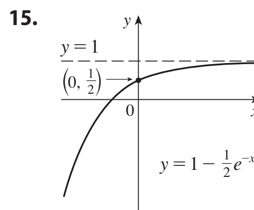
11.



13.



15.



17. (a) $y = e^x - 2$ (b) $y = e^{x-2}$ (c) $y = -e^x$
(d) $y = e^{-x}$ (e) $y = -e^{-x}$

19. (a) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ (b) $(-\infty, \infty)$

21. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **27.** At $x \approx 35.8$

29. (a) Véase la gráfica en el inciso (c).
(b) $f(t) = 36.89301(1.06614)^t$
(c) Alrededor de 10.87 h

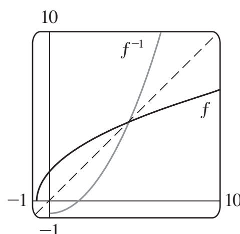
190
Conteo de bacterias (CFU/ml)
0
25
t (horas)

31. (a) 25 mg (b) $200 \cdot 2^{-t/5}$ mg
(c) 10.9 mg (d) 38.2 días

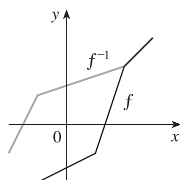
33. 3.5 días
35. $P = 2614.086(1.01693)^t$; 5381 millones; 8466 millones

EJERCICIOS 1.5 ■ PÁGINA 66

1. (a) Véase definición 1.
(b) Debe pasar la prueba de la recta horizontal.
3. No **5.** No **7.** Sí **9.** Sí **11.** No **13.** No
15. (a) 4 (b) 8 **17.** 0
19. $F = \frac{9}{5}C + 32$; la temperatura Fahrenheit como función de la temperatura Celsius; $[-273.15, \infty)$
21. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{2}{3}$, $x \geqslant 1$
23. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)$ **25.** $y = e^x - 3$
27. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 3)$, $x \geqslant 0$

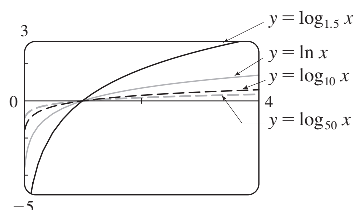


29.



31. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; f^{-1} y f son la misma función. (b) Cuarto de círculo en el primer cuadrante
33. (a) Se define como la inversa de la función exponencial con base b, es decir $\log_b x = y \Longleftrightarrow b^y = x$.
(b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R}$ (d) Véase la figura 11.
35. (a) 5 (b) $\frac{1}{3}$ **37.** (a) 2 (b) $\frac{2}{3}$
39. $\ln 5$ **41.** $\ln \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

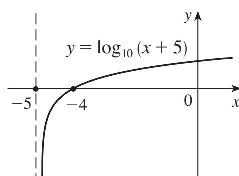
43.



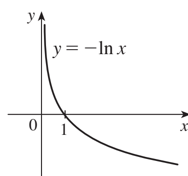
Todas las gráficas se aproximan a $-\infty$ cuando $x \to 0^+$, todas pasan por (1, 0) y todas son crecientes. Cuanto mayor es la base, más lenta es la razón de incremento.

45. Alrededor de 1.27×10^{25} km

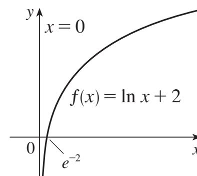
47. (a)



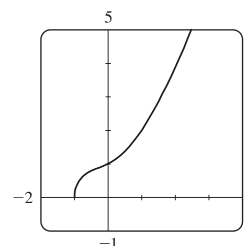
(b)



49. (a) $(0, \infty)$; $(-\infty, \infty)$ (b) e^{-2}
(c)

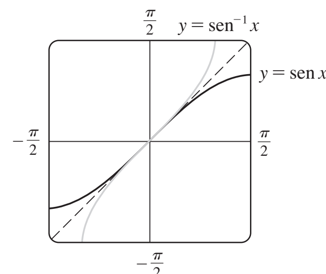


51. (a) $\frac{1}{4}(7 - \ln 6)$ (b) $\frac{1}{3}(e^2 + 10)$
53. (a) $5 + \log_2 3$ or $5 + (\ln 3)/\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4e}\right)$
55. (a) $0 < x < e$ (b) $x \geqslant \ln 3$
57. (a) $(\ln 3, \infty)$ (b) $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 3)$; $\mathbb{R}$
59. La gráfica pasa la prueba de la recta horizontal.



$f^{-1}(x) = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{D - 27x^2 + 20} - \sqrt[3]{D + 27x^2 - 20} + \sqrt[3]{2}\right)$, donde $D = 3\sqrt{3}\sqrt{27x^4 - 40x^2 + 16}$; dos de las expresiones son complejas.
61. (a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; el tiempo transcurrido cuando hay n bacterias (b) Después de alrededor de 26.9 horas
63. (a) π (b) $\pi/6$
65. (a) $\pi/4$ (b) $\pi/2$
67. (a) $5\pi/6$ (b) $\pi/3$
71. $x/\sqrt{1 + x^2}$

73.



La segunda gráfica es reflejo de la primera a través de la recta $y = x$

75. $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$, $[-\pi/2, \pi/2]$
77. (a) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - c$ (b) $h^{-1}(x) = (1/c)f^{-1}(x)$

REPASO DEL CAPÍTULO 1 ■ PÁGINA 69

Examen verdadero-falso

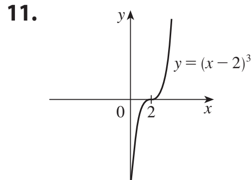
1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Falso

Ejercicios

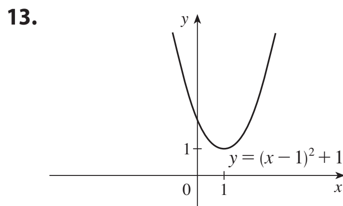
1. (a) 2.7 (b) 2.3, 5.6 (c) $[-6, 6]$ (d) $[-4, 4]$
(e) $[-4, 4]$ (f) No; no pasa la prueba de la recta horizontal.
(g) Impar; su gráfica es simétrica alrededor del origen.
3. $2a + h - 2$ **5.** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
7. $(-6, \infty)$, $\mathbb{R}$

9. (a) Desplace la gráfica 8 unidades hacia arriba.
(b) Desplace la gráfica 8 unidades a la izquierda.
(c) Prolongue la gráfica verticalmente por un factor de 2, luego desplácela 1 unidad hacia arriba.
(d) Desplace la gráfica 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.
(e) Refleje la gráfica a través del eje x.
(f) Refleje la gráfica a través de la recta $y = x$ (suponiendo que f es inyectiva).

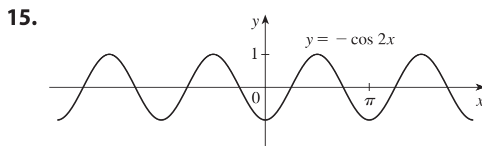
11.



13.



15.



17. (a) Ninguno de los dos (b) Impar (c) Par
(d) Ninguno de los dos

19. (a) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9), (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9, (0, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = \ln \ln x, (1, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9, (-\infty, \infty)$

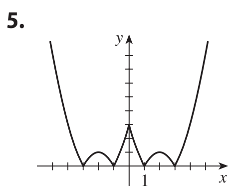
21. Modelo exponencial; 270 millones
27. (a) $\frac{1}{16}$g (b) $m(t) = 2^{-t/4}$
(c) $t(m) = -4 \log_2 m$; el tiempo transcurrido cuando hay m gramos de ^{100}PD
(d) Alrededor de 26.6 días

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 76

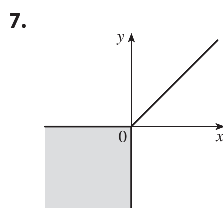
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, donde a es la longitud de la altitud y h la longitud de la hipotenusa

3. $-\frac{7}{3}, 9$

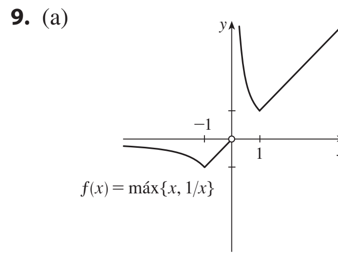
5.



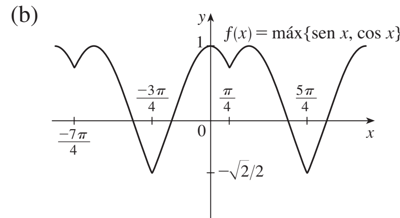
7.



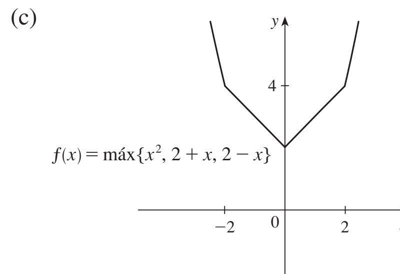
9. (a)



(b)



(c)



11. 5 **13.** $x \in \left[-1, 1 - \sqrt{3}\right) \cup \left(1 + \sqrt{3}, 3\right]$
15. 80 km/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

CAPÍTULO 2

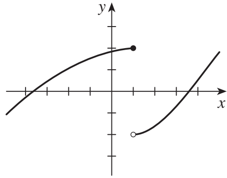
EJERCICIOS 2.1 ■ PÁGINA 82

1. (a) $-44.4, -38.8, -27.8, -22.2, -16.\overline{6}$
(b) -33.3 (c) $-33\frac{1}{3}$
3. (a) (i) 2 (ii) 1.111111 (iii) 1.010101 (iv) 1.001001
(v) 0.666667 (vi) 0.909091 (vii) 0.990099
(viii) 0.999001 (b) 1 (c) $y = x - 3$
5. (a) (i) -7.15 m/s (ii) -5.19 m/s (iii) -4.945 m/s
(iv) -4.749 m/s (b) -4.7 m/s
7. (a) (i) 4.65 m/s (ii) 5.6 m/s (iii) 7.55 m/s
(iv) 7 m/s (b) 6.3 m/s
9. (a) 0, 1.7321, -1.0847, -2.7433, 4.3301, -2.8173, 0, -2.1651, -2.6061, -5, 3.4202; no (c) -31.4

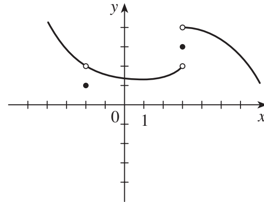
EJERCICIOS 2.2 ■ PÁGINA 92

1. Sí
3. (a) $\lim_{x \to -5} f(x) = \infty$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera) tomando a x suficientemente cerca de -5 (pero no igual a -5).
(b) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes y negativos tomando a x suficientemente cerca de 3 hasta valores mayores que 3.

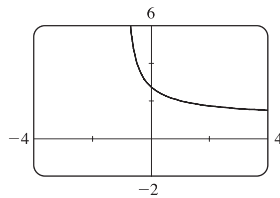
5. (a) 2 (b) 1 (c) 4 (d) No existe (e) 3
7. (a) -1 (b) -2 (c) No existe (d) 2 (e) 0
(f) No existe (g) 1 (h) 3
9. (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) ∞
(f) $x = -7, x = -3, x = 0, x = 6$
11. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe para todas las a excepto $a = -1$.
13. (a) 1 (b) 0 (c) No existe.
15.



17.



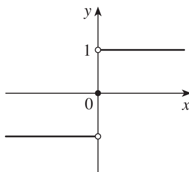
19. $\frac{1}{2}$ **21.** 5 **23.** 0.25 **25.** 1.5 **27.** 1
29. (a) -1.5 **31.** ∞ **33.** ∞ **35.** $-\infty$ **37.** $-\infty$
39. $-\infty$ **41.** ∞ **43.** $-\infty$ **45.** $-\infty$; ∞
47. (a) 2.71828 (b)



49. (a) 0.998000, 0.638259, 0.358484, 0.158680, 0.038851, 0.008928, 0.001465; 0
(b) 0.000572, -0.000614, -0.000907, -0.000978, -0.000993, -0.001000; -0.001
51. Por más que nos acerquemos al origen, la gráfica parece constar de rectas casi verticales. Esto indica oscilaciones cada vez más frecuentes conforme $x \to 0$.
53. $x \approx \pm 0.90, \pm 2.24$; $x = \pm \text{sen}^{-1}(\pi/4), \pm(\pi - \text{sen}^{-1}(\pi/4))$
55. (a) 6 (b) Menos de 0.0649 de 1

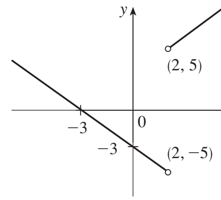
EJERCICIOS 2.3 ■ PÁGINA 102

1. (a) -6 (b) -8 (c) 2 (d) -6
(e) No existe (f) 0
3. 59 **5.** $\frac{7}{8}$ **7.** 390 **9.** $\frac{3}{2}$ **11.** 5
13. No existe **15.** $\frac{6}{5}$ **17.** -10 **19.** $\frac{1}{27}$
21. $\frac{1}{6}$ **23.** $-\frac{1}{9}$ **25.** 1 **27.** $\frac{1}{128}$ **29.** $-\frac{1}{2}$
31. $3x^2$ **33.** (a), (b) $\frac{2}{3}$ **37.** 7 **41.** 6 **43.** -4
45. No existe
47. (a)



(b) (i) 1
(ii) -1
(iii) No existe
(iv) 1

49. (a) (i) 5 (ii) -5 (b) No existe
(c)



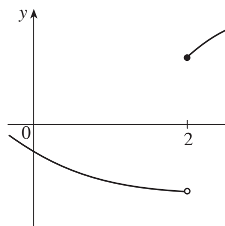
51. 7
53. (a) (i) -2 (ii) No existe (iii) -3
(b) (i) $n - 1$ (ii) n (c) a no es un entero.
59. 8 **65.** 15; -1

EJERCICIOS 2.4 ■ PÁGINA 113

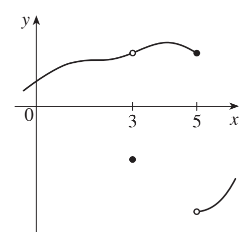
1. 0.1 (o cualquier número positivo menor)
3. 1.44 (o cualquier número positivo menor)
5. 0.0906 (o cualquier número positivo menor)
7. 0.0219 (o cualquier número positivo);
0.011 (o cualquier número positivo menor)
9. (a) 0.01 (o cualquier número positivo menor)
(b) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{\ln(x - 1)} = \infty$
11. (a) $\sqrt{1000/\pi}$ cm (b) Menos de aproximadamente 0.0445 cm
(c) Radio; área; $\sqrt{1000/\pi}$; 1000; 5; ≈ 0.0445
13. (a) 0.02 (b) 0.002
35. (a) 0.093 (b) $\delta = (B^{2/3} - 12)/(6B^{1/3}) - 1$, donde $B = 216 + 108\varepsilon + 12\sqrt{336 + 324\varepsilon + 81\varepsilon^2}$
41. Menos de 0.1

EJERCICIOS 2.5 ■ PÁGINA 124

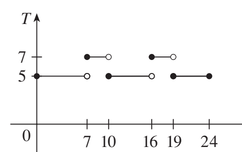
1. $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$
3. (a) $-4, -2, 2, 4$; $f(-4)$ no está definida y $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe para $a = -2$, 2 y 4
(b) -4, ninguno de los dos; -2, izquierda; 2 derecha; 4, derecha
5.



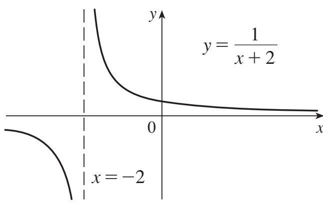
7.



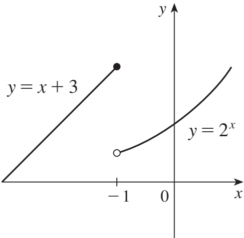
9. (a)

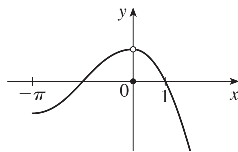


17. $f(-2)$ no está definida.



19. $\lim_{x\to -1}$ no existe. **21.** $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$



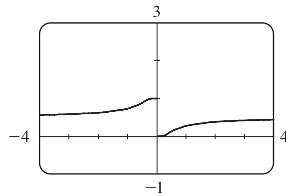


23. Defina $f(2) = 3$ **25.** $(-\infty, \infty)$

27. $\left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}, \infty\right)$ **29.** $[-1, 0]$

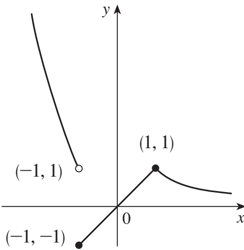
31. $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

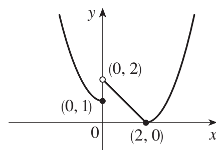
33. $x = 0$



35. 8 **37.** In 2

41. -1, derecha **43.** 0 izquierda





45. $\frac{2}{3}$ **47.** 4

49. (a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ (b) $g(x) = x^2 + x$

57. (b) (0.86, 0.87) **59.** (b) 70.347 **67.** Ninguno

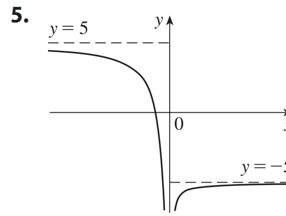
69. Sí

EJERCICIOS 2.6 ■ PÁGINA 137

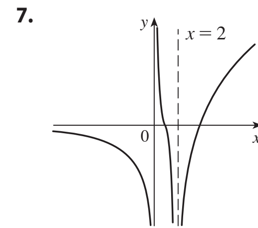
1. (a) Conforme x aumenta, $f(x)$ se aproxima a 5.
(b) Conforme x aumenta y se vuelve negativa, $f(x)$ se aproxima a 3.

3. (a) -2 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$
(e) $x = 1, x = 3, y = -2, y = 2$

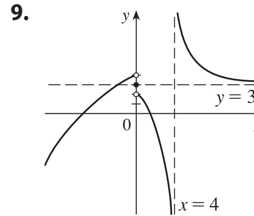
5.



7.



9.



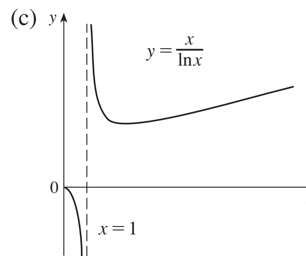
11. 0 **13.** $\frac{2}{5}$ **15.** 0 **17.** $-\frac{1}{2}$ **19.** -1 **21.** 4

23. -2 **25.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **27.** $\frac{1}{6}$ **29.** $\frac{1}{2}(a - b)$ **31.** ∞

33. $-\infty$ **35.** $\pi/2$ **37.** $-\frac{1}{2}$ **39.** 0 **41.** ∞

43. (a) (i) 0 (ii) $-\infty$ (iii) ∞ (b) ∞

(c)



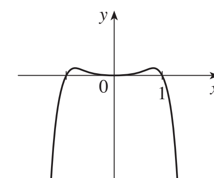
45. (a), (b) $-\frac{1}{2}$ **47.** $y = 4, x = -3$

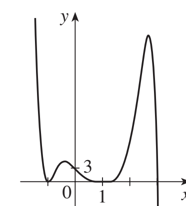
49. $y = 2; x = -2, x = 1$ **51.** $x = 5$ **53.** $y = 3$

55. (a) 0 (b) $\pm\infty$

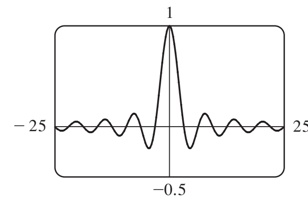
57. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2(x - 3)}$ **59.** (a) $\frac{5}{4}$ (b) 5

61. $-\infty, -\infty$ **63.** $-\infty, \infty$



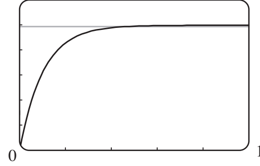


65. (a) 0 (b) Un número infinito de veces



67. 5

69. (a) v^* (b) ≈ 0.47 s

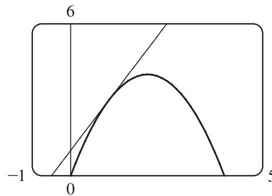


71. $N \geqslant 15$ **73.** $N \leqslant -9, N \leqslant -19$
75. (a) $x > 100$

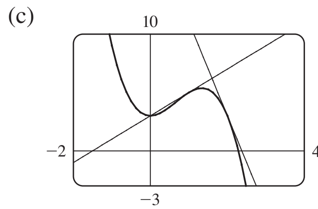
EJERCICIOS 2.7 ■ PÁGINA 148

1. (a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

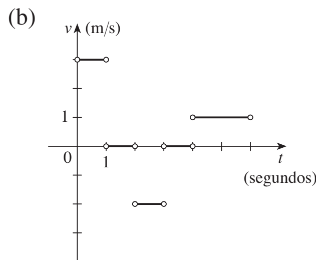
3. (a) 2 (b) $y = 2x + 1$ (c)



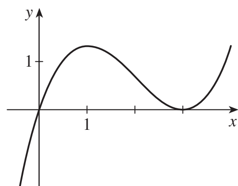
5. $y = -8x + 12$ **7.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
9. (a) $8a - 6a^2$ (b) $y = 2x + 3, y = -8x + 19$
(c)



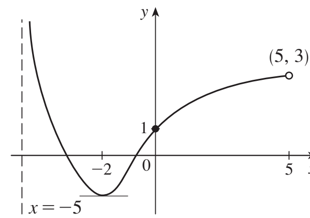
11. (a) Derecha: $0 < t < 1$ y $4 < t < 6$; izquierda: $2 < t < 3$; en estado de quietud: $1 < t < 2$ y $3 < t < 4$
(b)



13. -9.6 m/s
15. $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s
17. $g'(0), 0, g'(4), g'(2), g'(-2)$
19. (a) 26 (b) No (c) Sí
21. $f(2) = 3$; $f'(2) = 4$
23.

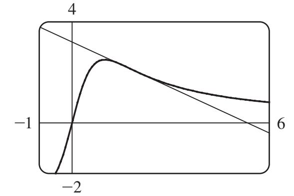


25.



27. $y = 3x - 1$

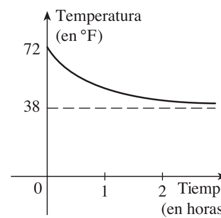
29. (a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$ (b)



31. $6a - 4$ **33.** $\dfrac{5}{(a + 3)^2}$ **35.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2a}}$

37. $f(x) = \sqrt{x}, a = 9$ **39.** $f(x) = x^6, a = 2$
41. $f(x) = \cos x, a = \pi$ o $f(x) = \cos(\pi + x), a = 0$
43. 32 m/s; 32 m/s

45. Mayor en magnitud



47. (a) In (mg/mL)/h: (i) -0.15 (ii) -0.12 (iii) -0.12 (iv) -0.11 (b) -0.12 (mg/mL)/h; Después de 2 horas, la BAC decrece a razón de 0.12 (mg/mL)/h.

49. (a) (i) 0.82 (ii) 1.07 (iii) 1.38
(b) 1.23 millones de pasajeros al año

51. (a) (i) \$20.25/unidad (ii) \$20.05/unidad (b) \$20/unidad

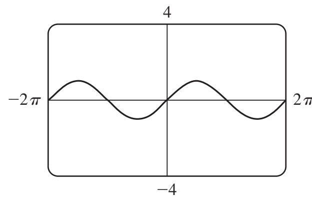
53. (a) La razón a la que cambia el costo por kilogramo de oro producido; dólares por kilogramo
(b) Cuando el 50.º kilogramo de oro es producido, el costo de producción es de \$36/kg
(c) Decrece a corto plazo; se incrementa a largo plazo

55. (a) $H'(15)$ es la razón a la que cambian los costos diarios de calefacción con respecto a la temperatura cuando la temperatura exterior es °C. Las unidades son dólares/°C
(b) Si la temperatura exterior aumenta, el edificio debería requerir menos calefacción, así que sería mejor que $H'(15)$ fuera negativa.

57. (a) La razón a la que cambia la solubilidad del oxígeno con respecto a la temperatura del agua; (mg/L)/°C
(b) $S'(16) \approx -0.25$; cuando la temperatura aumenta a más de 16 °C, la solubilidad del oxígeno disminuye a razón de 0.25 (mg/L)/°C.

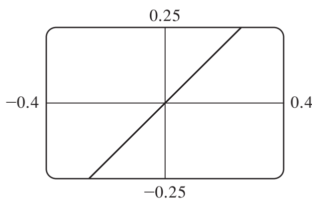
59. No existe.

61. (a)



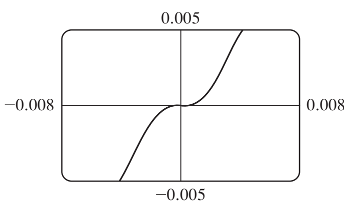
La pendiente parece ser de 1.

(b)



Sí

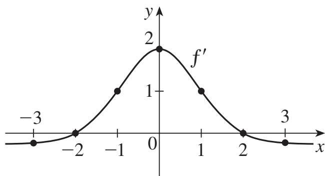
(c)



Sí; 0

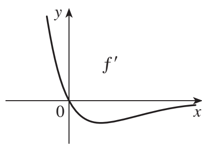
EJERCICIOS 2.8 ■ PÁGINA 160

1. (a) -0.2 (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) 1 (f) 0 (g) -0.2

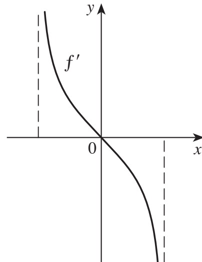


3. (a) II (b) IV (c) I (d) III

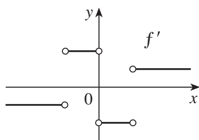
5.



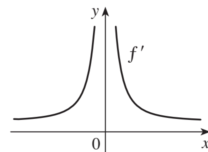
7.



9.

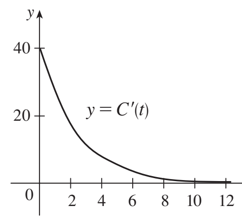


11.



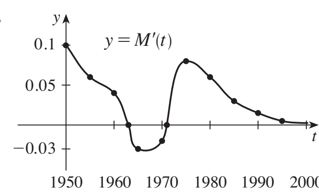
13. (a) La razón de cambio instantánea del porcentaje de plena capacidad con respecto al tiempo transcurrido en horas

(b)



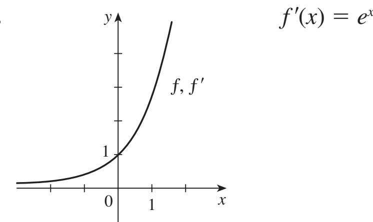
La razón de cambio del porcentaje de plena capacidad es decreciente y se aproxima a 0.

15.



1963 a 1971

17.



$f'(x) = e^x$

19. (a) 0, 1, 2, 4 (b) $-1, -2, -4$ (c) $f'(x) = 2x$

21. $f'(x) = 3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **23.** $f'(t) = 5t + 6$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

25. $f'(x) = 3x^2 - 3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

27. $g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}$, $(-\infty, 9]$, $(-\infty, 9)$

29. $G'(t) = \dfrac{-7}{(3+t)^2}$, $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$, $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

31. $f'(x) = 4x^3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **33.** (a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

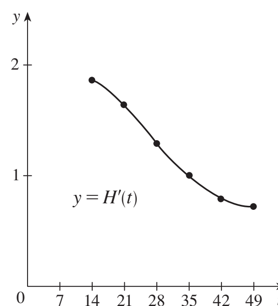
35. (a) La razón a la que cambia la tasa de desempleo, en porcentaje de desempleados al año

(b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1995	-0.10	2000	0.10
1996	0.05	2001	0.15
1997	-0.05	2002	-0.35
1998	-0.75	2003	-0.45
1999	-0.85	2004	-0.60

37.

t	14	21	28	35	42	49
$H'(t)$	$\frac{13}{7}$	$\frac{23}{14}$	$\frac{9}{7}$	1	$\frac{11}{14}$	$\frac{5}{7}$

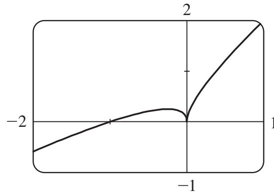


39. (a) La razón a la que cambia el porcentaje de energía eléctrica producida por paneles solares, en puntos porcentuales al año.
(b) El 1º de enero de 2002 el porcentaje de energía eléctrica producido por paneles solares aumentaba a una tasa de 3.5 puntos porcentuales al año.

41. -4 (esquina); 0 (discontinuidad)

43. 1 (indefinida); 5 (tangente vertical)

45.

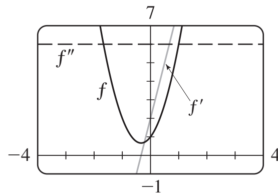


Derivable en –1; no derivable en 0

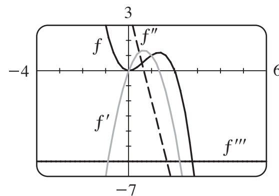
47. $f''(1)$ **49.** $a = f, b = f', b = f''$,

51. a = aceleración, b = velocidad, c = posición

53. $6x + 2$; 6



55.

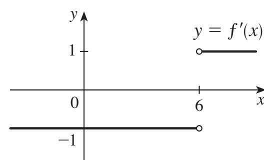


$f'(x) = 4x - 3x^2$,
$f''(x) = 4 - 6x$,
$f'''(x) = -6$,
$f^{(4)}(x) = 0$

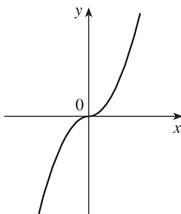
57. (a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

59. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

o $f'(x) = \dfrac{x-6}{|x-6|}$

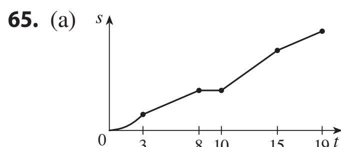


61. (a)

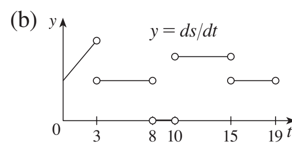


(b) Todas las x
(c) $f'(x) = 2|x|$

65. (a)



(b)



67. 63°

REPASO DEL CAPÍTULO 2 ■ PÁGINA 166

Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Verdadero **19.** Verdadero **21.** Falso **23.** Falso **25.** Verdadero

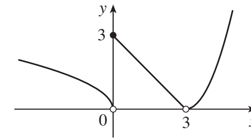
Ejercicios

1. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) No existe (iv) 2
(v) ∞ (vi) $-\infty$ (vii) 4 (viii) -1
(b) $y = 4, y = -1$ (c) $x = 0, x = 2$ (d) $-3, 0, 2, 4$

3. 1 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** 3 **9.** ∞ **11.** $\frac{4}{7}$ **13.** $\frac{1}{2}$

15. $-\infty$ **17.** 2 **19.** $\pi/2$ **21.** $x = 0, y = 0$ **23.** 1

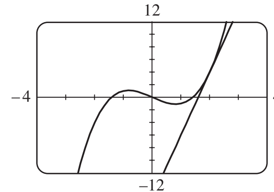
29. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) No existe
(iv) 0 (v) 0 (vi) 0
(b) En 0 y 3 (c)



31. $\mathbb{R}$ **35.** (a) -8 (b) $y = -8x + 17$

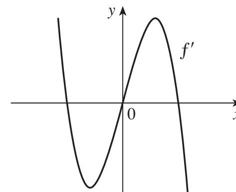
37. (a) (i) 3 m/s (ii) 2.75 m/s (iii) 2.625 m/s
(iv) 2.525 m/s (b) 2.5 m/s

39. (a) 10 (b) $y = 10x - 16$
(c)

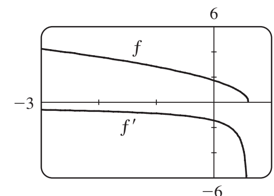


41. (a) La razón a la que el costo cambia con respecto a la tasa de interés; dólares/porcentaje anual)
(b) Cuando la tasa de interés aumenta más de 10%, el costo aumenta a razón de $1200/porcentaje anual).
(c) Siempre es positivo

43.

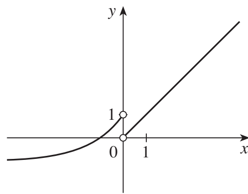


45. (a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3 - 5x)^{-1/2}$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right], \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$
(c)



47. -4 (discontinuidad), -1 (esquina), 2 (discontinuidad), 5 (tangente vertical)

49.



51. La razón a la que cambia el número de billetes de $20 dólares en circulación con respecto al tiempo; 0.156 mil millones de billetes al año

53. 0

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 169

1. $\frac{2}{3}$ **3.** -4 **5.** (a) No existe (b) 1

7. $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ **9.** $\frac{3}{4}$ **11.** (b) Sí (c) Sí; no

13. (a) 0 (b) 1 (c) $f'(x) = x^2 + 1$

CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1 ■ PÁGINA 180

1. (a) e es el número tal que $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

(b) 0.99, 1.03; $2.7 < e < 2.8$

3. $f'(x) = 0$ **5.** $f'(x) = 5.2$ **7.** $f'(t) = 6t^2 - 6t - 4$

9. $g'(x) = 2x - 6x^2$ **11.** $y' = -\frac{2}{5}x^{-7/5}$

13. $F'(r) = -15/r^4$ **15.** $R'(a) = 18a + 6$

17. $S'(p) = \frac{1}{2}p^{-1/2} - 1$ **19.** $y' = 3e^x - \frac{4}{3}x^{-4/3}$

21. $h'(u) = 3Au^2 + 2Bu + C$

23. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}$ **25.** $j'(x) = 2.4x^{1.4}$

27. $G'(q) = -2q^{-2} - 2q^{-3}$ **29.** $f'(v) = -\frac{2}{3}v^{-5/3} - 2e^v$

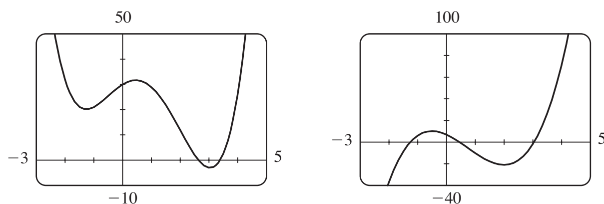
31. $z' = -10A/y^{11} + Be^y$ **33.** $y = 4x - 1$

35. $y = \frac{1}{2}x + 2$

37. Tangente: $y = -2x + 2$; normal: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

39. $y = 3x - 1$ **41.** $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$

43. (a) (c) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$



45. $f'(x) = 0.005x^4 - 0.06x^2$, $f''(x) = 0.02x^3 - 0.12x$

47. $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}$, $f''(x) = \frac{15}{16}x^{-5/4}$

49. (a) $v(t) = 3t^2 - 3$, $a(t) = 6t$ (b) 12 m/s^2

(c) $a(1) = 6$ m/s^2

51. 1.718; en 12 años, la longitud del pescado aumenta a razón de 1.718 pulg/año

53. (a) $V = 5.3/P$

(b) -0.00212; razón de cambio instantánea del volumen con respecto a la presión a 25 °C; m^3/kPa

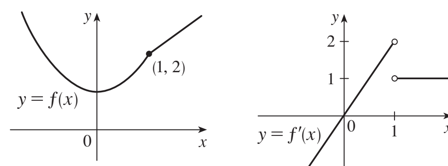
55. $(-2, 21)$, $(1, -6)$ **59.** $y = 3x - 3$, $y = 3x - 7$

61. $y = -2x + 3$

63. $(\pm 2, 4)$ **67.** $P(x) = x^2 - x + 3$

69. $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$

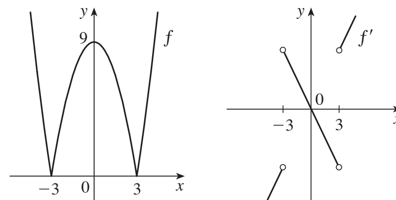
71. No



73. (a) No derivable en 3 ni en -3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > 3 \\ -2x & \text{si } |x| < 3 \end{cases}$$

(b)



75. $y = 2x^2 - x$ **77.** $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$ **79.** $-\frac{1}{3}$

81. $m = 4$, $b = -4$ **83.** 1000 **85.** 3; 1

EJERCICIOS 3.2 ■ PÁGINA 188

1. $1 - 2x + 6x^2 - 8x^3$ **3.** $f'(x) = e^x(3x^2 + x - 5)$

5. $y' = (x - 2)e^x/x^3$ **7.** $g'(x) = 5/(2x + 1)^2$

9. $H'(u) = 2u - 1$

11. $F'(y) = 5 + \frac{14}{y^2} + \frac{9}{y^4}$ **13.** $y' = \frac{x(-x^3 - 3x - 2)}{(x^3 - 1)^2}$

15. $y' = \frac{t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 9}{(t^2 - 4t + 3)^2}$

17. $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$ **19.** $y' = \frac{3 - 2\sqrt{s}}{2s^{5/2}}$

21. $f'(t) = \frac{-2t - 3}{3t^{2/3}(t - 3)^2}$ **23.** $f'(x) = \frac{xe^x(x^3 + 2e^x)}{(x^2 + e^x)^2}$

25. $f'(x) = \frac{-ACe^x}{(B + Ce^x)^2}$

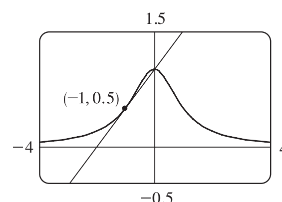
27. $(x^3 + 3x^2 + 1)e^x$; $(x^3 + 6x^2 + 6x + 1)e^x$

29. $\frac{x(2 + 2e^x - xe^x)}{(1 + e^x)^2}$;

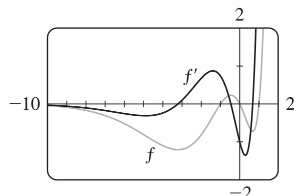
$$\frac{2 + 4e^x - 4xe^x - x^2e^x + 2e^{2x} - 4xe^{2x} + x^2e^{2x}}{(1 + e^x)^3}$$

31. $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ **33.** $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$

35. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)

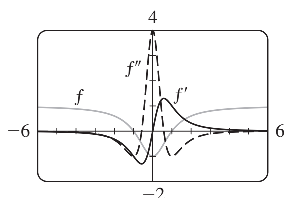


37. (a) $e^x(x^3 + 3x^2 - x - 1)$
(b)



39. (a) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

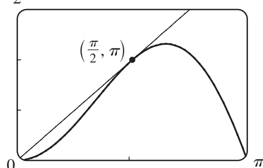
(b)



41. $\frac{1}{4}$ **43.** (a) -16 (b) $-\frac{20}{9}$ (c) 20 **45.** 7
47. $y = -2x + 18$ **49.** (a) 0 (b) $-\frac{2}{3}$
51. (a) $y' = xg'(x) + g(x)$ (b) $y' = \dfrac{g(x) - xg'(x)}{[g(x)]^2}$
(c) $y' = \dfrac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$
53. Dos, $\left(-2 \pm \sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{3}\right)\right)$ **55.** 1
57. \$1.627 miles de millones/año
59. $\dfrac{0.0021}{(0.015 + [\text{S}])^2}$;
La razón de cambio de la rapidez de una reacción enzimática con respecto a la concentración de un sustrato S.
61. (c) $3e^{3x}$
63. $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$,
$f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12)e^x$,
$f^{(5)}(x) = (x^2 + 10x + 20)e^x$; $f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n-1)]e^x$

EJERCICIOS 3.3 ■ PÁGINA 196

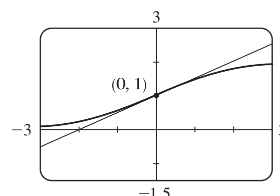
1. $f'(x) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$ **3.** $f'(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$
5. $g'(t) = 3t^2 \cos t - t^3 \operatorname{sen} t$
7. $h'(\theta) = -\csc\theta \cot\theta + e^\theta(\cot\theta - \csc^2\theta)$
9. $y' = \dfrac{2 - \tan x + x\sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$ **11.** $f'(\theta) = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$
13. $y' = \dfrac{(t^2 + t)\cos t + \operatorname{sen} t}{(1+t)^2}$
15. $f'(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \theta\cos 2\theta$
21. $y = x + 1$ **23.** $y = x - \pi - 1$
25. (a) $y = 2x$ (b)



27. (a) $\sec x \tan x - 1$
29. $\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$; $2\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta$
31. (a) $f'(x) = (1 + \tan x)/\sec x$ (b) $f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$
33. $(2n+1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, n un entero
35. (a) $v(t) = 8\cos t$, $a(t) = -8\operatorname{sen} t$
(b) $4\sqrt{3}, -4, -4\sqrt{3}$; a la izquierda
37. 3 m/rad **39.** $\frac{5}{3}$ **41.** 3 **43.** $-\frac{3}{4}$
45. $\frac{1}{2}$ **47.** $-\frac{1}{4}$ **49.** $-\sqrt{2}$ **51.** $-\cos x$
53. $A = -\frac{3}{10}$, $B = -\frac{1}{10}$
55. (a) $\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (b) $\sec x \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$
(c) $\cos x - \operatorname{sen} x = \dfrac{\cot x - 1}{\csc x}$
57. 1

EJERCICIOS 3.4 ■ PÁGINA 204

1. $4\cos 4x$ **3.** $-20x(1 - x^2)^9$ **5.** $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
7. $F'(x) = 24x^{11}(5x^3 + 2)^3(5x^3 + 1)$
9. $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$ **11.** $f'(\theta) = -2\theta\operatorname{sen}(\theta^2)$
13. $y' = xe^{-3x}(2 - 3x)$ **15.** $f'(t) = e^{at}(b\cos bt + a\operatorname{sen} bt)$
17. $f'(x) = (2x - 3)^3(x^2 + x + 1)^4(28x^2 - 12x - 7)$
19. $h'(t) = \frac{2}{3}(t+1)^{-1/3}(2t^2 - 1)^2(20t^2 + 18t - 1)$
21. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)^{3/2}}$ **23.** $y' = (\sec^2\theta)\,e^{\tan\theta}$
25. $g'(u) = \dfrac{48u^2(u^3 - 1)^7}{(u^3 + 1)^9}$ **27.** $r'(t) = \dfrac{(\ln 10)10^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$
29. $H'(r) = \dfrac{2(r^2 - 1)^2(r^2 + 3r + 5)}{(2r + 1)^6}$
31. $F'(t) = e^{t\operatorname{sen} 2t}(2t\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$
33. $G'(x) = -C(\ln 4)\dfrac{4^{C/x}}{x^2}$
35. $y' = 2\cos(\tan 2x)\sec^2(2x)$
37. $y' = -2\cos\theta\cot(\operatorname{sen}\theta)\csc^2(\operatorname{sen}\theta)$
39. $f'(t) = -\sec^2(\sec(\cos t))\sec(\cos t)\tan(\cos t)\operatorname{sen} t$
41. $f'(t) = \sec^2(e^t)e^t + e^{\tan t}\sec^2 t$
43. $g'(x) = 2r^2 p(\ln a)(2ra^{rx} + n)^{p-1}a^{rx}$
45. $y' = \dfrac{-\pi\cos(\tan\pi x)\sec^2(\pi x)\operatorname{sen}\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}{2\sqrt{\operatorname{sen}(\tan\pi x)}}$
47. $y' = -3\cos 3\theta\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 3\theta)$;
$y'' = -9\cos^2(3\theta)\cos(\operatorname{sen} 3\theta) + 9(\operatorname{sen} 3\theta)\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 3\theta)$
49. $y' = \dfrac{-\sec t\tan t}{2\sqrt{1 - \sec t}}$;
$y'' = \dfrac{\sec t\,(3\sec^3 t - 4\sec^2 t - \sec t + 2)}{4(1 - \sec t)^{3/2}}$
51. $y = (\ln 2)x + 1$ **53.** $y = -x + \pi$
55. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)



57. (a) $f'(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{\sqrt{2 - x^2}}$

59. $((\pi/2) + 2n\pi, 3)$, $((3\pi/2) + 2n\pi, -1)$, n un entero

61. 24 **63.** (a) 30 (b) 36

65. (a) $\frac{3}{4}$ (b) No existe (c) -2 **67.** $-\frac{1}{6}\sqrt{2}$

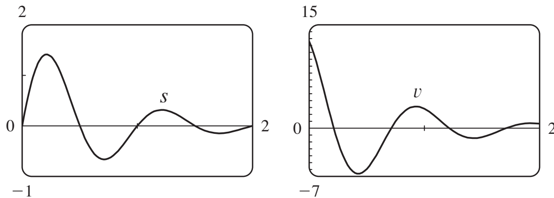
69. (a) $F'(x) = e^x f'(e^x)$ (b) $G'(x) = e^{f(x)} f'(x)$

71. 120 **73.** 96

77. $-2^{50} \cos 2x$ **79.** $v(t) = \frac{5}{2}\pi \cos(10\pi t)$ cm/s

81. (a) $\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{7\pi}{54} \cos \dfrac{2\pi t}{5.4}$ (b) 0.16

83. $v(t) = 2e^{-1.5t}(2\pi \cos 2\pi t - 1.5 \operatorname{sen} 2\pi t)$



85. (a) 0.0075 (mg/mL)/min (b) 0.0030 (mg/mL)/min

87. dv/dt es la razón de cambio de velocidad con respecto al tiempo; dv/ds es la razón de cambio de la velocidad con respecto al desplazamiento

89. (a) $Q = ab^t$ donde $a \approx 100.01244$ and $b \approx 0.000045146$
(b) -670.63 μA

91. (b) La forma factorizada **95.** (b) $-n \cos^{n-1}x \operatorname{sen}[(n + 1)x]$

EJERCICIOS 3.5 ■ PÁGINA 215

1. (a) $y' = -(y + 2 + 6x)/x$
(b) $y = (4/x) - 2 - 3x$, $y' = -(4/x^2) - 3$

3. (a) $y' = -\sqrt{y}/\sqrt{x}$ (b) $y = (1 - \sqrt{x})^2$, $y' = 1 - 1/\sqrt{x}$

5. $y' = \dfrac{2y - x}{y - 2x}$ **7.** $y' = -\dfrac{2x(2x^2 + y^2)}{y(2x^2 + 3y)}$

9. $y' = \dfrac{x(x + 2y)}{2x^2y + 4xy^2 + 2y^3 + x^2}$ **11.** $y' = \dfrac{-2xy^2 - \operatorname{sen} y}{2x^2y + x \cos y}$

13. $y' = \dfrac{1 - 8x^3\sqrt{x + y}}{8y^3\sqrt{x + y} - 1}$ **15.** $y' = \dfrac{y(y - e^{x/y})}{y^2 - xe^{x/y}}$

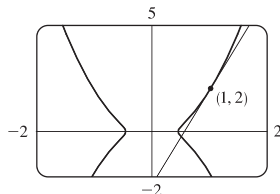
17. $y' = \dfrac{1 + x^4y^2 + y^2 + x^4y^4 - 2xy}{x^2 - 2xy - 2x^5y^3}$

19. $y' = -\dfrac{y \cos(xy) + \operatorname{sen}(x + y)}{x \cos(xy) + \operatorname{sen}(x + y)}$ **21.** $-\frac{16}{13}$

23. $x' = \dfrac{-2x^4y + x^3 - 6xy^2}{4x^3y^2 - 3x^2y + 2y^3}$ **25.** $y = \frac{1}{2}x$

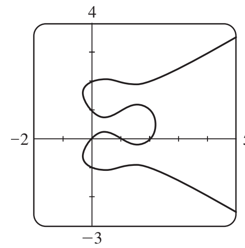
27. $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ **29.** $y = x + \frac{1}{2}$ **31.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$

33. (a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ (b)



35. $-1/(4y^3)$ **37.** $\dfrac{\cos^2 y \cos x + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y}{\cos^3 y}$ **39.** $1/e^2$

41. (a)



Ocho; $x \approx 0.42, 1.58$

(b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 2$ (c) $1 \mp \frac{1}{3}\sqrt{3}$

43. $\left(\pm\frac{5}{4}\sqrt{3}, \pm\frac{5}{4}\right)$ **45.** $(x_0x/a^2) - (y_0y/b^2) = 1$

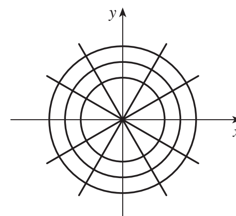
49. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$ **51.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}$

53. $F'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^6 - 1}} + \sec^{-1}(x^3)$ **55.** $h'(t) = 0$

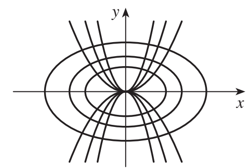
57. $y' = \operatorname{sen}^{-1}x$ **59.** $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b \cos x}$

61. $1 - \dfrac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

65.



67.



71. (a) $\dfrac{V^3(nb - V)}{PV^3 - n^2aV + 2n^3ab}$ (b) ≈ -4.04 L/atm

73. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ **75.** $(-1, -1)$, $(1, 1)$ **77.** (b) $\frac{3}{2}$

79. (a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 3.6 ■ PÁGINA 223

1. La fórmula de derivación es la más simple.

3. $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ **5.** $f'(x) = \dfrac{1}{5x\sqrt[5]{(\ln x)^4}}$

7. $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x) \ln 10}$ **9.** $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

11. $F'(t) = \ln t \left(\ln t \cos t + \dfrac{2 \operatorname{sen} t}{t}\right)$

13. $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$ **15.** $F'(s) = \dfrac{1}{s \ln s}$

17. $T'(z) = 2^z\left(\dfrac{1}{z \ln 2} + \ln z\right)$

19. $y' = \dfrac{-x}{1 + x}$ **21.** $y' = \sec^2[\ln(ax + b)]\dfrac{a}{ax + b}$

23. $y' = (2 + \ln x)/(2\sqrt{x})$; $y'' = -\ln x/(4x\sqrt{x})$

25. $y' = \tan x$; $y'' = \sec^2 x$

27. $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - (x - 1)\ln(x - 1)}{(x - 1)[1 - \ln(x - 1)]^2}$;
$(1, 1 + e) \cup (1 + e, \infty)$

29. $f'(x) = \dfrac{2(x - 1)}{x(x - 2)}$; $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **31.** 2

33. $y = 3x - 9$ **35.** $\cos x + 1/x$ **37.** 7

39. $y' = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6\left(\dfrac{10}{2x + 1} + \dfrac{24x^3}{x^4 - 3}\right)$

41. $y' = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}\left(\dfrac{1}{2x - 2} - \dfrac{2x^3}{x^4 + 1}\right)$

43. $y' = x^x(1 + \ln x)$

45. $y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln x\right)$

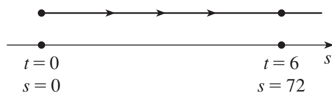
47. $y' = (\cos x)^x(-x \tan x + \ln \cos x)$

49. $y' = (\tan x)^{1/x}\left(\dfrac{\sec^2 x}{x \tan x} - \dfrac{\ln \tan x}{x^2}\right)$

51. $y' = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$ **53.** $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n - 1)!}{(x - 1)^n}$

EJERCICIOS 3.7 ■ PÁGINA 233

1. (a) $3t^2 - 16t + 24$ (b) 11 m/s (c) Nunca (d) Siempre
(e) 72 m
(f)



(g) $6t - 16$; -10 m/s^2

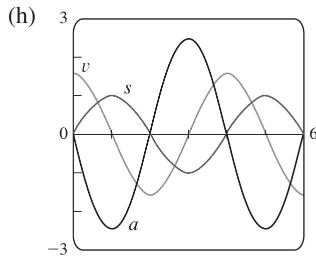
(h)

(i) Aceleración cuando $t > \frac{8}{3}$; reducción de velocidad cuando $0 \leqslant t < \frac{8}{3}$

3. (a) $(\pi/2)\cos(\pi t/2)$ (b) 0 m/s
(c) $t = 2n + 1$, t un entero no negativo
(d) $0 < t < 1$, $3 < t < 5$, $7 < t < 9$, y así sucesivamente (e) 6 m
(f)

(g) $(-\pi^2/4)\operatorname{sen}(\pi t/2)$; $-\pi^2/4$ m/s^2

(h)



(i) Aceleración cuando $1 < t < 2$, $3 < t < 4$, y $5 < t < 6$; reducción de velocidad cuando $0 < t < 1$, $2 < t < 3$, y $4 < t < 5$

5. (a) Aceleración cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$; reducción de velocidad cuando $1 < t < 2$
(b) Aceleración cuando $1 < t < 2$ o $3 < t < 4$; reducción de velocidad cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$

7. (a) 4.9 m/s; -14.7 m/s (b) Después de 2.5 s (c) $32\frac{5}{8}$ m
(d) ≈ 5.08 s (e) ≈ -25.3 m/s

9. (a) 7.56 m/s (b) ≈ 6.24 m/s; ≈ -6.24 m/s

11. (a) 30 mm^2/mm; la razón a la que aumenta el área con respecto a la longitud por lado cuando x llega a 15 mm
(b) $\Delta A \approx 2x\,\Delta x$

13. (a) (i) 5π (ii) 4.5π (iii) 4.1π
(b) 4π (c) $\Delta A \approx 2\pi r\,\Delta r$

15. (a) 160π cm^2/cm (b) 320π cm^2/cm (c) 480π cm^2/cm
La razón aumenta conforme el radio aumenta.

17. (a) 6 kg/m (b) 12 kg/m (c) 18 kg/m
En el extremo derecho; en el extremo izquierdo

19. (a) 4.75 A (b) 5 A; $t = \frac{2}{3}$ s

23. (a) $dV/dP = -C/P^2$ (b) Al principio

25. $400(3^t)\ln 3$; ≈ 6850 bacterias/h

27. (a) 16 millones/año; 78.5 millones/año
(b) $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, donde $a \approx -0.0002849$, $b \approx 0.5224331$, $c \approx -6.395641$, $d \approx 1720.586$
(c) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
(d) 14.16 millones/año (menor); 71.72 millones/año (menor)
(e) $f'(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t \ln 1.01395$
(f) 26.25 millones/año (mayor); 60.28 millones/año (menor)
(g) $P'(85) \approx 76.24$ millones/año, $f'(85) = 64.61$ millones/año

29. (a) 0.926 cm/s; 0.694 cm/s; 0
(b) 0; -92.6 (cm/s)/cm; -185.2 (cm/s)/cm
(c) En el centro; en la orilla

31. (a) $C'(x) = 3 + 0.02x + 0.0006x^2$
(b) \$11/par; la razón a la que el costo cambia cuando se produce el 100.º par de jeans; el costo del 101.º par
(c) \$11.07

33. (a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; la productividad promedio aumenta conforme se añaden nuevos trabajadores.

35. $\dfrac{dt}{dc} = \dfrac{3\sqrt{9c^2 - 8c} + 9c - 4}{\sqrt{9c^2 - 8c}\left(3c + \sqrt{9c^2 - 8c}\right)}$; la razón de cambio de duración de la diálisis requerida con respecto a la concentración de urea inicial.

37. -0.2436 K/min

39. (a) 0 y 0 (b) $C = 0$
(c) (0, 0), (500, 50); es posible para que la especie coexista.

EJERCICIOS 3.8 ■ PÁGINA 242

1. Alrededor de 136

3. (a) $100(4.2)^t$ (b) ≈ 7409 (c) $\approx 10{,}632$ bacterias/h
(d) $(\ln 100)/(\ln 4.2) \approx 3.2$ h

5. (a) 1508 millones, 1871 millones (b) 2161 millones
(c) 3972 millones; guerras en la primera mitad del siglo, aumento de la esperanza de vida en la segunda mitad

7. (a) $Ce^{-0.0005t}$ (b) $-2000 \ln 0.9 \approx 211$ s

9. (a) $100 \times 2^{-t/30}$ mg (b) ≈ 9.92 mg (c) ≈ 199.3 años

11. ≈ 2500 años **13.** Sí; 12.5 miles de millones de años

15. (a) ≈ 58°C (b) ≈ 98 min

17. (a) $13.\overline{3}$°C (b) ≈ 67.74 min

19. (a) ≈ 64.5 kPa (b) ≈ 39.9 kPa

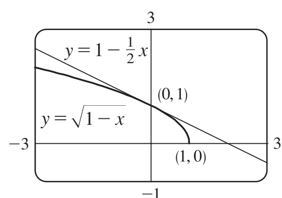
21. (a) (i) \$3828.84 (ii) \$3840.25 (iii) \$3850.08 (iv) \$3851.61 (v) \$3852.01 (vi) \$3852.08
(b) $dA/dt = 0.05A$, $A(0) = 3000$

EJERCICIOS 3.9 ■ PÁGINA 249

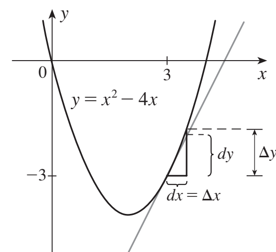
1. $dV/dt = 3x^2\,dx/dt$ **3.** 48 cm²/s **5.** $3/(25\pi)$ m/min
7. 128π cm²/min **9.** (a) 1 (b) 25 **11.** -18
13. (a) La altitud del avión es 2 km y su velocidad es de 800 km/h.
(b) La razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 3 km de la estación
(c) x, 2, y
(d) $y^2 = x^2 + 4$
(e) $\frac{800}{3}\sqrt{5}$ km/h
15. (a) La altura del poste (6 m), la altura del hombre (2 m) y la velocidad del hombre (1.5 m/s)
(b) La razón a la que se mueve la punta de la sombra del hombre cuando él está a 10 m del poste
(c) 6, 2, x, y
(d) $\dfrac{6}{2} = \dfrac{x+y}{y}$ (e) $\frac{9}{4}$ m/s
17. 78 km/h **19.** $8064/\sqrt{8{,}334{,}400} \approx 2.79$ m/s
21. -1.6 cm/min **23.** $\frac{720}{13} \approx 55.4$ km/h
25. $(10{,}000 + 800{,}000\pi/9) \approx 2.89 \times 10^5$ cm³/min
27. $\frac{10}{3}$ cm/min **29.** $4/(3\pi) \approx 0.42$ m/min
31. $150\sqrt{3}$ cm²/min **33.** 5 m **35.** πr^2 cm²/h
37. 80 cm³/min **39.** $\frac{107}{810} \approx 0.132$ Ω/s
41. $\sqrt{7}\,\pi/21 \approx 0.396$ m/min
43. (a) 120 m/s (b) ≈0.107 rad/s
45. $\frac{10}{9}\pi$ km/min **47.** $1650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h
49. $\frac{7}{4}\sqrt{15} \approx 6.78$ m/s

EJERCICIOS 3.10 ■ PÁGINA 256

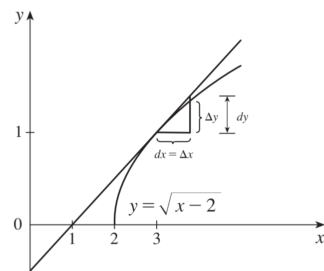
1. $L(x) = 16x + 23$ **3.** $L(x) = \frac{1}{4}x + 1$
5. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0.9} \approx 0.95$,
$\sqrt{0.99} \approx 0.995$



7. $-0.383 < x < 0.516$ **9.** $-0.045 < x < 0.055$
11. (a) $dy = (1 - 4x)e^{-4x}\,dx$ (b) $dy = -\dfrac{2t^3}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$
13. (a) $dy = \dfrac{\sec^2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt$ (b) $dy = \dfrac{-4v}{(1+v^2)^2}\,dv$
15. (a) $dy = \frac{1}{10}e^{x/10}\,dx$ (b) 0.01
17. (a) $dy = \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$ (b) -0.05
19. $\Delta y = 1.25$, $dy = 1$



21. $\Delta y \approx 0.34$, $dy = 0.4$



23. 15.968 **25.** $10.00\overline{3}$ **27.** 1.1
33. (a) 270 cm³, 0.01, 1% (b) 36 cm², $0.00\overline{6}$, $0.\overline{6}\%$
35. (a) $84/\pi \approx 27$ cm²; $\frac{1}{84} \approx 0.012 = 1.2\%$
(b) $1764/\pi^2 \approx 179$ cm³; $\frac{1}{56} \approx 0.018 = 1.8\%$
37. (a) $2\pi rh\,\Delta r$ (b) $\pi(\Delta r)^2 h$
43. (a) 4.8, 5.2 (b) Demasiado grande

EJERCICIOS 3.11 ■ PÁGINA 264

1. (a) 0 (b) 1 **3.** (a) $\frac{13}{5}$ (b) $\frac{1}{2}(e^5 + e^{-5}) \approx 74.20995$
5. (a) 1 (b) 0
21. $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$, $\operatorname{sch} x = \frac{3}{4}$, $\tanh x = \frac{4}{5}$, $\coth x = \frac{5}{4}$
23. (a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) 0 (f) 1 (g) ∞ (h) $-\infty$ (i) 0 (j) $\frac{1}{2}$
31. $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sech}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ **33.** $h'(x) = 2x\cosh(x^2)$
35. $g'(x) = (1/x)\operatorname{senh}(\ln x)$
37. $y' = 3e^{\cosh 3x}\operatorname{senh} 3x$
39. $g'(t) = \coth\sqrt{t^2+1} - \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\operatorname{csch}^2\sqrt{t^2+1}$
41. $G'(x) = \dfrac{-2\operatorname{senh} x}{(1+\cosh x)^2}$
43. $y' = \operatorname{senh}^{-1}(x/3)$ **45.** $y' = -\csc x$
51. (a) 0.3572 (b) 70.34°
53. (a) 164.50 m (b) 120 m; 164.13 m
55. (b) $y = 2\operatorname{senh} 3x - 4\cosh 3x$
57. $\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right), \sqrt{2}\right)$

REPASO DEL CAPÍTULO 3 ■ PÁGINA 266

Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Verdadero

Ejercicios

1. $6x(x^4 - 3x^2 + 5)^2(2x^2 - 3)$ **3.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^7}}$

5. $x(\pi x \cos \pi x + 2 \operatorname{sen} \pi x)$

7. $\dfrac{8t^3}{(t^4 + 1)^2}$ **9.** $\dfrac{1 + \ln x}{x \ln x}$ **11.** $\dfrac{\cos\sqrt{x} - \sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

13. $-\dfrac{e^{1/x}(1 + 2x)}{x^4}$ **15.** $\dfrac{2xy - \cos y}{1 - x \operatorname{sen} y - x^2}$

17. $\dfrac{1}{2\sqrt{\arctan x}\,(1 + x^2)}$ **19.** $\dfrac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}\sec^2\left(\dfrac{t}{1 + t^2}\right)$

21. $3^{x \ln x}(\ln 3)(1 + \ln x)$ **23.** $-(x - 1)^{-2}$

25. $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) + 1}$ **27.** $\dfrac{2}{(1 + 2x)\ln 5}$

29. $\cot x - \operatorname{sen} x \cos x$ **31.** $\dfrac{4x}{1 + 16x^2} + \tan^{-1}(4x)$

33. $5 \sec 5x$ **35.** $-6x \csc^2(3x^2 + 5)$

37. $\cos\left(\tan\sqrt{1 + x^3}\right)\left(\sec^2\sqrt{1 + x^3}\right)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}$

39. $2\cos\theta\,\tan(\operatorname{sen}\theta)\sec^2(\operatorname{sen}\theta)$

41. $\dfrac{(2 - x)^4(3x^2 - 55x - 52)}{2\sqrt{x + 1}\,(x + 3)^8}$ **43.** $2x^2\cosh(x^2) + \operatorname{senh}(x^2)$

45. $3\tanh 3x$ **47.** $\dfrac{\cosh x}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x - 1}}$

49. $\dfrac{-3\operatorname{sen}\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)e^{\sqrt{\tan 3x}}\sec^2(3x)}{2\sqrt{\tan 3x}}$ **51.** $-\frac{4}{27}$

53. $-5x^4/y^{11}$ **57.** $y = 2\sqrt{3}x + 1 - \pi\sqrt{3}/3$

59. $y = 2x + 1$ **61.** $y = -x + 2;\ y = x + 2$

63. (a) $\dfrac{10 - 3x}{2\sqrt{5 - x}}$ (b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4},\ y = -x + 8$

(c)

65. $\left(\pi/4, \sqrt{2}\right), \left(5\pi/4, -\sqrt{2}\right)$

69. (a) 4 (b) 6 (c) $\frac{7}{9}$ (d) 12

71. $2xg(x) + x^2g'(x)$ **73.** $2g(x)g'(x)$

75. $g'(e^x)e^x$ **77.** $g'(x)/g(x)$

79. $\dfrac{f'(x)[g(x)]^2 + g'(x)[f(x)]^2}{[f(x) + g(x)]^2}$

81. $f'(g(\operatorname{sen} 4x))g'(\operatorname{sen} 4x)(\cos 4x)(4)$

83. $(-3, 0)$ **85.** $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$

87. $v(t) = -Ae^{-ct}[c\cos(\omega t + \delta) + \omega\operatorname{sen}(\omega t + \delta)]$,
$a(t) = Ae^{-ct}[(c^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \delta) + 2c\omega\operatorname{sen}(\omega t + \delta)]$

89. (a) $v(t) = 3t^2 - 12;\ a(t) = 6t$ (b) $t > 2;\ 0 \leqslant t < 2$
(c) 23 (d)

(e) $t > 2;\ 0 < t < 2$

91. 4 kg/m

93. (a) $200(3.24)^t$ (b) $\approx 22{,}040$
(c) $\approx 25{,}910$ bacterias/h (d) $(\ln 50)/(\ln 3.24) \approx 3.33$ h

95. (a) C_0e^{-kt} (b) ≈ 100 h **97.** $\frac{4}{3}$ cm²/min

99. $117/\sqrt{666} \approx 4.53$ m/s **101.** 400 pies/h

103. (a) $L(x) = 1 + x;\ \sqrt[3]{1 + 3x} \approx 1 + x;\ \sqrt[3]{1.03} \approx 1.01$
(b) $-0.23 < x < 0.40$

105. $12 + \frac{3}{2}\pi \approx 16.7$ cm² **107.** $\left[\dfrac{d}{dx}\sqrt[4]{4}\right]_{x=16} = \frac{1}{32}$

109. $\frac{1}{4}$ **111.** $\frac{1}{8}x^2$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 271

1. $\left(\pm\sqrt{3}/2, \frac{1}{4}\right)$ **5.** $3\sqrt{2}$ **11.** $\left(0, \frac{5}{4}\right)$

13. 3 rectas; $(0, 2)$, $\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{10}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3}\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{10}{3}\right)$

15. (a) $4\pi\sqrt{3}/\sqrt{11}$ rad/s (b) $40\left(\cos\theta + \sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm
(c) $-480\pi \operatorname{sen}\theta\left(1 + \cos\theta/\sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm/s

19. $x_T \in (3, \infty),\ y_T \in (2, \infty),\ x_N \in \left(0, \frac{5}{3}\right),\ y_N \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

21. (b) (i) 53° (o 127°) (ii) 63° (o 117°)

23. R se aproxima al punto medio del radio AO.

25. $-\operatorname{sen} a$ **27.** $2\sqrt{e}$ **31.** $(1, -2), (-1, 0)$

33. $\sqrt{29}/58$ **35.** $2 + \frac{375}{128}\pi \approx 11.204$ cm³/min

CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1 ■ PÁGINA 283

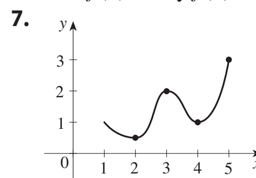
Abreviaturas: abs, absoluto; loc, local; máx, máximo; mín, mínimo

1. Mín abs: el menor valor de la función en su dominio completo; mín loc en c: el menor valor de la función cuando x está cerca de c

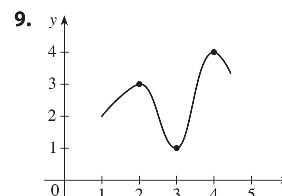
3. Máx abs en s, mín abs en r, máx loc en c, mín loc en b y r, ni un máx ni un mín en a y d

5. Máx abs $f(4) = 5$, máx loc $f(4) = 5$ y $f(6) = 4$, mín loc $f(2) = 2$ y $f(1) = f(5) = 3$

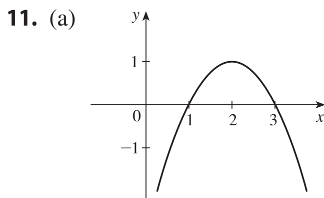
7.



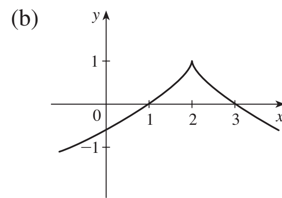
9.



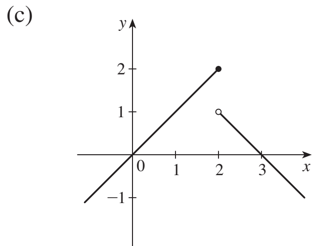
11. (a)



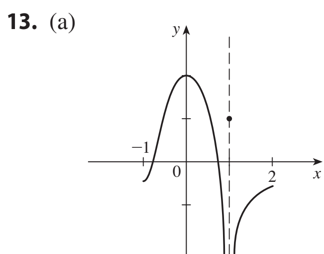
(b)



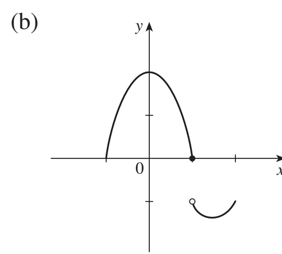
(c)



13. (a)



(b)



15. Máx abs $f(3) = 4$ **17.** Máx abs $f(1) = 1$

19. Mín abs $f(0) = 0$

21. Máx abs $f(\pi/2) = 1$; mín abs $f(-\pi/2) = -1$

23. Máx abs $f(2) = \ln 2$ **25.** Máx abs $f(0) = 1$

27. Mín abs $f(1) = -1$ **29.** $-\frac{2}{5}$ **31.** $-2, 3$ **33.** 0

35. 0, 2 **37.** $0, \frac{4}{9}$ **39.** $0, \frac{8}{7}, 4$ **41.** $n\pi$ (n un entero)

43. $0, \frac{2}{3}$ **45.** 10 **47.** $f(0) = 5, f(2) = -7$

49. $f(-1) = 8, f(2) = -19$ **51.** $f(-2) = 33, f(2) = -31$

53. $f(0.2) = 5.2, f(1) = 2$

55. $f(4) = 4 - \sqrt[3]{4}, f(\sqrt{3}/9) = -2\sqrt{3}/9$

57. $f(\pi/6) = \frac{3}{2}\sqrt{3}, f(\pi/2) = 0$

59. $f(e^{1/2}) = 1/(2e), f(\frac{1}{2}) = -4 \ln 2$

61. $f(1) = \ln 3, f(-\frac{1}{2}) = \ln \frac{3}{4}$

63. $f\left(\dfrac{a}{a+b}\right) = \dfrac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$

65. (a) 2.19, 1.81 (b) $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2, -\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2$

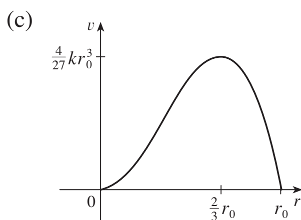
67. (a) 0.32, 0.00 (b) $\frac{3}{16}\sqrt{3}, 0$

69. 0.177 mg/mL; 21.4 min **71.** ≈ 3.9665°C

73. El más barato, $t \approx 0.855$ (junio de 1994); el más caro, $t \approx 4.618$ (marzo de 1998)

75. (a) $r = \frac{2}{3}r_0$ (b) $v = \frac{4}{27}kr_0^3$

(c)



EJERCICIOS 4.2 ■ PÁGINA 291

1. 1, 5

3. (a) g es continua en [0, 8] y derivable en (0, 8).
(b) 2.2, 6.4 (c) 3.7, 5.5

5. 1 **7.** π

9. f no es derivable en $(-1, 1)$ **11.** 1

13. $-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{6}(1 - e^{-6})\right]$ **15.** 1; sí

17. f no es continua en 3 **25.** 16 **27.** No **33.** No

EJERCICIOS 4.3 ■ PÁGINA 300

1. (a) (1, 3), (4, 6) (b) (0, 1), (3, 4) (c) (0, 2)
(d) (2, 4), (4, 6) (e) (2, 3)

3. (a) Prueba C/D (b) Prueba de concavidad
(c) Determine puntos en los que la concavidad cambia.

5. (a) Cre en (1, 5); dec en (0, 1) y (5, 6)
(b) Máx loc en $x = 5$, mín loc en $x = 1$

7. (a) 3, 5 (b) 2, 4, 6 (c) 1, 7

9. (a) Cre en $(-\infty, -1)$, $(3, \infty)$; dec en $(-1, 3)$
(b) Máx loc $f(-1) = 9$; mín loc $f(3) = -23$
(c) CA en $(1, \infty)$, CB en $(-\infty, 1)$; PI $(1, -7)$

11. (a) Cre en $(-1, 0)$, $(1, \infty)$; dec en $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$
(b) Máx loc $f(0) = 3$; mín loc $f(\pm 1) = 2$
(c) CA en $\left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right)$, $\left(\sqrt{3}/3, \infty\right)$;
CB en $\left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$; PI $\left(\pm\sqrt{3}/3, \frac{22}{9}\right)$

13. (a) Cre en $(0, \pi/4)$, $(5\pi/4, 2\pi)$; dec en $(\pi/4, 5\pi/4)$
(b) Máx loc $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; mín loc $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$
(c) CA en $(3\pi/4, 7\pi/4)$; CB en $(0, 3\pi/4)$, $(7\pi/4, 2\pi)$;
PI $(3\pi/4, 0)$, $(7\pi/4, 0)$

15. (a) Cre en $\left(-\frac{1}{3}\ln 2, \infty\right)$; dec en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\ln 2\right)$
(b) Mín loc $f\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right) = 2^{-2/3} + 2^{1/3}$ (c) CA en $(-\infty, \infty)$

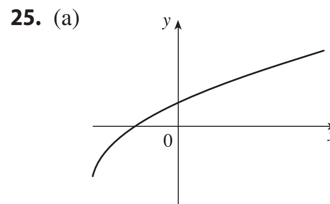
17. (a) Cre en $(1, \infty)$; dec on $(0, 1)$ (b) Mín loc $f(1) = 0$
(c) CA en $(0, \infty)$; ningún PI

19. Máx loc $f(-1) = 7$; mín loc $f(1) = -1$

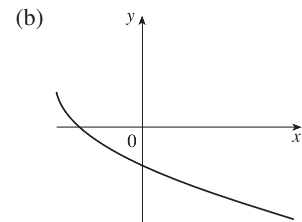
21. Mín loc $f\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{4}$

23. (a) f tiene un máximo local en 2.
(b) f tiene una tangente horizontal en 6.

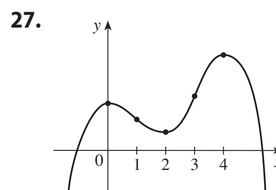
25. (a)



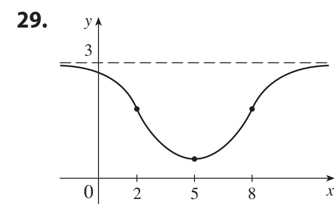
(b)



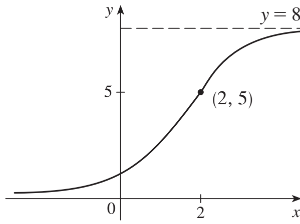
27.



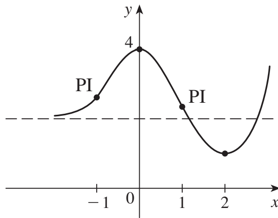
29.



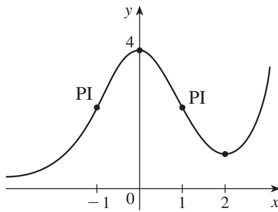
31.



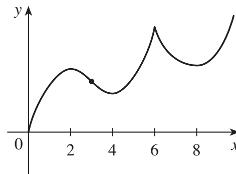
33. (a) No
(b) Sí



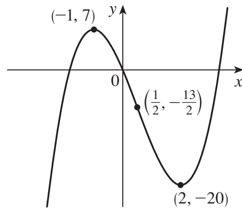
(c)



35. (a) Cre en (0, 2), (4, 6), (8, ∞);
dec en (2, 4), (6, 8)
(b) Máx loc en $x = 2, 6$;
mín loc en $x = 4, 8$
(c) CA en (3, 6), (6, ∞);
CB en (0, 3) (d) 3
(e) Véase la gráfica de la derecha.



37. (a) Cre en $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$; dec en $(-1, 2)$
(b) Máx loc $f(-1) = 7$; $f(2) = -20$
(c) CA en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, CB en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; PI $\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\right)$
(d)

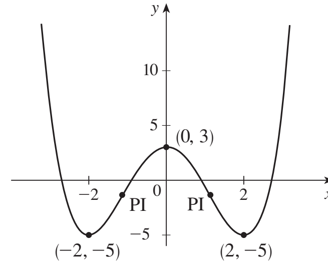


39. (a) Cre en $(-2, 0)$, $(2, \infty)$; dec en $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$
(b) Máx loc $f(0) = 3$; mín loc $f(\pm 2) = -5$

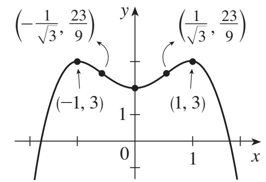
(c) CA en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$; CB en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$;

PI $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{13}{9}\right)$

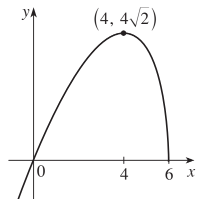
(d)



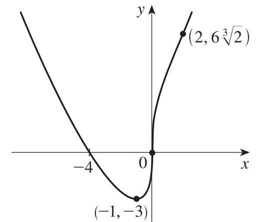
41. (a) Cre en $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$;
dec en $(-1, 0)$, $(1, \infty)$
(b) Máx loc $f(-1) = 3, f(1) = 3$;
mín loc $f(0) = 2$
(c) CA en $\left(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$
CB en $\left(-\infty, -1/\sqrt{3}\right)$, $\left(1/\sqrt{3}, \infty\right)$;
PI $\left(\pm 1/\sqrt{3}, \frac{23}{9}\right)$
(d) Véase la gráfica de la derecha.



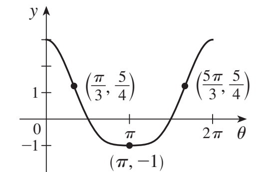
43. (a) Cre en $(-\infty, 4)$;
dec en $(4, 6)$
(b) Máx loc $F(4) = 4\sqrt{2}$
(c) CB en $(-\infty, 6)$; ningún PI
(d) Véase la gráfica de la derecha.



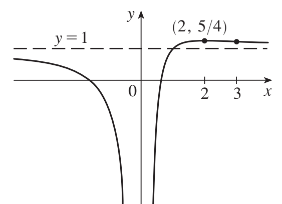
45. (a) Cre en $(-1, \infty)$;
dec en $(-\infty, -1)$
(b) Mín loc $C(-1) = -3$
(c) CA en $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$;
CB en $(0, 2)$;
PI $(0, 0)$, $\left(2, 6\sqrt[3]{2}\right)$
(d) Véase la gráfica de la derecha.



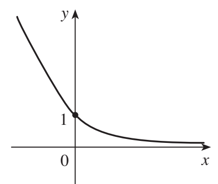
47. (a) Cre en $(\pi, 2\pi)$;
dec en $(0, \pi)$
(b) Mín loc $f(\pi) = -1$
(c) CA en $(\pi/3, 5\pi/3)$;
CB en $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$;
PI $\left(\pi/3, \frac{5}{4}\right)$, $\left(5\pi/3, \frac{5}{4}\right)$
(d) Véase la gráfica de la derecha.



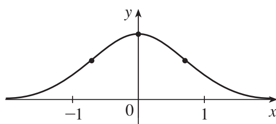
49. (a) AV $x = 0$; AH $y = 1$
(b) Cre en $(0, 2)$;
dec en $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$
(c) Máx loc $f(2) = \frac{5}{4}$
(d) CA en $(3, \infty)$;
CB en $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$; PI $\left(3, \frac{11}{9}\right)$
(e) Véase la gráfica de la derecha.



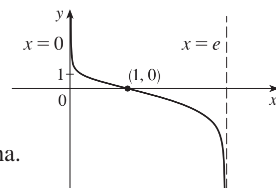
51. (a) AH $y = 0$
(b) Dec en $(-\infty, \infty)$
(c) Ninguno
(d) CA en $(-\infty, \infty)$
(e) Véase la gráfica de la derecha.



53. (a) AH $y = 0$
(b) Cre en $(-\infty, 0)$,
dec en $(0, \infty)$
(c) Máx loc $f(0) = 1$
(d) CA en $\left(-\infty, -1\sqrt{2}\right)$,
$\left(1/\sqrt{2}, \infty\right)$; CB en $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$; PI $\left(\pm 1/\sqrt{2}, e^{-1/2}\right)$
(e) Véase la gráfica de la derecha.



55. (a) AV $x = 0, x = e$
(b) Dec en $(0, e)$
(c) Ninguno
(d) CA en $(0, 1)$; CB on $(1, e)$;
PI $(1, 0)$
(e) Véase la gráfica de la derecha.



57. $(3, \infty)$

59. (a) Máx loc y abs $f(1) = \sqrt{2}$, ningún mín (b) $\frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{17}\right)$

61. (b) CB en $(0, 0.85)$, $(1.57, 2.29)$; CA en $(0.85, 1.57)$, $(2.29, \pi)$; PI $(0.85, 0.74)$, $(1.57, 0)$, $(2.29, -0.74)$

63. CA en $(-\infty, -0.6)$, $(0.0, \infty)$; CB en $(-0.6, 0.0)$

65. (a) La razón de incremento es inicialmente muy reducida, aumenta a un máximo en $t \approx 8$ h, luego decrece hacia 0.
(b) Cuando $t = 8$ (c) CA en $(0, 8)$; CB on $(8, 18)$
(d) $(8, 350)$

67. Sea $f(t)$ el déficit nacional en el año t. El economista dijo que para este año $f'(t) > 0$ y $f''(t) < 0$.

69. $K(3) - K(2)$; CB

71. 28.57 min, cuando la razón de incremento del nivel de medicinas en el torrente sanguíneo es la mayor; 85.71 min, cuando la razón de decremento es la mayor

73. $f(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)$

75. (a) $a = 0, b = -1$ (b) $y = -x$ en $(0, 0)$

EJERCICIOS 4.4 ■ PÁGINA 311

1. (a) Indeterminada (b) 0 (c) 0
(d) ∞, $-\infty$, o no existe (e) Indeterminada

3. (a) $-\infty$ (b) Indeterminada (c) ∞

5. $\frac{9}{4}$ **7.** 1 **9.** 6 **11.** $-\frac{1}{3}$

13. $-\infty$ **15.** 2 **17.** $\frac{1}{4}$ **19.** 0 **21.** $-\infty$

23. $\frac{8}{5}$ **25.** 3 **27.** $\frac{1}{2}$ **29.** 1 **31.** 1

33. $1/\ln 3$ **35.** 0 **37.** 0 **39.** a/b

41. $\frac{1}{2}a(a - 1)$ **43.** 3 **45.** $\frac{5}{3}$ **47.** 0 **49.** $-2/\pi$

51. $\frac{1}{2}$ **53.** $\frac{1}{2}$ **55.** ∞ **57.** 1 **59.** e^{-2}

61. $1/e$ **63.** 1 **65.** e^4 **67.** e^3 **69.** e^2

71. $\frac{1}{4}$ **75.** 1

77. f tiene un mínimo absoluto para $c > 0$. Cuando c aumenta, el mínimo apunta más lejos del origen.

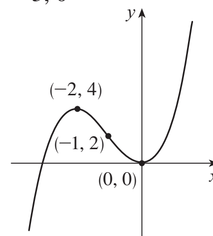
81. (a) M; la población debería aproximarse a su tamaño máximo conforme el tiempo aumenta. (b) P_0e^{kt}; exponencial

83. $\frac{16}{9}a$ **85.** $\frac{1}{2}$ **87.** 56 **91.** (a) 0

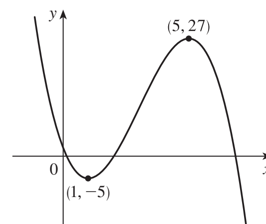
EJERCICIOS 4.5 ■ PÁGINA 321

Abreviaturas: int, intersección; AI, asíntota inclinada

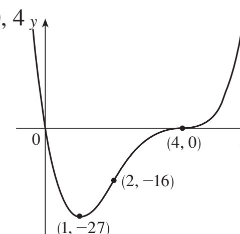
1. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 0$; int en $x = -3, 0$
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre en $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$;
dec en $(-2, 0)$
F. Máx loc $f(-2) = 4$;
mín loc $f(0) = 0$
G. CA en $(-1, \infty)$; CB en $(-\infty, -1)$;
PI $(-1, 2)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



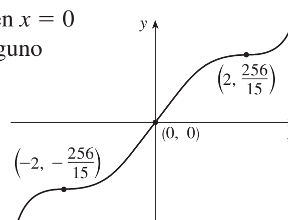
3. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 2$;
int en $x = 2$, $\frac{1}{2}\left(7 \pm 3\sqrt{5}\right)$
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre en $(1, 5)$;
dec en $(-\infty, 1)$, $(5, \infty)$
F. loc Mín $f(1) = -5$
máx loc $f(5) = 27$
G. CA en $(-\infty, 3)$
CB en $(3, \infty)$; PI $(3, 11)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



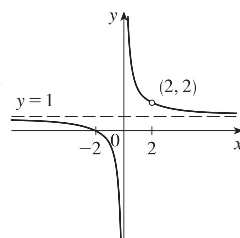
5. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 0$; int en $x = 0, 4$
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre en $(1, \infty)$; dec en $(-\infty, 1)$
F. Mín loc $f(1) = -27$
G. CA en $(-\infty, 2)$, $(4, \infty)$;
CB en $(2, 4)$;
PI $(2, -16)$, $(4, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



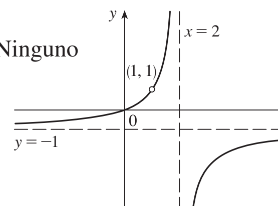
7. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 0$; int en $x = 0$
C. Alrededor de $(0, 0)$ D. Ninguno
E. Cre en $(-\infty, \infty)$
F. Ninguno
G. CA en $(-2, 0)$, $(2, \infty)$;
CB en $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$;
PI $\left(-2, -\frac{256}{15}\right)$, $(0, 0)$, $\left(2, \frac{256}{15}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



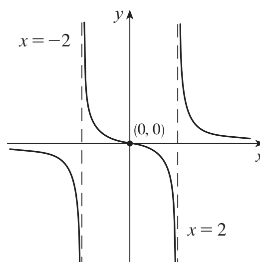
9. A. $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$
B. Int en $x = -2$
C. Ninguno D. AV $x = 0$, AH $y = 1$
E. Dec en $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$
F. Ninguno
G. CA en $(0, 2)$, $(2, \infty)$;
CB en $(-\infty, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



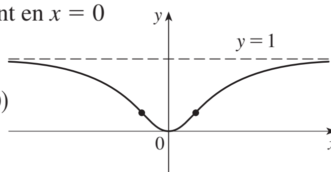
11. A. $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$
B. Int en $y = 0$; int en $x = 0$ C. Ninguno
D. AH $y = -1$; AV $x = 2$
E. Cre en $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$
F. Ninguno
G. CA en $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$;
CB en $(2, \infty)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



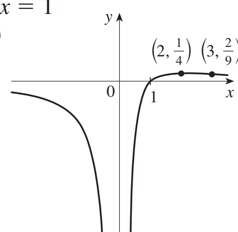
13. A. $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ B. Int en $y = 0$; int en $x = 0$
C. Alrededor de $(0, 0)$ D. AV $x = \pm 2$; AH $y = 0$
E. Dec en $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, \infty)$
F. Ningún extremo local
G. CA en $(-2, 0)$, $(2, \infty)$;
CB en $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$; PI $(0, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



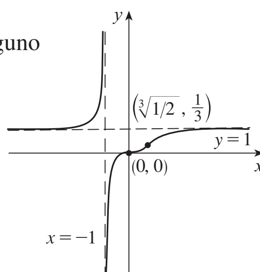
15. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 0$; int en $x = 0$
C. Alrededor del eje y
D. AH $y = 1$
E. Cre en $(0, \infty)$; dec en $(-\infty, 0)$
F. Mín loc $f(0) = 0$
G. CA en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$;
CB en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$;
PI $\left(\pm\sqrt{3}, \frac{1}{4}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



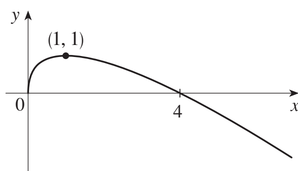
17. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ B. Int en $x = 1$
C. Ninguno D. AH $y = 0$; AV $x = 0$
E. Cre en $(0, 2)$;
dec en $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$
F. Máx loc $f(2) = \frac{1}{4}$
G. CA en $(3, \infty)$;
CB en $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$; PI $\left(3, \frac{2}{9}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



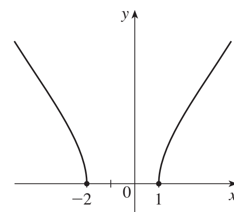
19. A. $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
B. Int en $y = 0$; int en $x = 0$ C. Ninguno
D. AV $x = -1$; AH $y = 1$
E. Cre en $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$;
F. Ninguno
G. CA en $(-\infty, -1)$, $\left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$;
CB en $(-1, 0)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \infty\right)$;
PI $(0, 0)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



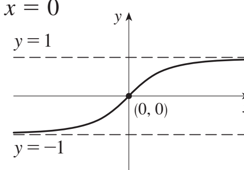
21. A. $[0, \infty)$
B. Int en $y = 0$; int en $x = 0, 4$
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre en $(0, 1)$; dec en $(1, \infty)$
F. Máx loc $f(1) = 1$
G. CB en $(0, \infty)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



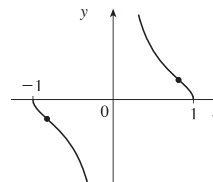
23. A. $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$
B. Int en $x = -2, 1$ C. Ninguno
D. Ninguno
E. Cre en $(1, \infty)$; dec en $(-\infty, -2)$
F. Ninguno
G. CB en $(-\infty, -2)$, $(1, \infty)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



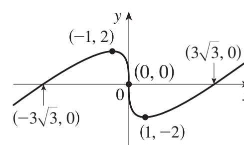
25. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 0$; int en $x = 0$
C. Alrededor de $(0, 0)$
D. AH $y = \pm 1$
E. Cre en $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CA en $(-\infty, 0)$;
CB en $(0, \infty)$; PI $(0, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



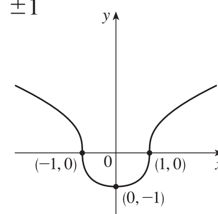
27. A. $[-1, 0) \cup (0, 1]$ B. Int en $x = \pm 1$ C. Alrededor de $(0, 0)$
D. AV $x = 0$
E. Dec en $(-1, 0)$, $(0, 1)$
F. Ninguno
G. CA en $\left(-1, -\sqrt{2/3}\right)$,
$\left(0, \sqrt{2/3}\right)$;
CB en $\left(-\sqrt{2/3}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2/3}, 1\right)$;
PI $\left(\pm\sqrt{2/3}, \pm 1/\sqrt{2}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



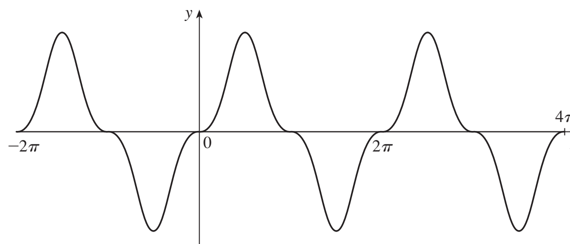
29. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 0$; int en $x = \pm 3\sqrt{3}, 0$ C. Alrededor de $(0, 0)$
D. Ninguno E. Cre en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; dec en $(-1, 1)$
F. Máx loc $f(-1) = 2$;
mín loc $f(1) = -2$
G. CA en $(0, \infty)$;
CB en $(-\infty, 0)$; PI $(0, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



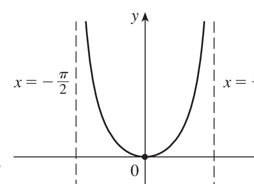
31. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 0$; int en $x = \pm 1$
C. Alrededor del eje y D. Ninguno
E. Cre en $(0, \infty)$; dec en $(-\infty, 0)$
F. Mín loc $f(0) = -1$
G. CA en $(-1, 1)$;
CB en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; PI $(\pm 1, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



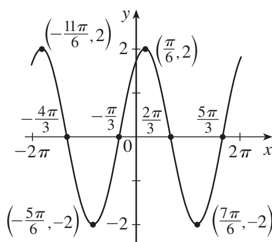
33. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 0$; int en $x = n\pi$ (n un entero)
C. Alrededor de $(0, 0)$, período 2π D. Ninguno
Respuestas E-G para $0 \leqslant x \leqslant \pi$:
E. Cre en $(0, \pi/2)$; dec on $(\pi/2, \pi)$ F. Máx loc $f(\pi/2) = 1$
G. Sea $\alpha = \text{sen}^{-1}\sqrt{2/3}$; CA en $(0, \alpha)$, $(\pi - \alpha, \pi)$;
CB en $(\alpha, \pi - \alpha)$; PI en $x = 0, \pi, \alpha, \pi - \alpha$
H.



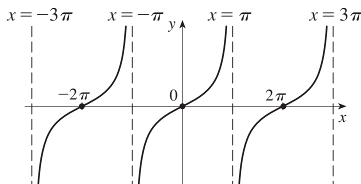
35. A. $(-\pi/2, \pi/2)$ B. Int en $y = 0$; int en $x = 0$
C. Alrededor del eje y
D. AV $x = \pm\pi/2$
E. Cre en $(0, \pi/2)$;
dec en $(-\pi/2, 0)$
F. Mín loc $f(0) = 0$
G. CA en $(-\pi/2, \pi/2)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



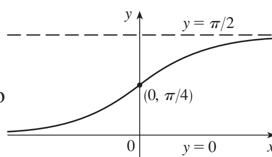
37. A. $[-2\pi, 2\pi]$ B. Int en $y = \sqrt{3}$; Int en $x = -4\pi/3$, $-\pi/3, 2\pi/3, 5\pi/3$ C. Período 2π D. Ninguno
E. Cre en $(-2\pi, -11\pi/6), (-5\pi/6, \pi/6), (7\pi/6, 2\pi)$; dec en $(-11\pi/6, -5\pi/6), (\pi/6, 7\pi/6)$
F. Máx loc $f(-11\pi/6) = f(\pi/6) = 2$; mín loc $f(-5\pi/6)$ $f(7\pi/6) = -2$
G. CA en $(-4\pi/3, -\pi/3)$, $(2\pi/3, 5\pi/3)$;
CB on $(-2\pi, -4\pi/3)$, $(-\pi/3, 2\pi/3), (5\pi/3, 2\pi)$;
PI $(-4\pi/3, 0), (-\pi/3, 0)$, $(2\pi/3, 0), (5\pi/3, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



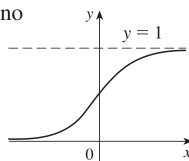
39. A. Todos reales excepto $(2n + 1)\pi$ (n un entero)
B. Int en $y = 0$; Int en $x = 2n\pi$ C. Alrededor del origen, período 2π
D. AV $x = (2n + 1)\pi$ E. Cre en $((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi)$
F. Ninguno G. CA en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$;
CB en $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$; PI $(2n\pi, 0)$
H.



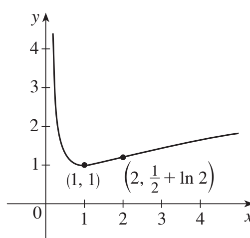
41. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = \pi/4$
C. Ninguno
D. AH $y = 0, y = \pi/2$
E. Cre en $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CA en $(-\infty, 0)$;
CB en $(0, \infty)$; PI $(0, \pi/4)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



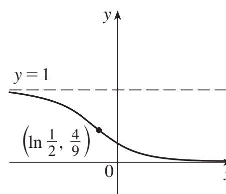
43. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = \frac{1}{2}$ C. Ninguno
D. AH $y = 0, y = 1$
E. Cre en $\mathbb{R}$ F. Ninguno
G. CA en $(-\infty, 0)$;
CB en $(0, \infty)$; PI $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



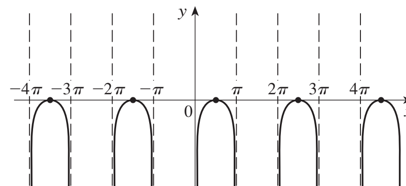
45. A. $(0, \infty)$ B. Ninguna
C. Ninguno D. AV $x = 0$
E. Cre en $(1, \infty)$; dec on $(0, 1)$
F. Mín loc $f(1) = 1$
G. CA en $(0, 2)$; CB en $(2, \infty)$;
PI $\left(2, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



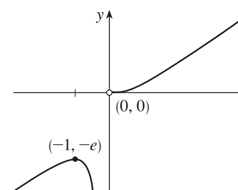
47. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = \frac{1}{4}$
C. Ninguno
D. AH $y = 0, y = 1$
E. Dec en $\mathbb{R}$ F. Ninguno
G. CA en $\left(\ln \frac{1}{2}, \infty\right)$;
CB en $\left(-\infty, \ln \frac{1}{2}\right)$; PI $\left(\ln \frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



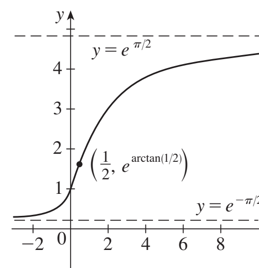
49. A. Todas las x en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$ (n un entero)
B. Int en $x = \pi/2 + 2n\pi$ C. Período 2π D. AV $x = n\pi$
E. Cre en $(2n\pi, \pi/2 + 2n\pi)$; dec en $(\pi/2 + 2n\pi, (2n + 1)\pi)$
F. Máx loc $f(\pi/2 + 2n\pi) = 0$ G. CB en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$
H.



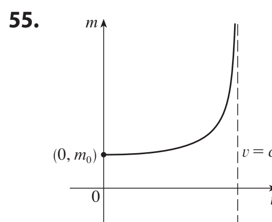
51. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
B. Ninguna C. Ninguna
D. AV $x = 0$
E. Cre en $(-\infty, -1), (0, \infty)$;
dec en $(-1, 0)$
F. Máx loc $f(-1) = -e$
G. CA en $(0, \infty)$; CB on $(-\infty, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



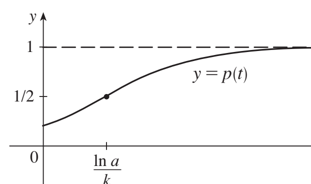
53. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 1$
C. Ninguno D. AH $y = e^{\pm\pi/2}$
E. Cre en $\mathbb{R}$ F. Ninguno
G. CA en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; CB en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$;
PI $\left(\frac{1}{2}, e^{\arctan(1/2)}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



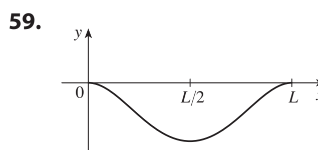
55.



57. (a) Cuando $t = (\ln a)/k$ (b) Cuando $t = (\ln a)/k$
(c)

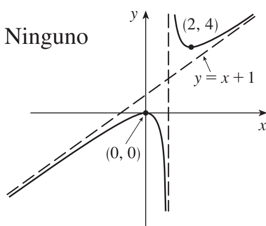


59.

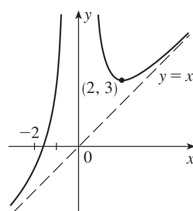


61. $y = x - 1$ **63.** $y = 2x - 3$

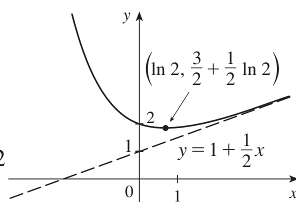
65. A. $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
B. Int en $y = 0$; int en $x = 0$ C. Ninguno
D. AV $x = 1$; AI $y = x + 1$
E. Cre en $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$;
dec en $(0, 1)$, $(1, 2)$
F. Máx loc $f(0) = 0$;
mín loc $f(2) = 4$
G. CA en $(1, \infty)$; CB en $(-\infty, 1)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



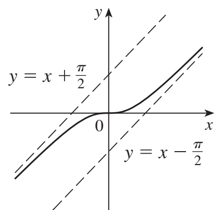
67. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
B. Int en $x = -\sqrt[3]{4}$ C. Ninguno
D. AV $x = 0$; AI $y = x$
E. Cre en $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$;
dec en $(0, 2)$
F. Mín loc $f(2) = 3$
G. CA en $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



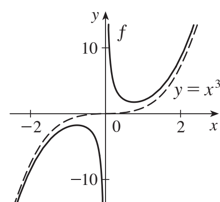
69. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 2$
C. Ninguno
D. AI $y = 1 + \frac{1}{2}x$
E. Cre en $(\ln 2, \infty)$;
dec en $(-\infty, \ln 2)$
F. Mín loc $f(\ln 2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$
G. CA en $(-\infty, \infty)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



71.

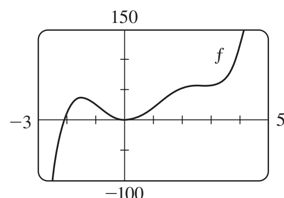


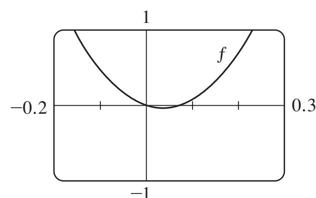
75. AV $x = 0$, asintótica a $y = x^3$

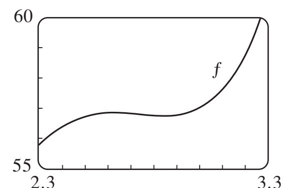


EJERCICIOS 4.6 ■ PÁGINA 329

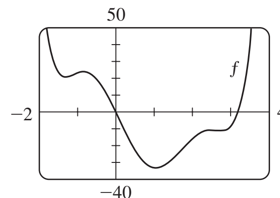
1. Cre en $(-\infty, -1.50)$, $(0.04, 2.62)$, $(2.84, \infty)$; dec en $(-1.50, 0.04)$, $(2.62, 2.84)$; máx loc $f(-1.50) \approx 36.47$, $f(2.62) \approx 56.83$; mín loc $f(0.04) \approx -0.04$, $f(2.84) \approx 56.73$; CA en $(-0.89, 1.15)$, $(2.74, \infty)$; CB en $(-\infty, -0.89)$, $(1.15, 2.74)$; PI $(-0.89, 20.90)$, $(1.15, 26.57)$, $(2.74, 56.78)$



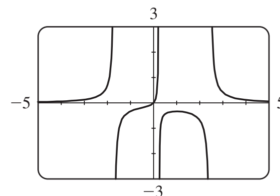




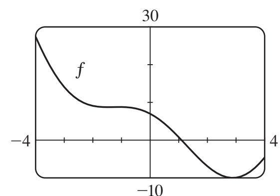
3. Cre en $(-1.31, -0.84)$, $(1.06, 2.50)$, $(2.75, \infty)$; dec en $(-\infty, -1.31)$, $(-0.84, 1.06)$, $(2.50, 2.75)$; máx loc $f(-0.84) \approx 23.71$, $f(2.50) \approx -11.02$; mín loc $f(-1.31) \approx 20.72$, $f(1.06) \approx -33.12$, $f(2.75) \approx -11.33$; CA en $(-\infty. -1.10)$, $(0.08, 1.72)$, $(2.64, \infty)$; CB en $(-1.10, 0.08)$, $(1.72, 2.64)$; PI $(-1.10, 22.09)$, $(0.08, -3.88)$, $(1.72, -22.53)$, $(2.64, -11.18)$

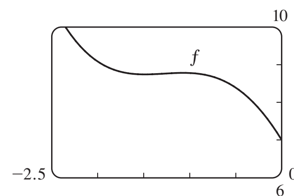


5. Cre en $(-\infty, -1.7)$, $(-1.7, 0.24)$, $(0.24, 1)$; dec en $(1, 2.46)$, $(2.46, \infty)$; máx loc $f(1) = -\frac{1}{3}$; CA en $(-\infty, -1.7)$, $(-0.506, 0.24)$, $(2.46, \infty)$; CB en $(-1.7, -0.506)$, $(0.24, 2.46)$; PI $(-0.506, -0.192)$

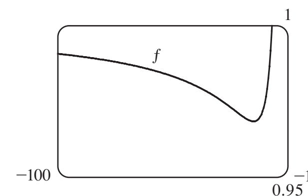


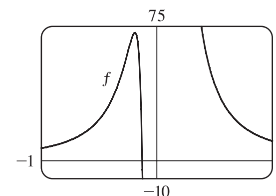
7. Cre en $(-1.49, -1.07)$, $(2.89, 4)$; dec en $(-4, -1.49)$, $(-1.07, 2.89)$; máx loc $f(-1.07) \approx 8.79$; mín loc $f(-1.49) \approx 8.75$, $f(2.89) \approx -9.99$; CA en $(-4, -1.28)$, $(1.28, 4)$; CB en $(-1.28, 1.28)$; PI $(-1.28, 8.77)$, $(1.28, -1.48)$



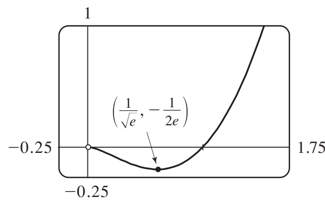


9. Cre en $\left(-8 - \sqrt{61}, -8 + \sqrt{61}\right)$; dec en $\left(-\infty, -8 - \sqrt{61}\right)$, $\left(-8 + \sqrt{61}, 0\right)$, $(0, \infty)$; CA en $\left(-12 - \sqrt{138}, -12 + \sqrt{138}\right)$, $(0, \infty)$; CB en $\left(-\infty, -12 - \sqrt{138}\right)$, $\left(-12 + \sqrt{138}, 0\right)$



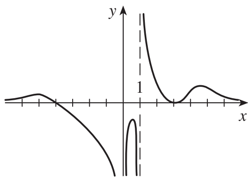


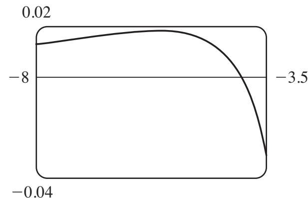
11. (a)

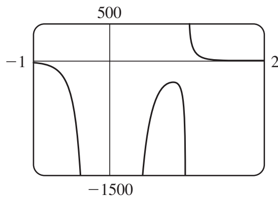


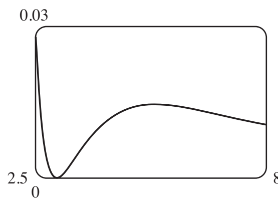
(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (c) Mín loc $f(1/\sqrt{e}) = -1/(2e)$; CB en $(0, e^{-3/2})$; CA en $(e^{-3/2}, \infty)$

13. Máx loc $f(-5.6) \approx 0.018$, $f(0.82) \approx -281.5$, $f(5.2) \approx 0.0145$; mín loc $f(3) = 0$







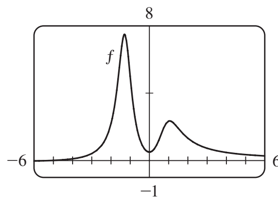


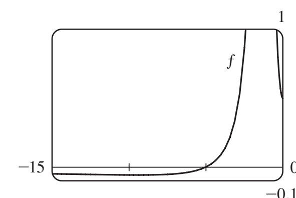
15. $f'(x) = -\dfrac{x(x+1)^2(x^3+18x^2-44x-16)}{(x-2)^3(x-4)^5}$

$f''(x) = 2\dfrac{(x+1)(x^6+36x^5+6x^4-628x^3+684x^2+672x+64)}{(x-2)^4(x-4)^6}$

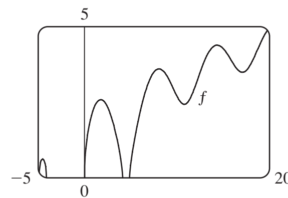
CA en $(-35.3, -5.0)$, $(-1, -0.5)$, $(-0.1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$;
CB en $(-\infty, -35.3)$, $(-5.0, -1)$, $(-0.5, -0.1)$;
PI $(-35.3, -0.015)$, $(-5.0, -0.005)$, $(-1, 0)$, $(-0.5, 0.00001)$, $(-0.1, 0.0000066)$

17. Cre en $(-9.41, -1.29)$, $(0, 1.05)$;
dec en $(-\infty, -9.41)$, $(-1.29, 0)$, $(1.05, \infty)$;
máx loc $f(-1.29) \approx 7.49$, $f(1.05) \approx 2.35$;
mín loc $f(-9.41) \approx -0.056$, $f(0) = 0.5$;
CA en $(-13.81, -1.55)$, $(-1.03, 0.60)$, $(1.48, \infty)$;
CB en $(-\infty, -13.81)$, $(-1.55, -1.03)$, $(0.60, 1.48)$;
PI $(-13.81, -0.05)$, $(-1.55, 5.64)$, $(-1.03, 5.39)$, $(0.60, 1.52)$, $(1.48, 1.93)$

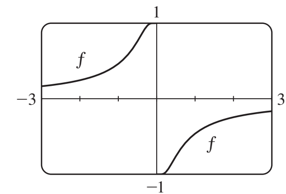




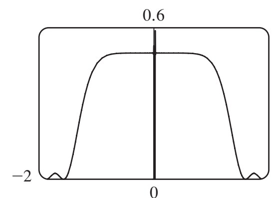
19. Cre en $(-4.91, -4.51)$, $(0, 1.77)$, $(4.91, 8.06)$, $(10.79, 14.34)$, $(17.08, 20)$;
dec en $(-4.51, -4.10)$, $(1.77, 4.10)$, $(8.06, 10.79)$, $(14.34, 17.08)$;
máx loc $f(-4.51) \approx 0.62$, $f(1.77) \approx 2.58$, $f(8.06) \approx 3.60$, $f(14.34) \approx 4.39$;
mín loc $f(10.79) \approx 2.43$, $f(17.08) \approx 3.49$;
CA en $(9.60, 12.25)$, $(15.81, 18.65)$;
CB en $(-4.91, -4.10)$, $(0, 4.10)$, $(4.91, 9.60)$, $(12.25, 15.81)$, $(18.65, 20)$;
PI $(9.60, 2.95)$, $(12.25, 3.27)$, $(15.81, 3.91)$, $(18.65, 4.20)$

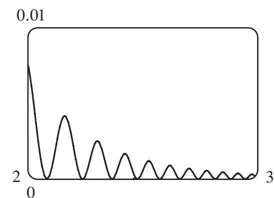


21. Cre en $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$;
CA en $(-\infty, -0.42)$, $(0, 0.42)$;
CB en $(-0.42, 0)$, $(0.42, \infty)$;
PI $(\mp 0.42, \pm 0.83)$

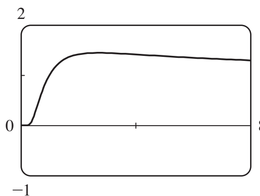


23.



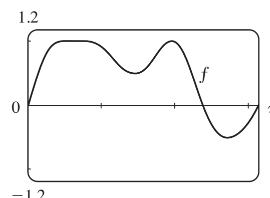


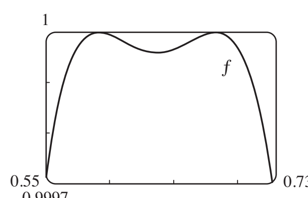
25. (a)

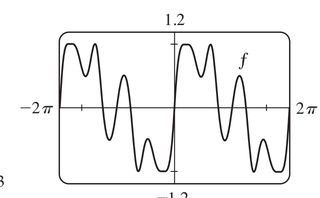


(b) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$
(c) Máx loc $f(e) = e^{1/e}$ (d) PI at $x \approx 0.58, 4.37$

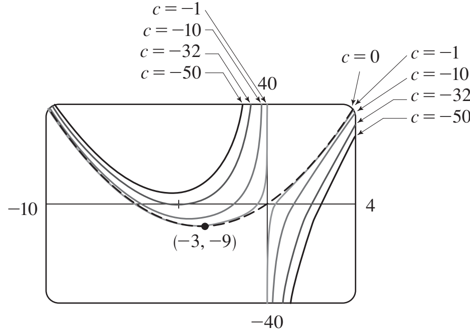
27. Máx $f(0.59) \approx 1$, $f(0.68) \approx 1$, $f(1.96) \approx 1$;
mín $f(0.64) \approx 0.99996$, $f(1.46) \approx 0.49$, $f(2.73) \approx -0.51$;
PI $(0.61, 0.99998)$, $(0.66, 0.99998)$, $(1.17, 0.72)$, $(1.75, 0.77)$, $(2.28, 0.34)$



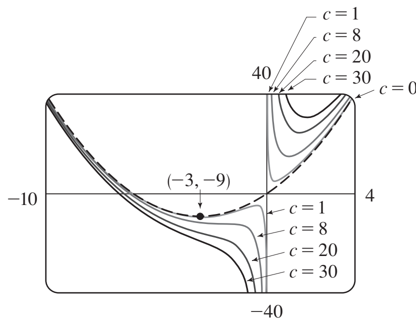




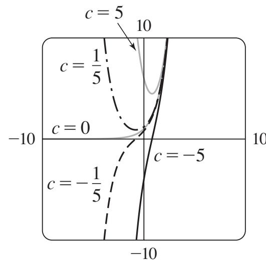
29. Para $c < 0$, hay un mín loc que se mueve hacia $(-3, -9)$ cuando c aumenta. Para $0 < c < 8$, hay un mín loc que se mueve hacia $(-3, -9)$ y un máx loc que se mueve hacia el origen cuando c decrece. Para todas las $c > 0$, hay un mín loc en el primer cuadrante que se mueve hacia el origen cuando c decrece. $c = 0$ es un valor de transición que da la gráfica de una parábola. Para todas las c diferentes de cero, el eje y es una AV y hay un PI que se mueve hacia el origen cuando $|c| \to 0$.
$c \leqslant 0$:



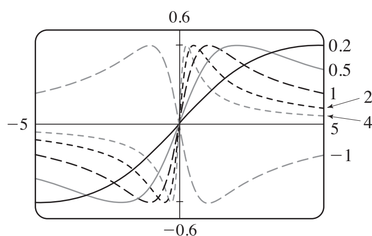
$c \geqslant 0$:



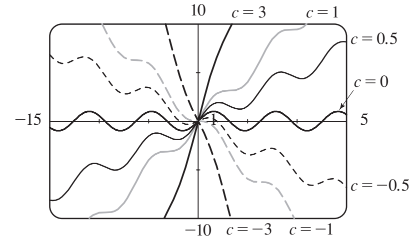
31. Para $c < 0$, no hay ningún punto extremo y hay un PI, que decrece a lo largo del eje x. Para $c > 0$, no hay ningún PI y hay un punto mínimo.



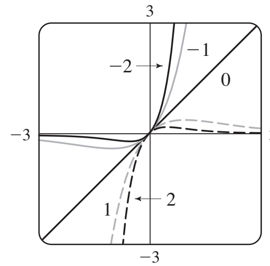
33. Para $c > 0$, los valores máximo y mínimo son siempre $\pm\frac{1}{2}$, pero los puntos extremos y PI se acercan más al eje y cuando c aumenta. $c = 0$ es un valor de transición; cuando c es reemplazada por $-c$, la curva se refleja del eje x.



35. Para $|c| < 1$, la gráfica tiene valores máx y mín loc; para $|c| \geqslant 1$ no. La función aumenta para $c \geqslant 1$ y disminuye para $c \leqslant -1$. Cuando c cambia, los PI se mueven vertical pero no horizontalmente.

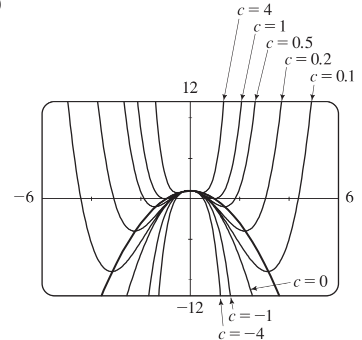


37.



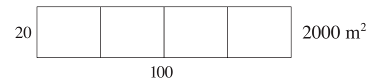
Para $c > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Para $c < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Cuando $|c|$ aumenta, los puntos máx y mín y los PI se acercan al origen.

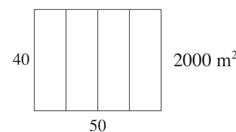
39. (a) Positivo (b)

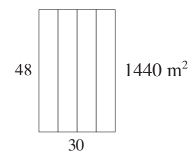


EJERCICIOS 4.7 ■ PÁGINA 336

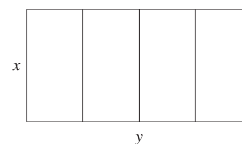
1. (a) 11, 12 (b) 11.5, 11.5 **3.** 10, 10 **5.** $\frac{9}{4}$
7. 25 m por 25 m **9.** $N = 1$
11. (a)







(b)



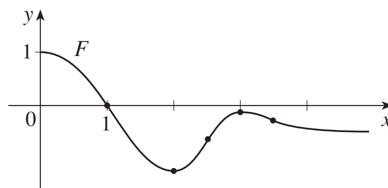
(c) $A = xy$ (d) $5x + 2y = 300$ (e) $A(x) = 150x - \frac{5}{2}x^2$
(f) 2250 m^2
13. 100 m por 150 m **15.** 4000 cm^3 **17.** \$191.28
19. 15 metros a lo largo del lado del granero, 10 metros de profundidad **21.** $\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$
23. $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ **25.** Cuadrado, lado $\sqrt{2}\,r$
27. $L/2, \sqrt{3}\,L/4$ **29.** Base $\sqrt{3}\,r$, altura $3r/2$
31. $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$ **33.** $\pi r^2(1 + \sqrt{5})$ **35.** 24 cm por 36 cm
37. (a) Use todo el alambre para el cuadrado
(b) $40\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ m para el cuadrado
39. 30 cm **41.** $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$ **45.** $E^2/(4r)$
47. (a) $\frac{3}{2}s^2 \csc\theta (\csc\theta - \sqrt{3}\cot\theta)$ (b) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$
(c) $6s\left[h + s/(2\sqrt{2})\right]$
49. Reme directamente a B **51.** ≈ 4.85 km al este de la refinería
53. $4\sqrt[3]{3}/(1 + \sqrt[3]{3})$ m desde la fuente más fuerte
55. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ **57.** $2\sqrt{6}$
59. (b) (i) \$342,491; \$342/unidad; \$390/unidad (ii) 400
(iii) \$320/unidad
61. (a) $p(x) = 19 - \frac{1}{3000}x$ (b) \$9.50
63. (a) $p(x) = 500 - \frac{1}{8}x$ (b) \$250 (c) \$310
69. 9.35 m **73.** $x = 15$ cm **75.** $\pi/6$
77. A una distancia de $5 - 2\sqrt{5}$ desde A **79.** $\frac{1}{2}(L + W)^2$
81. (a) Alrededor de 5.1 km desde B (b) C está cerca de B; C está cerca de D; $W/L = \sqrt{25 + x^2}/x$, donde $x = |BC|$
(c) ≈ 1.07; ningún valor de ese tipo (d) $\sqrt{41}/4 \approx 1.6$

EJERCICIOS 4.8 ■ PÁGINA 348

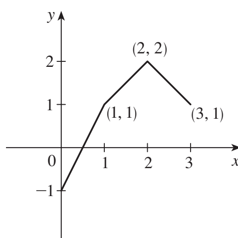
1. (a) $x_2 \approx 7.3, x_3 \approx 6.8$ (b) Sí
3. $\frac{9}{2}$ **5.** a, b, c **7.** 1.5215 **9.** -1.25
11. 2.94283096 **13.** (b) 2.630020 **15.** 0.876726
17. $-3.637958, -1.862365, 0.889470$
19. $-1.257691, 0.653483$ **21.** 0.641714
23. $-1.69312029, -0.74466668, 1.26587094$
25. 0.76682579 **27.** 0.21916368, 1.08422462
29. (b) 31.622777
35. (a) $-1.293227, -0.441731, 0.507854$ (b) -2.0212
37. (1.519855, 2.306964) **39.** (0.410245, 0.347810)
41. 0.76286%

EJERCICIOS 4.9 ■ PÁGINA 355

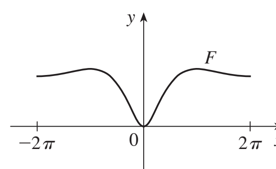
1. $F(x) = 2x^2 + 7x + C$ **3.** $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$
5. $F(x) = 4x^3 + 4x^2 + C$ **7.** $F(x) = 5x^{7/5} + 40x^{1/5} + C$
9. $F(x) = \sqrt{2}x + C$ **11.** $F(x) = 2x^{3/2} - \frac{3}{2}x^{4/3} + C$
13. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x - 2\ln|x| + C_1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{5}x - 2\ln|x| + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
15. $G(t) = 2t^{1/2} + \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{2}{5}t^{5/2} + C$
17. $H(\theta) = -2\cos\theta - \tan\theta + C_n$ en $(n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2)$, n un entero
19. $F(x) = 2^x/\ln 2 + 4\cosh x + C$
21. $F(x) = x^2 + 4x + 1/x + C, x > 0$
23. $F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 4$
25. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + Cx + D$
27. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3e^x + Cx + D$
29. $f(t) = 2t^3 + \cos t + Ct^2 + Dt + E$
31. $f(x) = x + 2x^{3/2} + 5$ **33.** $f(t) = 4\arctan t - \pi$
35. $f(x) = 3x^{5/3} - 75$
37. $f(t) = \tan t + \sec t - 2 - \sqrt{2}$
39. $f(x) = -x^2 + 2x^3 - x^4 + 12x + 4$
41. $f(\theta) = -\text{sen}\,\theta - \cos\theta + 5\theta + 4$
43. $f(x) = 2x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x + 3$
45. $f(x) = e^x + 2\,\text{sen}\,x - \dfrac{2}{\pi}(e^{\pi/2} + 4)x + 2$
47. $f(x) = -\ln x + (\ln 2)x - \ln 2$ **49.** 8 **51.** b
53.



55.



57.



59. $s(t) = 1 - \cos t - \text{sen}\,t$ **61.** $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$
63. $s(t) = -10\,\text{sen}\,t - 3\cos t + (6/\pi)t + 3$
65. (a) $s(t) = 450 - 4.9t^2$ (b) $\sqrt{450/4.9} \approx 9.58$ s
(c) $-9.8\sqrt{450/4.9} \approx -93.9$ m/s (d) Alrededor de 9.09 s
69. ≈ 81.6 m **71.** \$742.08 **73.** $\frac{130}{11} \approx 11.8$ s
75. $\frac{5}{3} \text{ m/s}^2$ **77.** $62{,}500 \text{ km/h}^2 \approx 4.82 \text{ m/s}^2$
79. (a) 36.926 km (b) 34.898 km (c) 30 min 21 s
(d) 89.278 km

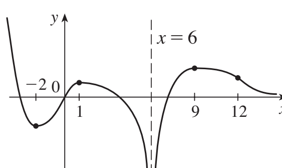
REPASO DEL CAPÍTULO 4 ■ PÁGINA 358

Examen verdadero-falso

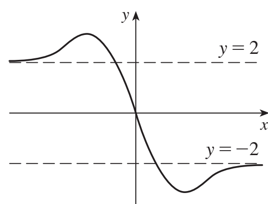
1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero
11. Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Verdadero
19. Verdadero **21.** Falso

Ejercicios

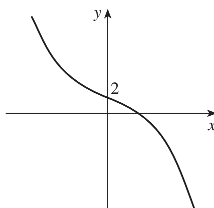
1. Máx abs $f(2) = f(5) = 18$, mín abs $f(0) = -2$, máx loc $f(2) = 18$, mín loc $f(4) = 14$
3. Máx abs $f(2) = \frac{2}{5}$, mín abs y loc $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{2}$
5. Máx abs y loc $f(\pi/6) = \pi/6 + \sqrt{3}$, mín abs $f(-\pi) = -\pi - 2$, mín loc $f(5\pi/6) = 5\pi/6 - \sqrt{3}$
7. 1 **9.** 4 **11.** 8 **13.** $\frac{1}{2}$
15.



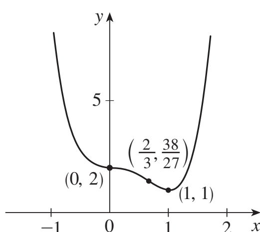
17.



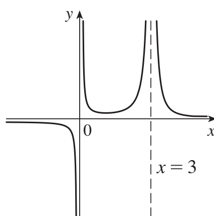
19. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 2$
C. Ninguno D. Ninguno
E. Dec en $(-\infty, \infty)$ F. Ninguno
G. CA en $(-\infty, 0)$;
CB en $(0, \infty)$; PI $(0, 2)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



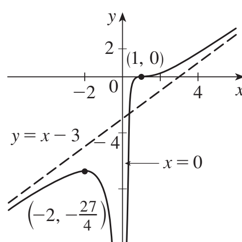
21. A. $\mathbb{R}$ B. Int en $y = 2$
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre en $(1, \infty)$; dec en $(-\infty, 1)$
F. Mín loc $f(1) = 1$
G. CA en $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$;
CB en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$; PI $(0, 2)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{38}{27}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



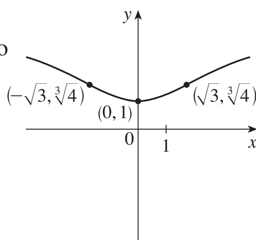
23. A. $\{x \mid x \neq 0, 3\}$
B. Ninguna C. Ninguna
D. AH $y = 0$; AV $x = 0$, $x = 3$
E. Cre en $(1, 3)$;
dec en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(3, \infty)$
F. Mín loc $f(1) = \frac{1}{4}$
G. CA en $(0, 3)$, $(3, \infty)$;
CB en $(-\infty, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



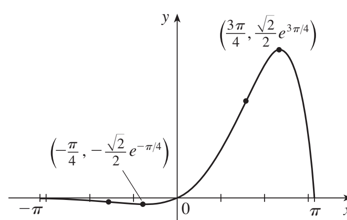
25. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
B. Int en $x = 1$ C. Ninguno
D. AV $x = 0$; AI $y = x - 3$
E. Cre en $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$;
dec en $(-2, 0)$
F. Máx loc $f(-2) = -\frac{27}{4}$
G. CA en $(1, \infty)$; CB en $(-\infty, 0)$,
$(0, 1)$; PI $(1, 0)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



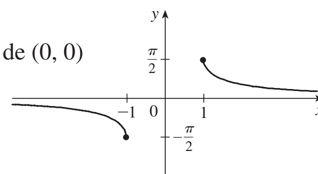
27. A. $\mathbb{R}$; B. Int en $y = 1$
C. Alrededor del eje y D. Ninguno
E. Cre en $(0, \infty)$; dec en $(-\infty, 0)$
F. Mín loc $f(0) = 1$
G. CA en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$
CB en $\left(-\infty, \sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$
PI $\left(\pm\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}\right)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



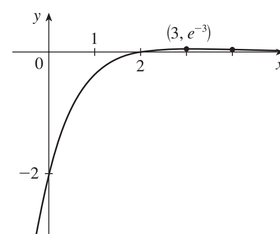
29. A. $[-\pi, \pi]$ B. Int en $y = 0$; Int en $x = -\pi, 0, \pi$
C. Ninguno D. Ninguno
E. Cre en $(-\pi/4, 3\pi/4)$; dec en $(-\pi, -\pi/4)$, $(3\pi/4, \pi)$
F. Máx loc $f(3\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{3\pi/4}$,
mín loc $f(-\pi/4) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{-\pi/4}$
G. CA on $(-\pi/2, \pi/2)$; CB on $(-\pi, -\pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$;
PI $(-\pi/2, -e^{-\pi/2})$, $(\pi/2, e^{\pi/2})$
H



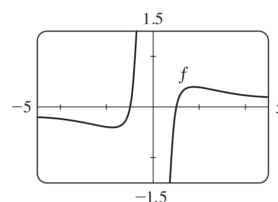
31. A. $\{x \mid |x| \geqslant 1\}$
B. Ninguna C. Alrededor de $(0, 0)$
D. AH $y = 0$
E. Dec en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$
F. Ninguno
G. CA en $(1, \infty)$;
CB en $(-\infty, -1)$
H. Véase la gráfica de la derecha.



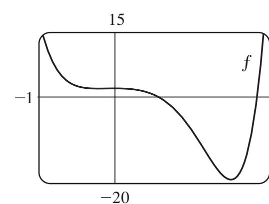
33. A. $\mathbb{R}$
B. Int en $y = -2$; Int en $x = 2$
C. Ninguno D. AH $y = 0$
E. Cre en $(-\infty, 3)$; dec on $(3, \infty)$
F. Máx loc $f(3) = e^{-3}$
G. CA en $(4, \infty)$;
CB en $(-\infty, 4)$;
PI $(4, 2e^{-4})$
H. Véase la gráfica de la derecha.

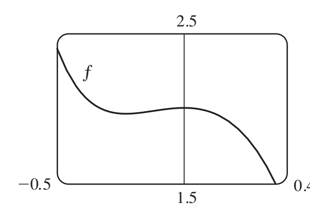


35. Cre en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$;
dec en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$;
máx loc $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$,
mín loc $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$;
CA en $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(\sqrt{6}, \infty\right)$;
CB en $\left(-\infty, -\sqrt{6}\right)$, $\left(0, \sqrt{6}\right)$;
PI $\left(\sqrt{6}, \frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$

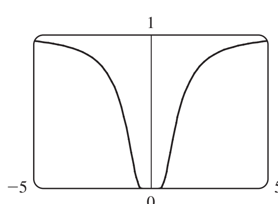


37. Cre en $(-0.23, 0)$, $(1.62, \infty)$; dec en $(-\infty, -0.23)$, $(0, 1.62)$;
máx loc $f(0) = 2$; mín loc $f(-0.23) \approx 1.96$, $f(1.62) \approx -19.2$;
CA en $(-\infty, -0.12)$, $(1.24, \infty)$;
CB en $(-0.12, 1.24)$; PI $(-0.12, 1.98)$, $(1.24, -12.1)$

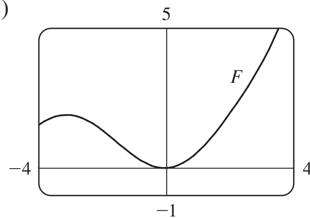




39. $(\pm 0.82, 0.22)$; $\left(\pm\sqrt{2/3}, e^{-3/2}\right)$



41. $-2.96, -0.18, 3.01; -1.57, 1.57; -2.16, -0.75, 0.46, 2.21$
43. Para $C > -1$, f es periódica con período 2π y tiene máximos locales en $2n\pi + \pi/2$, n un entero. Para $C \leqslant -1$, f no tiene gráfica. Para $-1 < C \leqslant 1$, f tiene asíntotas verticales. Para $C > 1$, f es continua en $\mathbb{R}$. Cuando C aumenta, f se mueve hacia arriba y sus oscilaciones se vuelven menos pronunciadas.
49. (a) 0 (b) CA en $\mathbb{R}$ **53.** $3\sqrt{3}\,r^2$
55. $4/\sqrt{3}$ cm desde D **57.** $L = C$ **59.** \$11.50
61. 1.297383 **63.** 1.16718557
65. $F(x) = \frac{8}{3}x^{3/2} - 2x^3 + 3x + C$
67. $F(t) = -2\cos t - 3e^t + C$
69. $f(t) = t^2 + 3\cos t + 2$
71. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 4x^4 + 2x + 1$
73. $s(t) = t^2 - \tan^{-1}t + 1$
75. (b) $0.1e^x - \cos x + 0.9$ (c)



77. No
79. (b) Alrededor de 25.44 cm por 5.96 cm
(c) $2\sqrt{300}$ cm por $2\sqrt{600}$ cm
85. (a) $10\sqrt{2} \approx 14$ m
(b) $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{-60k(h-1)}{[(h-1)^2 + 400]^{5/2}}$, donde k es una constante de proporcionalidad

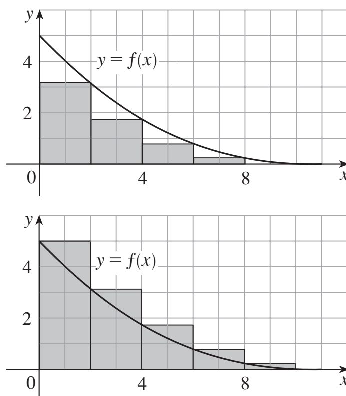
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 363

3. Máx abs $f(-5) = e^{45}$, ningún mín abs **7.** 24
9. $(-2, 4), (2, -4)$ **13.** $\left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ **15.** $(m/2, m^2/4)$
17. $a \leqslant e^{1/e}$
21. (a) $T_1 = D/c_1$, $T_2 = (2h\sec\theta)/c_1 + (D - 2h\tan\theta)/c_2$, $T_3 = \sqrt{4h^2 + D^2}/c_1$
(c) $c_1 \approx 3.85$ km/s, $c_2 \approx 7.66$ km/s, $h \approx 0.42$ km
25. $3/\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) \approx 11\frac{1}{2}$ h

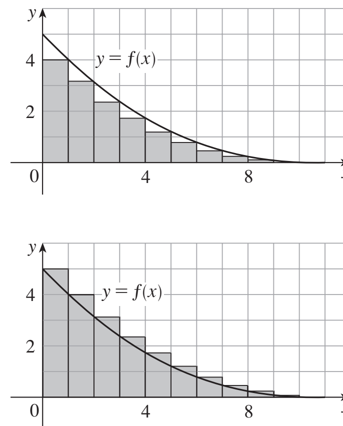
CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1 ■ PÁGINA 375

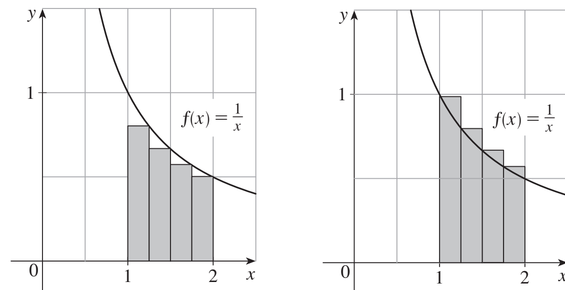
1. (a) $R_5 \approx 12$, $L_5 \approx 22$



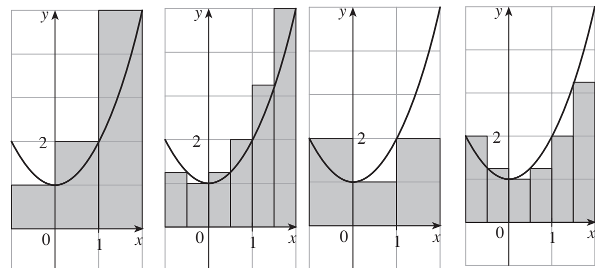
(b) $R_{10} \approx 14.4$, $L_{10} \approx 19.4$



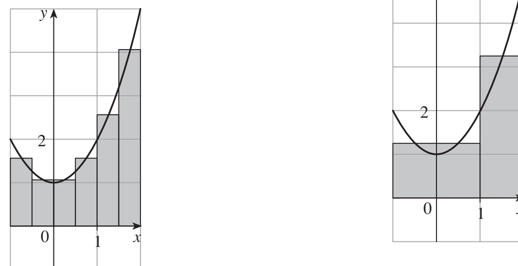
3. (a) 0.6345, subestimación (b) 0.7595, sobreestimación



5. (a) 8, 6.875 (b) 5, 5.375

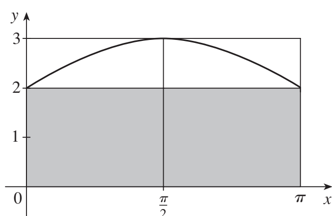


(c) 5.75, 5.9375

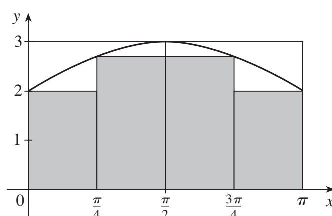


(d) M_6

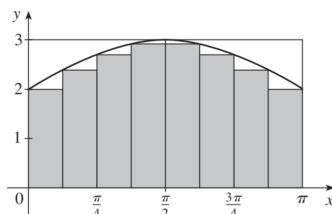
7. $n = 2$: superior $= 3\pi \approx 9.42$, inferior $= 2\pi \approx 6.28$



$n = 4$: superior $= (10 + \sqrt{2})(\pi/4) \approx 8.96$,
inferior $= (8 + \sqrt{2})(\pi/4) \approx 7.39$



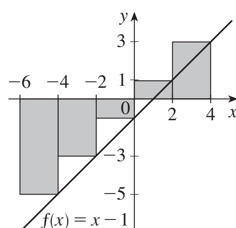
$n = 8$: superior $= 8.65$, inferior ≈ 7.86



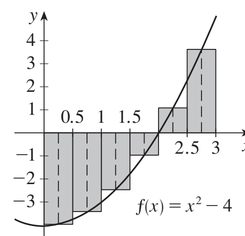
9. 0.2533, 0.2170, 0.2101, 0.2050; 0.2
11. (a) Izquierda: 0.8100, 0.7937, 0.7904;
derecha: 0.7600, 0.7770, 0.7804
13. 10.55 m, 13.65 m **15.** 63.2 L, 70 L **17.** 39 m
19. 7840 **21.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{2(1 + 2i/n)}{(1 + 2i/n)^2 + 1} \cdot \dfrac{2}{n}$
23. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\operatorname{sen}(\pi i/n)} \cdot \dfrac{\pi}{n}$
25. La región bajo la gráfica de $y = \tan x$ de 0 a $\pi/4$
27. (a) $L_n < A < R_n$
29. (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{64}{n^6} \sum_{i=1}^{n} i^5$ (b) $\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$
(c) $\frac{32}{3}$
31. sen b, 1

EJERCICIOS 5.2 ■ PÁGINA 388

1. -10
La suma de Riemman representa la suma de las áreas de los dos rectángulos arriba del eje x menos la suma de las áreas de los tres rectángulos bajo el eje x; es decir, el área neta de los rectángulos con respecto al eje x.



3. $-\frac{49}{16}$
La suma de Riemann representa la suma de las áreas de los dos rectángulos arriba del eje x menos la suma de las áreas de los cuatro rectángulos bajo el eje x.



5. (a) 6 (b) 4 (c) 2
7. $-475, -85$
9. 0.5890 **11.** 1.6099 **13.** 0.9029, 0.9018
15.

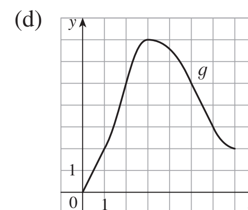
n	R_n
5	1.933766
10	1.983524
50	1.999342
100	1.999836

Los valores de R_n parecen aproximarse a 2.

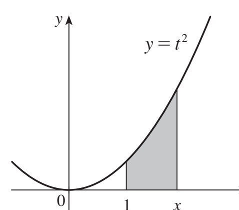
17. $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+x}\,dx$ **19.** $\int_2^6 x \ln(1 + x^2)\,dx$
21. 42 **23.** $\frac{2}{3}$ **25.** $-\frac{3}{4}$
29. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{4 + (1 + 2i/n)} \cdot \dfrac{2}{n}$
31. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{sen} \dfrac{5\pi i}{n}\right) \dfrac{\pi}{n} = \dfrac{2}{5}$
33. (a) 4 (b) 10 (c) -3 (d) 2
35. -4 **37.** $3 + \frac{9}{4}\pi$ **39.** $\frac{25}{4}$ **41.** 0 **43.** 3
45. $e^5 - e^3$ **47.** $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ **49.** 122
51. B < E < A < D < C **53.** 15
59. $0 \leqslant \int_0^1 x^3\,dx \leqslant 1$ **61.** $\dfrac{2}{5} \leqslant \int_0^2 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \leqslant 2$
63. $0 \leqslant \int_0^2 xe^{-x}\,dx \leqslant 2/e$ **67.** $\int_1^2 \arctan x\,dx$
73. $\int_0^1 x^4\,dx$ **75.** $\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 5.3 ■ PÁGINA 399

1. Un proceso deshace lo que el otro hace. Véase el teorema fundamental del cálculo, página 398.
3. (a) 0, 2, 5, 7, 3 (d)
(b) (0, 3)
(c) $x = 3$



5.



(a), (b) x^2

7. $g'(x) = \sqrt{x + x^3}$ **9.** $g'(x) = 1/(x^3 + 1)$

11. $F'(x) = -\sqrt{1 + \sec x}$ **13.** $h'(x) = xe^x$

15. $y' = \dfrac{3(3x + 2)}{1 + (3x + 2)^3}$

17. $y' = -\frac{1}{2} \tan \sqrt{x}$ **19.** $\frac{26}{3}$ **21.** 2 **23.** $\frac{5}{9}$

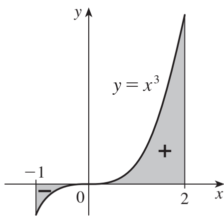
25. $1 + \sqrt{3}/2$ **27.** $\frac{156}{7}$ **29.** $\frac{82}{5}$ **31.** 1 **33.** $\frac{15}{4}$

35. $\ln 2 + 7$ **37.** $\dfrac{1}{e + 1} + e - 1$ **39.** $e^2 - 1$

41. $\dfrac{15}{\ln 2}$ **43.** 0 **45.** $\frac{16}{3}$ **47.** $\frac{32}{3}$

49. $\frac{243}{4}$ **51.** 2

53. 3.75



55. La función $f(x) = x^{-4}$ no es continua en el intervalo $[-2, 1]$, así que FTC2 no puede aplicarse.

57. La función $f(\theta) = \sec \theta \tan \theta$ no es continua en el intervalo $[\pi/3, \pi]$, así que FTC2 no puede aplicarse.

59. $g'(x) = \dfrac{-2(4x^2 - 1)}{4x^2 + 1} + \dfrac{3(9x^2 - 1)}{9x^2 + 1}$

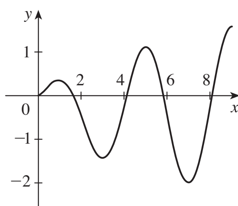
61. $F'(x) = 2xe^{x^4} - e^{x^2}$

63. $y' = \operatorname{sen} x \ln(1 + 2 \cos x) + \cos x \ln(1 + 2 \operatorname{sen} x)$

65. $(-4, 0)$ **67.** $y = e^4x - 2e^4$ **69.** 29

71. (a) $-2\sqrt{n}$, $\sqrt{4n - 2}$, n un entero > 0
(b) $(0, 1)$, $\left(-\sqrt{4n - 1}, -\sqrt{4n - 3}\right)$, y $\left(\sqrt{4n - 1}, \sqrt{4n + 1}\right)$, n un entero > 0 (c) 0.74

73. (a) Máx loc en 1 y 5; mín loc en 3 y 7
(b) $x = 9$
(c) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $(4, 6)$, $(8, 9)$
(d) Véase la gráfica de la derecha.



75. $\frac{7}{10}$ **83.** $f(x) = x^{3/2}$, $a = 9$

85. (b) Gasto promedio en $[0, t]$; minimizar el gasto promedio

EJERCICIOS 5.4 ■ PÁGINA 408

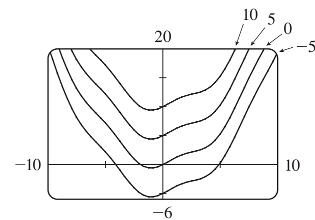
5. $\frac{1}{2.3}x^{2.3} + 2x^{3.5} + C$ **7.** $5x + \frac{2}{9}x^3 + \frac{3}{16}x^4 + C$

9. $\frac{1}{6}v^6 + v^4 + 2v^2 + C$ **11.** $\ln|x| + 2\sqrt{x} + x + C$

13. $-\cot t - 2e^t + C$ **15.** $\theta + \tan \theta + C$

17. $\dfrac{2^t}{\ln 2} + \dfrac{10^t}{\ln 10} + C$

19. $\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x^2 + C$



21. 18 **23.** $\frac{21}{5}$ **25.** -2 **27.** $5e^\pi + 1$ **29.** 36

31. $\frac{55}{63}$ **33.** $\frac{3}{4} - 2 \ln 2$ **35.** $\dfrac{1}{11} + \dfrac{9}{\ln 10}$

37. $1 + \pi/4$ **39.** $\frac{69}{4}$ **41.** $\pi/3$ **43.** $\pi/6$ **45.** -3.5

47. ≈ 1.36 **49.** $\frac{4}{3}$

51. El aumento en el peso del niño (en kilogramos) entre las edades de 5 y 10 años

53. Número de litros de aceite fugado en las primeras 2 horas

55. Aumento en ingresos cuando la producción aumenta de 1000 a 5000 unidades

57. Newtons-metros (o joules) **59.** (a) $-\frac{3}{2}$ m (b) $\frac{41}{6}$ m

61. (a) $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s (b) $416\frac{2}{3}$ m

63. $46\frac{2}{3}$ kg **65.** 1.4 millas **67.** \$58 000 **69.** 1.4 m/s

71. 5443 bacterias **73.** 4.75×10^5 megawatts-horas

EJERCICIOS 5.5 ■ PÁGINA 418

1. $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + C$ **3.** $\frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} + C$

5. $\frac{1}{4} \ln|x^4 - 5| + C$ **7.** $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$

9. $\frac{1}{63}(3x - 2)^{21} + C$ **11.** $(2/\pi) \operatorname{sen}(\pi t/2) + C$

13. $-(1/\pi) \cos \pi t + C$

15. $-\frac{1}{4} \cos^4 \theta + C$ **17.** $\dfrac{1}{1 - e^u} + C$

19. $\frac{2}{3}\sqrt{3ax + bx^3} + C$ **21.** $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **23.** $-\frac{1}{5} \cos^5 \theta + C$

25. $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C$ **27.** $\frac{1}{15}(x^3 + 3x)^5 + C$

29. $-\dfrac{1}{\ln 5} \cos(5^t) + C$ **31.** $\frac{1}{3}(\arctan x)^3 + C$

33. $\frac{1}{5} \operatorname{sen}(1 + 5t) + C$ **35.** $-\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2} + C$

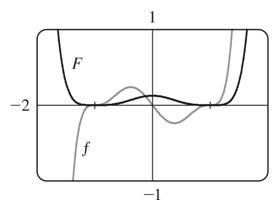
37. $\frac{1}{3} \operatorname{senh}^3 x + C$ **39.** $-\ln(1 + \cos^2 x) + C$

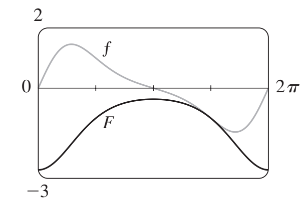
41. $\ln|\operatorname{sen} x| + C$ **43.** $\ln|\operatorname{sen}^{-1} x| + C$

45. $\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

47. $\frac{1}{40}(2x + 5)^{10} - \frac{5}{36}(2x + 5)^9 + C$

49. $\frac{1}{8}(x^2 - 1)^4 + C$ **51.** $-e^{\cos x} + C$





53. $2/\pi$ **55.** $\frac{45}{28}$ **57.** $2/\sqrt{3} - 1$ **59.** $e - \sqrt{e}$

61. 0 **63.** 3 **65.** $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)a^3$ **67.** $\frac{16}{15}$ **69.** 2

71. $\ln(e + 1)$ **73.** $\frac{1}{6}$ **75.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$ **77.** 6π

79. Las tres áreas son iguales. **81.** ≈ 4512 L

83. $\dfrac{5}{4\pi}\left(1 - \cos \dfrac{2\pi t}{5}\right)$ L

85. $C_0(1 - e^{-30r/V})$; la cantidad total de urea separada de la sangre en los primeros 30 minutos de tratamiento de diálisis
87. 5 **93.** $\pi^2/4$

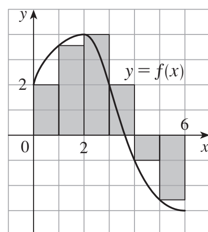
REPASO DEL CAPÍTULO 5 ■ PÁGINA 421

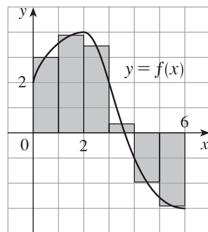
Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Falso
17. Falso

Ejercicios

1. (a) 8 (b) 5.7





3. $\frac{1}{2} + \pi/4$ **5.** 5 **7.** f es c, f' es b, $\int_0^x f(t)\,dt$ es a
9. 3, 0 **11.** 37 **13.** $\frac{3}{4}$ **15.** -76 **17.** $\frac{21}{4}$
19. No existe **21.** $\frac{1}{3}$ sen 1 **23.** 0
25. $-(1/x) - 2\ln|x| + x + C$
27. $\sqrt{x^2 + 4x} + C$ **29.** $[1/(2\pi)]\,\text{sen}^2\pi t + C$
31. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **33.** $-\frac{1}{2}[\ln(\cos x)]^2 + C$
35. $\frac{1}{4}\ln(1 + x^4) + C$ **37.** $\ln|1 + \sec\theta| + C$ **39.** $\frac{23}{3}$
41. $2\sqrt{1 + \text{sen}\,x} + C$ **43.** $\frac{64}{5}$ **45.** $F'(x) = x^2/(1 + x^3)$
47. $g'(x) = 4x^3\cos(x^8)$ **49.** $y' = (2e^x - e^{\sqrt{x}})/(2x)$
51. $4 \leqslant \int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx \leqslant 4\sqrt{3}$ **57.** 0.280981
59. Número de barriles de petróleo consumidos del 1º de enero de 2000 al 1º de enero de 2008
61. 72,400 **63.** 3 **65.** $c \approx 1.62$
67. $f(x) = e^{2x}(2x - 1)/(1 - e^{-x})$ **73.** $\frac{2}{3}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 425

1. $\pi/2$ **3.** $2k$ **5.** -1 **7.** e^{-2} **9.** $[-1, 2]$
11. (a) $\frac{1}{2}(n - 1)n$
(b) $\frac{1}{2}[\![b]\!](2b - [\![b]\!] - 1) - \frac{1}{2}[\![a]\!](2a - [\![a]\!] - 1)$
17. $y = -\dfrac{2b}{a^2}x^2 + \dfrac{3b}{a}x$ **19.** $2(\sqrt{2} - 1)$

CAPÍTULO 6

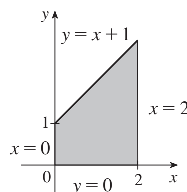
EJERCICIOS 6.1 ■ PÁGINA 434

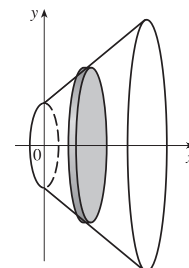
1. $\frac{45}{4} - \ln 8$ **3.** $e - (1/e) + \frac{10}{3}$ **5.** $\frac{1}{6}$ **7.** $\frac{9}{2}$
9. $\ln 2 - \frac{1}{2}$ **11.** $\frac{8}{3}$ **13.** 72 **15.** $6\sqrt{3}$ **17.** $\frac{32}{3}$
19. $2/\pi + \frac{2}{3}$ **21.** $2 - 2\ln 2$ **23.** $\frac{47}{3} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{12}$ **25.** $\frac{13}{5}$
27. $\frac{59}{12}$ **29.** (a) 39 (b) 15 **31.** $\frac{1}{6}\ln 2$
33. $\frac{27}{2}$ **35.** $\frac{44}{3} - 4\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$
37. 0, 0.90; 0.04 **39.** -1.11, 1.25, 2.86; 8.38
41. 2.80123 **43.** 0.25142 **45.** $12\sqrt{6} - 9$
47. 36 m **49.** 4232 cm^2

51. (a) Decimosegundo ($t \approx 11.26$) (b) Decimoctavo ($t \approx 17.18$)
(c) 706
53. (a) Automóvil A (b) La distancia por la cual A aventaja a B después de 1 minuto (c) Automóvil A (d) $t \approx 2.2$ min
55. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ **57.** $4^{2/3}$ **59.** ± 6
61. $0 < m < 1$; $m - \ln m - 1$

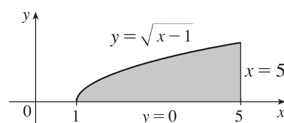
EJERCICIOS 6.2 ■ PÁGINA 446

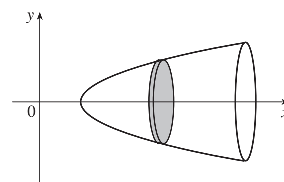
1. $26\pi/3$



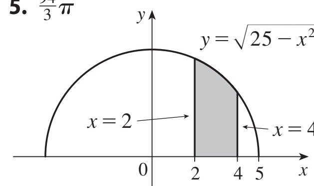


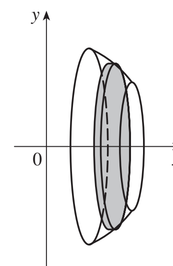
3. 8π



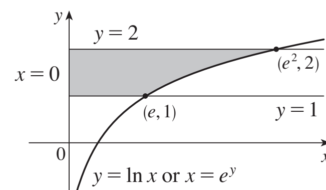


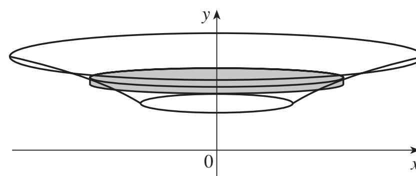
5. $\frac{94}{3}\pi$



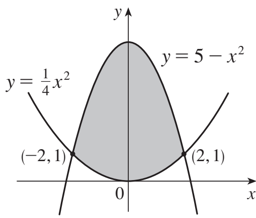


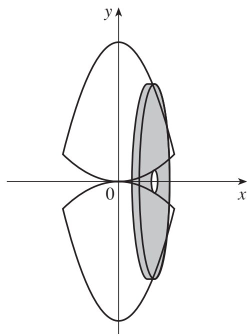
7. $\dfrac{\pi}{2}(e^4 - e^2)$



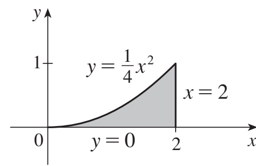


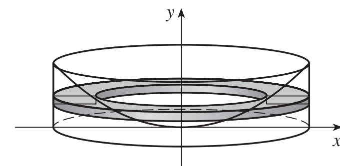
9. $\frac{176}{3}\pi$



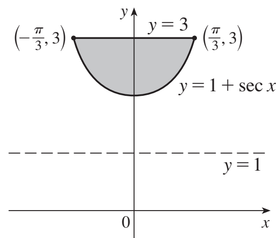


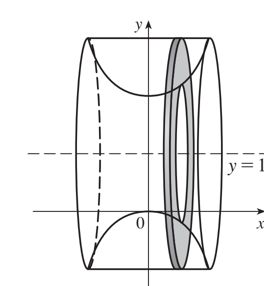
11. 2π



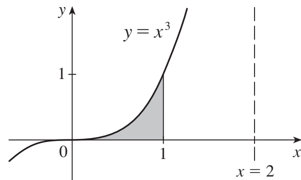


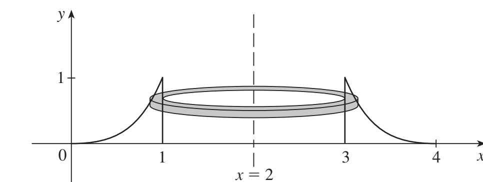
13. $2\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$



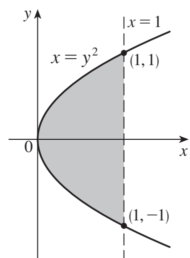


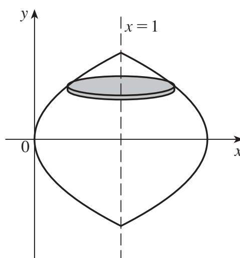
15. $2\pi/5$





17. $16\pi/15$





19. $\pi/3$ **21.** $\pi/3$ **23.** $\pi/3$

25. $13\pi/45$ **27.** $\pi/3$ **29.** $17\pi/45$

31. (a) $2\pi\int_0^1 e^{-2x^2}\,dx \approx 3.75825$

(b) $2\pi\int_0^1 \left(e^{-2x^2} + 2e^{-x^2}\right)dx \approx 13.14312$

33. (a) $2\pi\int_0^2 8\sqrt{1 - x^2/4}\;dx \approx 78.95684$

(b) $2\pi\int_0^1 8\sqrt{4 - 4y^2}\;dy \approx 78.95684$

35. $-4.091, -1.467, 1.091; 89.023$ **37.** $\frac{11}{8}\pi^2$

39. Sólido obtenido rotando la región $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{\text{sen}\, x}$ alrededor del eje x

41. Sólido obtenido rotando la región arriba del eje x acotada por $x = y^2$ y $x = y^4$ alrededor del eje y

43. $1110\ \text{cm}^3$ **45.** (a) 196 (b) 838

47. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ **49.** $\pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)$ **51.** $\frac{2}{3}b^2 h$

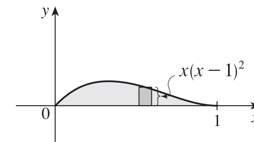
53. $10\ \text{cm}^3$ **55.** 24 **57.** $\frac{1}{3}$ **59.** $\frac{8}{15}$ **61.** $4\pi/15$

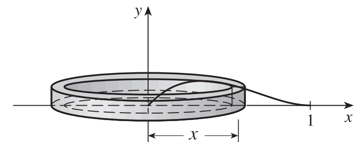
63. (a) $8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,dy$ (b) $2\pi^2 r^2 R$

65. (b) $\pi r^2 h$ **67.** $\frac{5}{12}\pi r^3$ **69.** $8\int_0^r \sqrt{R^2 - y^2}\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$

EJERCICIOS 6.3 ■ PÁGINA 453

1. Circunferencia $= 2\pi x$, altura $= x(x-1)^2$; $\pi/15$





3. 2π **5.** $\pi(1 - 1/e)$ **7.** 8π

9. $768\pi/7$ **11.** 192π **13.** $16\pi/3$

15. $264\pi/5$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $13\pi/3$

21. (a) $2\pi\int_0^2 x^2 e^{-x}\,dx$ (b) 4.06300

23. (a) $4\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\pi - x)\cos^4 x\,dx$ (b) 46.50942

25. (a) $\int_0^\pi 2\pi(4 - y)\sqrt{\text{sen}\, y}\,dy$ (b) 36.57476

27. 3.68

29. Sólido obtenido rotando la región $0 \leqslant y \leqslant x^4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$ alrededor del eje y

31. Sólido obtenido (usando proyectiles) rotando la región $0 \leqslant x \leqslant 1/y^2$, $1 \leqslant y \leqslant 4$ alrededor de la recta $y = -2$

33. $0, 2.175; 14.450$ **35.** $\frac{1}{32}\pi^3$ **37.** 8π

39. $4\sqrt{3}\,\pi$ **41.** $4\pi/3$

43. $117\pi/5$ **45.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **47.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

EJERCICIOS 6.4 ■ PÁGINA 458

1. (a) 7200 pies-lb (b) 7200 pies-lb

3. 9 pies-lb **5.** 180 J **7.** $\frac{15}{4}$ pies-lb

9. (a) $\frac{25}{24} \approx 1.04$ J (b) 10.8 cm **11.** $W_2 = 3W_1$

13. (a) 625 pies-lb (b) $\frac{1875}{4}$ pies-lb **15.** 650 000 pies-lb

17. 3857 J **19.** 62.5 pies-lb **21.** 2450 J

23. $\approx 1.06 \times 10^6$ J **25.** $\approx 1.04 \times 10^5$ pies-lb **27.** 2.0 m

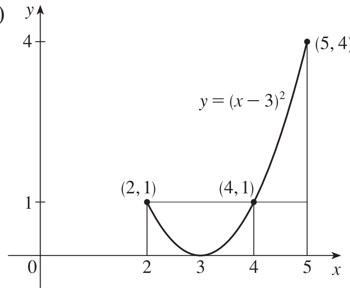
31. (b) $161.\overline{3}$ pies-lb

33. (a) $Gm_1 m_2\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ (b) $\approx 8.50 \times 10^9$ J

EJERCICIOS 6.5 ■ PÁGINA 463

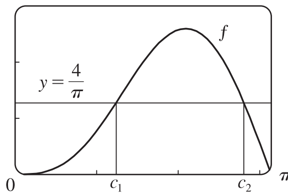
1. 7 **3.** $6/\pi$ **5.** $\frac{1}{10}(1 - e^{-25})$ **7.** $2/(5\pi)$

9. (a) 1 (b) 2, 4 (c)



11. (a) $4/\pi$ (b) $\approx 1.24, 2.81$

(c)



15. $\frac{9}{8}$ **17.** $(20 + 12/\pi)°\text{C} \approx 24°\text{C}$ **19.** 6 kg/m

21. Alrededor de 4056 millones (o 4 mil millones) de personas

23. $5/(4\pi) \approx 0.4$ L

REPASO DEL CAPÍTULO 6 ■ PÁGINA 466

Ejercicios

1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{4}{3}$ **5.** $\frac{4}{3} + 4/\pi$ **7.** $64\pi/15$ **9.** $1656\pi/5$

11. $\frac{4}{3}\pi(2ah + h^2)^{3/2}$ **13.** $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\pi(\pi/2 - x)\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right) dx$

15. (a) $2\pi/15$ (b) $\pi/6$ (c) $8\pi/15$

17. (a) 0.38 (b) 0.87

19. Sólido obtenido rotando la región $0 \leq y \leq \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$ alrededor del eje y

21. Sólido obtenido rotando la región $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 2 - \operatorname{sen} x$ alrededor del eje x

23. 36 **25.** $\frac{125}{3}\sqrt{3}$ m^3 **27.** 3.2 J

29. (a) $8000\pi/3 \approx 8378$ pies-lb (b) 2.1 pies

31. $4/\pi$ **33.** $f(x)$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 468

1. (a) $f(t) = 3t^2$ (b) $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$ **3.** $\frac{32}{27}$

5. (b) 0.2261 (c) 0.6736 m

(d) (i) $3/(119\pi) \approx 0.008$ cm/s (ii) $1664\pi/9$ s ≈ 9.7 min

9. $y = \frac{32}{9}x^2$

11. (a) $V = \int_0^h \pi[f(y)]^2\, dy$

(c) $f(y) = \sqrt{kA/(\pi C)}\, y^{1/4}$. Ventaja: las marcas en el contenedor están igualmente espaciadas.

13. $b = 2a$ **15.** $B = 16A$

CAPÍTULO 7

EJERCICIOS 7.1 ■ PÁGINA 476

1. $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$ **3.** $\frac{1}{5}x \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$

5. $2(r - 2)e^{r/2} + C$

7. $(x^2 + 2x)\operatorname{sen} x + (2x + 2)\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$

9. $x\cos^{-1}x - \sqrt{1 - x^2} + C$ **11.** $\frac{1}{5}t^5 \ln t - \frac{1}{25}t^5 + C$

13. $-t\cot t + \ln|\operatorname{sen} t| + C$

15. $x\ln\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x + C$

17. $t\arctan 4t - \frac{1}{8}\ln(1 + 16t^2) + C$

19. $z^3e^z - 3z^2e^z + 6ze^z - 6e^z + C$

21. $\dfrac{e^{2x}}{4(2x + 1)} + C$ **23.** $\dfrac{\pi - 2}{2\pi^2}$

25. $2\cosh 2 - \operatorname{senh} 2$ **27.** $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\ln 5$ **29.** $-\pi/4$

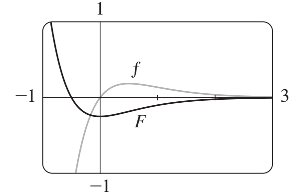
31. $2e^{-1} - 6e^{-5}$ **33.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$

35. $\frac{1}{6}\left(\pi + 6 - 3\sqrt{3}\right)$

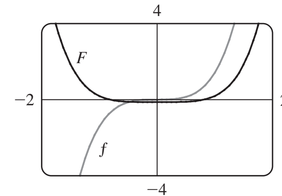
37. $2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$ **39.** $-\frac{1}{2} - \pi/4$

41. $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(1 + x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C$

43. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$



45. $\frac{1}{3}x^2(1 + x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1 + x^2)^{5/2} + C$



47. (b) $-\frac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x + C$

49. (b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$

55. $x[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 6] + C$

57. $\frac{16}{3}\ln 2 - \frac{29}{9}$ **59.** $-1.75119, 1.17210; 3.99926$

61. $4 - 8/\pi$ **63.** $2\pi e$

65. (a) $2\pi\left(2\ln 2 - \frac{3}{4}\right)$ (b) $2\pi[(\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1]$

67. $x\,S(x) + \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{1}{2}\pi x^2\right) + C$

69. $2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ **71.** 2

EJERCICIOS 7.2 ■ PÁGINA 484

1. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **3.** $\frac{1}{120}$

5. $-\frac{1}{14}\cos^7(2t) + \frac{1}{5}\cos^5(2t) - \frac{1}{6}\cos^3(2t) + C$

7. $\pi/4$ **9.** $3\pi/8$ **11.** $\pi/16$

13. $\frac{2}{7}(\cos\theta)^{7/2} - \frac{2}{3}(\cos\theta)^{3/2} + C$

15. $\ln|\operatorname{sen} x| - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ **17.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^4 x + C$

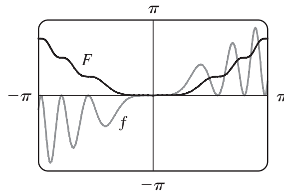
19. $\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{8}\cos 2t + C$ **21.** $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$

23. $\tan x - x + C$ **25.** $\frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{2}{7}\tan^7 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$

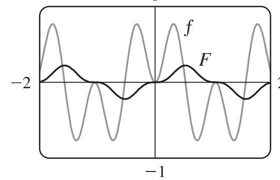
27. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$ **29.** $\frac{1}{8}\tan^8 x + \frac{1}{3}\tan^6 x + \frac{1}{4}\tan^4 x + C$

31. $\frac{1}{4}\sec^4 x - \tan^2 x + \ln|\sec x| + C$

33. $x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$ **35.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$
37. $\frac{22}{105}\sqrt{2} - \frac{8}{105}$ **39.** $\ln|\csc x - \cot x| + C$
41. $-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{26}\cos 13x + C$ **43.** $\frac{1}{15}$
45. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **47.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$
49. $x \tan x - \ln|\sec x| - \frac{1}{2}x^2 + C$
51. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2) + C$



53. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{18}\operatorname{sen} 9x + C$



55. 0 **57.** $\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}$ **59.** 0 **61.** $\pi^2/4$
63. $\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{5}{2}\right)$ **65.** $s = (1 - \cos^3\omega t)/(3\omega)$

EJERCICIOS 7.3 ■ PÁGINA 491

1. $\sqrt{x^2 - 9}/(9x) + C$ **3.** $\frac{1}{3}(x^2 - 18)\sqrt{x^2 + 9} + C$

5. $\dfrac{1}{3}\dfrac{(x^2 - 1)^{3/2}}{x^3} + C$ **7.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}a^2}$

9. $\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$ **11.** $\frac{1}{12}$
13. $\frac{1}{6}\sec^{-1}(x/3) - \sqrt{x^2 - 9}/(2x^2) + C$
15. $\frac{1}{16}\pi a^4$ **17.** $\sqrt{x^2 - 7} + C$
19. $\ln\left|\left(\sqrt{1 + x^2} - 1\right)/x\right| + \sqrt{1 + x^2} + C$ **21.** $\frac{9}{500}\pi$
23. $\ln\left|\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x + 1\right| + C$

25. $4\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{2}\right) + \dfrac{1}{4}(x - 1)^3\sqrt{3 + 2x - x^2}$
$- \frac{2}{3}(3 + 2x - x^2)^{3/2} + C$

27. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}((x - 2)/3) + \frac{1}{2}(x - 2)\sqrt{5 + 4x - x^2} + C$
29. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(x^2) + \frac{1}{4}x^2\sqrt{1 - x^4} + C$
33. $\frac{1}{6}\left(\sqrt{48} - \sec^{-1} 7\right)$ **37.** $\frac{3}{8}\pi^2 + \frac{3}{4}\pi$
41. $2\pi^2 R r^2$ **43.** $r\sqrt{R^2 - r^2} + \pi r^2/2 - R^2 \operatorname{arcsen}(r/R)$

EJERCICIOS 7.4 ■ PÁGINA 501

1. (a) $\dfrac{A}{1 + 2x} + \dfrac{B}{3 - x}$ (b) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{1 + x}$

3. (a) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx + D}{1 + x^2}$ (b) $1 + \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 1} + \dfrac{C}{x - 2}$

5. (a) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{Dx + E}{x^2 + 4}$

(b) $\dfrac{A}{x + 3} + \dfrac{B}{(x + 3)^2} + \dfrac{C}{x - 3} + \dfrac{D}{(x - 3)^2}$

7. $x + 6\ln|x - 6| + C$

9. $2\ln|x + 5| - \ln|x - 2| + C$ **11.** $2\ln\frac{3}{2}$
13. $\frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$ **15.** $\frac{5}{2} - \ln 2 - \ln 3$ $\left(\text{o } \frac{5}{2} - \ln 6\right)$
17. $\frac{27}{5}\ln 2 - \frac{9}{5}\ln 3$ $\left(\text{o } \frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}\right)$
19. $\frac{1}{2} - 5\ln 2 + 3\ln 3$ $\left(\text{o } \frac{1}{2} + \ln\frac{27}{32}\right)$

21. $\dfrac{1}{4}\left[\ln|t + 1| - \dfrac{1}{t + 1} - \ln|t - 1| - \dfrac{1}{t - 1}\right] + C$

23. $\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3}\tan^{-1}(x/3) + C$
25. $-2\ln|x + 1| + \ln(x^2 + 1) + 2\tan^{-1}x + C$

27. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

29. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x + 1}{2}\right) + C$

31. $\frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$

33. $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{3}$

35. $2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \dfrac{x}{2(x^2 + 1)} + C$

37. $\frac{7}{8}\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x - 2}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{3x - 8}{4(x^2 - 4x + 6)} + C$

39. $2\tan^{-1}\sqrt{x - 1} + C$

41. $-2\ln\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln\left(\sqrt{x} + 1\right) + C$

43. $\frac{3}{10}(x^2 + 1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2 + 1)^{2/3} + C$
45. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C$

47. $\ln\left[\dfrac{(e^x + 2)^2}{(e^x + 1)}\right] + C$

49. $\ln|\tan t + 1| - \ln|\tan t + 2| + C$
51. $x - \ln(e^x + 1) + C$

53. $\left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(x^2 - x + 2) - 2x + \sqrt{7}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x - 1}{\sqrt{7}}\right) + C$

55. $-\frac{1}{2}\ln 3 \approx -0.55$

57. $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x - 2}{x}\right| + C$ **61.** $\frac{1}{5}\ln\left|\dfrac{2\tan(x/2) - 1}{\tan(x/2) + 2}\right| + C$

63. $4\ln\frac{2}{3} + 2$ **65.** $-1 + \frac{11}{3}\ln 2$

67. $t = \ln\dfrac{10\,000}{P} + 11\ln\dfrac{P - 9000}{1000}$

69. (a) $\dfrac{24\,110}{4879}\dfrac{1}{5x + 2} - \dfrac{668}{323}\dfrac{1}{2x + 1} - \dfrac{9438}{80\,155}\dfrac{1}{3x - 7}$
$+ \dfrac{1}{260\,015}\dfrac{22\,098x + 48\,935}{x^2 + x + 5}$

(b) $\dfrac{4822}{4879}\ln|5x + 2| - \dfrac{334}{323}\ln|2x + 1|$
$- \dfrac{3146}{80\,155}\ln|3x - 7|$
$+ \dfrac{11\,049}{260\,015}\ln(x^2 + x + 5) + \dfrac{75\,772}{260\,015\sqrt{19}}\tan^{-1}\dfrac{2x + 1}{\sqrt{19}} + C$

El SAC omite los signos de valor absoluto y la constante de integración.

75. $\dfrac{1}{a^n(x - a)} - \dfrac{1}{a^n x} - \dfrac{1}{a^{n-1}x^2} - \cdots - \dfrac{1}{ax^n}$

EJERCICIOS 7.5 ■ PÁGINA 507

1. $-\ln(1 - \operatorname{sen} x) + C$ **3.** $\frac{32}{3}\ln 2 - \frac{28}{9}$

5. $4 - \ln 9$ **7.** $e^{\pi/4} - e^{-\pi/4}$

9. $\frac{4}{5}\ln 2 + \frac{1}{5}\ln 3$ $\left(\text{o } \frac{1}{5}\ln 48\right)$ **11.** $\frac{1}{2}\sec^{-1}x + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + C$

13. $x/\sqrt{1-x^2} + C$

15. $x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$

17. $\frac{1}{4}\pi^2$ **19.** $e^{e^x} + C$ **21.** $(x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

23. $3x + \frac{23}{3}\ln|x-4| - \frac{5}{3}\ln|x+2| + C$

25. $4 - \ln 4$ **27.** $x - \ln(1 + e^x) + C$

29. $x\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) - \sqrt{x^2-1} + C$

31. $\operatorname{sen}^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$

33. $\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 8x + C$

35. 0 **37.** $\frac{1}{4}$ **39.** $\ln|\sec\theta - 1| - \ln|\sec\theta| + C$

41. $\theta\tan\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \ln|\sec\theta| + C$ **43.** $\frac{2}{3}\tan^{-1}(x^{3/2}) + C$

45. $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3} + C$

47. $\ln|x-1| - 3(x-1)^{-1} - \frac{3}{2}(x-1)^{-2} - \frac{1}{3}(x-1)^{-3} + C$

49. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right| + C$ **51.** $-\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+1}{2x}\right| + C$

53. $\dfrac{1}{m}x^2\cosh mx - \dfrac{2}{m^2}x\operatorname{senh} mx + \dfrac{2}{m^3}\cosh mx + C$

55. $2\ln\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$

57. $\frac{3}{7}(x+c)^{7/3} - \frac{3}{4}c(x+c)^{4/3} + C$

59. $\dfrac{1}{32}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| - \dfrac{1}{16}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

61. $\csc\theta - \cot\theta + C$ o $\tan(\theta/2) + C$

63. $2\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right)e^{\sqrt{x}} + C$

65. $-\tan^{-1}(\cos^2 x) + C$ **67.** $\frac{2}{3}[(x+1)^{3/2} - x^{3/2}] + C$

69. $\sqrt{2} - 2/\sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

71. $e^x - \ln(1+e^x) + C$

73. $-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2 + C$ **75.** $\ln|\ln x - 1| + C$

77. $2(x-2)\sqrt{1+e^x} + 2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1} + C$

79. $\frac{1}{3}x\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{9}\cos^3 x + C$

81. $2\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + C$ **83.** $xe^{x^2} + C$

EJERCICIOS 7.6 ■ PÁGINA 512

1. $-\frac{5}{21}$ **3.** $\sqrt{13} - \frac{3}{4}\ln\left(4+\sqrt{13}\right) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\ln 3$

5. $\pi/4$ **7.** $\frac{1}{6}\ln\left|\dfrac{\operatorname{sen} x - 3}{\operatorname{sen} x + 3}\right| + C$

9. $-\dfrac{\sqrt{9x^2+4}}{x} + 3\ln\left(3x + \sqrt{9x^2+4}\right) + C$

11. $5\pi/16$ **13.** $2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \ln(1+x) + C$

15. $-\ln|\operatorname{senh}(1/y)| + C$

17. $\dfrac{2y-1}{8}\sqrt{6+4y-4y^2} + \dfrac{7}{8}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2y-1}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{12}(6+4y-4y^2)^{3/2} + C$

19. $\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x\,[3\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + C$

21. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{e^x+\sqrt{3}}{e^x-\sqrt{3}}\right| + C$

23. $\frac{1}{4}\tan x\sec^3 x + \frac{3}{8}\tan x\sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

25. $\frac{1}{2}(\ln x)\sqrt{4+(\ln x)^2} + 2\ln\left[\ln x + \sqrt{4+(\ln x)^2}\right] + C$

27. $-\frac{1}{2}x^{-2}\cos^{-1}(x^{-2}) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^{-4}} + C$

29. $\sqrt{e^{2x}-1} - \cos^{-1}(e^{-x}) + C$

31. $\frac{1}{5}\ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10}-2}\right| + C$ **33.** $\frac{3}{8}\pi^2$

37. $\frac{1}{3}\tan x\sec^2 x + \frac{2}{3}\tan x + C$

39. $\frac{1}{4}x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left(\sqrt{x^2+4}+x\right) + C$

41. $\frac{1}{4}\cos^3 x\operatorname{sen} x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x + C$

43. $-\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{4}\tan^4 x + C$

45. (a) $-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$;
ambos tienen dominio $(-1, 0) \cup (0, 1)$

EJERCICIOS 7.7 ■ PÁGINA 524

1. (a) $L_2 = 6, R_2 = 12, M_2 \approx 9.6$
(b) L_2 es una subestimación; R_2 y M_2 son sobreestimaciones.
(c) $T_2 = 9 < I$ (d) $L_n < T_n < I < M_n < R_n$

3. (a) $T_4 \approx 0.895759$ (subestimación)
(b) $M_4 \approx 0.908907$ (sobreestimación); $T_4 < I < M_4$

5. (a) 5.932957, $E_M \approx -0.063353$
(b) 5.869247, $E_S \approx 0.000357$

7. (a) 1.506361 (b) 1.518362 (c) 1.511519

9. (a) 2.591334 (b) 2.681046 (c) 2.631976

11. (a) −7.276910 (b) −4.818251 (c) −5.605350

13. (a) −2.364034 (b) −2.310690 (c) −2.346520

15. (a) 0.243747 (b) 0.243748 (c) 0.243751

17. (a) 8.814278 (b) 8.799212 (c) 8.804229

19. (a) $T_8 \approx 0.902333, M_8 \approx 0.905620$
(b) $|E_T| \leqslant 0.0078, |E_M| \leqslant 0.0039$
(c) $n = 71$ para T_n, $n = 50$ para M_n

21. (a) $T_{10} \approx 1.983524, E_T \approx 0.016476$;
$M_{10} \approx 2.008248, E_M \approx -0.008248$;
$S_{10} \approx 2.000110, E_S \approx -0.000110$
(b) $|E_T| \leqslant 0.025839, |E_M| \leqslant 0.012919, |E_S| \leqslant 0.000170$
(c) $n = 509$ para T_n, $n = 360$ para M_n, $n = 22$ para S_n

23. (a) 2.8 (b) 7.954926518 (c) 0.2894
(d) 7.954926521 (e) El error real es mucho menor.
(f) 10.9 (g) 7.953789422 (h) 0.0593
(i) El error real es menor. (j) $n \geqslant 50$

25.

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.742943	1.286599	1.014771	0.992621
10	0.867782	1.139610	1.003696	0.998152
20	0.932967	1.068881	1.000924	0.999538

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	0.257057	−0.286599	−0.014771	0.007379
10	0.132218	−0.139610	−0.003696	0.001848
20	0.067033	−0.068881	−0.000924	0.000462

Las observaciones son las mismas que están después del ejemplo 1.

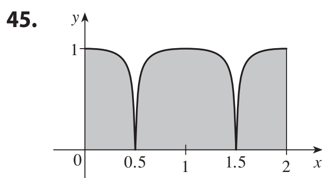
27.

n	T_n	M_n	S_n
6	6.695473	6.252572	6.403292
12	6.474023	6.363008	6.400206

n	E_T	E_M	E_S
6	−0.295473	0.147428	−0.003292
12	−0.074023	0.036992	−0.000206

Las observaciones son las mismas que están después del ejemplo 1.

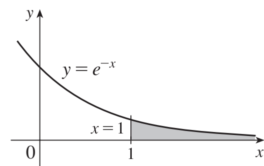
29. (a) 19 (b) 18.6 (c) $18.\overline{6}$
31. (a) 14.4 (b) $\frac{1}{2}$
33. 70.8°F **35.** 18.8 m/s
37. 1.0337×10^5 megawatts-horas
39. (a) 190 (b) 828
41. 28 **43.** 59.4
45.

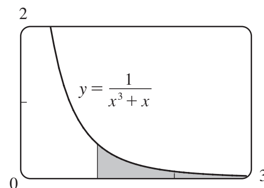


EJERCICIOS 7.8 ■ PÁGINA 534

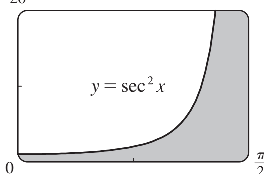
Abreviaturas: C, convergente; D, divergente

1. (a), (d), Discontinuidad infinita (b), (c) Intervalo infinito
3. $\frac{1}{2} - 1/(2t^2)$; 0.495, 0.49995, 0.4999995; 0.5
5. 2 **7.** D **9.** $\frac{1}{5}e^{-10}$ **11.** D **13.** 0 **15.** D
17. D **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\pi/9$ **23.** $-\pi/8$ **25.** 2 **27.** D
29. D **31.** D **33.** D **35.** D **37.** $-\frac{1}{4}$ **39.** $-2/e$
41. $1/e$ **43.** $\frac{1}{2}\ln 2$





45. Área infinita

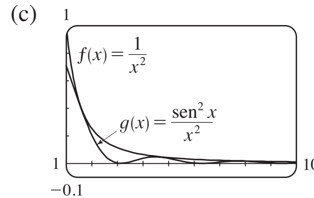


47. (a)

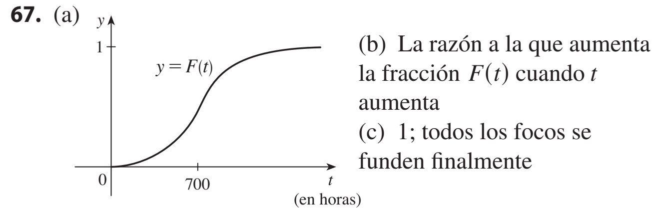
t	$\int_1^t [(\text{sen}^2 x)/x^2]\,dx$
2	0.447453
5	0.577101
10	0.621306
100	0.668479
1,000	0.672957
10,000	0.673407

Parece que la integral es convergente.

(c)



49. C **51.** D **53.** D **55.** π **57.** $p < 1$, $1/(1-p)$
59. $p > -1$, $-1/(p+1)^2$ **63.** π **65.** $\sqrt{2GM/R}$
67. (a)



(b) La razón a la que aumenta la fracción $F(t)$ cuando t aumenta
(c) 1; todos los focos se funden finalmente

69. $\gamma = \dfrac{cN}{\lambda(k + \lambda)}$ **71.** 1000
73. (a) $F(s) = 1/s$, $s > 0$ (b) $F(s) = 1/(s-1)$, $s > 1$
(c) $F(s) = 1/s^2$, $s > 0$
79. $C = 1$; $\ln 2$ **81.** No

REPASO DEL CAPÍTULO 7 ■ PÁGINA 537

Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso
9. (a) Verdadero (b) Falso **11.** Falso **13.** Falso

Ejercicios

1. $\frac{7}{2} + \ln 2$ **3.** $e^{\text{sen}\, x} + C$ **5.** $e - 1$
7. $\frac{2}{15}$ **9.** $-\cos(\ln t) + C$ **11.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$
13. $3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{2/3} - 2x^{1/3} + 2) + C$
15. $-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$
17. $x \,\text{senh}\, x - \cosh x + C$
19. $x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$
21. $\ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x}\right| + C$
23. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right| + C$
25. $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\tan^{-1}x + \sqrt{2}\tan^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$
27. $\frac{2}{5}$ **29.** 0 **31.** $6 - \frac{3}{2}\pi$
33. $\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} - \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$
35. $4\sqrt{1 + \sqrt{x}} + C$ **37.** $\frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$
39. $\frac{1}{8}e - \frac{1}{4}$ **41.** $\frac{1}{36}$ **43.** D
45. $4\ln 4 - 8$ **47.** $-\frac{4}{3}$ **49.** $\pi/4$
51. $(x+1)\ln(x^2 + 2x + 2) + 2\arctan(x+1) - 2x + C$
53. 0
55. $\frac{1}{4}(2x - 1)\sqrt{4x^2 - 4x - 3} - \ln\left|2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3}\right| + C$
57. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\, x\sqrt{4 + \text{sen}^2 x} + 2\ln\left(\text{sen}\, x + \sqrt{4 + \text{sen}^2 x}\right) + C$
61. No
63. (a) 1.925444 (b) 1.920915 (c) 1.922470
65. (a) 0.01348, $n \geqslant 368$ (b) 0.00674, $n \geqslant 260$

67. 13.7 km
69. (a) 3.8 (b) 1.7867, 0.000646 (c) $n \geqslant 30$
71. (a) D (b) C
73. 2 **75.** $\frac{3}{16}\pi^2$

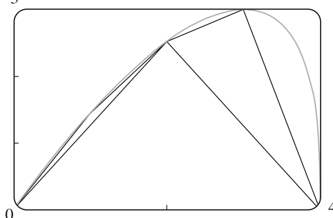
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 541

1. Alrededor de 1.85 pulgadas desde el centro. **3.** 0
7. $f(\pi) = -\pi/2$ **11.** $(b^b a^{-a})^{1/(b-a)} e^{-1}$ **13.** $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{12}$
15. $2 - \text{sen}^{-1}(2/\sqrt{5})$

CAPÍTULO 8

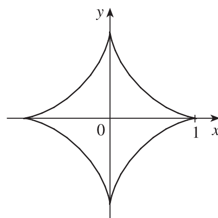
EJERCICIOS 8.1 ■ PÁGINA 548

1. $4\sqrt{5}$ **3.** 3.8202 **5.** 3.4467 **7.** 3.6095
9. $\frac{2}{243}(82\sqrt{82} - 1)$ **11.** $\frac{59}{24}$ **13.** $\frac{1261}{240}$
15. $\ln(\sqrt{2} + 1)$ **17.** $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ **19.** $\ln 3 - \frac{1}{2}$
21. $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ **23.** 10.0556
25. 15.498085; 15.374568 **27.** 7.094570; 7.118819
29. (a), (b)



$L_1 = 4$,
$L_2 \approx 6.43$,
$L_4 \approx 7.50$

(c) $\int_0^4 \sqrt{1 + [4(3 - x)/(3(4 - x)^{2/3})]^2}\, dx$ (d) 7.7988
31. $\sqrt{1 + e^4} - \ln(1 + \sqrt{1 + e^4}) + 2 - \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$
33. 6



35. $s(x) = \frac{2}{27}[(1 + 9x)^{3/2} - 10\sqrt{10}]$ **37.** $2\sqrt{2}(\sqrt{1 + x} - 1)$
41. 209.1 m **43.** 62.55 cm **45.** 12.4

EJERCICIOS 8.2 ■ PÁGINA 555

1. (a) (i) $\int_0^{\pi/3} 2\pi \tan x \sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$
(ii) $\int_0^{\pi/3} 2\pi x \sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$ (b) (i) 10.5017 (ii) 7.9353
3. (a) (i) $\int_{-1}^{1} 2\pi e^{-x^2} \sqrt{1 + 4x^2 e^{-2x^2}}\, dx$
(ii) $\int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2 e^{-2x^2}}\, dx$ (b) (i) 11.0753 (ii) 3.9603
5. (a) (i) $\int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + (1 + 3y^2)^2}\, dy$
(ii) $\int_0^1 2\pi(y + y^3)\sqrt{1 + (1 + 3y^2)^2}\, dy$
(b) (i) 8.5302 (ii) 13.5134
7. $\frac{1}{27}\pi(145\sqrt{145} - 1)$ **9.** $\frac{1}{6}\pi(27\sqrt{27} - 5\sqrt{5})$
11. $\pi\sqrt{5} + 4\pi \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$
13. $2\sqrt{1 + \pi^2} + (2/\pi)\ln(\pi + \sqrt{1 + \pi^2})$ **15.** $\frac{3712}{15}\pi$
17. πa^2 **19.** 9.023754 **21.** 24.145807
23. $\frac{1}{4}\pi[4\ln(\sqrt{17} + 4) - 4\ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{17} + 4\sqrt{2}]$
25. $\frac{1}{6}\pi[\ln(\sqrt{10} + 3) + 3\sqrt{10}]$
29. (a) $\frac{1}{3}\pi a^2$ (b) $\frac{56}{45}\pi\sqrt{3}\, a^2$
31. (a) $2\pi\left[b^2 + \dfrac{a^2 b\, \text{sen}^{-1}(\sqrt{a^2 - b^2}/a)}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right]$
(b) $2\pi a^2 + \dfrac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$
33. $\int_a^b 2\pi[c - f(x)]\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ **35.** $4\pi^2 r^2$
37. Ambos son iguales a $\pi \int_a^b (e^{x/2} + e^{-x/2})^2\, dx$.

EJERCICIOS 8.3 ■ PÁGINA 565

1. (a) 187.5 lb/pies^2 (b) 1875 lb (c) 562.5 lb
3. 7000 lb **5.** 2.36×10^7 N **7.** 6.7×10^4 N
9. 889 lb **11.** $\frac{2}{3}\delta a h^2$ **13.** 5.27×10^5 N
15. (a) 314 N (b) 353 N
17. (a) 4.9×10^4 N (b) $\approx 4.4 \times 10^5$ N
(c) $\approx 4.2 \times 10^5$ N (d) $\approx 3.9 \times 10^6$ N
19. 4148 lb **21.** 330; 22
23. 10; 1; $\left(\frac{1}{21}, \frac{10}{21}\right)$ **25.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
27. $\left(\dfrac{1}{e - 1}, \dfrac{e + 1}{4}\right)$ **29.** $\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$
31. $\left(\dfrac{\pi\sqrt{2} - 4}{4(\sqrt{2} - 1)}, \dfrac{1}{4(\sqrt{2} - 1)}\right)$ **33.** $\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{2}\right)$
35. $\left(\dfrac{28}{3(\pi + 2)}, \dfrac{10}{3(\pi + 2)}\right)$ **37.** $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{35}\right)$
41. $\left(0, \frac{1}{12}\right)$ **45.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ **47.** $\left(\dfrac{8}{\pi}, \dfrac{8}{\pi}\right)$
49. $4\pi^2 rR$

EJERCICIOS 8.4 ■ PÁGINA 572

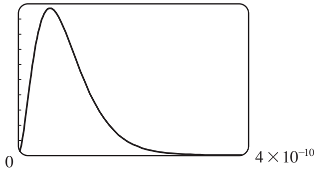
1. \$38 000 **3.** \$140 000; \$60 000 **5.** \$407.25
7. \$166 666.67 **9.** (a) 3800 (b) \$324 900
11. 3727; \$37 753 **13.** $\frac{2}{3}(16\sqrt{2} - 8) \approx$ \$9.75 millones
15. \$65 230.48 **17.** $\dfrac{(1 - k)(b^{2-k} - a^{2-k})}{(2 - k)(b^{1-k} - a^{1-k})}$
19. 1.19×10^{-4} cm^3/s **21.** 6.59 L/min **23.** 5.77 L/min

EJERCICIOS 8.5 ■ PÁGINA 579

1. (a) La probabilidad de que una llanta aleatoriamente seleccionada tenga un período de vida de entre 30 000 y 40 000 millas.
(b) La probabilidad de que una llanta aleatoriamente seleccionada tenga un período de vida de al menos 25 000 millas.
3. (a) $f(x) \geqslant 0$ para todas las x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
(b) $2/e - 3/e^2 \approx 0.33$
5. (a) $1/\pi$ (b) $\frac{1}{2}$
7. (a) $f(x) \geqslant 0$ para todas las x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ (b) 5
11. (a) $\approx$46.5% (b) $\approx$15.3% (c) Alrededor de 4.8 s
13. $\approx$59.4% (b) 40 min **15.** $\approx$36%
17. (a) 0.0668 (b) $\approx$5.21% **19.** $\approx$0.9545

21. (b) 0; a_0

(c)



(d) $1 - 41e^{-8} \approx 0.986$ (e) $\frac{3}{2}a_0$

REPASO DEL CAPÍTULO 8 ■ PÁGINA 581

Ejercicios

1. $\frac{1}{54}(109\sqrt{109} - 1)$ **3.** $\frac{53}{6}$

5. (a) 3.5121 (b) 22.1391 (c) 29.8522

7. 3.8202 **9.** $\frac{124}{5}$ **11.** 6533 N **13.** $\left(\frac{8}{5}, 1\right)$

15. $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ **17.** $2\pi^2$ **19.** \$7166.67

21. (a) $f(x) \geqslant 0$ para todas las x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(b) ≈ 0.3455 (c) 5; sí

23. (a) $1 - e^{-3/8} \approx 0.31$ (b) $e^{-5/4} \approx 0.29$

(c) $8 \ln 2 \approx 5.55$ min

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 583

1. $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3. (a) $2\pi r(r \pm d)$ (b) $\approx 8.69 \times 10^6$ km^2

(d) $\approx 2.03 \times 10^8$ km^2

5. (a) $P(z) = P_0 + g\int_0^z \rho(x)\,dx$

(b) $(P_0 - \rho_0 gH)(\pi r^2) + \rho_0 gHe^{L/H}\int_{-r}^{r} e^{x/H} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

7. Altura $\sqrt{2}\,b$, volumen $\left(\frac{28}{27}\sqrt{6} - 2\right)\pi b^3$ **9.** 0.14 m

11. $2/\pi$; $1/\pi$ **13.** $(0, -1)$

CAPÍTULO 9

EJERCICIOS 9.1 ■ PÁGINA 590

3. (a) $\frac{1}{2}, -1$ **5.** (d)

7. (a) Debe ser de 0 o decreciente

(c) $y = 0$ (d) $y = 1/(x + 2)$

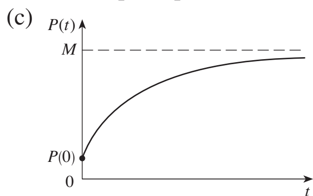
9. (a) $0 < P < 4200$ (b) $P > 4200$

(c) $P = 0, P = 4200$

13. (a) III (b) I (c) IV (d) II

15. (a) Al principio; se mantiene positivo, pero decrece

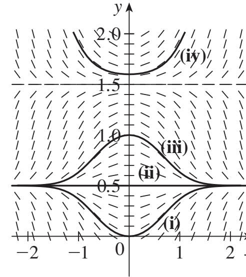
(c)



17. Se aproxima a 0 conforme c se aproxima a c_s.

EJERCICIOS 9.2 ■ PÁGINA 597

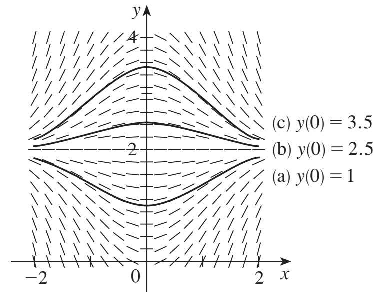
1. (a)



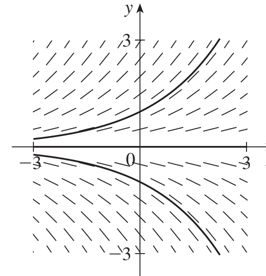
(b) $y = 0.5$, $y = 1.5$

3. III **5.** IV

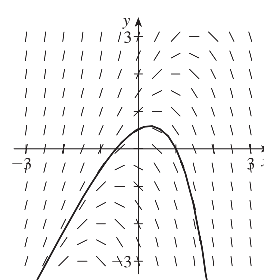
7.



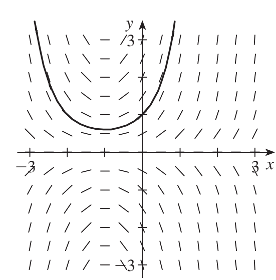
9.



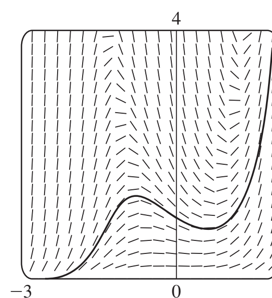
11.



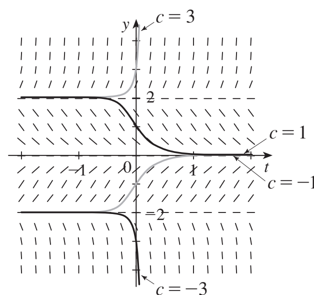
13.



15.

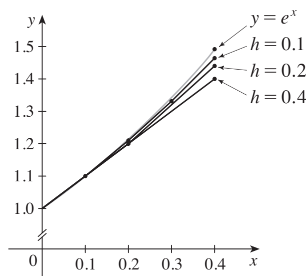


17. $-2 \leqslant c \leqslant 2$; $-2, 0, 2$



19. (a) (i) 1.4 (ii) 1.44 (iii) 1.4641

(b) Subestima



(c) (i) 0.0918 (ii) 0.0518 (iii) 0.0277

Parece que el error también se reduce a la mitad (aproximadamente).

21. 0.7824 **23.** (a) 0.04 (b) 0.06

25. (a) (i) 3 (ii) 2.3928 (iii) 2.3701 (iv) 2.3681

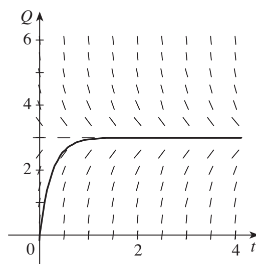
(c) (i) -0.6321 (ii) -0.0249 (iii) -0.0022 (iv) -0.0002

Parece que el error también se divide entre 10 (aproximadamente).

27. (a), (d) (b) 3

(c) Si, $Q = 3$

(e) 2.77 C



EJERCICIOS 9.3 ■ PÁGINA 605

1. $y = -1/(x^3 + C)$, $y = 0$

3. $y = \pm\sqrt{x^2 + 2\ln|x| + C}$

5. $e^y - y = 2x + \operatorname{sen} x + C$

7. $\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + C$ **9.** $e^y(y - 1) = C - \frac{1}{2}e^{-t^2}$

11. $y = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)$ **13.** $y = -\sqrt{x^2 + 9}$

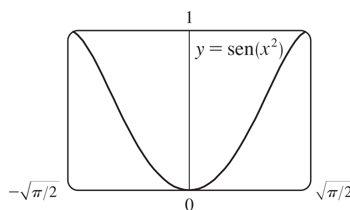
15. $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}(3 + y^2)^{3/2} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{41}{12}$

17. $y = \dfrac{4a}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} x - a$

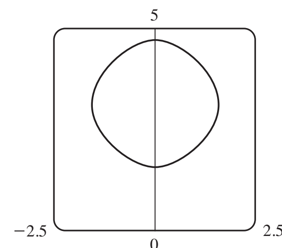
19. $y = \sqrt{x^2 + 4}$ **21.** $y = Ke^x - x - 1$

23. (a) $\operatorname{sen}^{-1} y = x^2 + C$

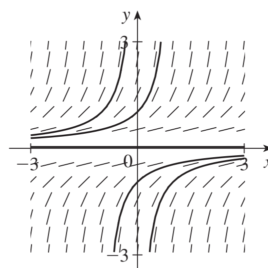
(b) $y = \operatorname{sen}(x^2)$, $-\sqrt{\pi/2} \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi/2}$ (c) No



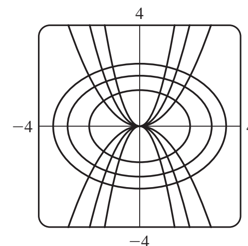
25. $\cos y = \cos x - 1$



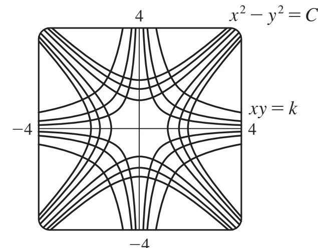
27. (a) (b) $y = \dfrac{1}{K - x}$



29. $y = Cx^2$



31. $x^2 - y^2 = C$



33. $y = 1 + e^{2 - x^2/2}$ **35.** $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)^2$

37. $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$; 3 **39.** $P(t) = M - Me^{-kt}$; M

41. (a) $x = a - \dfrac{4}{(kt + 2/\sqrt{a})^2}$

(b) $t = \dfrac{2}{k\sqrt{a - b}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b}{a - b}} - \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b - x}{a - b}}\right)$

43. (a) $C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k$ (b) r/k; la concentración se aproxima a r/k independientemente del valor de C_0

45. (a) $15e^{-t/100}$ kg (b) $15e^{-0.2} \approx 12.3$ kg

47. Alrededor de 4.9% **49.** g/k

51. (a) $L_1 = KL_2^k$ (b) $B = KV^{0.0794}$

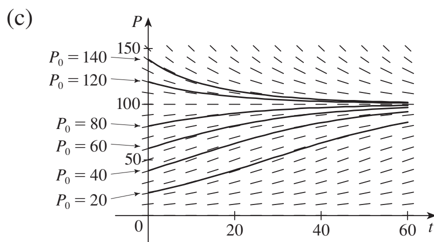
53. (a) $dA/dt = k\sqrt{A}\,(M - A)$ (b) $A(t) = M\left(\dfrac{Ce^{\sqrt{M}\,kt} - 1}{Ce^{\sqrt{M}\,kt} + 1}\right)^2$, donde $C = \dfrac{\sqrt{M} + \sqrt{A_0}}{\sqrt{M} - \sqrt{A_0}}$ y $A_0 = A(0)$

EJERCICIOS 9.4 ■ PÁGINA 617

1. (a) 1200; 0.04 (b) $P(t) = \dfrac{1200}{1 + 19e^{-0.04t}}$ (c) 87

3. (a) 100; 0.05 (b) Donde P está cerca de 0 o 100; en la recta $P = 50$; $0 < P_0 < 100$; $P_0 > 100$

(c)



Las soluciones se aproximan a 100; algunas son crecientes y otras decrecientes, algunas tienen un punto de inflexión pero otras no; las soluciones con $P_0 = 20$ y $P_0 = 40$ tienen puntos de inflexión en $P = 50$

(d) $P = 0$, $P = 100$; otras soluciones se alejan de $P = 0$ y se dirigen a $P = 100$

5. (a) 3.23×10^7 kg (b) ≈ 1.55 años **7.** 9000

9. (a) $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{1}{305}P\left(1 - \dfrac{P}{20}\right)$

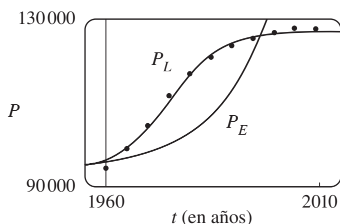
(b) 6.24 miles de millones (c) 7.57 miles de millones; 13.87 miles de millones

11. (a) $dy/dt = ky(1 - y)$ (b) $y = \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-kt}}$

(c) 3:36 PM

15. $P_E(t) = 1909.7761\,(1.0796)^t + 94\,000$;

$P_L(t) = \dfrac{33\,086.4394}{1 + 12.3428\,e^{-0.1657t}} + 94\,000$



17. (a) $P(t) = \dfrac{m}{k} + \left(P_0 - \dfrac{m}{k}\right)e^{kt}$ (b) $m < kP_0$

(c) $m = kP_0$, $m > kP_0$ (d) Decayó

19. (a) Los peces son atrapados a razón de 15 por semana.

(b) Véase el inciso (d). (c) $P = 250$, $P = 750$

(d) $0 < P_0 < 250$: $P \to 0$; $P_0 = 250$: $P \to 250$; $P_0 > 250$: $P \to 750$

(e) $P(t) = \dfrac{250 - 750ke^{t/25}}{1 - ke^{t/25}}$ donde $k = \frac{1}{11}, -\frac{1}{9}$

21. (b) $0 < P_0 < 200$: $P \to 0$; $P_0 = 200$: $P \to 200$; $P_0 > 200$: $P \to 1000$

(c) $P(t) = \dfrac{m(M - P_0) + M(P_0 - m)e^{(M-m)(k/M)t}}{M - P_0 + (P_0 - m)e^{(M-m)(k/M)t}}$

23. (a) $P(t) = P_0 e^{(k/r)[\operatorname{sen}(rt - \phi) + \operatorname{sen}\phi]}$ (b) No existe

EJERCICIOS 9.5 ■ PÁGINA 625

1. No **3.** Sí **5.** $y = x^2 \ln|x| + Cx^2$

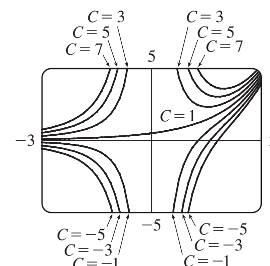
7. $y = x + 1 + Ce^{-x}$ **9.** $y = \dfrac{\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx + C}{\operatorname{sen} x}$

11. $y = x^2(\ln x + C)$ **13.** $y = \frac{1}{3}t^{-3}(1 + t^2)^{3/2} + Ct^{-3}$

15. $y = \dfrac{1}{x}\ln x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}$ **17.** $u = -t^2 + t^3$

19. $y = -x\cos x - x$

21. $y = \dfrac{(x - 1)e^x + C}{x^2}$

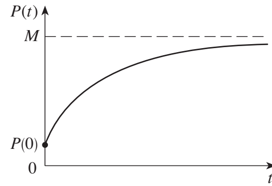


25. $y = \pm\left(Cx^4 + \dfrac{2}{5x}\right)^{-1/2}$

27. (a) $I(t) = 4 - 4e^{-5t}$ (b) $4 - 4e^{-1/2} \approx 1.57$ A

29. $Q(t) = 3(1 - e^{-4t})$, $I(t) = 12e^{-4t}$

31. $P(t) = M + Ce^{-kt}$



33. $y = \frac{2}{5}(100 + 2t) - 40\,000(100 + 2t)^{-3/2}$; 0.2275 kg/L

35. (b) mg/c (c) $(mg/c)[t + (m/c)e^{-ct/m}] - m^2g/c^2$

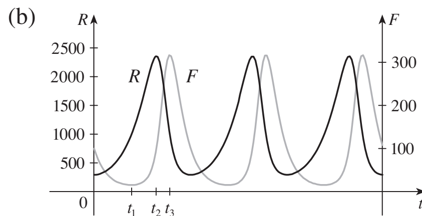
37. (b) $P(t) = \dfrac{M}{1 + MCe^{-kt}}$

EJERCICIOS 9.6 ■ PÁGINA 631

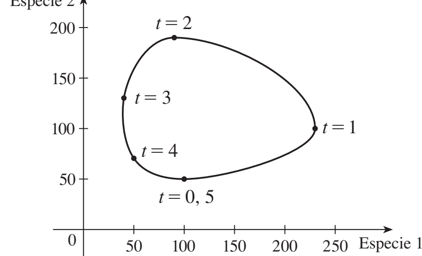
1. (a) x = depredadores, y = presa; el crecimiento es restringido solo por los depredadores, que se alimentan exclusivamente de sus presas.
(b) x = presa, y = depredadores; el crecimiento es restringido por la capacidad de carga y por los predadores, que se alimentan exclusivamente de sus presas.

3. (a) Competencia
(b) (i) $x = 0$, $y = 0$: poblaciones de cero.
(ii) $x = 0$, $y = 400$: en ausencia de una población x, la población y se estabiliza en 400.
(iii) $x = 125$, $y = 0$: en ausencia de una población y, la población x se estabiliza en 125.
(iv) $x = 50$, $y = 300$: ambas poblaciones son estables.

5. (a) La población de conejos comienza en alrededor de 300, aumenta a 2400 y luego vuelve a 300. La población de zorros comienza en 100, se reduce a alrededor de 20, aumenta a alrededor de 315, decrece a 100 y el ciclo vuelve a empezar.
(b)

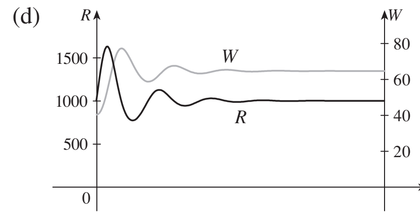


7.



11. (a) La población se estabiliza en 5000.
(b) (i) $W = 0$, $R = 0$: poblaciones de cero
(ii) $W = 0$, $R = 5000$: en ausencia de lobos, la población de conejos es siempre de 5000.
(iii) $W = 64$, $R = 1000$; ambas poblaciones son estables.
(c) Las poblaciones se estabilizan en 1000 conejos y 64 lobos.

(d)



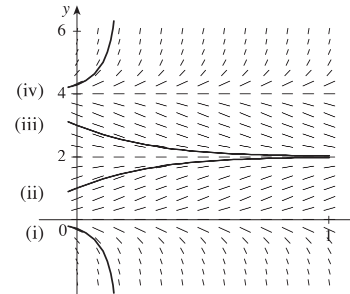
REPASO DEL CAPÍTULO 9 ■ PÁGINA 634

Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Verdadero

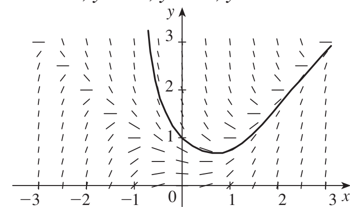
Ejercicios

1. (a)



(b) $0 \leqslant c \leqslant 4$; $y = 0$, $y = 2$, $y = 4$

3. (a) $y(0.3) \approx 0.8$



(b) 0.75676
(c) $y = x$ y $y = -x$; hay un máx loc o mín loc

5. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)e^{-\operatorname{sen} x}$

7. $y = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 2x^{3/2} + C)}$

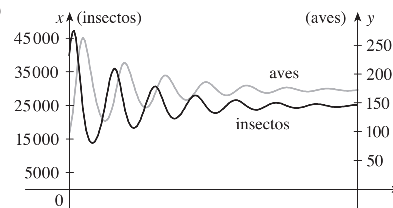
9. $r(t) = 5e^{t - t^2}$ **11.** $y = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + 2x$ **13.** $x = C - \frac{1}{2}y^2$

15. (a) $P(t) = \dfrac{2000}{1 + 19e^{-0.1t}}$; ≈ 560 (b) $t = -10 \ln \frac{2}{57} \approx 33.5$

17. (a) $L(t) = L_\infty - [L_\infty - L(0)]e^{-kt}$ (b) $L(t) = 53 - 43e^{-0.2t}$

19. 15 días **21.** $k \ln h + h = (-R/V)t + C$

23. (a) Se estabiliza en 200 000
(b) (i) $x = 0$, $y = 0$: poblaciones de cero
(ii) $x = 200\,000$, $y = 0$: en ausencia de aves, la población de insectos es siempre de 200 000.
(iii) $x = 25\,000$, $y = 175$: ambas poblaciones son estables.
(c) Las poblaciones se estabilizan en 25 000 insectos y 175 aves.
(d)



PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 637

1. $f(x) = \pm 10e^x$ **5.** $y = x^{1/n}$ **7.** 20 °C

9. (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - L^2}{4L} - \dfrac{L}{2}\ln\left(\dfrac{x}{L}\right)$ (c) No

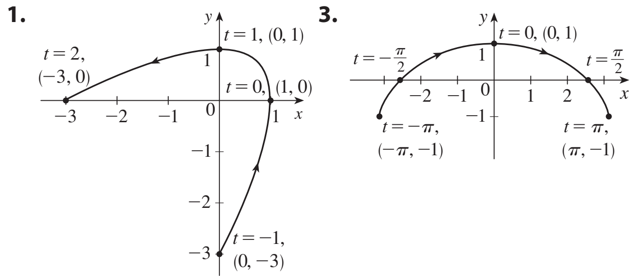
11. (a) 9.5 h (b) $2700\pi \approx 8482\ \text{m}^2$; $471\ \text{m}^2/\text{h}$ (c) 5.5 h

13. $x^2 + (y-6)^2 = 25$ **15.** $y = K/x$, $K \neq 0$

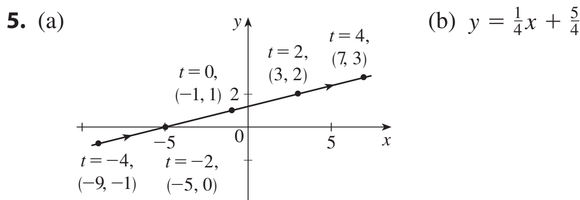
CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1 ■ PÁGINA 645

1. **3.**

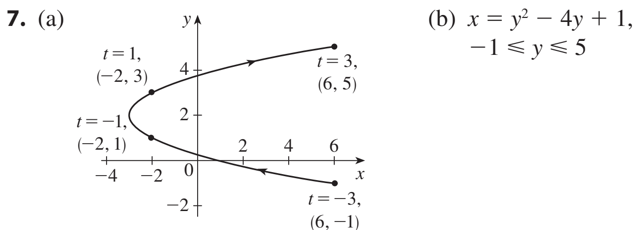


5. (a)



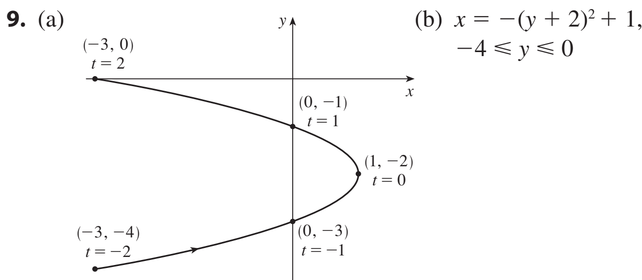
(b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

7. (a)



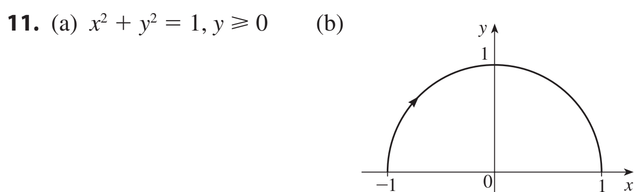
(b) $x = y^2 - 4y + 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 5$

9. (a)

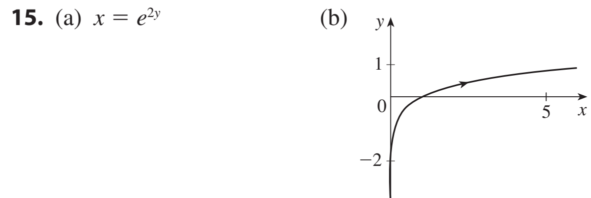


(b) $x = -(y+2)^2 + 1$, $-4 \leqslant y \leqslant 0$

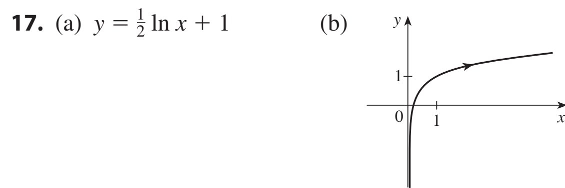
11. (a) $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$ (b)



13. (a) $y = 1/x$, $y > 1$ (b)



15. (a) $x = e^{2y}$ (b)



17. (a) $y = \frac{1}{2}\ln x + 1$ (b)

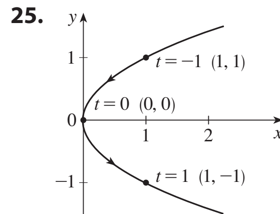
19. Se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj a lo largo del círculo

$$\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 = 1 \text{ de } (3, 3) \text{ a } (7, 3)$$

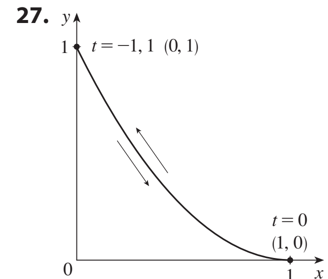
21. Se mueve 3 veces a en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la elipse $(x^2/25) + (y^2/4) = 1$, partiendo y terminando en $(0, -2)$

23. Está contenido en el rectángulo descrito por $1 \leqslant x \leqslant 4$ y $2 \leqslant y \leqslant 3$.

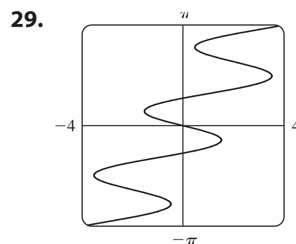
25.



27.



29.



31. (b) $x = -2 + 5t$, $y = 7 - 8t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

33. (a) $x = 2\cos t$, $y = 1 - 2\,\text{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

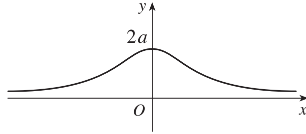
(b) $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\,\text{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 6\pi$

(c) $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\,\text{sen}\,t$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

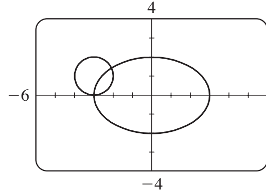
37. La curva $y = x^{2/3}$ es generada en (a). En (b), solo la porción con $x \geqslant 0$ es generada, y en (c) se obtiene únicamente la porción con $x > 0$.

41. $x = a\cos\theta$, $y = b \operatorname{sen}\theta$; $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, elipse

43.

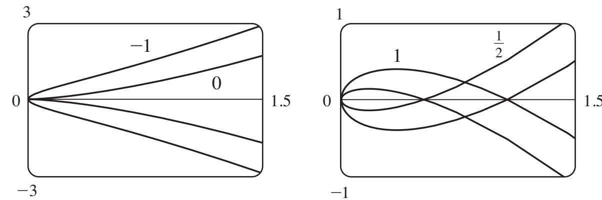


45. (a) Dos puntos de intersección



(b) Un punto de colisión en $(-3, 0)$ cuando $t = 3\pi/2$
(c) Hay todavía dos puntos de intersección, pero ningún punto de colisión.

47. Para $c = 0$, hay una cúspide; para $c > 0$, hay un lazo cuyo tamaño aumenta cuando c aumenta.



49. Las curvas siguen aproximadamente la recta $y = x$ y empiezan a tener lazos cuando a está entre 1.4 y 1.6 (más precisamente, cuando $a > \sqrt{2}$). Los lazos aumentan de tamaño cuando a aumenta.

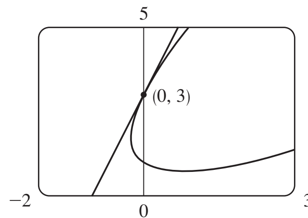
51. Cuando n aumenta, el número de oscilaciones aumenta; a y b determinan el ancho y la altura.

EJERCICIOS 10.2 ■ PÁGINA 655

1. $\frac{1}{2}(1 + t)^{3/2}$ **3.** $y = -x$ **5.** $y = -x$

7. $y = 2x + 1$

9. $y = 3x + 3$



11. $\dfrac{2t + 1}{2t}, -\dfrac{1}{4t^3}, t < 0$

13. $-\frac{3}{2}\tan t, -\frac{3}{4}\sec^3 t, \ \pi/2 < t < 3\pi/2$

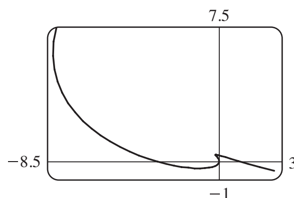
15. $\dfrac{t + 1}{t - 1}, \dfrac{-2t}{(t - 1)^3}, 0 < t < 1$

17. Horizontal en $(0, -3)$, vertical en $(\pm 2, -2)$

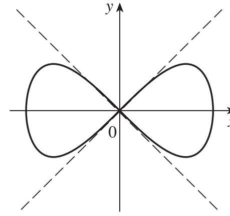
19. Horizontal en $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, ninguna vertical

21. $(0.6, 2)$; $\left(5 \cdot 6^{-6/5}, e^{6^{-1/5}}\right)$

23.



25. $y = x$, $y = -x$



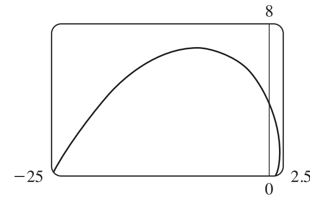
27. (a) $d \operatorname{sen}\theta/(r - d\cos\theta)$ **29.** $(4, 0)$ **31.** πab

33. $\frac{24}{5}$ **35.** $2\pi r^2 + \pi d^2$ **37.** $\int_0^2 \sqrt{2 + 2e^{-2t}}\, dt \approx 3.1416$

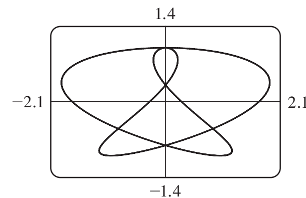
39. $\int_0^{4\pi} \sqrt{5 - 4\cos t}\, dt \approx 26.7298$ **41.** $4\sqrt{2} - 2$

43. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

45. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$

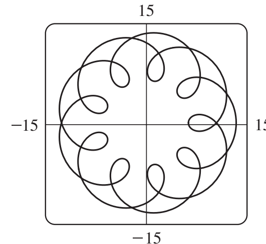


47. 16.7102



49. 612.3053 **51.** $6\sqrt{2}, \sqrt{2}$

55. (a) $t \in [0, 4\pi]$



(b) 294

57. $\int_0^{\pi/2} 2\pi t \cos t \sqrt{t^2 + 1}\, dt \approx 4.7394$

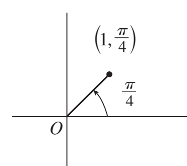
59. $\int_0^1 2\pi e^{-t}\sqrt{1 + 2e^t + e^{2t} + e^{-2t}}\, dt \approx 10.6705$

61. $\frac{48}{5}\pi$ **63.** $\frac{6}{5}\pi a^2$

65. $\frac{24}{5}\pi\left(949\sqrt{26} + 1\right)$ **71.** $\frac{1}{4}$

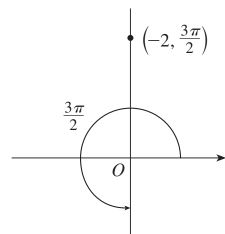
EJERCICIOS 10.3 ■ PÁGINA 666

1. (a)



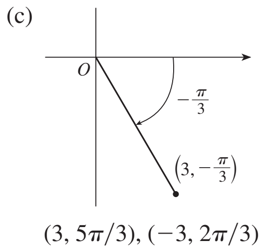
$(1, 9\pi/4), (-1, 5\pi/4)$

(b)



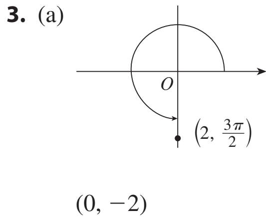
$(2, \pi/2), (-2, 7\pi/2)$

(c)



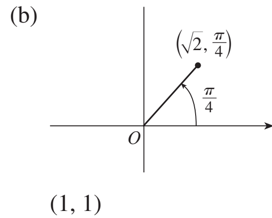
$(3, 5\pi/3)$, $(-3, 2\pi/3)$

3. (a)



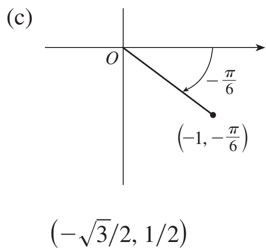
$(0, -2)$

(b)



$(1, 1)$

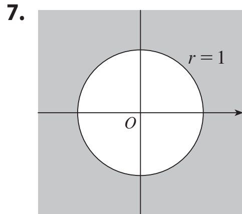
(c)



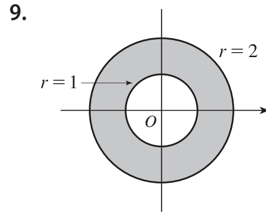
$\left(-\sqrt{3}/2, 1/2\right)$

5. (a) (i) $\left(4\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$ (ii) $\left(-4\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$
(b) (i) $(6, \pi/3)$ (ii) $(-6, 4\pi/3)$

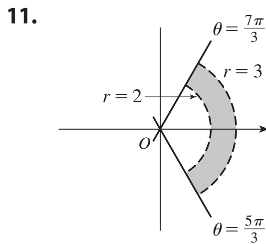
7.



9.

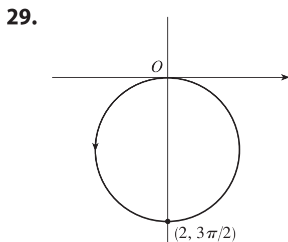


11.

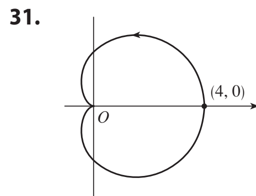


13. $2\sqrt{7}$ **15.** Círculo; centro O, radio 2
17. Círculo, centro $(5/2, 0)$, radio $5/2$
19. Círculo, centro $(1, 0)$, radio 1
21. $r = 2 \csc\theta$ **23.** $r = 1/(\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta)$
25. $r = 2c\cos\theta$ **27.** (a) $\theta = \pi/6$ (b) $x = 3$

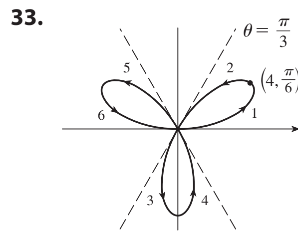
29.



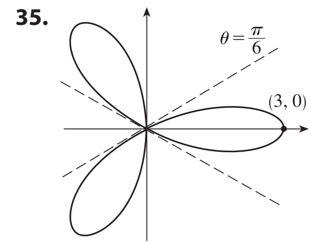
31.



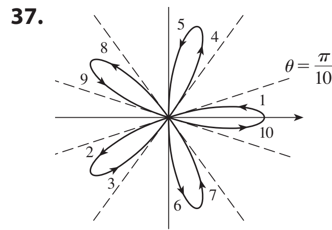
33.



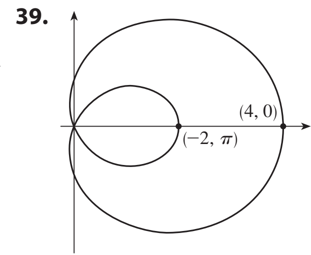
35.



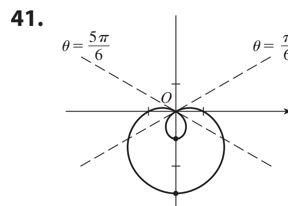
37.



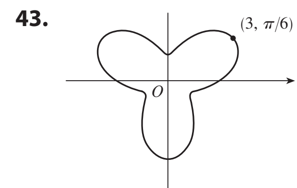
39.



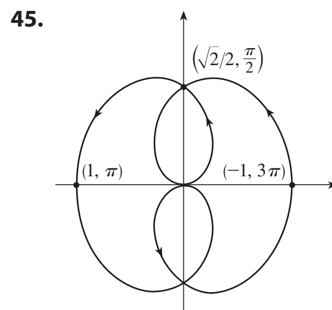
41.



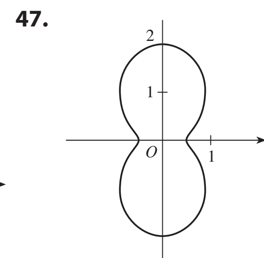
43.



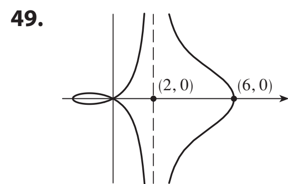
45.



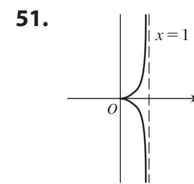
47.



49.

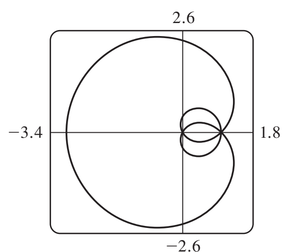


51.

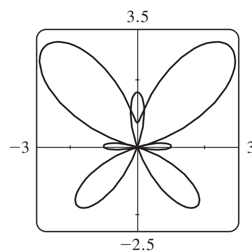


53. (a) Para $c < -1$, el lazo interno empieza en $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ y termina en $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$; para $c > 1$, empieza en $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ y termina en $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$.
55. $1/\sqrt{3}$ **57.** $-\pi$ **59.** 1
61. Horizontal en $\left(3/\sqrt{2}, \pi/4\right)$, $\left(-3/\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$; vertical en $(3, 0)$, $(0, \pi/2)$
63. Horizontal en $\left(\frac{3}{2}, \pi/3\right)$, $(0, \pi)$ [el poste], y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/3\right)$; vertical en $(2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$
65. Centro $(b/2, a/2)$, radio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

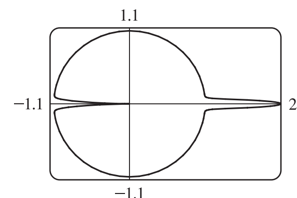
67.



69.



71.



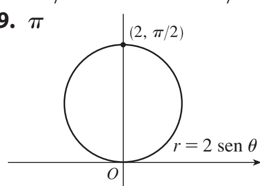
73. Por rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj a través del ángulo $\pi/6$, $\pi/3$, o α alrededor del origen.

75. Para $c = 0$, la curva es un círculo. Cuando c aumenta, el lado izquierdo se aplana, y luego tiene un hueco para $0.5 < c < 1$, una cúspide para $c = 1$ y un lazo para $c > 1$.

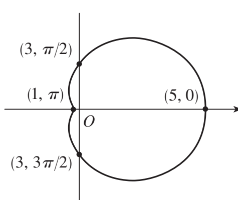
EJERCICIOS 10.4 ■ PÁGINA 672

1. $\pi^5/10240$ **3.** $\pi/2$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** π^2

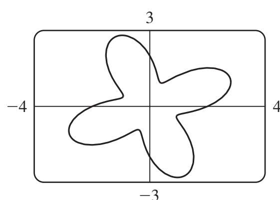
9. π



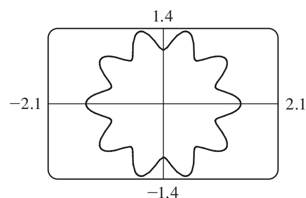
11. 11π



13. $\frac{9}{2}\pi$



15. $\frac{3}{2}\pi$



17. $\frac{4}{3}\pi$ **19.** $\frac{1}{16}\pi$ **21.** $\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ **23.** $\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$

25. $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **27.** π **29.** $\frac{9}{8}\pi - \frac{9}{4}$ **31.** $\frac{1}{2}\pi - 1$

33. $-\sqrt{3} + 2 + \frac{1}{3}\pi$ **35.** $\frac{1}{4}(\pi + 3\sqrt{3})$

37. $(\frac{1}{2}, \pi/6)$, $(\frac{1}{2}, 5\pi/6)$, y el poste

39. $(\frac{3}{2}, \pi/6)$, $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$, y el poste

41. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi/3)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\pi/3)$, y el poste

43. Intersección en $\theta \approx 0.89, 2.25$; área ≈ 3.46

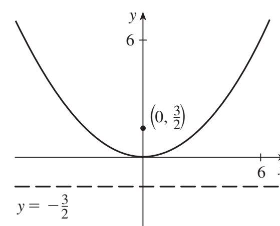
45. 2π **47.** $\frac{8}{3}[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1]$ **49.** $\frac{16}{3}$

51. 2.4221 **53.** 8.0091

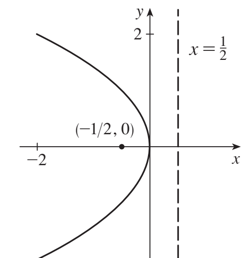
55. (b) $2\pi(2 - \sqrt{2})$

EJERCICIOS 10.5 ■ PÁGINA 680

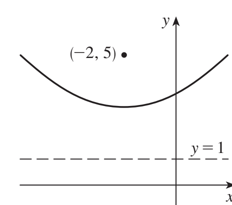
1. $(0, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$, $y = -\frac{3}{2}$



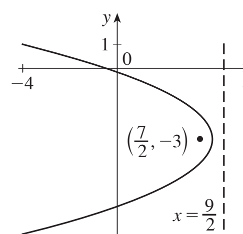
3. $(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $x = \frac{1}{2}$



5. $(-2, 3)$ $(-2, 5)$, $y = 1$

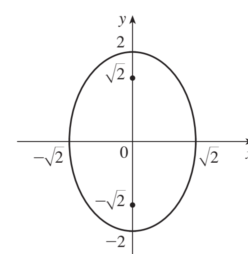


7. $(4, -3)$, $(\frac{7}{2}, -3)$, $x = \frac{9}{2}$

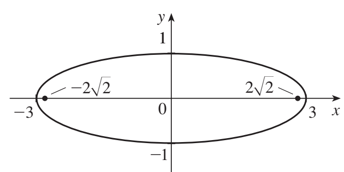


9. $x = -y^2$, foco $(\frac{1}{4}, 0)$, directriz $x = \frac{1}{4}$

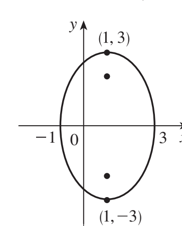
11. $(0, \pm 2)$, $(0, \pm\sqrt{2})$



13. $(\pm 3, 0)$, $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$

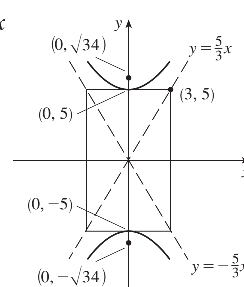


15. $(1, \pm 3)$, $(1, \pm\sqrt{5})$

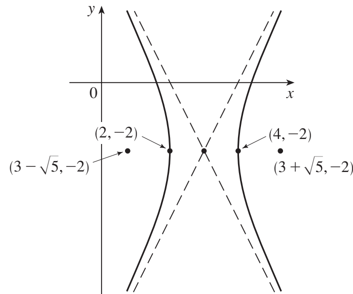


17. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, focos $(0, \pm\sqrt{5})$

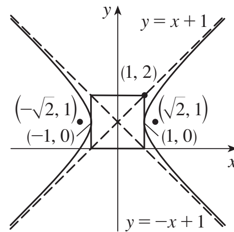
19. $(0, \pm 5)$; $(0, \pm\sqrt{34})$; $y = \pm\frac{5}{3}x$



21. $(4, -2)$, $(2, -2)$;
$(3 \pm \sqrt{5}, -2)$;
$y + 2 = \pm 2(x - 3)$



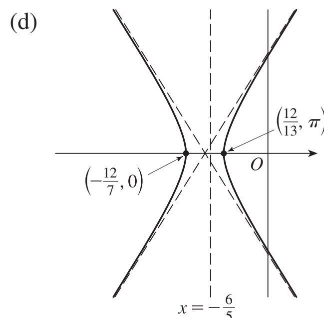
23. $(\pm 1, 1)$, $(\pm\sqrt{2}, 1)$, $y - 1 = \pm x$



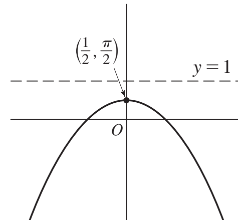
25. Hipérbola, $(\pm 1, 0)$, $(\pm\sqrt{5}, 0)$
27. Elipse, $(\pm\sqrt{2}, 1)$, $(\pm 1, 1)$
29. Parábola, $(1, -2)$, $\left(1, -\frac{11}{6}\right)$
31. $y^2 = 4x$ **33.** $y^2 = -12(x + 1)$
35. $(y + 1)^2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$
37. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$ **39.** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{(y - 4)^2}{16} = 1$
41. $\dfrac{(x + 1)^2}{12} + \dfrac{(y - 4)^2}{16} = 1$ **43.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
45. $\dfrac{(y - 1)^2}{25} - \dfrac{(x + 3)^2}{39} = 1$ **47.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$
49. $\dfrac{x^2}{3\,763\,600} + \dfrac{y^2}{3\,753\,196} = 1$
51. (a) $\dfrac{121x^2}{1\,500\,625} - \dfrac{121y^2}{3\,339\,375} = 1$ (b) ≈ 248 millas
55. (a) Elipse (b) Hipérbola (c) Ninguna curva
59. 15.9
61. $\dfrac{b^2c}{a} + ab\ln\left(\dfrac{a}{b + c}\right)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$
63. $(0, 4/\pi)$

EJERCICIOS 10.6 ■ PÁGINA 688

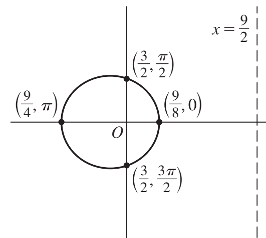
1. $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$ **3.** $r = \dfrac{6}{2 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta}$
5. $r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$ **7.** $r = \dfrac{6}{1 + \mathrm{sen}\,\theta}$
9. (a) $\frac{10}{3}$
(b) Hipérbola
(c) $x = -\frac{6}{5}$
(d)



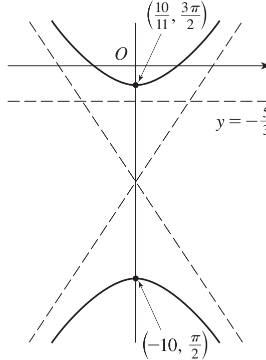
11. (a) 1 (b) Parábola (c) $y = 1$
(d)



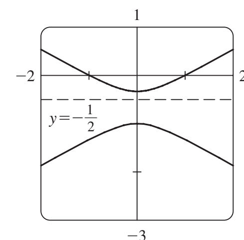
13. (a) $\frac{1}{3}$ (b) Elipse (c) $x = \frac{9}{2}$
(d)



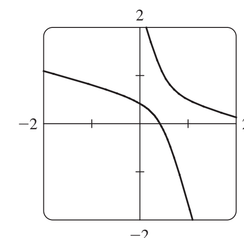
15. (a) $\frac{6}{5}$ (b) Hipérbola (c) $y = -\frac{5}{3}$
(d)



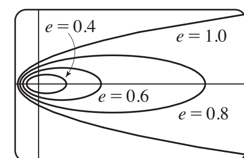
17. (a) 2, $y = -\frac{1}{2}$



(b) $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\mathrm{sen}(\theta - 3\pi/4)}$



19. La elipse es casi circular cuando e está cerca de 0 y se alarga cuando $e \to 1^-$. En $e = 1$, la curva se vuelve una parábola.



25. $r = \dfrac{2.26 \times 10^8}{1 + 0.093 \cos\theta}$ **27.** $r = \dfrac{1.07}{1 + 0.97 \cos\theta}$; 35.64 AU

29. 7.0×10^7 km **31.** 3.6×10^8 km

REPASO DEL CAPÍTULO 10 ■ PÁGINA 689

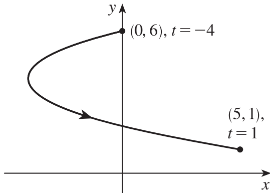
Examen verdadero-falso

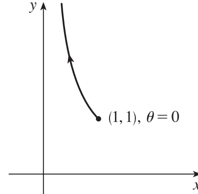
1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso

9. Verdadero

Ejercicios

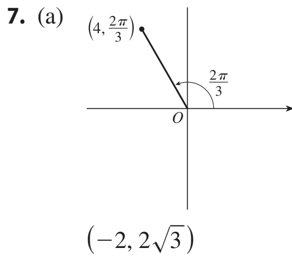
1. $x = y^2 - 8y + 12$ **3.** $y = 1/x$





5. $x = t,\ y = \sqrt{t};\ x = t^4,\ y = t^2;$ $x = \tan^2 t,\ y = \tan t,\ 0 \leqslant t < \pi/2$

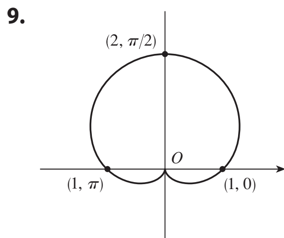
7. (a)



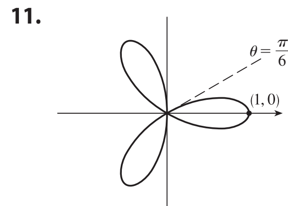
$\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$

(b) $\left(3\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$, $\left(-3\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$

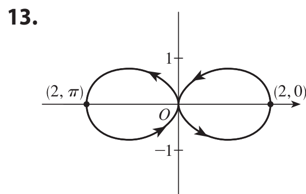
9.



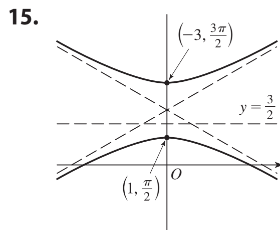
11.



13.

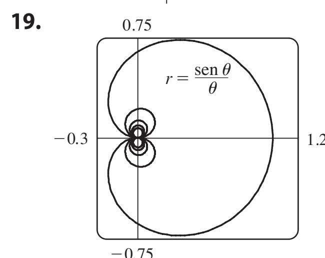


15.



17. $r = \dfrac{2}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

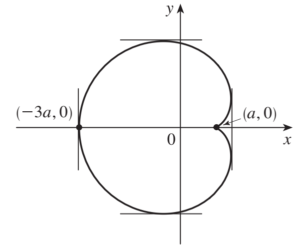
19.



21. 2 **23.** −1

25. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}, \dfrac{1 + \cos t + \operatorname{sen} t}{(1 + \cos t)^3}$ **27.** $\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}\right)$

29. Tangente vertical en $\left(\frac{3}{2}a, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\right), (-3a, 0)$; tangente horizontal en $(a, 0), \left(-\frac{1}{2}a, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\,a\right)$



31. 18 **33.** $(2, \pm\pi/3)$ **35.** $\frac{1}{2}(\pi - 1)$

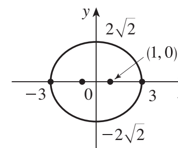
37. $2\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

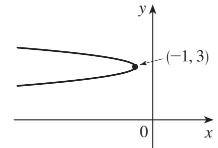
39. $\dfrac{2\sqrt{\pi^2 + 1} - \sqrt{4\pi^2 + 1}}{2\pi} + \ln\left(\dfrac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}}\right)$

41. $471\,295\,\pi/1024$

43. Todas las curvas tienen la asíntota vertical $x = 1$. Para $c < -1$, la curva se abulta a la derecha. En $c = -1$, la curva es la recta $x = 1$. Para $-1 < c < 0$, se abulta a la izquierda. En $c = 0$ hay una cúspide en $(0, 0)$. Para $c > 0$, hay un lazo.

45. $(\pm 1, 0), (\pm 3, 0)$ **47.** $\left(-\frac{25}{24}, 3\right), (-1, 3)$





49. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **51.** $\dfrac{y^2}{72/5} - \dfrac{x^2}{8/5} = 1$

53. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(8y - 399)^2}{160\,801} = 1$ **55.** $r = \dfrac{4}{3 + \cos\theta}$

57. $x = a(\cot\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta),\ y = a(1 + \operatorname{sen}^2\theta)$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 692

1. $\ln(\pi/2)$ **3.** $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right] \times [-1, 2]$

CAPÍTULO 11

EJERCICIOS 11.1 ■ PÁGINA 704

Abreviaturas: C, convergente; D, divergente

1. (a) Una sucesión es una lista ordenada de números. También puede definirse como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

(b) Los términos a_n se aproximan a 8 conforme n crece.

(c) Los términos a_n crecen conforme n crece.

3. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \frac{16}{9}, \frac{32}{11}$ **5.** $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}$ **7.** $-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{40}$

9. 1, 2, 7, 32, 157 **11.** $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$ **13.** $a_n = 1/(2n)$

15. $a_n = -3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **17.** $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n + 1}$

19. 0.4286, 0.4615, 0.4737, 0.4800, 0.4839, 0.4865, 0.4884, 0.4898, 0.4909, 0.4918; sí; $\frac{1}{2}$

21. 0.5000, 1.2500, 0.8750, 1.0625, 0.9688, 1.0156, 0.9922, 1.0039, 0.9980, 1.0010; sí; 1

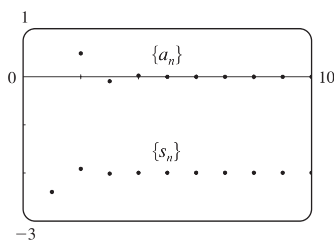
23. 5 **25.** D **27.** 0 **29.** 1 **31.** 2

33. 1 **35.** 0 **37.** 0 **39.** D **41.** 0 **43.** 0

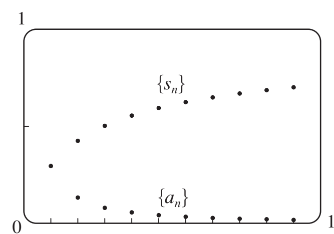
45. 1 **47.** e^2 **49.** ln 2 **51.** $\pi/2$ **53.** D **55.** D
57. D **59.** $\pi/4$ **61.** $\frac{1}{2}$ **63.** 0
65. (a) 1060, 1123.60, 1191.02, 1262.48, 1338.23 (b) D
67. (b) 5734 **69.** $-1 < r < 1$
71. Convergente por el teorema de sucesión monótona; $5 \leqslant L < 8$
73. Decreciente; sí **75.** Creciente; no
77. Creciente; sí
79. 2 **81.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ **83.** (b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
85. (a) 0 (b) 9, 11

EJERCICIOS 11.2 ■ PÁGINA 715

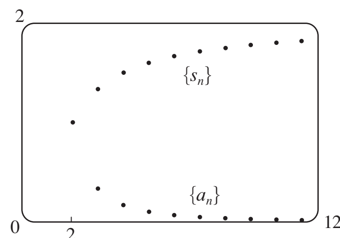
1. (a) Una sucesión es una lista ordenada de números, mientras que una serie es la *suma* de una lista de números.
(b) Una serie es convergente si la sucesión de sumas parciales es una sucesión convergente. Una serie es divergente si no es convergente.
3. 2
5. 0.5, 0.55, 0.5611, 0.5648, 0.5663, 0.5671, 0.5675, 0.5677; C
7. 1, 1.7937, 2.4871, 3.1170, 3.7018, 4.2521, 4.7749, 5.2749; D
9. -2.40000, -1.92000, -2.01600, -1.99680, -2.00064, -1.99987, -2.00003, -1.99999, -2.00000, -2.00000; convergente, suma $= -2$



11. 0.29289, 0.42265, 0.50000, 0.55279, 0.59175, 0.62204, 0.64645, 0.66667, 0.68377, 0.69849; convergente, suma $= 1$



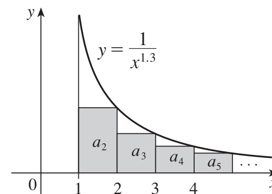
13. 1.00000, 1.33333, 1.50000, 1.60000, 1.66667, 1.71429, 1.75000, 1.77778, 1.80000, 1.81818; convergente, suma $= 2$



15. (a) Sí (b) No **17.** D **19.** $\frac{25}{3}$ **21.** $\frac{400}{9}$
23. $\frac{1}{7}$ **25.** D **27.** D **29.** D **31.** 9 **33.** D
35. $\dfrac{\text{sen } 100}{1 - \text{sen } 100}$
37. D **39.** D **41.** $e/(e - 1)$ **43.** $\frac{3}{2}$ **45.** $\frac{11}{6}$
47. $e - 1$
49. (b) 1 (c) 2 (d) Todos los números racionales con una representación decimal final, excepto 0
51. $\frac{8}{9}$ **53.** 5063/3300 **55.** 45 679/37 000
57. $-\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{1}{5}$; $\dfrac{-5x}{1 + 5x}$
59. $-1 < x < 5$; $\dfrac{3}{5 - x}$
61. $x > 2$ o $x < -2$; $\dfrac{x}{x - 2}$ **63.** $x < 0$; $\dfrac{1}{1 - e^x}$
65. 1 **67.** $a_1 = 0$, $a_n = \dfrac{2}{n(n + 1)}$ para $n > 1$, suma $= 1$
69. (a) 120 mg; 124 mg
(b) $Q_{n+1} = 100 + 0.20Q_n$ (c) 125 mg
71. (a) 157.875 mg; $\frac{3000}{19}(1 - 0.05^n)$ (b) 157.895 mg
73. (a) $S_n = \dfrac{D(1 - c^n)}{1 - c}$ (b) 5 **75.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
79. $\dfrac{1}{n(n + 1)}$ **81.** La serie es divergente.
87. $\{s_n\}$ está acotado y es creciente.
89. (a) $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$
91. (a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}$; $\dfrac{(n + 1)! - 1}{(n + 1)!}$ (c) 1

EJERCICIOS 11.3 ■ PÁGINA 725

1. C



3. C **5.** D **7.** D **9.** D **11.** C **13.** D
15. C **17.** C **19.** D **21.** D **23.** C **25.** C
27. f no es positiva ni decreciente.
29. $p > 1$ **31.** $p < -1$ **33.** $(1, \infty)$
35. (a) $\frac{9}{10}\pi^4$ (b) $\frac{1}{90}\pi^4 - \frac{17}{16}$
37. (a) 1.54977, error $\leqslant 0.1$ (b) 1.64522, error $\leqslant 0.005$
(c) 1.64522 en comparación con 1.64493 (d) $n > 1000$
39. 0.00145 **45.** $b < 1/e$

EJERCICIOS 11.4 ■ PÁGINA 731

1. (a) Nada (b) C **3.** C **5.** D **7.** C **9.** D
11. C **13.** C **15.** C **17.** D **19.** C **21.** D
23. C **25.** D **27.** D **29.** C **31.** D
33. 0.1993, error $< 2.5 \times 10^{-5}$
35. 0.0739, error $< 6.4 \times 10^{-8}$
45. Sí

EJERCICIOS 11.5 ■ PÁGINA 736

1. (a) Una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. (b) $0 < b_{n+1} \leqslant b_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, donde $b_n = |a_n|$ (c) $|R_n| \leqslant b_{n+1}$
3. D **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** C
15. C **17.** C **19.** D **21.** -0.5507 **23.** 5
25. 5 **27.** -0.4597 **29.** -0.1050
31. Una subestimación
33. p no es un entero negativo. **35.** $\{b_n\}$ no es decreciente.

EJERCICIOS 11.6 ■ PÁGINA 742

Abreviaturas: AC, absolutamente convergente;
CC, condicionalmente convergente

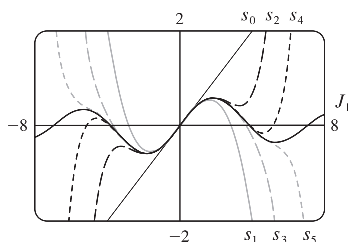
1. (a) D (b) C (c) Puede converger o divergir
3. CC **5.** AC **7.** AC **9.** D **11.** AC
13. AC **15.** D **17.** AC **19.** AC **21.** AC
23. D **25.** AC **27.** AC **29.** D **31.** CC
33. AC **35.** D **37.** AC **39.** D **41.** AC
43. (a) y (d)
47. (a) $\frac{661}{960} \approx 0.68854$, error < 0.00521
(b) $n \geqslant 11$, 0.693109
53. (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

EJERCICIOS 11.7 ■ PÁGINA 746

1. D **3.** CC **5.** D **7.** C **9.** C **11.** C
13. C **15.** C **17.** C **19.** C **21.** D **23.** D
25. C **27.** C **29.** C **31.** D
33. C **35.** D **37.** C

EJERCICIOS 11.8 ■ PÁGINA 751

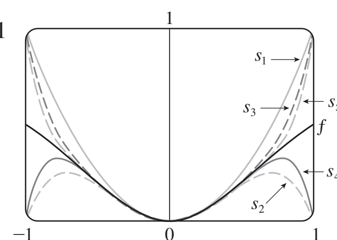
1. Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, donde x es una variable y a y las c_n's son constantes
3. 1, $(-1, 1)$ **5.** 1, $[-1, 1)$
7. ∞, $(-\infty, \infty)$ **9.** 4, $[-4, 4]$
11. $\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ **13.** 2, $[-2, 2)$
15. 1, $[1, 3]$ **17.** 2, $[-4, 0)$
19. $\frac{1}{3}$, $\left[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ **21.** b, $(a-b, a+b)$ **23.** 0, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
25. $\frac{1}{5}$, $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ **27.** ∞, $(-\infty, \infty)$
29. (a) Sí (b) No
31. k^k **33.** No
35. (a) $(-\infty, \infty)$
(b), (c)



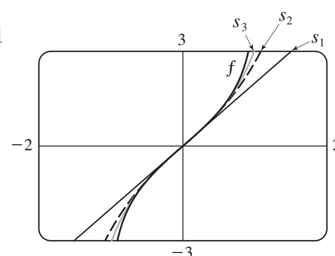
37. $(-1, 1)$, $f(x) = (1+2x)/(1-x^2)$ **41.** 2

EJERCICIOS 11.9 ■ PÁGINA 757

1. 10 **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{10^{n+1}} x^n$, $(-10, 10)$
5. $2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n+1}} x^n$, $(-3, 3)$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{4n+2}}{2^{4n+4}}$, $(-2, 2)$ **9.** $-\dfrac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3x^n}{2^{n+1}}$, $(-2, 2)$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$, $(-1, 1)$
13. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$, $R = 1$
(b) $\dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1) x^n$, $R = 1$
(c) $\dfrac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n$, $R = 1$
15. $\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n5^n}$, $R = 5$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n (n+1) x^{n+1}$, $R = \frac{1}{4}$
19. $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{n-2}{2^{n-1}} x^n$, $R = 2$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2}$, $R = 1$



23. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$



25. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^{8n+2}}{8n+2}$, $R = 1$
27. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+3}}{n(n+3)}$, $R = 1$
29. 0.044522 **31.** 0.000395
33. 0.19740
35. (b) 0.920 **39.** $[-1, 1]$, $[-1, 1)$, $(-1, 1)$

EJERCICIOS 11.10 ■ PÁGINA 771

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$, $R = 1$
5. $x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$
7. $2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20\,736}(x-8)^3$
9. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{1}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^3$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$, $R = 1$ **13.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$, $R = \infty$ **17.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

19. $50 + 105(x-2) + 92(x-2)^2 + 42(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5$, $R = \infty$

21. $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n} (x-2)^n$, $R = 2$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^6}{n!} (x-3)^n$, $R = \infty$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1}$, $R = \infty$

31. $1 - \frac{1}{4}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{4^n \cdot n!} x^n$, $R = 1$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} x^n$, $R = 2$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{4n+2}$, $R = 1$

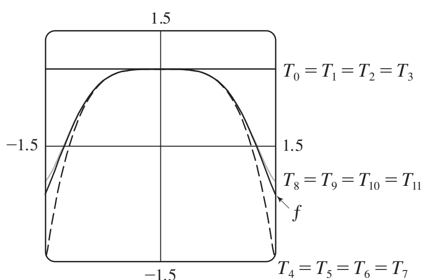
37. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(2n)!} x^{4n+1}$, $R = \infty$

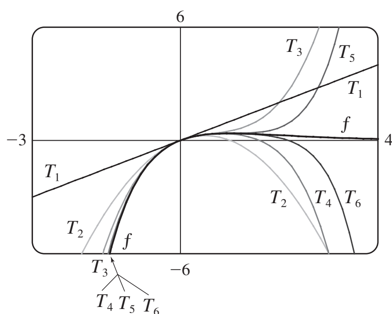
41. $\frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n! 2^{3n+1}} x^{2n+1}$, $R = 2$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

45. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, $R = \infty$



47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$, $R = \infty$



49. 0.99619

51. (a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

(b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$

53. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, $R = 1$

55. $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}$, $R = \infty$

57. 0.0059 **59.** 0.40102 **61.** $\frac{1}{2}$ **63.** $\frac{1}{120}$ **65.** $\frac{3}{5}$

67. $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4$ **69.** $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4$

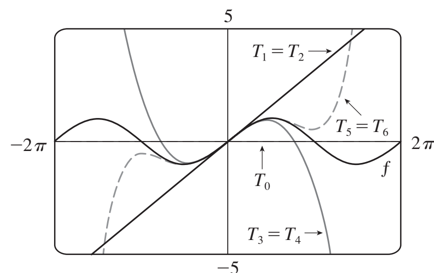
71. $x - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6$

73. e^{-x^4} **75.** $\ln \frac{8}{5}$

77. $1/\sqrt{2}$ **79.** $e^3 - 1$

EJERCICIOS 11.11 ■ PÁGINA 780

1. (a) $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = T_2(x) = x$, $T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$, $T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

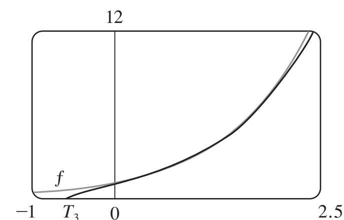


(b)

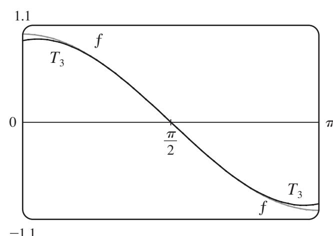
x	f	T_0	$T_1 = T_2$	$T_3 = T_4$	T_5
$\pi/4$	0.7071	0	0.7854	0.7047	0.7071
$\pi/2$	1	0	1.5708	0.9248	1.0045
π	0	0	3.1416	−2.0261	0.5240

(c) Conforme n aumenta, $T_n(x)$ es una aproximación satisfactoria de $f(x)$ en un intervalo cada vez más grande.

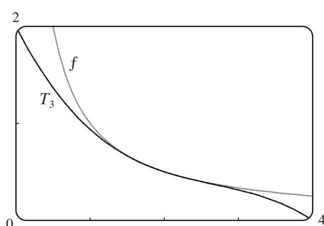
3. $e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 + \frac{1}{6}e(x-1)^3$



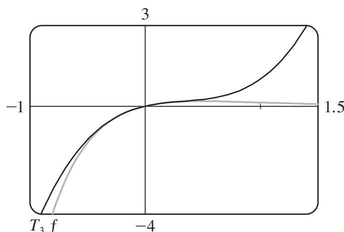
5. $-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3$



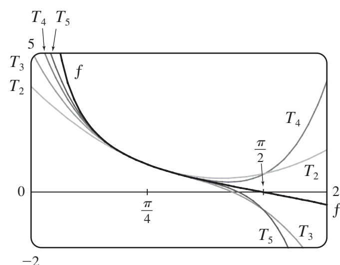
7. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3$



9. $x-2x^2+2x^3$



11. $T_5(x)=1-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$
$+\frac{10}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4-\frac{64}{15}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5$



13. (a) $1-(x-1)+(x-1)^2$ (b) 0.006 482 7
15. (a) $2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$ (b) 1.5625×10^{-5}
17. (a) $1+\frac{1}{2}x^2$ (b) 0.0015
19. (a) $1+x^2$ (b) 0.000 06 **21.** (a) $x^2-\frac{1}{6}x^4$ (b) 0.042

23. 0.17365 **25.** Cuatro **27.** $-1.037<x<1.037$
29. $-0.86<x<0.86$ **31.** 21 m, no
37. (c) Difieren en alrededor de 8×10^{-9} km.

REPASO DEL CAPÍTULO 11 ■ PÁGINA 784

Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Falso
11. Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Verdadero
19. Verdadero **21.** Verdadero

Ejercicios

1. $\frac{1}{2}$ **3.** D **5.** 0 **7.** e^{12} **9.** 2 **11.** C
13. C **15.** D **17.** C **19.** C **21.** C **23.** CC
25. AC **27.** $\frac{1}{11}$ **29.** $\pi/4$ **31.** e^{-e} **35.** 0.9721
37. 0.189 762 24, error $<6.4\times10^{-7}$
41. 4, $[-6, 2)$ **43.** 0.5, $[2.5, 3.5)$

45. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right]$

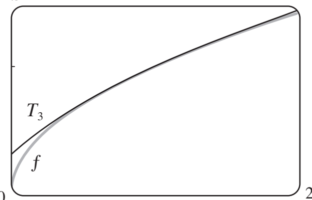
47. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, $R=1$ **49.** $\ln 4-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$, $R=4$

51. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$

53. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{n!\,2^{6n+1}}x^n$, $R=16$

55. $C+\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}$

57. (a) $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$
(b)



(c) 0.000 006

59. $-\frac{1}{6}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 787

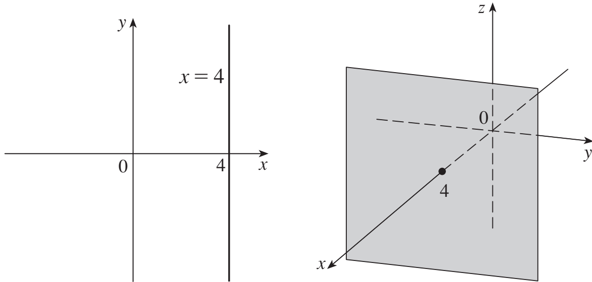
1. $15!/5! = 10\,897\,286\,400$
3. (b) 0 si $x=0$, $(1/x)-\cot x$ if $x\neq k\pi$, k un entero
5. (a) $s_n=3\cdot4^n$, $l_n=1/3^n$, $p_n=4^n/3^{n-1}$ (c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$
9. $\frac{3\pi}{4}$ **11.** $(-1, 1)$, $\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$ **13.** $\ln\frac{1}{2}$
17. (a) $\frac{250}{101}\pi(e^{-(n-1)\pi/5}-e^{-n\pi/5})$ (b) $\frac{250}{101}\pi$
19. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-1$
21. $-\left(\frac{\pi}{2}-\pi k\right)^2$, donde k es un entero positivo

CAPÍTULO 12

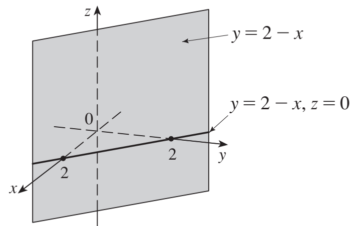
EJERCICIOS 12.1 ■ PÁGINA 796

1. $(4, 0, -3)$ **3.** C; A

5. Una recta paralela al eje y y 4 unidades a la derecha de ella; un plano vertical paralelo al plano yz y 4 unidades frente a él.



7. Un plano vertical que interseca el plano xy en la recta $y = 2 - x$, $z = 0$



9. (a) $|PQ| = 6$, $|QR| = 2\sqrt{10}$, $|RP| = 6$; triángulo isósceles

11. (a) No (b) Sí

13. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 25$; $(x-1)^2 + (z-3)^2 = 9$, $y = 0$ (un círculo)

15. $(x-3)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = 30$

17. $(1, 2, -4)$, 6 **19.** $(2, 0, -6)$, $9/\sqrt{2}$

21. (b) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{94}, \frac{1}{2}\sqrt{85}$

23. (a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 36$
(b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 4$
(c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 9$

25. Un plano paralelo al plano yz y 9 unidades frente a él

27. Un semiespacio que consta de todos los puntos bajo el plano $z = 8$

29. Todos los puntos en o entre los planos horizontales $z = 0$ y $z = 6$

31. Todos los puntos en un círculo con radio 2 con centro en el eje z que está contenido en el plano $z = -1$

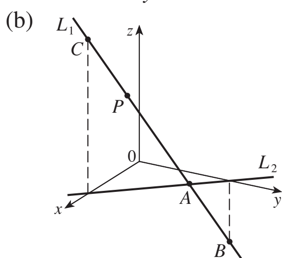
33. Todos los puntos en una esfera con radio 2 y centro $(0, 0, 0)$

35. Todos los puntos en o entre esferas con radios 1 y $\sqrt{5}$ y centros $(0, 0, 0)$

37. Todos los puntos en o dentro de un cilindro circular de radio 3 con eje en el eje y

37. $0 < x < 5$ **41.** $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2$

43. (a) $(2, 1, 4)$ (b)



45. $14x - 6y - 10z = 9$, un plano perpendicular a AB

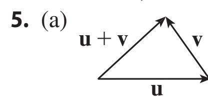
47. $2\sqrt{3} - 3$

EJERCICIOS 12.2 ■ PÁGINA 805

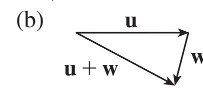
1. (a) Escalar (b) Vector (c) Vector (d) Escalar

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CE}$

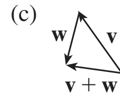
5. (a)



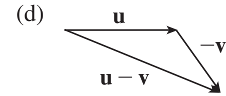
(b)



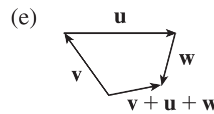
(c)



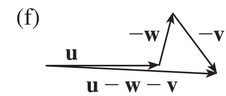
(d)



(e)

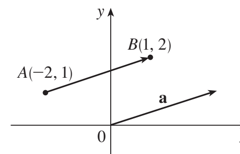


(f)

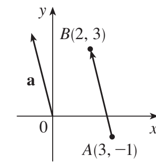


7. $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$

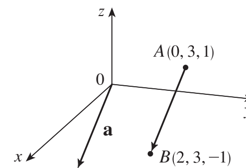
9. $\mathbf{a} = \langle 3, 1 \rangle$



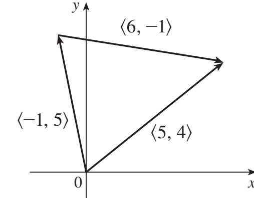
11. $\mathbf{a} = \langle -1, 4 \rangle$



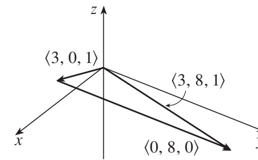
13. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2 \rangle$



15. $\langle 5, 2 \rangle$



17. $\langle 3, 8, 1 \rangle$



19. $\langle 6, 3 \rangle$, $\langle 6, 14 \rangle$, 5, 13

21. $6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $20\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$, $\sqrt{29}$, 7

23. $\left\langle \dfrac{3}{\sqrt{10}}, -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle$ **25.** $\frac{8}{9}\mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}$ **27.** 60°

29. $\langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$ **31.** ≈ 45.96 pies/s, ≈ 38.57 pies/s

33. $100\sqrt{7} \approx 264.6$ N, $\approx 139.1°$

35. $\sqrt{1250} \approx 35.4$ km/h, N8°W

37. $\approx -177.39\,\mathbf{i} + 211.41\,\mathbf{j}$, $\approx 177.39\,\mathbf{i} + 138.59\,\mathbf{j}$; ≈ 275.97 N, ≈ 225.11 N
39. (a) En un ángulo de 43.4° desde la orilla, hacia río arriba (b) 20.2 min
41. $\pm(\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j})/\sqrt{17}$ **43.** $\mathbf{0}$
45. (a), (b) (d) $s = \frac{9}{7}$, $t = \frac{11}{7}$
47. Una esfera con radio 1, centrada en (x_0, y_0, z_0)

EJERCICIOS 12.3 ■ PÁGINA 812

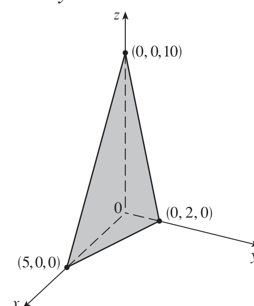
1. (b), (c), (d) son significativos **3.** -3.6 **5.** 0.58 **7.** 32
9. $14\sqrt{3}$ **11.** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = -\frac{1}{2}$
15. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63°$ **17.** $\cos^{-1}\left(-\frac{5}{6}\right) \approx 146°$
19. $\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{130}}\right) \approx 52°$ **21.** 48°, 75°, 57°
23. (a) Ortogonal (b) Ninguno de los dos (c) Paralelo (d) Ortogonal
25. Sí **27.** $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$ $\left[\text{o } (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}\right]$
29. 45° **31.** 0° en (0, 0), $\approx 8.1°$ en (1, 1)
33. $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$; 48°, 71°, 48°
35. $1/\sqrt{14}$, $-2/\sqrt{14}$, $-3/\sqrt{14}$; 74°, 122°, 143°
37. $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$; 55°, 55°, 55° **39.** 9, $\left\langle \frac{36}{5}, \frac{27}{5}\right\rangle$
41. $\frac{1}{9}$, $\left\langle \frac{4}{81}, \frac{7}{81}, -\frac{4}{81}\right\rangle$ **43.** $-7/\sqrt{19}$, $-\frac{21}{19}\mathbf{i} + \frac{21}{19}\mathbf{j} - \frac{7}{19}\mathbf{k}$
47. $\langle 0, 0, -2\sqrt{10}\rangle$ o cualquier vector de la forma $\langle s, t, 3s - 2\sqrt{10}\rangle$, $s, t \in \mathbb{R}$
49. 144 J **51.** $560\cos(20°) \approx 526$ J
53. $\frac{13}{5}$ **55.** $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$

EJERCICIOS 12.4 ■ PÁGINA 821

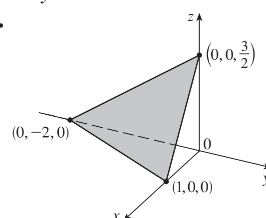
1. $15\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$ **3.** $14\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$
5. $-\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{7}{4}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ **7.** $(1 - t)\,\mathbf{i} + (t^3 - t^2)\,\mathbf{k}$
9. $\mathbf{0}$ **11.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
13. (a) Escalar (b) Sin sentido (c) Vector (d) Sin sentido (e) Sin sentido (f) Escalar
15. 35; hacia dentro de la página **17.** $\langle -7, 10, 8\rangle$, $\langle 7, -10, -8\rangle$
19. $\left\langle -\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}\right\rangle$, $\left\langle \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{5}{3\sqrt{3}}\right\rangle$
27. 20 **29.** (a) $\langle 0, 18, -9\rangle$ (b) $\frac{9}{2}\sqrt{5}$
31. (a) $\langle 13, -14, 5\rangle$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{390}$
33. 82 **35.** 16 **39.** 10.8 sen 80° $\approx$ 10.6 N·m
41. ≈ 417 N **43.** 60°
45. (b) $\sqrt{97/3}$ **53.** (a) No (b) No (c) Sí

EJERCICIOS 12.5 ■ PÁGINA 831

1. (a) Verdadero (b) Falso (c) Verdadero (d) Falso (e) Falso (f) Verdadero (g) Falso (h) Verdadero (i) Verdadero (j) Falso (k) Verdadero
3. $\mathbf{r} = (2\,\mathbf{i} + 2.4\,\mathbf{j} + 3.5\,\mathbf{k}) + t(3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k})$; $x = 2 + 3t$, $y = 2.4 + 2t$, $z = 3.5 - t$
5. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $x = 1 + t$, $y = 3t$, $z = 6 + t$
7. $x = 2 + 2t$, $y = 1 + \frac{1}{2}t$, $z = -3 - 4t$; $(x - 2)/2 = 2y - 2 = (z + 3)/(-4)$
9. $x = 8 + 3t$, $y = 4 + 0t = 4$, $z = -1 - 9t$; $\frac{x - 8}{3} = \frac{z + 1}{-9}$, $y = 4$
11. $x = -6 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 + t$; $(x + 6)/2 = (y - 2)/3 = z - 3$
13. Sí
15. (a) $(x - 1)/(-1) = (y + 5)/2 = (z - 6)/(-3)$ (b) $(-1, -1, 0)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$, $(0, -3, 3)$
17. $\mathbf{r}(t) = (6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 9\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$
19. Sesgada **21.** $(4, -1, -5)$ **23.** $-2x + y + 5z = 1$
25. $x + 4y + z = 4$ **27.** $5x - y - z = 7$
29. $6x + 6y + 6z = 11$ **31.** $x + y + z = 2$
33. $5x - 3y - 8z = -9$ **35.** $8x + y - 2z = 31$
37. $x - 2y - z = -3$ **39.** $3x - 8y - z = -38$
41.



43.

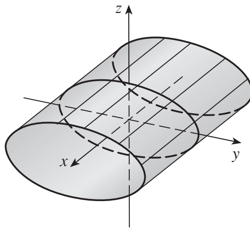


45. $(-2, 6, 3)$ **47.** $\left(\frac{2}{5}, 4, 0\right)$ **49.** 1, 0, −1
51. Perpendicular **53.** Ninguno de los dos, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 114.1°$
55. Paralelo
57. (a) $x = 1$, $y = -t$, $z = t$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 15.8°$
59. $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 5}{-8} = \frac{z}{2}$ **61.** $x + 2y + z = 5$
63. $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$
65. $x = 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 - 2t$
67. P_2 y P_3 son paralelos, P_1 and P_4 son idénticos
69. $\sqrt{61/14}$ **71.** $\frac{4\sqrt{35}}{7}$ **73.** $5/(2\sqrt{14})$
77. $1/\sqrt{6}$ **79.** $13/\sqrt{69}$
81. (a) $x = 325 + 440t$, $y = 810 - 135t$, $z = 561 + 38t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (b) No

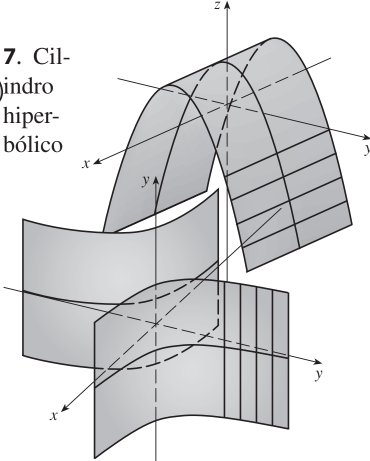
EJERCICIOS 12.6 ■ PÁGINA 839

1. (a) Parábola
(b) Cilindro parabólico con resoluciones paralelas al eje z
(c) Cilindro parabólico con resoluciones paralelas al eje x

3. Cilindro elíptico



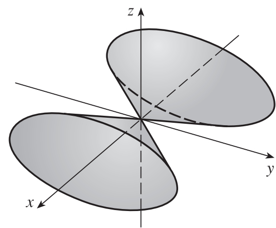
5. Cilindro parabólico



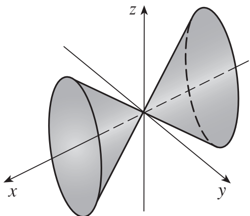
7. Cilindro hiperbólico

9. (a) $x = k$, $y^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbola ($k \neq \pm 1$);
$y = k$, $x^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbola ($k \neq \pm 1$);
$z = k$, $x^2 + y^2 = 1 + k^2$, círculo
(b) El hiperboloide rota de tal forma que tiene como eje el eje y
(c) El hiperboloide se desplaza una unidad en la dirección negativa de y

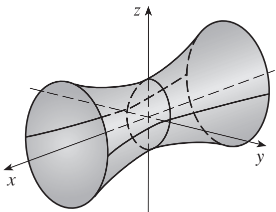
11. Cono elíptico con eje en el eje x



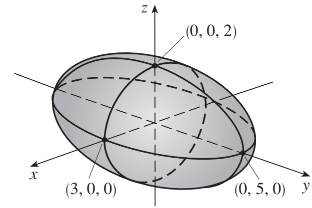
13. Cono elíptico con eje en el eje x



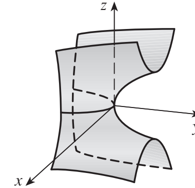
15. Hiperboloide de una hoja con eje en el eje x



17. Elipsoide

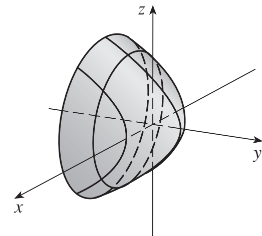


19. Paraboloide hiperbólico



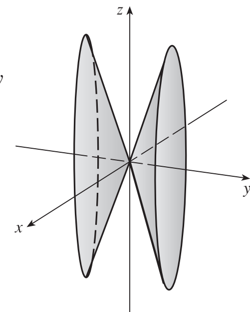
21. VII **23.** II **25.** VI **27.** VIII

29. Paraboloide circular



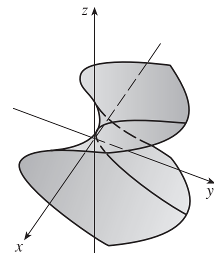
31. $y^2 = x^2 + \dfrac{z^2}{9}$

Cono elíptico con eje en el eje y

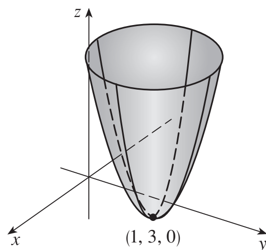


33. $y = z^2 - \dfrac{x^2}{2}$

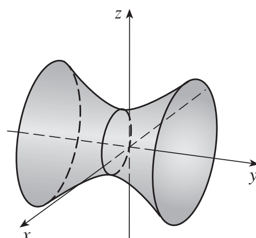
Paraboloide hiperbólica



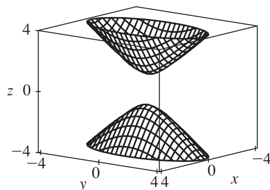
35. $z = (x-1)^2 + (y-3)^2$
Paraboloide circular con vértice (1, 3, 0) y eje en la recta vertical $x = 1$, $y = 3$



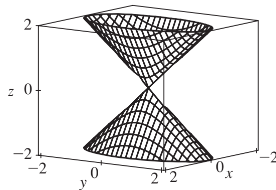
37. $\dfrac{(x-2)^2}{5} - \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{(z-1)^2}{5} = 1$
Hiperboloide de una hoja con centro (2, 0, 1) y eje en la recta horizontal $x = 2$, $z = 1$



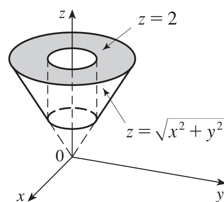
39.



41.



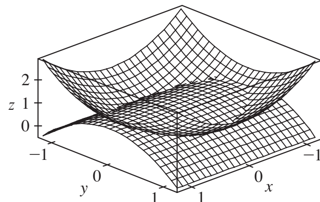
43.



45. $x = y^2 + z^2$ **47.** $-4x = y^2 + z^2$, paraboloide

49. (a) $\dfrac{x^2}{(6378.137)^2} + \dfrac{y^2}{(6378.137)^2} + \dfrac{z^2}{(6356.523)^2} = 1$
(b) Círculo (c) Elipse

53.



REPASO DEL CAPÍTULO 12 ■ PÁGINA 842

Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso
17. Falso **19.** Falso **21.** Verdadero

Ejercicios

1. (a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 69$
(b) $(y-2)^2 + (z-1)^2 = 68$, $x = 0$
(c) Centro $(4, -1, -3)$, radio 5

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\sqrt{2}$; $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$; fuera de la página

5. $-2, -4$ **7.** (a) 2 (b) -2 (c) -2 (d) 0

9. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 71°$ **11.** (a) $\langle 4, -3, 4 \rangle$ (b) $\sqrt{41}/2$

13. ≈ 166 N, ≈ 114 N

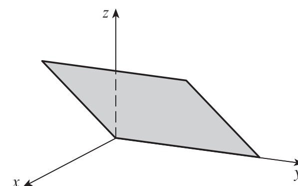
15. $x = 4 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 2 + 3t$

17. $x = -2 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 4 + 5t$

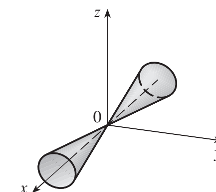
19. $-4x + 3y + z = -14$ **21.** (1, 4, 4) **23.** Sesgada

25. $x + y + z = 4$ **27.** $22/\sqrt{26}$

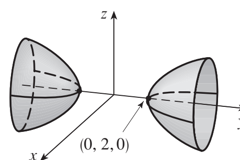
29. Plano



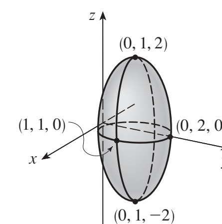
31. Cono



33. Hiperboloide de dos hojas



35. Elipsoide



37. $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 844

1. $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$ m

3. (a) $(x+1)/(-2c) = (y-c)/(c^2-1) = (z-c)/(c^2+1)$
(b) $x^2 + y^2 = t^2 + 1$, $z = t$ (c) $4\pi/3$

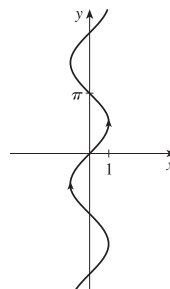
5. 20

CAPÍTULO 13

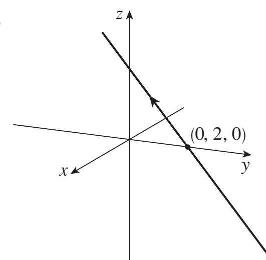
EJERCICIOS 13.1 ■ PÁGINA 853

1. $(-1, 3)$ **3.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ **5.** $\langle -1, \pi/2, 0 \rangle$

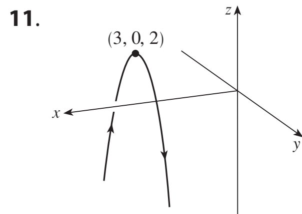
7.



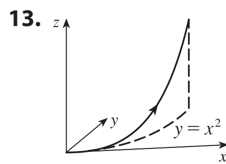
9.



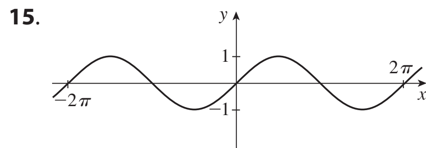
11.

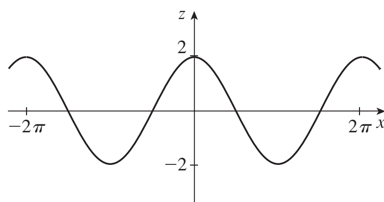


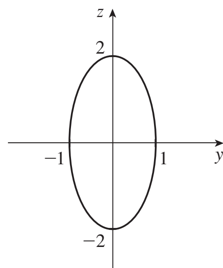
13.

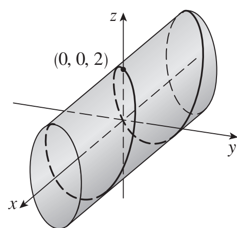


15.







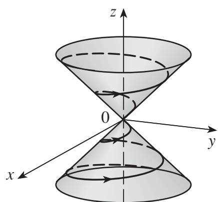


17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{2}t, -1 + \frac{4}{3}t, 1 - \frac{3}{4}t \right\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = \frac{1}{2}t$, $y = -1 + \frac{4}{3}t$, $z = 1 - \frac{3}{4}t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

21. II **23.** V **25.** IV

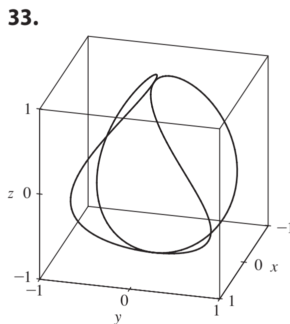
27.



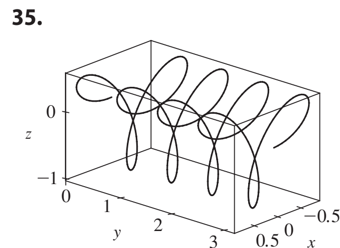
29. $y = e^{x/2}$, $z = e^x$, $z = y^2$

31. (0, 0, 0), (1, 0, 1)

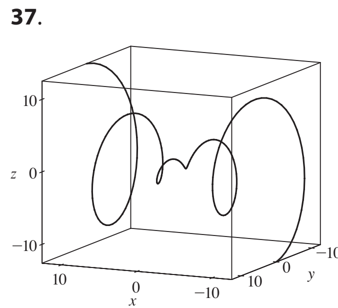
33.



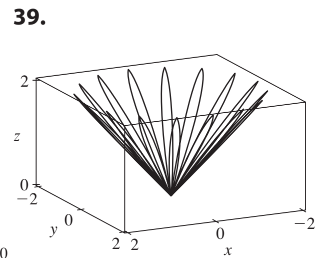
35.



37.



39.

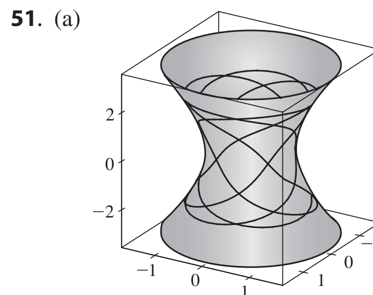


43. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\,\mathbf{k}$

45. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

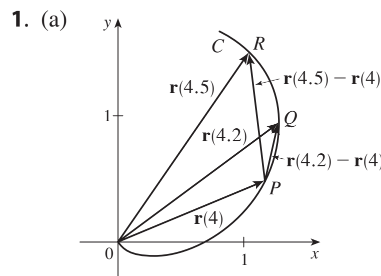
47. $x = 2\cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = 4\cos^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ **49.** Sí

51. (a)

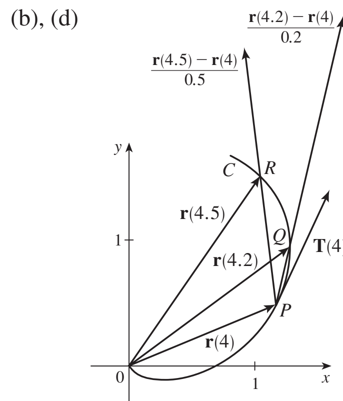


EJERCICIOS 13.2 ■ PÁGINA 860

1. (a)

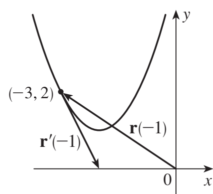


(b), (d)



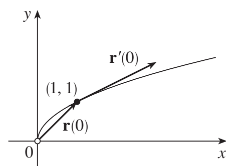
(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4 + h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3. (a), (c)



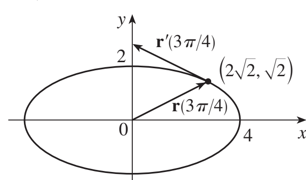
(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t \rangle$

5. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = 2e^{2t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}$

7. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \left\langle \dfrac{1}{2\sqrt{t-2}}, 0, -\dfrac{2}{t^3} \right\rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} - 2t\operatorname{sen}(t^2)\,\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} t\cos t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}'(t) = (t\cos t + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$ **17.** $\left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$ **19.** $\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$, $\langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14} \rangle$, $\langle 0, 2, 6t \rangle$, $\langle 6t^2, -6t, 2 \rangle$

23. $x = 2 + 2t$, $y = 4 + 2t$, $z = 1 + t$

25. $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 1 - t$

27. $\mathbf{r}(t) = (3 - 4t)\,\mathbf{i} + (4 + 3t)\,\mathbf{j} + (2 - 6t)\,\mathbf{k}$

29. $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$

31. $x = -\pi - t$, $y = \pi + t$, $z = -\pi t$

33. 66° **35.** $2\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$

37. $(\ln 2)\,\mathbf{i} + (\pi/4)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}\ln 2\,\mathbf{k}$

39. $e^t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t\ln t - t)\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$

41. $(t^3 + 2)\,\mathbf{i} + (-4t^2 + 4)\,\mathbf{j} + (2t^4 + 5)\,\mathbf{k}$

47. $2t\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2\cos t\operatorname{sen} t$ **49.** 35

EJERCICIOS 13.3 ■ PÁGINA 868

1. 12 **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$

7. 18.6833 **9.** 10.3311 **11.** 42

13. (a) $s(t) = \sqrt{26}\,(t - 1)$;

$$\mathbf{r}(t(s)) = \left(4 - \frac{s}{\sqrt{26}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{4s}{\sqrt{26}} + 1\right)\mathbf{j} + \left(\frac{3s}{\sqrt{26}} + 3\right)\mathbf{k}$$

(b) $\left(4 - \dfrac{4}{\sqrt{26}}, \dfrac{16}{\sqrt{26}} + 1, \dfrac{12}{\sqrt{26}} + 3\right)$

15. $(3\operatorname{sen} 1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle 1/\sqrt{10}, (-3/\sqrt{10})\operatorname{sen} t, (3/\sqrt{10})\cos t \rangle$, $\langle 0, -\cos t, -\operatorname{sen} t \rangle$ (b) $\frac{3}{10}$

19. (a) $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle \sqrt{2}e^t, e^{2t}, -1 \rangle$, $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle 1 - e^{2t}, \sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t \rangle$

(b) $\sqrt{2}e^{2t}/(e^{2t} + 1)^2$

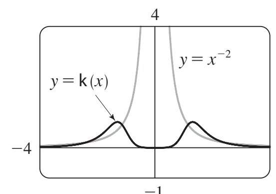
21. $6t^2/(9t^4 + 4t^2)^{3/2}$ **23.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2(3t^2 + 1)^2}$

25. $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

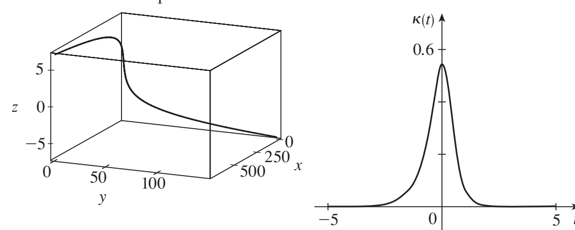
27. $\dfrac{6|x|}{(1 + 9x^4)^{3/2}}$ **29.** $\dfrac{1}{x(2 + \ln x^2 + (\ln x)^2)^{3/2}}$

31. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2}\right)$; se aproxima a 0 **33.** (a) P (b) 1.3, 0.7

35.

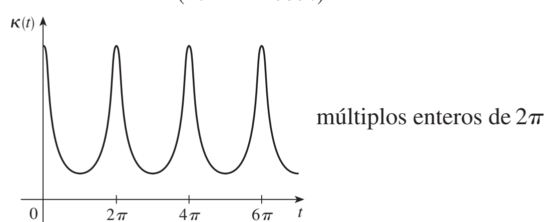


37.



39. a es $y = f(x)$, b es $y = \kappa(x)$

41. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$



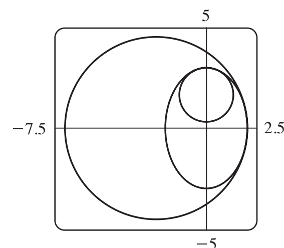
múltiplos enteros de 2π

43. $6t^2/(4t^2 + 9t^4)^{3/2}$

45. $1/(\sqrt{2}e^t)$ **47.** $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right\rangle$, $\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$

49. $x - 2z = -4\pi$, $2x + z = 2\pi$

51. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{81}{4}$, $x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



53. $(-1, -3, 1)$

55. $2x + y + 4z = 7$, $6x - 8y - z = -3$

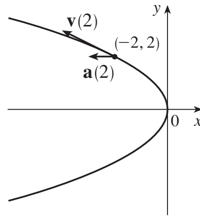
65. $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$ **67.** 2.07×10^{10} Å $\approx$ 2 m

EJERCICIOS 13.4 ■ PÁGINA 878

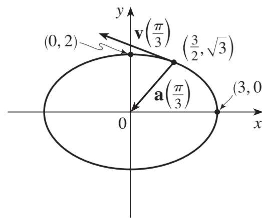
1. (a) $1.8\mathbf{i} - 3.8\mathbf{j} - 0.7\mathbf{k}$, $2.0\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}$, $2.8\mathbf{i} + 1.8\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}$, $2.8\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}$

(b) $2.4\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}$, 2.58

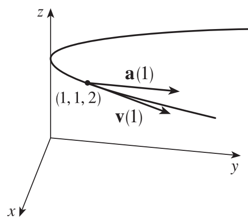
3. $\mathbf{v}(t) = \langle -t, 1 \rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle -1, 0 \rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{t^2 + 1}$



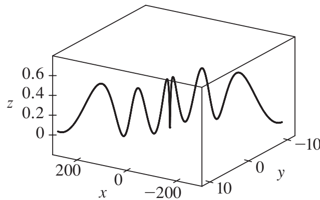
5. $\mathbf{v}(t) = -3 \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = -3 \cos t\, \mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5 \operatorname{sen}^2 t + 4}$



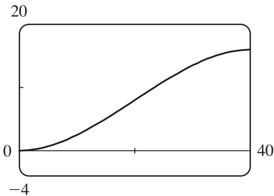
7. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = 2\, \mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$

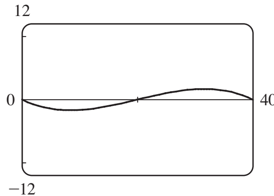


9. $\langle 2t, 3t^2, 2t \rangle$, $\langle 2, 6t, 2 \rangle$, $|t|\sqrt{9t^2 + 8}$
11. $\sqrt{2}\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} - e^{-t}\, \mathbf{k}$, $e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}$, $e^t + e^{-t}$
13. $e^t[(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]$,
$e^t[-2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}]$, $e^t\sqrt{t^2 + 2t + 3}$
15. $\mathbf{v}(t) = (2t + 3)\, \mathbf{i} - \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = (t^2 + 3t)\, \mathbf{i} + (1 - t)\, \mathbf{j} + \left(\frac{1}{3}t^3 + 1\right) \mathbf{k}$
17. (a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right) \mathbf{i} + (t - \operatorname{sen} t + 1)\, \mathbf{j} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\right) \mathbf{k}$
(b)



19. $t = 4$
21. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} - t\, \mathbf{j} + \frac{5}{2}t^2\, \mathbf{k}$, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{25t^2 + 2}$
23. (a) ≈ 3535 m (b) ≈ 1531 m (c) 200 m/s
25. ≈ 30 m/s **27.** ≈ 198 m/s
29. $13.0° < \theta < 36.0°$, $55.4° < \theta < 85.5°$
31. $(250, -50, 0)$; $10\sqrt{93} \approx 96.4$ m/s
33. (a) 16 m (b) $\approx 23.6°$ río arriba





35. La trayectoria está contenida en un círculo que se sitúa en un plano perpendicular a **c** con centro en una recta que pasa por el origen en la dirección de **c**.

37. $\dfrac{4 + 18t^2}{\sqrt{4 + 9t^2}}, \dfrac{6t}{\sqrt{4 + 9t^2}}$ **39.** 0, 1 **41.** $\dfrac{7}{\sqrt{30}}, \sqrt{\dfrac{131}{30}}$
43. 4.5 cm/s², 9.0 cm/s² **45.** $t = 1$

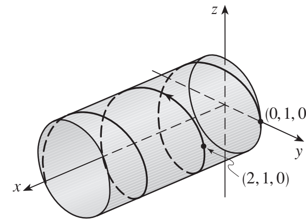
REPASO DEL CAPÍTULO 13 ■ PÁGINA 881

Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Verdadero

Ejercicios

1. (a)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \pi \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{j} + \pi \cos \pi t\, \mathbf{k}$,
$\mathbf{r}''(t) = -\pi^2 \cos \pi t\, \mathbf{j} - \pi^2 \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{k}$
3. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\, \mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + (5 - 4 \cos t)\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
5. $\frac{1}{3}\mathbf{i} - (2/\pi^2)\mathbf{j} + (2/\pi)\mathbf{k}$ **7.** 86.631 **9.** 90°
11. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\langle 3 \operatorname{sen} t, -3 \cos t, 2 \rangle$ (b) $\langle \cos t, \operatorname{sen} t, 0 \rangle$
(c) $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\langle -2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t, 3 \rangle$
(d) $\dfrac{3}{13 \operatorname{sen} t \cos t}$ o $\dfrac{3}{13} \sec t \csc t$
13. $12/17^{3/2}$ **15.** $x - 2y + 2\pi = 0$
17. $\mathbf{v}(t) = (1 + \ln t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$,
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 2 \ln t + (\ln t)^2 + e^{-2t}}$, $\mathbf{a}(t) = (1/t)\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}$
19. $\mathbf{r}(t) = (t^3 + t)\, \mathbf{i} + (t^4 - t)\, \mathbf{j} + \left(3t - t^3\right) \mathbf{k}$
21. $\approx 37.3°$, ≈ 157.4 m
23. (c) $-2e^{-t}\, \mathbf{v}_d + e^{-t}\, \mathbf{R}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 884

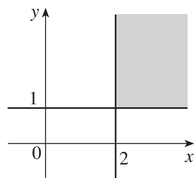
1. (a) $\mathbf{v} = \omega R(-\operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{i} + \cos \omega t\, \mathbf{j})$ (c) $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$
3. (a) 90°, $v_0^2/(2g)$
5. (a) ≈ 0.25 m a la derecha de la orilla de la mesa, ≈ 4.9 m/s
(b) $\approx 5.9°$ (c) ≈ 0.56 m a la derecha de la orilla de la mesa
7. 56°
9. $(a_2b_3 - a_3b_2)(x - c_1) + (a_3b_1 - a_1b_3)(y - c_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)(z - c_3) = 0$

CAPÍTULO 14

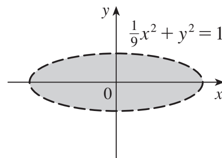
EJERCICIOS 14.1 ■ PÁGINA 899

1. (a) −27; una temperatura de −15 °C con viento soplando a 40 km/h parece equivalente a alrededor de −27 °C sin viento.
(b) Cuando la temperatura es de −20 °C, ¿qué velocidad del viento da un viento frío de −30 °C? 20 km/h
(c) Con una velocidad de viento de 20 km/h, ¿qué temperatura da un frío de viento de −49 °C? −35 °C

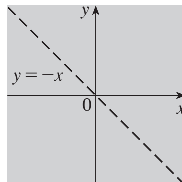
(d) Una función de velocidad de viento que dé valores de viento-frío cuando la temperatura es de -5 °C
(e) Una función de temperatura que dé valores de viento-frío cuando la velocidad del viento es de 50 km/h
3. $\approx$94.2; la producción anual del fabricante se valúa en \$94.2 millones cuando se gastan 120 000 horas de trabajo y se invierten \$20 millones en capital.
5. (a) $\approx$20.5; el área de una persona de 70 pulgadas de altura que pesa 160 libras es de aproximadamente 20.5 pies cuadrados.
7. (a) 7.7; un viento que sopla a 80 km/h en mar abierto durante 15 h creará olas de alrededor de 7.7 m de alto.
(b) $f(60, t)$ es una función de t que da las alturas de olas producidas por vientos de 60 km/h que soplan durante t horas.
(c) $f(v, 30)$ es una función de v que da las alturas de olas producidas por vientos de velocidad v que soplan durante 30 horas.
9. (a) 1 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[-1, 1]$
11. (a) 3
(b) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$, interior de una esfera de radio 2, centro en el origen, en el primer octante
13. $\{(x, y) \mid x \geqslant 2, y \geqslant 1\}$



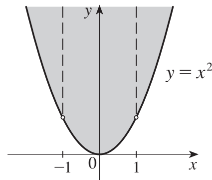
15. $\{(x, y) \mid \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$



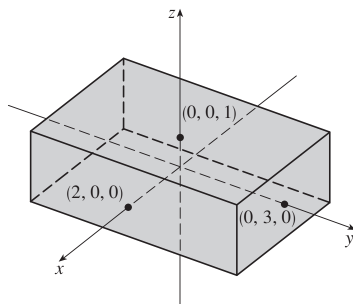
17. $\{(x, y) \mid y \neq -x\}$



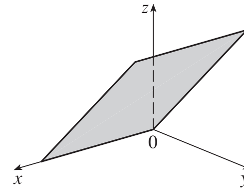
19. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2, x \neq \pm 1\}$



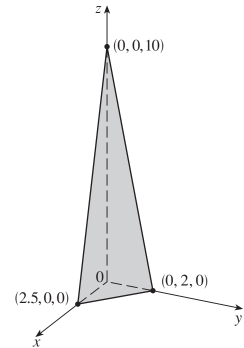
21. $\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2, -3 \leqslant y \leqslant 3, -1 \leqslant z \leqslant 1\}$



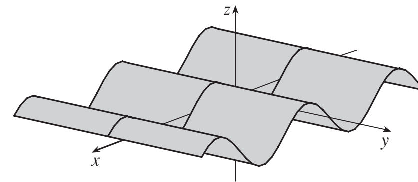
23. $z = y$, plano que pasa por el eje x



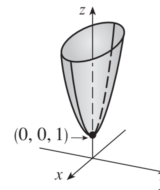
25. $4x + 5y + z = 10$, plano



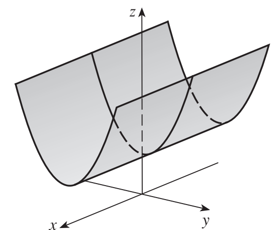
27. $z = \operatorname{sen} x$, cilindro



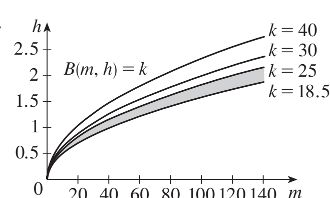
29. $z = x^2 + 4y^2 + 1$, paraboloide elíptico



31. $z = y^2 + 1$,
cilindro parabólico

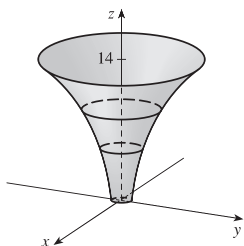


33. $\approx$56, $\approx$35 **35.** 11 °C, 19.5 °C **37.** Pronunciado; casi plano
39.

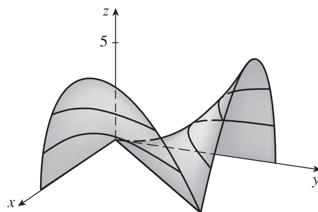


No

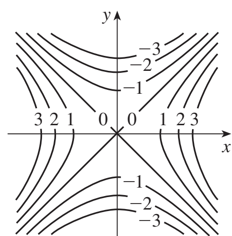
41.



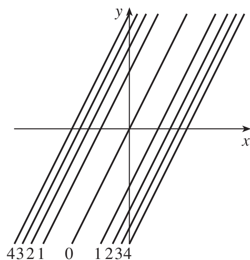
43.



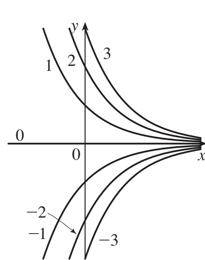
45. $x^2 - y^2 = k$



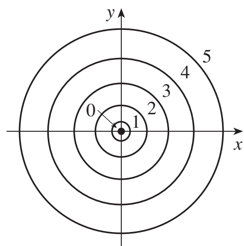
47. $(y - 2x)^2 = k$



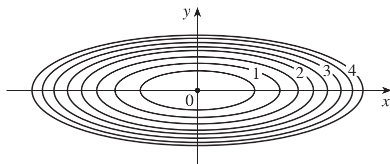
49. $y = ke^{-x}$

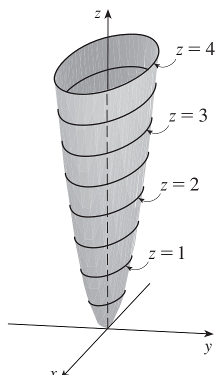


51. $x^2 + y^2 = k^3 \, (k \geqslant 0)$

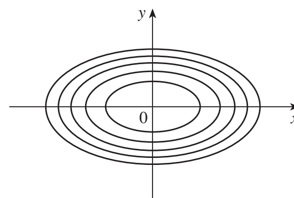


53. $x^2 + 9y^2 = k$

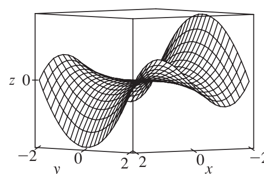




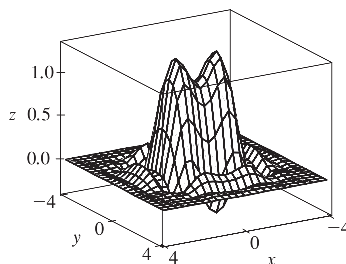
55.



57.



59.



61. (a) C (b) II **63.** (a) F (b) I

65. (a) B (b) VI **67.** Familia de planos paralelos

69. Familia de cilindros circulares con eje en el eje x $(k > 0)$

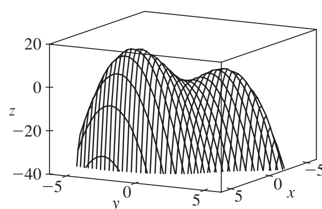
71. (a) Desplace la gráfica de f 2 unidades hacia arriba

(b) Prolongue verticalmente la gráfica de f por un factor de 2

(c) Refleje la gráfica de f a través del plano xy

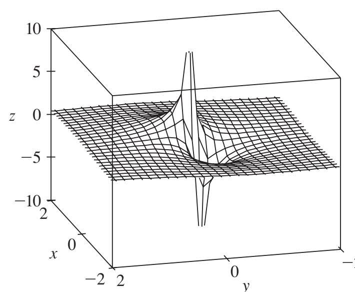
(d) Refleje la gráfica de f a través del plano xy y después desplácela dos unidades hacia arriba

73.



f parece tener un valor máximo de alrededor de 15. Hay dos puntos máximos locales pero ningún punto mínimo local.

75.

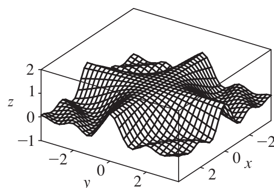


Los valores de la función se aproximan a 0 cuando x, y crecen; cuando (x, y) se aproximan al origen, f se aproxima a $\pm\infty$ o 0, dependiendo de la dirección de la aproximación.

77. Si $c = 0$, la gráfica es una superficie cilíndrica. Para $c > 0$, las curvas de nivel son elipses. Las curvas de la gráfica se mueven hacia arriba conforme se alejan del origen, y lo pronunciado aumenta cuando c aumenta. Para $c < 0$, las curvas de nivel son hipérbolas. Las curvas de la gráfica están hacia arriba en la dirección de y y hacia bajo, aproximándose al plano xy, en la dirección de x, lo que da una apariencia en forma de silla cerca de (0, 0, 1).
79. $c = -2, 0, 2$ **81.** (b) $y = 0.75x + 0.01$

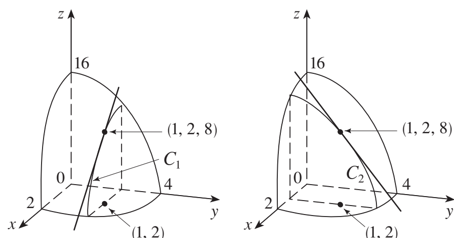
EJERCICIOS 14.2 ■ PÁGINA 910

1. Nada; si f es continua. $f(3, 1) = 6$ **3.** $-\frac{5}{2}$
5. 56 **7.** $\pi/2$ **9.** No existe **11.** No existe
13. 0 **15.** No existe **17.** No existe **19.** $\sqrt{3}$
21. No existe
23. La gráfica muestra que la función se aproxima a números diferentes a lo largo de rectas diferentes.
25. $h(x, y) = (2x + 3y - 6)^2 + \sqrt{2x + 3y - 6}$; $\{(x, y) \mid 2x + 3y \geqslant 6\}$
27. A lo largo de la recta $y = x$ **29.** $\mathbb{R}^2$
31. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ **33.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$
35. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$
37. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ **39.** 0 **41.** -1
43. f es continua en $\mathbb{R}^2$

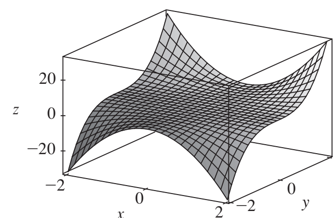


EJERCICIOS 14.3 ■ PÁGINA 923

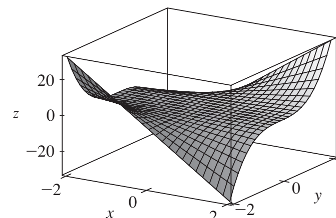
1. (a) La razón de cambio de la temperatura cuando la longitud varía, con latitud y tiempo fijos; la razón de cambio cuando solo la latitud varía; la razón de cambio cuando solo el tiempo varía
(b) Positivo, negativo, positivo
3. (a) $f_T(-15, 30) \approx 1.3$; para una temperatura de -15 °C y velocidad de viento de 30 km/h, el índice de viento-frío aumenta 1.3 °C por cada grado en que aumenta la temperatura. $f_v(-15, 30) \approx -0.15$; para una temperatura de -15 °C y velocidad de viento de 30 km/h, el índice de viento-frío baja 0.15 °C por cada km/h en que aumenta la velocidad del viento.
(b) Positivo, negativo
5. (a) Positivo (b) Negativo
7. (a) Positivo (b) Negativo
9. $c = f$, $b = f_x$, $a = f_y$
11. $f_x(1, 2) = -8$ = pendiente de C_1, $f_y(1, 2) = -4$ = pendiente de C_2



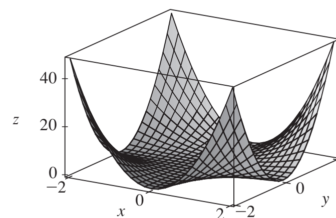
13.



$f(x, y) = x^2y^3$



$f_x(x, y) = 2xy^3$



$f_y(x, y) = 3x^2y^2$

15. $f_x(x, y) = 4x^3 + 5y^3$ $f_y(x, y) = 15xy^2$
17. $f_x(x, t) = -t^2e^{-x}$, $f_t(x, t) = 2te^{-x}$
19. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x + t^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{2t}{x + t^2}$
21. $f_x(x, y) = 1/y$, $f_y(x, y) = -x/y^2$
23. $f_x(x, t) = -\pi e^{-t} \operatorname{sen} \pi x$, $f_t(x, t) = -e^{-t} \cos \pi x$
25. $\partial z/\partial x = 20(2x + 3y)^9$, $\partial z/\partial y = 30(2x + 3y)^9$
27. $\partial w/\partial \alpha = \cos \alpha \cos \beta$, $\partial w/\partial \beta = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
29. $F_x(x, y) = \cos(e^x)$, $F_y(x, y) = -\cos(e^y)$
31. $f_x = 3x^2yz^2$, $f_y = x^3z^2 + 2z$, $f_z = 2x^3yz + 2y$
33. $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z)$, $\partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z)$, $\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$
35. $\partial u/\partial x = y \operatorname{sen}^{-1}(yz)$, $\partial u/\partial y = x \operatorname{sen}^{-1}(yz) + xyz/\sqrt{1 - y^2z^2}$, $\partial u/\partial z = xy^2/\sqrt{1 - y^2z^2}$
37. $h_x = 2xy \cos(z/t)$, $h_y = x^2 \cos(z/t)$, $h_z = (-x^2y/t) \operatorname{sen}(z/t)$, $h_t = (x^2yz/t^2) \operatorname{sen}(z/t)$
39. $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
41. 1 **43.** $\frac{1}{6}$ **45.** $f_x(x, y) = y^2 - 3x^2y$, $f_y(x, y) = 2xy - x^3$
47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{3z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{3z}$
49. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{e^z - xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{e^z - xy}$

51. (a) $f'(x), g'(y)$ (b) $f'(x+y), f'(x+y)$

53. $f_{xx} = 12x^2y - 12xy^2, f_{xy} = 4x^3 - 12x^2y = f_{yx}, f_{yy} = -4x^3$

55. $z_{xx} = \dfrac{8y}{(2x+3y)^3}, z_{xy} = \dfrac{6y-4x}{(2x+3y)^3} = z_{yx},$

$z_{yy} = -\dfrac{12x}{(2x+3y)^3}$

57. $v_{ss} = 2\cos(s^2 - t^2) - 4s^2 \operatorname{sen}(s^2 - t^2),$
$v_{st} = 4st \operatorname{sen}(s^2 - t^2) = v_{ts},$
$v_{tt} = -2\cos(s^2 - t^2) - 4t^2 \operatorname{sen}(s^2 - t^2)$

63. $24xy^2 - 6y, 24x^2y - 6x$ **65.** $(2x^2y^2z^5 + 6xyz^3 + 2z)e^{xyz^2}$

67. $\frac{3}{4}v(u+v^2)^{-5/2}$ **69.** $\theta e^{r\theta}(2\operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta + r\theta\operatorname{sen}\theta)$

71. $6yz^2$ **73.** $\approx 12.2, \approx 16.8, \approx 23.25$ **83.** R^2/R_1^2

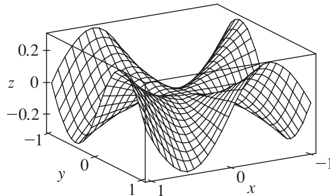
87. $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V - nb}{nR}, \dfrac{\partial P}{\partial V} = \dfrac{2n^2a}{V^3} - \dfrac{nRT}{(V-nb)^2}$

91. (a) ≈ 0.0545; para una persona de 70 pulgadas de altura que pesa 160 libras, un aumento de peso causa que el área aumente a razón de alrededor de 0.0545 pies cuadrados por libra.
(b) ≈ 0.213; para una persona de 70 pulgadas de altura que pesa 160 libras, un aumento de altura (sin ningún cambio en el peso) causa que el área aumente a razón de alrededor de 0.213 pies cuadrados por pulgada de altura.

93. $\partial P/\partial v = 3Av^2 - \dfrac{B(mg/x)^2}{v^2}$ es la razón de cambio de la fuerza necesaria durante el modo de aleteo con respecto a la velocidad del ave cuando la masa y fracción de tiempo de aleteo se mantienen constantes;
$\partial P/\partial x = -\dfrac{2Bm^2g^2}{x^3v}$ es la razón a la que la fuerza cambia cuando solo varía la fracción de tiempo pasada en modo de aleteo;
$\partial P/\partial m = \dfrac{2Bmg^2}{x^2v}$ es la razón de cambio de la fuerza cuando solo varía la masa.

97. No **99.** $x = 1 + t, y = 2, z = 2 - 2t$ **103.** -2

105. (a)



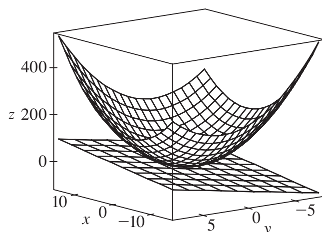
(b) $f_x(x,y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, f_y(x,y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

(c) 0, 0 (e) No, ya que f_{xy} y f_{yx} no son continuas.

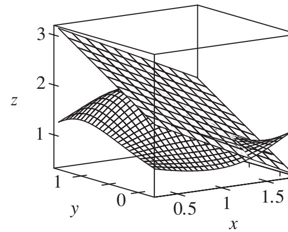
EJERCICIOS 14.4 ■ PÁGINA 934

1. $z = 4x - y - 6$ **3.** $z = x - y + 1$ **5.** $x + y - 2z = 0$

7.



9.



11. $6x + 4y - 23$ **13.** $2x + y - 1$

15. $2x + 2y + \pi - 4$ **19.** 6.3

21. $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z; 6.9914$ **23.** $2T + 0.3H - 40.5$; 44.4 °C

25. $dz = -2e^{-2x}\cos 2\pi t\, dx - 2\pi e^{-2x}\operatorname{sen} 2\pi t\, dt$

27. $dm = 5p^4q^3\, dp + 3p^5q^2\, dq$

29. $dR = \beta^2\cos\gamma\, d\alpha + 2\alpha\beta\cos\gamma\, d\beta - \alpha\beta^2\operatorname{sen}\gamma\, d\gamma$

31. $\Delta z = 0.9225, dz = 0.9$ **33.** 5.4 cm^2 **35.** 16 cm^3

37. $\approx -0.0165mg$; decremento **39.** $\frac{1}{17} \approx 0.059\ \Omega$

41. (a) $0.8264m - 34.56h + 38.02$ (b) 18.801

43. $\varepsilon_1 = \Delta x, \varepsilon_2 = \Delta y$

EJERCICIOS 14.5 ■ PÁGINA 943

1. $2t(y^3 - 2xy + 3xy^2 - x^2)$

3. $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cos x\cos y + \dfrac{1}{t^2}\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 5(x-y)^4(2st - t^2), \partial z/\partial t = 5(x-y)^4(s^2 - 2st)$

9. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{3\operatorname{sen} t - 2t\operatorname{sen} s}{3x + 2y}, \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{3s\cos t + 2\cos s}{3x + 2y}$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t\cos\theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\operatorname{sen}\theta\right),$

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$

13. 42 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s},$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

19. $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x},$

$\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial T}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial T}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial y} + \dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y},$

$\dfrac{\partial T}{\partial z} = \dfrac{\partial T}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\partial T}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial z} + \dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial z}$

21. 85, 178, 54 **23.** $2\pi, -2\pi$

25. $\frac{5}{144}, -\frac{5}{96}, \frac{5}{144}$ **27.** $\dfrac{2x + y\operatorname{sen} x}{\cos x - 2y}$

29. $\dfrac{1 + x^4y^2 + y^2 + x^4y^4 - 2xy}{x^2 - 2xy - 2x^5y^3}$

31. $-\dfrac{x}{3z}, -\dfrac{2y}{3z}$ **33.** $\dfrac{yz}{e^z - xy}, \dfrac{xz}{e^z - xy}$

35. 2°C/s **37.** ≈ -0.33 m/s por minuto

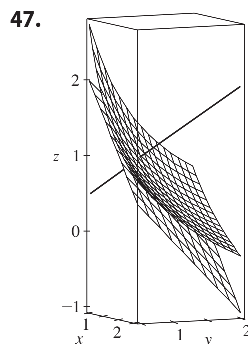
39. (a) 6 m^3/s (b) 10 m^2/s (c) 0 m/s

41. ≈ -0.27 L/s **43.** $-1/(12\sqrt{3})$ rad/s

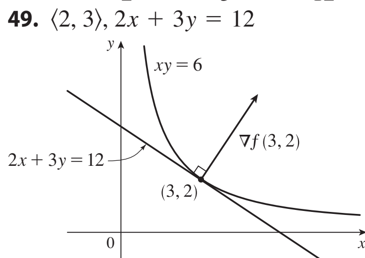
45. (a) $\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial y)\,\text{sen}\,\theta$,
$\partial z/\partial\theta = -(\partial z/\partial x)\,r\,\text{sen}\,\theta + (\partial z/\partial y)\,r\cos\theta$
51. $4rs\,\partial^2 z/\partial x^2 + (4r^2 + 4s^2)\partial^2 z/\partial x\,\partial y + 4rs\,\partial^2 z/\partial y^2 + 2\,\partial z/\partial y$

EJERCICIOS 14.6 ■ PÁGINA 956

1. ≈ -0.08 mb/km **3.** ≈ 0.778 **5.** $\sqrt{2}/2$
7. (a) $\nabla f(x, y) = (1/y)\mathbf{i} - (x/y^2)\mathbf{j}$ (b) $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (c) -1
9. (a) $\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz}\rangle$ (b) $\langle 1, 12, 0\rangle$ (c) $-\frac{22}{3}$
11. $\dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$ **13.** $7/(2\sqrt{5})$ **15.** 1 **17.** $4/\sqrt{30}$
19. $\frac{2}{5}$ **21.** $\sqrt{65}, \langle 1, 8\rangle$ **23.** $1, \langle 0, 1\rangle$
25. $\frac{3}{4}, \langle 1, -2, -2\rangle$ **27.** (b) $\langle -12, 92\rangle$
29. Todos los puntos en la recta $y = x + 1$ **31.** (a) $-40/(3\sqrt{3})$
33. (a) $32/\sqrt{3}$ (b) $\langle 38, 6, 12\rangle$ (c) $2\sqrt{406}$
35. $\frac{327}{13}$ **39.** $\frac{774}{25}$
41. (a) $x + y + z = 11$ (b) $x - 3 = y - 3 = z - 5$
43. (a) $x + 2y + 6z = 12$ (b) $x - 2 = \dfrac{y - 2}{2} = \dfrac{z - 1}{6}$
45. (a) $2x + 3y + 12z = 24$ (b) $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z - 1}{12}$
47.



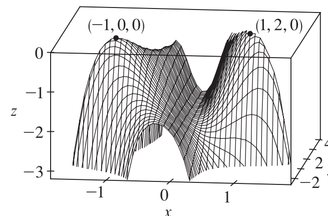
49. $\langle 2, 3\rangle$, $2x + 3y = 12$



55. No **59.** $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{25}{8}\right)$
63. $x = -1 - 10t$, $y = 1 - 16t$, $z = 2 - 12t$
65. $(-1, 0, 1)$; $\approx 7.8°$
69. Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, entonces $af_x + bf_y$ y $cf_x + df_y$ son conocidas, así que se despeja f_x y f_y en las ecuaciones lineales.

EJERCICIOS 14.7 ■ PÁGINA 967

1. (a) f tiene un mínimo local en (1, 1).
(b) f tiene un punto silla en (1, 1).
3. Mínimo local en (1, 1), punto silla en (0, 0)
5. Máximo $f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 11$
7. Máximo $f(0, 0) = 2$, mínimo $f(0, 4) = -30$,
puntos silla en $(2, 2)$, $(-2, 2)$
9. Mínimos $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}$,
punto silla en (0, 0)
11. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimo $f(1, 0) = -2$,
puntos silla en $(0, \pm 1)$
13. Máximo $f(0, -1) = 2$, mínimo $f(\pm 1, 1) = -3$,
puntos silla en $(0, 1)$, $(\pm 1, -1)$
15. Ninguno
17. Mínimos $f(x, y) = 1$ en todos los puntos (x, y) en los ejes x y y
19. Mínimos $f(0, 1) = f(\pi, -1) = f(2\pi, 1) = -1$,
puntos silla en $(\pi/2, 0)$, $(3\pi/2, 0)$
23. Mínimos $f(1, \pm 1) = f(-1, \pm 1) = 3$
25. Máximo $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$,
mínimo $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$, punto silla en (π, π)
27. Mínimos $f(0, -0.794) \approx -1.191$, $f(\pm 1.592, 1.267) \approx -1.310$
puntos silla $(\pm 0.720, 0.259)$, puntos
más bajos $(\pm 1.592, 1.267, -1.310)$
29. Máximo $f(0.170, -1.215) \approx 3.197$,
mínimos $f(-1.301, 0.549) \approx -3.145$, $f(1.131, 0.549) \approx -0.701$,
puntos silla $(-1.301, -1.215)$, $(0.170, 0.549)$, $(1.131, -1.215)$,
ningún punto más alto o más bajo
31. Máximo $f(0, \pm 2) = 4$, mínimo $f(1, 0) = -1$
33. Máximo $f(\pm 1, 1) = 7$, mínimo $f(0, 0) = 4$
35. Máximo $f(0, 3) = f(2, 3) = 7$, mínimo $f(1, 1) = -2$
37. Máximo $f(3, 0) = 83$, mínimo $f(1, 1) = 0$
39.



41. $2/\sqrt{3}$ **43.** $(2, 1, \sqrt{5})$, $(2, 1, -\sqrt{5})$ **45.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$
47. $8r^3/(3\sqrt{3})$ **49.** $\frac{4}{3}$ **51.** Cubo, longitud de arista $c/12$
53. Base cuadrada de lado 40 cm, altura 20 cm **55.** $L^3/(3\sqrt{3})$
57. (a) $H = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - (1 - p_1 - p_2)\ln(1 - p_1 - p_2)$
(b) $\{(p_1, p_2) \mid 0 < p_1 < 1, p_2 < 1 - p_1\}$
(c) $\ln 3$; $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

EJERCICIOS 14.8 ■ PÁGINA 977

1. $\approx 59, 30$
3. Máximo $f(\pm 1, 0) = 1$, mínimo $f(0, \pm 1) = -1$
5. Máximo $f(1, 2) = f(-1, -2) = 2$,
mínimo $f(1, -2) = f(-1, 2) = -2$
7. Mínimo $f(4, 4, 4) = 48$
9. Máximo $f(1, \pm\sqrt{2}, 1) = f(-1, \pm\sqrt{2}, -1) = 2$,
mínimo $f(1, \pm\sqrt{2}, -1) = f(-1, \pm\sqrt{2}, 1) = -2$
11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1
13. Máximo $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$,
mínimo $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2$
15. Mínimo $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$
17. Máximo $f(0, 1, \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$,
mínimo $f(0, 1, -\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$
19. Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$,
mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$
21. Máximo $f(3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}) = 9 + 12\sqrt{2}$,
mínimo $f(-2, 2) = -8$
23. Máximo $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{1/4}$,
mínimo $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$
31–43. Véanse los ejercicios 41–55 de la sección 14.7.
45. Más cercano $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, más lejano $(-1, -1, 2)$
47. Máximo ≈ 9.7938, mínimo ≈ -5.3506
49. (a) c/n (b) Cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

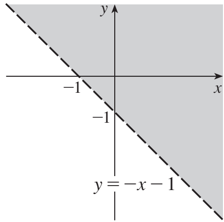
REPASO DEL CAPÍTULO 14 ■ PÁGINA 982

Examen verdadero-falso

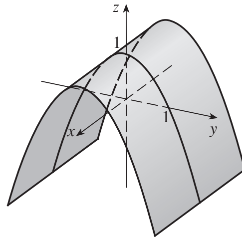
1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Falso
11. Verdadero

Ejercicios

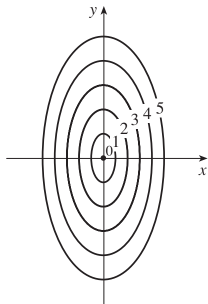
1. $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$



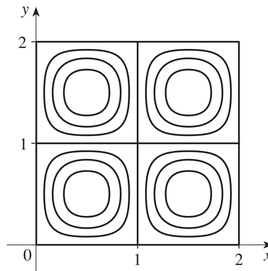
3.



5.



7.



9. $\frac{2}{3}$
11. (a) $\approx 3.5°\text{C/m}, -3.0°\text{C/m}$
(b) $\approx 0.35°\text{C/m}$ por la ecuación 14.6.9 (la definición 14.6.2 da $\approx 1.1°\text{C/m}$.)
(c) -0.25
13. $f_x = 32xy(5y^3 + 2x^2y)^7$ $f_y = (16x^2 + 120y^2)(5y^3 + 2x^2y)^7$
15. $F_\alpha = \dfrac{2\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2} + 2\alpha \ln(\alpha^2 + \beta^2), F_\beta = \dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$
17. $S_u = \arctan(v\sqrt{w}), S_v = \dfrac{u\sqrt{w}}{1 + v^2w}, S_w = \dfrac{uv}{2\sqrt{w}(1 + v^2w)}$
19. $f_{xx} = 24x, f_{xy} = -2y = f_{yx}, f_{yy} = -2x$
21. $f_{xx} = k(k-1)x^{k-2}y^lz^m, f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx}$,
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^lz^{m-1} = f_{zx}, f_{yy} = l(l-1)x^ky^{l-2}z^m$,
$f_{yz} = lmx^ky^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}, f_{zz} = m(m-1)x^ky^lz^{m-2}$
25. (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$
27. (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{-6}$
29. (a) $x + 2y + 5z = 0$
(b) $x = 2 + t, y = -1 + 2t, z = 5t$
31. $(2, \frac{1}{2}, -1), (-2, -\frac{1}{2}, 1)$
33. $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; 38.656
35. $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p\cos p + \operatorname{sen} p)$
37. $-47, 108$
43. $\langle 2xe^{yz^2}, x^2z^2e^{yz^2}, 2x^2yze^{yz^2}\rangle$ **45.** $-\frac{4}{5}$
47. $\sqrt{145}/2, \langle 4, \frac{9}{2}\rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nudos/milla
51. Mínimo $f(-4, 1) = -11$
53. Máximo $f(1, 1) = 1$; puntos silla $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$
55. Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$
57. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimos $f(1, \pm 1) = -3$, puntos silla $(-1, \pm 1), (1, 0)$
59. Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$,
mínimo $f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$
61. Máximo 1, mínimo -1
63. $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4}), (\pm 3^{-1/4}, -3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$
65. $P(2 - \sqrt{3}), P(3 - \sqrt{3})/6, P(2\sqrt{3} - 3)/3$

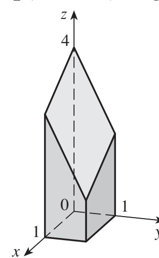
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 985

1. $L^2W^2, \frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sí
7. $\sqrt{3}/2, 3/\sqrt{2}$

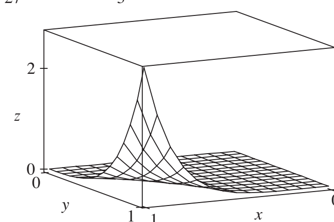
CAPÍTULO 15

EJERCICIOS 15.1 ■ PÁGINA 999

1. (a) 288 (b) 144 **3.** (a) 0.990 (b) 1.151
5. $U < V < L$ **7.** (a) ≈ 248 (b) ≈ 15.5
9. $24\sqrt{2}$ **11.** 3 **13.** $2 + 8y^2, 3x + 27x^2$
15. 222 **17.** $\frac{5}{2} - e^{-1}$ **19.** 2
21. $\frac{15}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 4$ o $\frac{21}{2}\ln 2$ **23.** 6
25. π **27.** 2 **29.** $9\ln 2$
31. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **33.** 0
35.



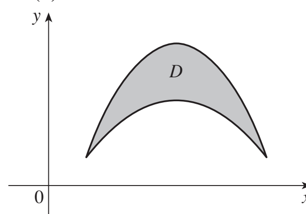
37. 51 **39.** $\frac{166}{27}$ **41.** $\frac{8}{3}$ **43.** 2
45. $21e - 57$



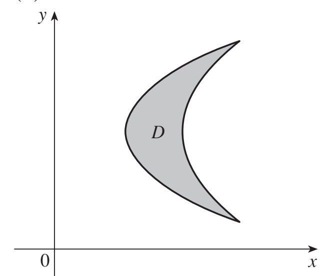
47. $\frac{5}{6}$ **49.** 0
51. El teorema de Fubini no se aplica. El integrando tiene una discontinuidad infinita en el origen.

EJERCICIOS 15.2 ■ PÁGINA 1008

1. $\frac{868}{3}$ **3.** $\frac{1}{6}(e - 1)$ **5.** $\frac{1}{3}$ sen 1
7. $\frac{1}{4}\ln 17$ **9.** $\frac{1}{2}(1 - e^{-9})$
11. (a)



(b)



13. Tipo I: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$, tipo II: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1\}$; $\frac{1}{3}$

15. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\, dy\, dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\, dy\, dx = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} y\, dx\, dy = \frac{9}{4}$

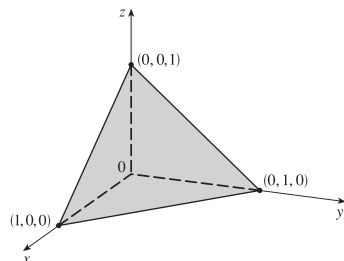
17. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **19.** $\frac{11}{3}$ **21.** 0 **23.** $\frac{3}{4}$

25. $\frac{31}{8}$ **27.** $\frac{16}{3}$ **29.** 6 **31.** $\frac{1}{3}$

33. 0, 1.213; 0.713 **35.** $\frac{64}{3}$

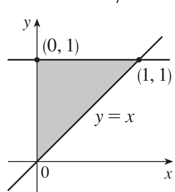
37. $\dfrac{10}{3\sqrt{2}}$ o $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

39.

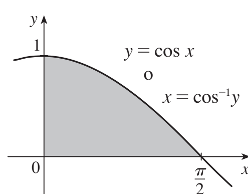


41. 13 984 735 616/14 549 535 **43.** $\pi/2$

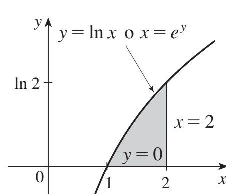
45. $\int_0^1 \int_x^1 f(x, y)\, dy\, dx$



47. $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} f(x, y)\, dx\, dy$



49. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x, y)\, dx\, dy$



51. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ **53.** $\frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1)$

55. $\frac{1}{3}\ln 9$ **57.** 1

59. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi \leqslant \iint_S \sqrt{4 - x^2y^2}\, dA \leqslant \pi$

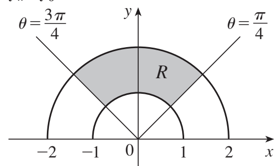
61. $\frac{3}{4}$ **65.** 9π **67.** $a^2b + \frac{3}{2}ab^2$ **69.** $\pi a^2 b$

EJERCICIOS 15.3 ■ PÁGINA 1014

1. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^4 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

3. $\int_\pi^{2\pi} \int_0^1 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

5. $3\pi/4$



7. $\frac{1250}{3}$ **9.** $(\pi/4)(\cos 1 - \cos 9)$

11. $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$ **15.** $\pi/12$

17. $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **19.** $\frac{625}{2}\pi$ **21.** 4π **23.** $\frac{4}{3}\pi a^3$

25. $(\pi/3)(2 - \sqrt{2})$ **27.** $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $(\pi/4)(1 - e^{-4})$ **31.** $\frac{1}{120}$ **33.** 4.5951

35. 37.5π m^3 **37.** $2/(a + b)$ **39.** $\frac{15}{16}$

41. (a) $\sqrt{\pi}/4$ (b) $\sqrt{\pi}/2$

EJERCICIOS 15.4 ■ PÁGINA 1024

1. 285 C **3.** $42k$, $\left(2, \frac{85}{28}\right)$ **5.** 6, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

7. $\frac{8}{15}k$, $\left(0, \frac{4}{7}\right)$

9. $\frac{1}{8}(1 - 3e^{-2})$, $\left(\dfrac{e^2 - 5}{e^2 - 3}, \dfrac{8(e^3 - 4)}{27(e^3 - 3e)}\right)$

11. $\left(\frac{3}{8}, 3\pi/16\right)$ **13.** $(0, 45/(14\pi))$

15. $(2a/5, 2a/5)$ si el vértice es (0, 0) y los lados están a lo largo de ejes positivos

17. $409.2k$, $182k$, $591.2k$

19. $\frac{64}{315}k$, $\frac{8}{105}k$, $\frac{88}{315}k$

21. $\rho bh^3/3$, $\rho b^3h/3$; $b/\sqrt{3}$, $h/\sqrt{3}$

23. $\rho a^4\pi/16$, $\rho a^4\pi/16$; $a/2$, $a/2$

25. $m = 3\pi/64$, $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{16384\sqrt{2}}{10395\pi}, 0\right)$,

$I_x = \dfrac{5\pi}{384} - \dfrac{4}{105}$, $I_y = \dfrac{5\pi}{384} + \dfrac{4}{105}$, $I_0 = \dfrac{5\pi}{192}$

27. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0.375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0.1042$

29. (b) (i) $e^{-0.2} \approx 0.8187$ (ii) $1 + e^{-1.8} - e^{-0.8} - e^{-1} \approx 0.3481$ (c) 2, 5

31. (a) ≈ 0.500 (b) ≈ 0.632

33. (a) $\iint_D (k/20)\left[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right] dA$, donde D es el disco con radio 10 km centrado en el centro de la ciudad (b) $200\pi k/3 \approx 209k$, $200\left(\pi/2 - \frac{8}{9}\right)k \approx 136k$, en la orilla

EJERCICIOS 15.5 ■ PÁGINA 1028

1. $12\sqrt{35}$ **3.** $3\sqrt{14}$ **5.** $(\pi/6)(13\sqrt{13} - 1)$

7. $12\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ **9.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

11. $a^2(\pi - 2)$ **13.** 3.6258

15. (a) ≈ 1.83 (b) ≈ 1.8616

17. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln\left[(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70})\right]$

19. 3.3213 **23.** $(\pi/6)(101\sqrt{101} - 1)$

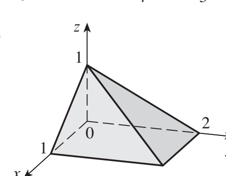
EJERCICIOS 15.6 ■ PÁGINA 1037

1. $\frac{27}{4}$ **3.** $\frac{16}{15}$ **5.** $-\frac{1}{3}$ **7.** $\frac{2}{3}$ **9.** $\frac{27}{2}$ **11.** 4

13. $\frac{65}{28}$ **15.** $\frac{8}{15}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** $\frac{8}{15}$

23. (a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

25. ≈ 0.985 **27.**



29. $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$

$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-4z^2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx$

$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$

31. $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-y/2} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-y/2} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$

$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$

$= \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-y/2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-x^2/2}\int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx$

$= \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$

33. $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2}\int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{y^2} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y^2} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$

35. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{y}^{1} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y}\int_{y}^{1} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{z}^{x} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx = \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{z}^{x} f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$

37. 64π **39.** $\frac{3}{2}\pi$, $(0, 0, \frac{1}{3})$

41. a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12$

43. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$ **45.** $\frac{1}{2}\pi kha^4$

47. (a) $m = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} \sqrt{x^2 + y^2}\,dz\,dy\,dx$

(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$\bar{x} = (1/m)\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} x\sqrt{x^2 + y^2}\,dz\,dy\,dx$,

$\bar{y} = (1/m)\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} y\sqrt{x^2 + y^2}\,dz\,dy\,dx$,

y $\bar{z} = (1/m)\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} z\sqrt{x^2 + y^2}\,dz\,dy\,dx$

(c) $\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} (x^2 + y^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

49. (a) $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$

(b) $\left(\dfrac{28}{9\pi + 44}, \dfrac{30\pi + 128}{45\pi + 220}, \dfrac{45\pi + 208}{135\pi + 660}\right)$

(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

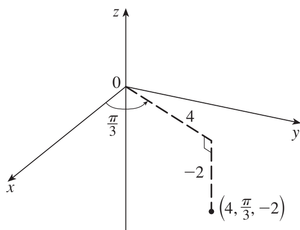
51. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5760}$ **53.** $L^3/8$

55. (a) La región acotada por la elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

(b) $4\sqrt{6}\pi/45$

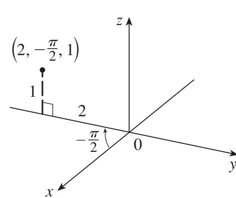
EJERCICIOS 15.7 ■ PÁGINA 1043

1. (a)



$(2, 2\sqrt{3}, -2)$

(b)



$(0, -2, 1)$

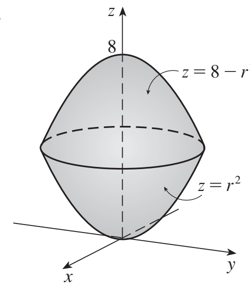
3. (a) $(2, \pi/3, -1)$ (b) $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, 2)$

5. Cilindro circular con radio 2 y eje en el eje z

7. Esfera, radio 2, centrada en el origen

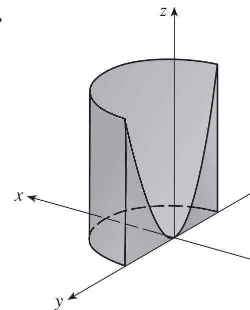
9. (a) $z^2 = 1 + r\cos\theta - r^2$ (b) $z = r^2\cos 2\theta$

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 20$

15. 4π



17. 384π **19.** $\frac{8}{3}\pi + \frac{128}{15}$ **21.** $2\pi/5$ **23.** $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2} - 1)$

25. (a) $\frac{512}{3}\pi$ (b) $(0, 0, \frac{23}{2})$

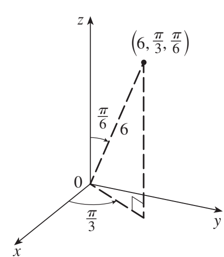
27. $\pi Ka^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$ **29.** 0

31. (a) $\iiint_C h(P)g(P)\,dV$, donde C es el cono

(b) $\approx 4.4 \times 10^{18}$ J

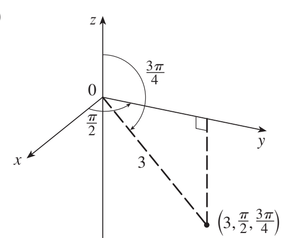
EJERCICIOS 15.8 ■ PÁGINA 1049

1. (a)



$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3}\right)$

(b)



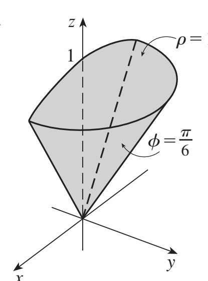
$\left(0, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

3. (a) $(\sqrt{2}, 0, 3\pi/4)$ (b) $(2\sqrt{2}, \pi/4, \pi/3)$

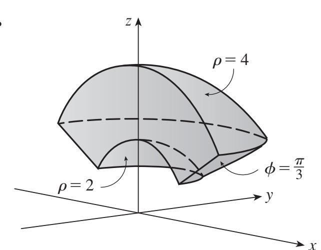
5. Semicono **7.** Plano horizontal

9. (a) $\rho = 3$ (b) $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi\cos 2\theta - \cos^2\phi) = 1$

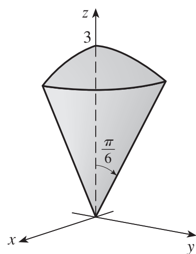
11.



13.



15. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi$

17. 

$(9\pi/4)(2-\sqrt{3})$

19. $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$
21. $312{,}500\pi/7$ **23.** $1688\pi/15$ **25.** $\pi/8$
27. $(\sqrt{3}-1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) $(0, 0, 2.1)$
31. (a) $\left(0, 0, \frac{7}{12}\right)$ (b) $11K\pi/960$
33. (a) $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$ (b) $4K\pi a^5/15$ (K es la densidad)
35. $\frac{1}{3}\pi(2-\sqrt{2}),\ \left(0, 0, 3/\left[8(2-\sqrt{2})\right]\right)$
37. (a) $\pi K a^4 h/2$ (K es la densidad) (b) $\pi K a^2 h(3a^2+4h^2)/12$
39. $5\pi/6$ **41.** $(4\sqrt{2}-5)/15$ **43.** $4096\pi/21$
45. **47.** $136\pi/99$

EJERCICIOS 15.9 ■ PÁGINA 1060

1. -6 **3.** s **5.** $2uvw$
7. El paralelogramo con vértices (0, 0), (6, 3), (12, 1), (6, −2)
9. La región acotada por la recta $y = 1$, el eje y y $y = \sqrt{x}$
11. $x = \frac{1}{3}(v-u)$, $y = \frac{1}{3}(u+2v)$ es una posible transformación, donde $S = \{(u, v) \mid -1 \leqslant u \leqslant 1, 1 \leqslant v \leqslant 3\}$
13. $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$ es una posible transformación, donde $S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant u \leqslant \sqrt{2}, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2\}$
15. -3 **17.** 6π **19.** $2\ln 3$
21. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$ (b) $1.083\times 10^{12}\ \text{km}^3$ (c) $\frac{4}{15}\pi(a^2+b^2)abck$
23. $\frac{8}{5}\ln 8$ **25.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 1$ **27.** $e - e^{-1}$

REPASO DEL CAPÍTULO 15 ■ PÁGINA 1061

Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Verdadero
9. Falso

Ejercicios

1. ≈ 64.0 **3.** $\frac{13}{3}$ **5.** 2 **7.** $\frac{2}{3}$
9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$
11. $(\sqrt{3}, 3, 2)$, $(4, \pi/3, \pi/3)$
13. $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$, $(4, \pi/4, 4\sqrt{3})$
15. (a) $r^2+z^2=4$, $\rho=2$ (b) $r=2$, $\rho\operatorname{sen}\phi=2$
17. La región dentro del lazo de la rosa de cuatro pétalos $r = \operatorname{sen} 2\theta$ en el primer cuadrante
19. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **21.** $\frac{1}{2}e^6-\frac{7}{2}$ **23.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **25.** 8
27. $81\pi/5$ **29.** $\frac{81}{2}$ **31.** $\pi/96$ **33.** $\frac{64}{15}$
35. 176 **37.** $\frac{2}{3}$ **39.** $2ma^3/9$
41. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}\right)$
(c) $I_x = \frac{1}{12}$, $I_y = \frac{1}{24}$; $\bar{\bar{y}} = 1/\sqrt{3}$, $\bar{\bar{x}} = 1/\sqrt{6}$
43. (a) $(0, 0, h/4)$ (b) $\pi a^5 h/15$
45. $\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{2}/3$ **47.** $\frac{486}{5}$ **49.** 0.0512

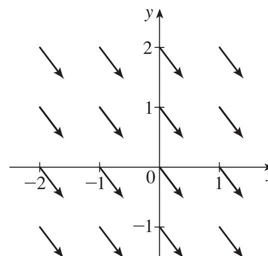
51. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$
53. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ **55.** $-\ln 2$ **57.** 0

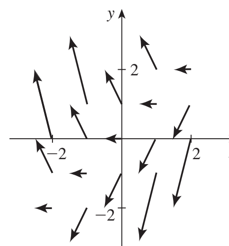
PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 1065

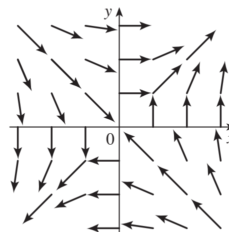
1. 30 **3.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **7.** (b) 0.90
13. $abc\pi\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{9\sqrt{3}}\right)$

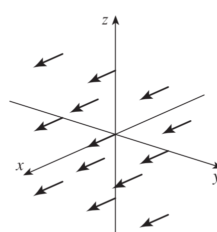
CAPÍTULO 16

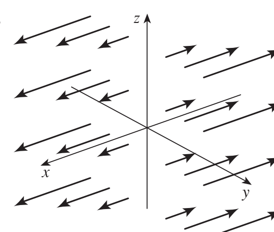
EJERCICIOS 16.1 ■ PÁGINA 1073

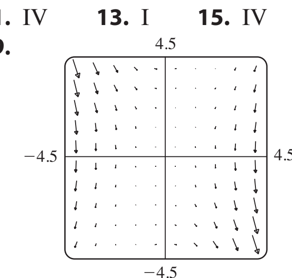
1.


3.


5.


7.


9.


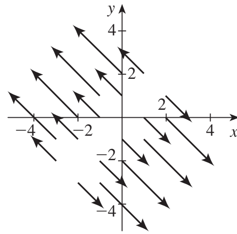
11. IV **13.** I **15.** IV **17.** III
19.


La recta $y = 2x$

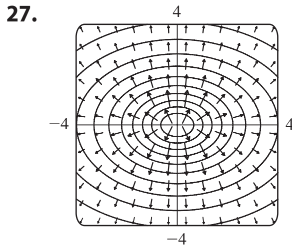
21. $\nabla f(x, y) = 3\sec^2(3x - 4y)\,\mathbf{i} - 4\sec^2(3x - 4y)\,\mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j}$

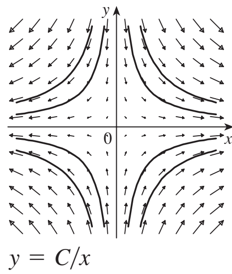


27.



29. III **31.** II **33.** (2.04, 1.03)

35. (a)



$y = C/x$

(b) $y = 1/x,\ x > 0$

EJERCICIOS 16.2 ■ PÁGINA 1084

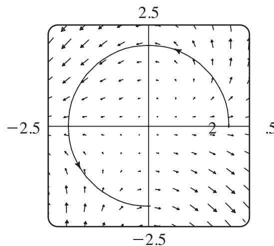
1. $\frac{4}{3}(10^{3/2} - 1)$ **3.** 1638.4 **5.** $\frac{1}{3}\pi^6 + 2\pi$ **7.** $\frac{5}{2}$

9. $\sqrt{2}/3$ **11.** $\frac{1}{12}\sqrt{14}(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{2}{5}(e - 1)$ **15.** $\frac{35}{3}$

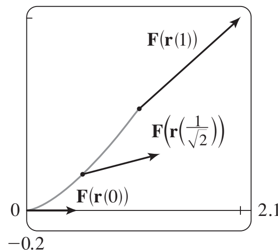
17. (a) Positivo (b) Negativo **19.** $\frac{1}{20}$

21. $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 0.5424 **25.** 94.8231

27. $3\pi + \frac{2}{3}$



29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)



31. $\frac{172\,704}{5\,632\,705}\sqrt{2}(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k,\ (4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, donde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$
(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\right),\ I_y = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)$ **39.** $2\pi^2$ **41.** $\frac{7}{3}$

43. (a) $2ma\,\mathbf{i} + 6mbt\,\mathbf{j},\ 0 \leqslant t \leqslant 1$ (b) $2ma^2 + \frac{9}{2}mb^2$

45. $\approx 1.67 \times 10^4$ pies-lb **47.** (b) Sí **51.** ≈ 22 J

EJERCICIOS 16.3 ■ PÁGINA 1094

1. 40 **3.** No conservativo

5. $f(x, y) = ye^{xy} + K$ **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x + x\cos y + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3$ (b) -9

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = ye^{xz}$ (b) 4 **19.** 2

21. No importa qué curva se elija.

23. $\frac{31}{4}$ **25.** No **27.** Conservativo

31. (a) Sí (b) Sí (c) Sí

33. (a) No (b) Sí (c) Sí

EJERCICIOS 16.4 ■ PÁGINA 1101

1. 120 **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** $4(e^3 - 1)$ **7.** $\frac{1}{3}$

9. -24π **11.** $-\frac{16}{3}$ **13.** 4π

15. $\frac{1}{15}\pi^4 - \frac{4144}{1125}\pi^2 + \frac{7\,578\,368}{253\,125} \approx 0.0779$

17. $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ si la región es la porción del disco $x^2 + y^2 = a^2$ en el primer cuadrante

27. 0

EJERCICIOS 16.5 ■ PÁGINA 1109

1. (a) $\mathbf{0}$ (b) $y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2$

3. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

5. (a) $-\dfrac{\sqrt{z}}{(1 + y)^2}\,\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{x}}{(1 + z)^2}\,\mathbf{j} - \dfrac{\sqrt{y}}{(1 + x)^2}\,\mathbf{k}$

(b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + z)} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}(1 + x)} + \dfrac{1}{2\sqrt{z}(1 + y)}$

7. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

9. (a) Negativo (b) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Cero (b) rot $\mathbf{F}$ apunta en la dirección negativa de z.

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** No conservativo

17. $f(x, y, z) = xe^{yz} + K$ **19.** No

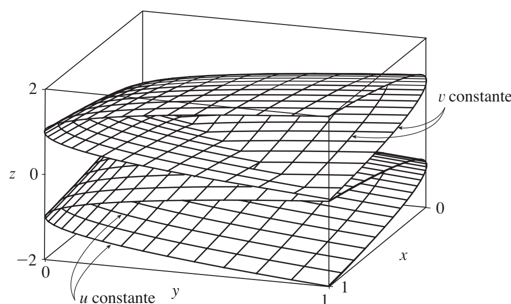
EJERCICIOS 16.6 ■ PÁGINA 1120

1. P: sí; Q: no

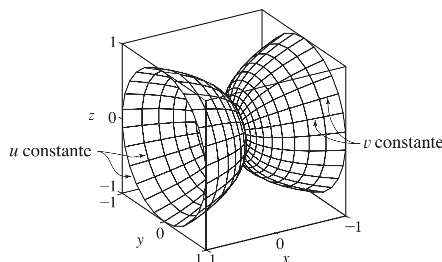
3. El plano que pasa por (0, 3, 1) que contiene los vectores $\langle 1, 0, 4\rangle$, $\langle 1, -1, 5\rangle$

5. El cono circular con eje en el eje z

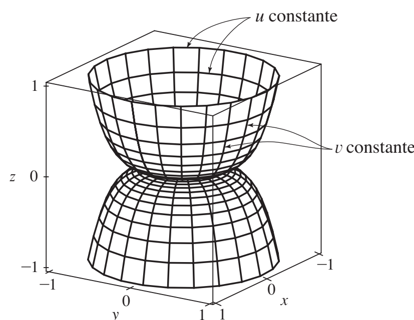
7.



9.



11.



13. IV **15.** I **17.** III

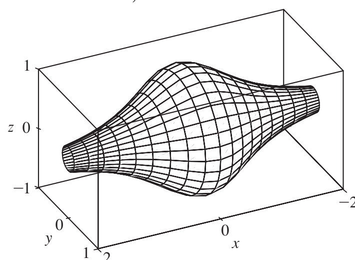
19. $x = u, y = v - u, z = -v$

21. $x = x, y = 4 \cos \theta, z = 4 \operatorname{sen} \theta, 0 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

23. $x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,$
$z = 2 \cos \phi, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
$\left[\text{o } x = x, y = y, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leqslant 2\right]$

25. $x = 6 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, y = 6 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, z = 6 \cos \phi,$
$\pi/6 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

29. $x = x, y = \dfrac{1}{1 + x^2} \cos \theta, y = \dfrac{1}{1 + x^2} \operatorname{sen} \theta,$
$-2 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$



31. (a) La dirección se invierte (b) El número de espirales se duplica

33. $3x - y + 3z = 3$ **35.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + z = \dfrac{\pi}{3}$

37. $-x + 2z = 1$ **39.** $3\sqrt{14}$ **41.** $\sqrt{14}\,\pi$

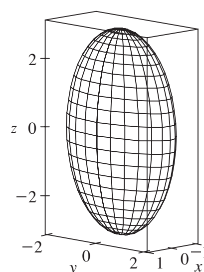
43. $\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{17}{4}\left[\ln\left(2 + \sqrt{21}\right) - \ln\sqrt{17}\right]$ **45.** $(2\pi/3)\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

47. $(\pi/6)(65^{3/2} - 1)$ **49.** 4 **51.** $\pi R^2 \leqslant A(S) \leqslant \sqrt{3}\,\pi R^2$

53. 3.5618 **55.** (a) ≈ 24.2055 (b) 24.2476

57. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln\left[\left(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70}\right)/\left(3\sqrt{5} + \sqrt{70}\right)\right]$

59. (b)



(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{36 \operatorname{sen}^4 u \cos^2 v + 9 \operatorname{sen}^4 u \operatorname{sen}^2 v + 4 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u}\;du\,dv$

61. 4π **63.** $2a^2(\pi - 2)$

EJERCICIOS 16.7 ■ PÁGINA 1132

1. ≈ -6.93 **3.** 900π **5.** $11\sqrt{14}$ **7.** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

9. $171\sqrt{14}$ **11.** $364\sqrt{2}\,\pi/3$ **13.** $(\pi/120)\left(25\sqrt{5} + 1\right)$

15. $\frac{7}{4}\sqrt{21} - \frac{17}{12}\sqrt{17}$ **17.** 16π **19.** $(\pi/60)\left(391\sqrt{17} + 1\right)$

21. 4 **23.** $\frac{713}{180}$ **25.** $\frac{8}{3}\pi$ **27.** 0 **29.** $-\frac{4}{3}\pi$

31. $2\pi + \frac{8}{3}$ **33.** 4.5822 **35.** 3.4895

37. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [P(\partial h/\partial x) - Q + R(\partial h/\partial z)]\,dA$, donde D = proyección de S en el plano xz

39. $(0, 0, a/2)$

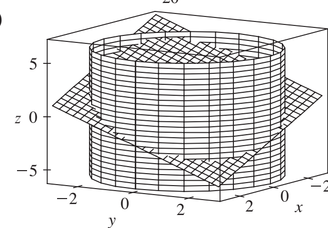
41. (a) $I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dS$ (b) $4329\sqrt{2}\,\pi/5$

43. 0 kg/s **45.** $\frac{8}{3}\pi a^3 \varepsilon_0$ **47.** 1248π

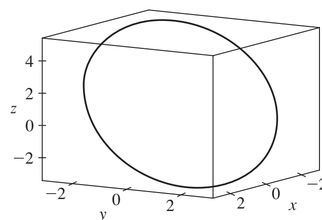
EJERCICIOS 16.8 ■ PÁGINA 1139

3. 16π **5.** 0 **7.** -1 **9.** $-\frac{17}{20}$

11. (a) $81\pi/2$ (b)



(c) $x = 3 \cos t, y = 3 \operatorname{sen} t,$
$z = 1 - 3(\cos t + \operatorname{sen} t),$
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$



13. -32π **15.** $-\pi$ **17.** 3

EJERCICIOS 16.9 ■ PÁGINA 1145

1. $\frac{9}{2}$ **3.** $256\pi/3$ **5.** $\frac{9}{2}$ **7.** $9\pi/2$ **9.** 0

11. π **13.** 2π **15.** $341\sqrt{2}/60 + \frac{81}{20}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{3}/3\right)$

17. $13\pi/20$ **19.** Negativo en P_1, positivo en P_2

21. div $\mathbf{F} > 0$ en cuadrantes I, II; dic $\mathbf{F} < 0$ en cuadrantes III, IV

REPASO DEL CAPÍTULO 16 ■ PÁGINA 1148

Examen verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Verdadero **13.** Falso

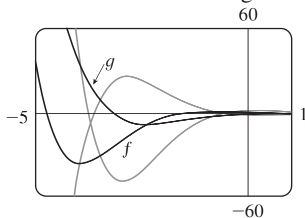
Ejercicios

1. (a) Negativo (b) Positivo **3.** $6\sqrt{10}$ **5.** $\frac{4}{15}$ **7.** $\frac{110}{3}$
9. $\frac{11}{12} - 4/e$ **11.** $f(x, y) = e^y + xe^{xy} + K$ **13.** 0
15. 0 **17.** -8π **25.** $\frac{1}{6}(27 - 5\sqrt{5})$
27. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **29.** $-64\pi/3$ **31.** 0
33. $-\frac{1}{2}$ **35.** 4π **37.** -4 **39.** 21

CAPÍTULO 17

EJERCICIOS 17.1 ■ PÁGINA 1160

1. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ **3.** $y = c_1\cos(\sqrt{2}x) + c_2\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$
5. $y = c_1e^{-x/2} + c_2xe^{-x/2}$ **7.** $y = c_1 + c_2e^{4x/3}$
9. $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x)$
11. $y = c_1e^{(\sqrt{3}-1)t/2} + c_2e^{-(\sqrt{3}+1)t/2}$
13. $V = e^{-2t/3}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}t\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}t\right)\right]$
15. $f(x) = e^{-x}\cos x$, $g(x) = e^{-x}\operatorname{sen} x$. Todas las curvas de solución se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$ y oscilan con amplitudes que se vuelven arbitrariamente grandes cuando $x \to -\infty$.

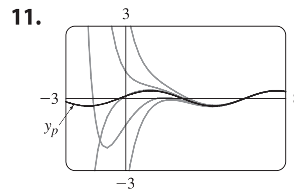


17. $y = \cos(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$ **19.** $y = e^{-2x/3} + \frac{2}{3}xe^{-2x/3}$
21. $y = 2e^{-3x/2} + e^{-x}$
23. $y = \frac{1}{7}e^{4x-4} - \frac{1}{7}e^{3-3x}$ **25.** $y = -3\cos 4x + 2\operatorname{sen} 4x$
27. $y = 5\cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x$ **29.** $y = \dfrac{e-2}{e-1} + \dfrac{e^x}{e-1}$
31. Ninguna solución
33. (b) $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, n un entero positivo; $y = C\operatorname{sen}(n\pi x/L)$
35. (a) $b - a \neq n\pi$, n cualquier entero
(b) $b - a = n\pi$ y $\dfrac{c}{d} \neq e^{a-b}\dfrac{\cos a}{\cos b}$ a menos que $\cos b = 0$, entonces $\dfrac{c}{d} \neq e^{a-b}\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}$
(c) $b - a = n\pi$ y $\dfrac{c}{d} = e^{a-b}\dfrac{\cos a}{\cos b}$ a menos que $\cos b = 0$, entonces $\dfrac{c}{d} = e^{a-b}\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}$

EJERCICIOS 17.2 ■ PÁGINA 1167

1. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}$
3. $y = c_1\cos(\frac{1}{3}x) + c_2\operatorname{sen}(\frac{1}{3}x) + \frac{1}{37}e^{2x}$
5. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x) + \frac{1}{10}e^{-x}$
7. $y = e^x(\frac{9}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x$
9. $y = e^x(\frac{1}{2}x^2 - x + 2)$

11.



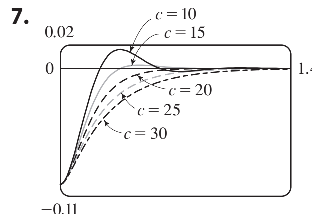
Las soluciones son todas asintóticas para $y_p = \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\operatorname{sen} x$ cuando $x \to \infty$. Excepto para y_p, todas las soluciones se aproximan a ∞ o $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

13. $y_p = Ae^{2x} + (Bx^2 + Cx + D)\cos x + (Ex^2 + Fx + G)\operatorname{sen} x$
15. $y_p = Axe^x + B\cos x + C\operatorname{sen} x$
17. $y_p = xe^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\operatorname{sen} 3x]$
19. $y = c_1\cos(\frac{1}{2}x) + c_2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}x) - \frac{1}{3}\cos x$
21. $y = c_1e^x + c_2xe^x + e^{2x}$
23. $y = c_1\operatorname{sen} x + c_2\cos x + \operatorname{sen} x\ln(\sec x + \tan x) - 1$
25. $y = [c_1 + \ln(1 + e^{-x})]e^x + [c_2 - e^{-x} + \ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$
27. $y = e^x\left[c_1 + c_2x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + x\tan^{-1}x\right]$

EJERCICIOS 17.3 ■ PÁGINA 1175

1. $x = 0.35\cos(2\sqrt{5}\,t)$ **3.** $x = -\frac{1}{5}e^{-6t} + \frac{6}{5}e^{-t}$ **5.** $\frac{49}{12}$ kg

7.



13. $Q(t) = (-e^{-10t}/250)(6\cos 20t + 3\operatorname{sen} 20t) + \frac{3}{125}$, $I(t) = \frac{3}{5}e^{-10t}\operatorname{sen} 20t$
15. $Q(t) = e^{-10t}\left[\frac{3}{250}\cos 20t - \frac{3}{500}\operatorname{sen} 20t\right] - \frac{3}{250}\cos 10t + \frac{3}{125}\operatorname{sen} 10t$

EJERCICIOS 17.4 ■ PÁGINA 1180

1. $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = c_0e^x$ **3.** $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{3^n n!} = c_0e^{x^3/3}$
5. $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
7. $c_0 + c_1\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n} = c_0 - c_1\ln(1 - x)$ para $|x| < 1$
9. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$
11. $x + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^2 5^2 \cdot \cdots \cdot (3n-1)^2}{(3n+1)!}x^{3n+1}$

REPASO DEL CAPÍTULO 17 ■ PÁGINA 1181

Examen verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero

Ejercicios

1. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/2}$
3. $y = c_1\cos(\sqrt{3}x) + c_2\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$
5. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + 1)$
7. $y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(x + 1)\operatorname{sen} x$

9. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}xe^{-2x}$

11. $y = 5 - 2e^{-6(x-1)}$ **13.** $y = (e^{4x} - e^x)/3$

15. Ninguna solución **17.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

19. $Q(t) = -0.02e^{-10t}(\cos 10t + \text{sen } 10t) + 0.03$

21. (c) $2\pi/k \approx 85$ min (d) $\approx 28\,400$ km/h

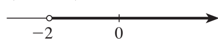
APÉNDICES

EJERCICIOS A ■ PÁGINA A9

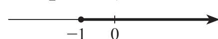
1. 18 **3.** π **5.** $5 - \sqrt{5}$ **7.** $2 - x$

9. $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{para } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{para } x < -1 \end{cases}$ **11.** $x^2 + 1$

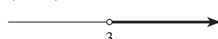
13. $(-2, \infty)$



15. $[-1, \infty)$



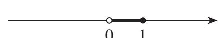
17. $(3, \infty)$



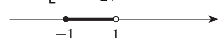
19. $(2, 6)$



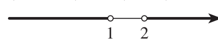
21. $(0, 1]$



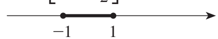
23. $\left[-1, \frac{1}{2}\right)$



25. $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$



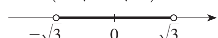
27. $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$



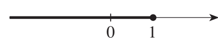
29. $(-\infty, \infty)$



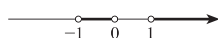
31. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$



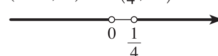
33. $(-\infty, 1]$



35. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$



37. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

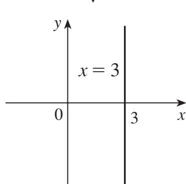


39. $10 \leqslant C \leqslant 35$ **41.** (a) $T = 20 - 10h$, $0 \leqslant h \leqslant 12$
(b) $-30°\text{C} \leqslant T \leqslant 20°\text{C}$ **43.** $\pm\frac{3}{2}$ **45.** $2, -\frac{4}{3}$
47. $(-3, 3)$ **49.** $(3, 5)$ **51.** $(-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$
53. $[1.3, 1.7]$ **55.** $[-4, -1] \cup [1, 4]$
57. $x \geqslant (a+b)c/(ab)$ **59.** $x > (c-b)/a$

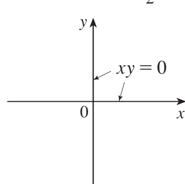
EJERCICIOS B ■ PÁGINA A15

1. 5 **3.** $\sqrt{74}$ **5.** $2\sqrt{37}$ **7.** 2 **9.** $-\frac{9}{2}$

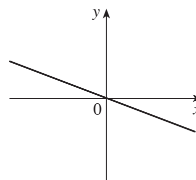
17.

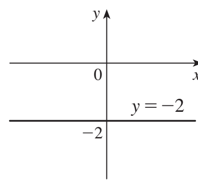


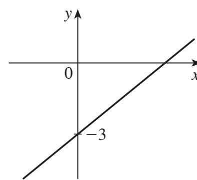
19.



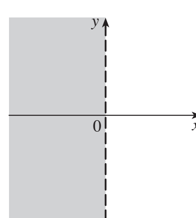
21. $y = 6x - 15$ **23.** $2x - 3y + 19 = 0$
25. $5x + y = 11$ **27.** $y = 3x - 2$ **29.** $y = 3x - 3$
31. $y = 5$ **33.** $x + 2y + 11 = 0$ **35.** $5x - 2y + 1 = 0$
37. $m = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ **39.** $m = 0$, $b = -2$ **41.** $m = \frac{3}{4}$, $b = -3$



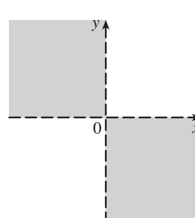




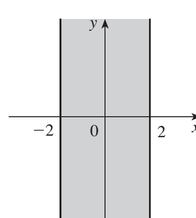
43.



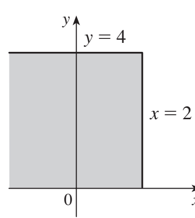
45.



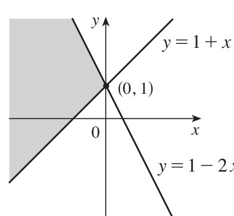
47.



49.



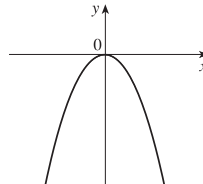
51.

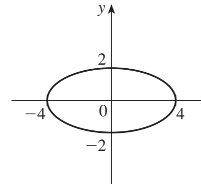


53. $(0, -4)$ **55.** (a) $(4, 9)$ (b) $(3.5, -3)$ **57.** $(1, -2)$
59. $y = x - 3$ **61.** (b) $4x - 3y - 24 = 0$

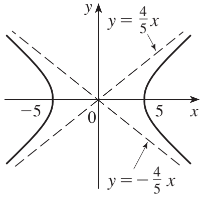
EJERCICIOS C ■ PÁGINA A23

1. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ **3.** $x^2 + y^2 = 65$
5. $(2, -5), 4$ **7.** $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{2}$ **9.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \sqrt{10}/4$
11. Parábola **13.** Elipse

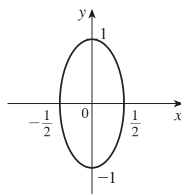




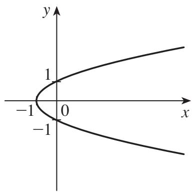
15. Hipérbola



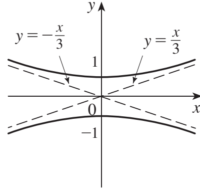
17. Elipse



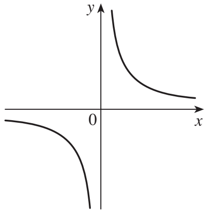
19. Parábola



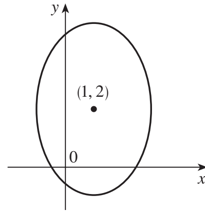
21. Hipérbola



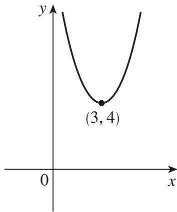
23. Hipérbola



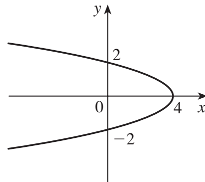
25. Elipse



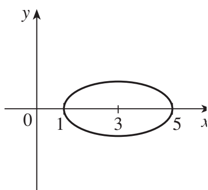
27. Parábola



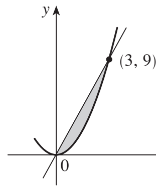
29. Parábola



31. Elipse

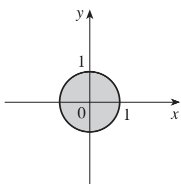


33.

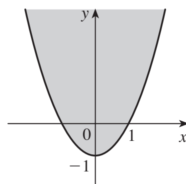


35. $y = x^2 - 2x$

37.



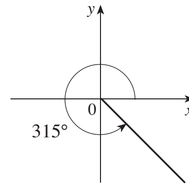
39.



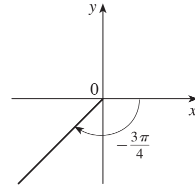
EJERCICIOS D ■ PÁGINA A32

1. $7\pi/6$ **3.** $\pi/20$ **5.** 5π **7.** $720°$ **9.** $75°$
11. $-67.5°$ **13.** 3π cm **15.** $\frac{2}{3}$ rad $= (120/\pi)°$

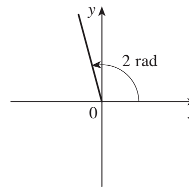
17.



19.

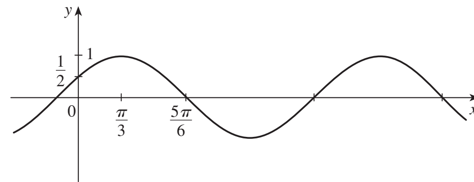


21.

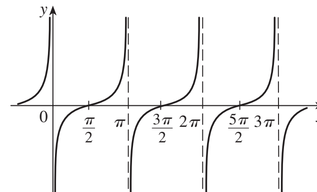


23. $\operatorname{sen}(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$, $\tan(3\pi/4) = -1$, $\csc(3\pi/4) = \sqrt{2}$, $\sec(3\pi/4) = -\sqrt{2}$, $\cot(3\pi/4) = -1$
25. $\operatorname{sen}(9\pi/2) = 1$, $\cos(9\pi/2) = 0$, $\csc(9\pi/2) = 1$, $\cot(9\pi/2) = 0$ $\tan(9\pi/2)$ y $\sec(9\pi/2)$ sin definir
27. $\operatorname{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, $\tan(5\pi/6) = -1/\sqrt{3}$, $\csc(5\pi/6) = 2$, $\sec(5\pi/6) = -2/\sqrt{3}$, $\cot(5\pi/6) = -\sqrt{3}$
29. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$
31. $\operatorname{sen}\phi = \sqrt{5}/3$, $\cos\phi = -\frac{2}{3}$, $\tan\phi = -\sqrt{5}/2$, $\csc\phi = 3/\sqrt{5}$, $\cot\phi = -2/\sqrt{5}$
33. $\operatorname{sen}\beta = -1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = -3/\sqrt{10}$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$, $\csc\beta = -\sqrt{10}$, $\sec\beta = -\sqrt{10}/3$
35. 5.73576 cm **37.** 24.62147 cm **59.** $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$
61. $\frac{1}{15}(3 + 8\sqrt{2})$ **63.** $\frac{24}{25}$ **65.** $\pi/3, 5\pi/3$
67. $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ **69.** $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 3\pi/2$
71. $0, \pi, 2\pi$ **73.** $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$ y $5\pi/6 \leqslant x \leqslant 2\pi$
75. $0 \leqslant x < \pi/4$, $3\pi/4 < x < 5\pi/4$, $7\pi/4 < x \leqslant 2\pi$

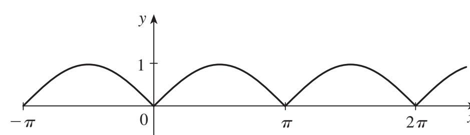
77.



79.



81.



89. 14.34457 cm²

EJERCICIOS E ■ PÁGINA A38

1. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ **3.** $3^4 + 3^5 + 3^6$

5. $-1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$ **7.** $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$

9. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$ **11.** $\sum_{i=1}^{10} i$

13. $\sum_{i=1}^{19} \frac{i}{i+1}$ **15.** $\sum_{i=1}^{n} 2i$ **17.** $\sum_{i=0}^{5} 2^i$ **19.** $\sum_{i=1}^{n} x^i$

21. 80 **23.** 3276 **25.** 0 **27.** 61 **29.** $n(n + 1)$

31. $n(n^2 + 6n + 17)/3$ **33.** $n(n^2 + 6n + 11)/3$

35. $n(n^3 + 2n^2 - n - 10)/4$

41. (a) n^4 (b) $5^{100} - 1$ (c) $\frac{97}{300}$ (d) $a_n - a_0$

43. $\frac{1}{3}$ **45.** 14 **49.** $2^{n+1} + n^2 + n - 2$

EJERCICIOS G ■ PÁGINA A54

1. (b) 0.405

EJERCICIOS H ■ PÁGINA A62

1. $8 - 4i$ **3.** $13 + 18i$ **5.** $12 - 7i$ **7.** $\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$

9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$ **15.** $12 + 5i$, 13

17. $4i$, 4 **19.** $\pm\frac{3}{2}i$ **21.** $-1 \pm 2i$

23. $-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$ **25.** $3\sqrt{2}\,[\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)]$

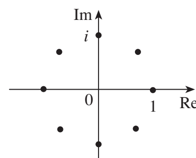
27. $5\{\cos[\tan^{-1}(\frac{4}{3})] + i \operatorname{sen}[\tan^{-1}(\frac{4}{3})]\}$

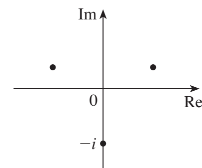
29. $4[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)]$, $\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)$, $\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)]$

31. $4\sqrt{2}\,[\cos(7\pi/12) + i \operatorname{sen}(7\pi/12)]$, $(2\sqrt{2})[\cos(13\pi/12) + i \operatorname{sen}(13\pi/12)]$, $\frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6)]$

33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$

37. ±1, $\pm i$, $(1/\sqrt{2})(\pm1 \pm i)$ **39.** $\pm(\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i$, $-i$





41. i **43.** $\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ **45.** $-e^2$

47. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$

Índice analítico

PR denota páginas de referencia.

Corte aquí y guarde para consulta

ÁLGEBRA

Operaciones aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exponentes y radicales

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Factorización de polinomios especiales

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Teorema binomial

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

donde $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k}$

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Desigualdades y valor absoluto

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.

Si $a > 0$, entonces

$|x| = a$ significa $x = a$ o $x = -a$

$|x| < a$ significa $-a < x < a$

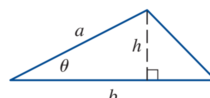
$|x| > a$ significa $x > a$ o $x < -a$

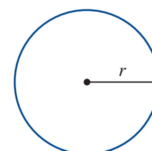
GEOMETRÍA

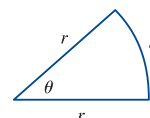
Fórmulas geométricas

Fórmulas para el área A, circunferencia C y volumen V:

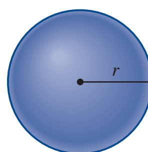
Triángulo	Círculo	Sector de círculo
$A = \frac{1}{2}bh$	$A = \pi r^2$	$A = \frac{1}{2}r^2\theta$
$= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$	$C = 2\pi r$	$s = r\theta$ (θ en radianes)

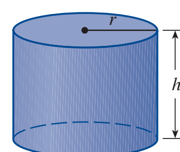


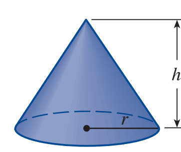




Esfera	Cilindro	Cono
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$A = 4\pi r^2$		$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$







Fórmulas de distancia y punto medio

Distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Rectas

Pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación pendiente-interesección de la recta con pendiente m e intersección en $y = b$:

$$y = mx + b$$

Círculos

Ecuación del círculo con centro (h, k) y radio r:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

TRIGONOMETRÍA

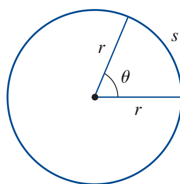
Medición de ángulos

π radianes $= 180°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $\qquad 1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi}$

$s = r\theta$

(θ en radianes)

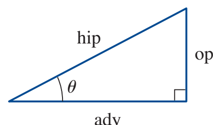


Trigonometría de ángulos rectos

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$

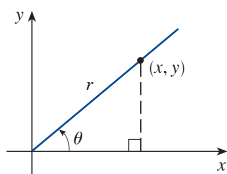


Funciones trigonométricas

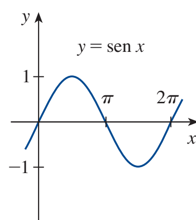
$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} \qquad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$

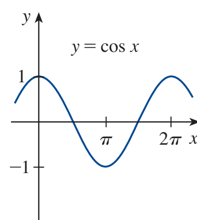
$\cos\theta = \dfrac{x}{r} \qquad \sec\theta = \dfrac{r}{x}$

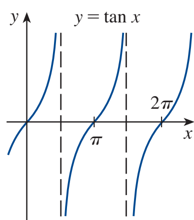
$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \qquad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

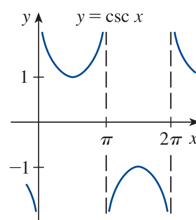


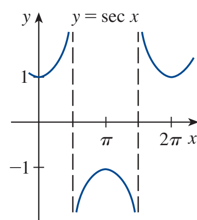
Gráficas de funciones trigonométricas

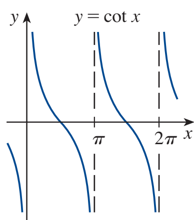












Funciones trigonométricas de ángulos importantes

θ	radianes	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—

Identidades fundamentales

$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

Ley de los senos

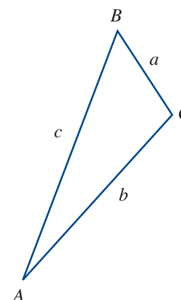
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Ley de los cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



Fórmulas de adición y sustracción

$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Fórmulas de doble ángulo

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

Fórmulas de medio ángulo

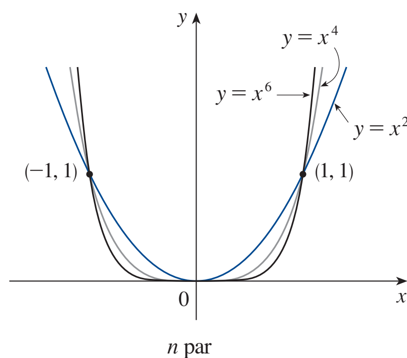
$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Corte aquí y guarde para consulta

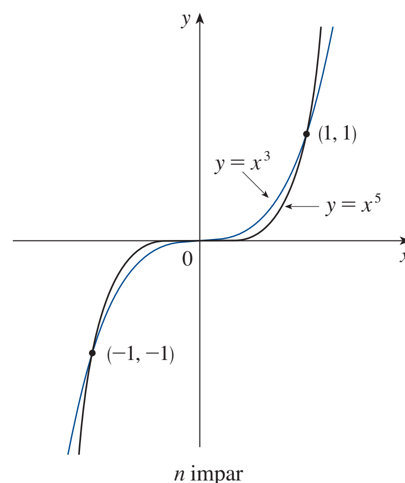
FUNCIONES ESPECIALES

Funciones potencia $f(x) = x^a$

(i) $f(x) = x^n$, n un entero positivo

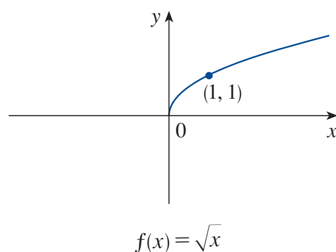


n par

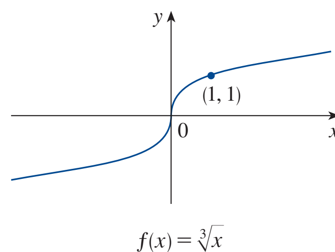


n impar

(ii) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, n un entero positivo

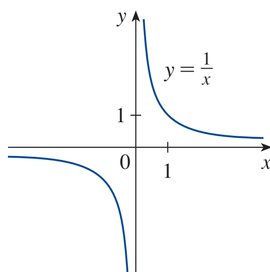


$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

(iii) $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

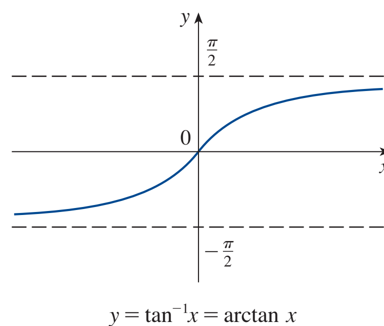


Funciones trigonométricas inversas

$$\arcsen x = \sen^{-1}x = y \iff \sen y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos x = \cos^{-1}x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

$$\arctan x = \tan^{-1}x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



$y = \tan^{-1}x = \arctan x$

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

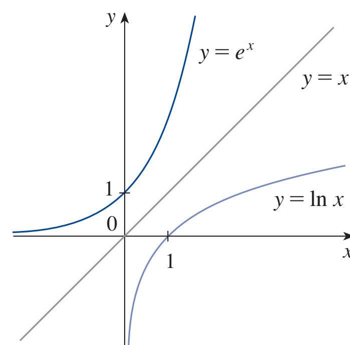
FUNCIONES ESPECIALES

Funciones exponenciales y logarítmicas

$\log_b x = y \iff b^y = x$

$\ln x = \log_e x$, donde $\ln e = 1$

$\ln x = y \iff e^y = x$



Ecuaciones de eliminación

$\log_b(b^x) = x \qquad b^{\log_b x} = x$

$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln x} = x$

Leyes de los logaritmos

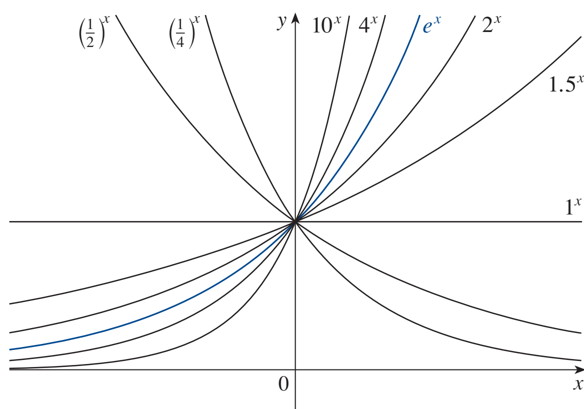
1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

2. $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

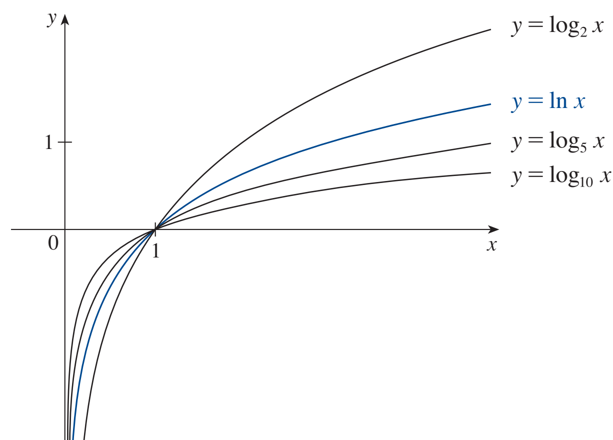
3. $\log_b(x^r) = r \log_b x$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$



Funciones exponeciales



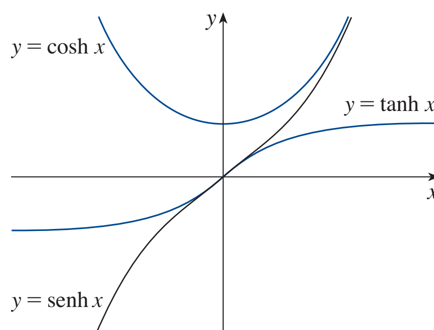
Funciones logarítmicas

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$



Funciones hiperbólicas inversas

$y = \operatorname{senh}^{-1}x \iff \operatorname{senh} y = x \qquad \operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$y = \cosh^{-1}x \iff \cosh y = x$ y $y \geqslant 0 \qquad \cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$y = \tanh^{-1}x \iff \tanh y = x \qquad \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

Corte aquí y guarde para consulta

REGLAS DE LA DERIVACIÓN

Fórmulas generales

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regla del producto)

6. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Regla del cociente)

7. $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regla de la cadena)

8. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regla de la potencia)

Funciones exponenciales y logarítmicas

9. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$

11. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

12. $\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$

Funciones trigonométricas

13. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

14. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

15. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

16. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

17. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

18. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

Funciones trigonométricas inversas

19. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}$

22. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

23. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

Funciones hiperbólicas

25. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

26. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

27. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

28. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

29. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

30. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

Funciones hiperbólicas inversas

31. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

32. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

33. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$

34. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) - -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

35. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

36. $\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$

TABLA DE INTEGRALES

Formas básicas

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int b^u\,du = \dfrac{b^u}{\ln b} + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u\,\tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u\,\cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C, \quad a > 0$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

18. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas que involucran $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

22. $\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

23. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 + u^2} - a\ln\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

24. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2}\,du = -\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

25. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

26. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

27. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

28. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$

29. $\int \dfrac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \dfrac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$

Corte aquí y guarde para consulta

TABLA DE INTEGRALES

Formas que involucran $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

37. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\, du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas que involucran $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

(continúa)

TABLA DE INTEGRALES

Formas que involucran $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}(a + bu - a\ln|a + bu|) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2\ln|a + bu|\right] + C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{a}{b^2(a + bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a + bu| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a + bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a\ln|a + bu|\right) + C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a + bu} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{si } a > 0$

$\displaystyle\qquad = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C, \qquad \text{si } a < 0$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a + bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a + bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}}$

60. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a + bu}\,du = \frac{2}{b(2n + 3)}\left[u^n(a + bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\,du\right]$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \frac{2na}{b(2n + 1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a + bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a + bu}} = -\frac{\sqrt{a + bu}}{a(n - 1)u^{n-1}} - \frac{b(2n - 3)}{2a(n - 1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a + bu}}$

TABLA DE INTEGRALES

Formas trigonométricas

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\displaystyle\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

66. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\tfrac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\displaystyle\int \cos^3 u\,du = \tfrac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\displaystyle\int \tan^3 u\,du = \tfrac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\displaystyle\int \cot^3 u\,du = -\tfrac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\displaystyle\int \sec^3 u\,du = \tfrac{1}{2}\sec u\tan u + \tfrac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\displaystyle\int \csc^3 u\,du = -\tfrac{1}{2}\csc u\cot u + \tfrac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\displaystyle\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\displaystyle\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

76. $\displaystyle\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

77. $\displaystyle\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u\sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\displaystyle\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u\csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

79. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au\operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\displaystyle\int \cos au\cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au\cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\displaystyle\int u\operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\displaystyle\int u\cos u\,du = \cos u + u\operatorname{sen} u + C$

84. $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen} u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\displaystyle\int u^n\cos u\,du = u^n\operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u\cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\cos^m u\,du$

$\displaystyle= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u\cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u\cos^{m-2} u\,du$

Formas trigonométricas inversas

87. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\displaystyle\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\displaystyle\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\displaystyle\int u\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\displaystyle\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\displaystyle\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

93. $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\quad n \neq -1$

94. $\displaystyle\int u^n\cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\quad n \neq -1$

95. $\displaystyle\int u^n\tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right],\quad n \neq -1$

(continúa)

TABLA DE INTEGRALES

Formas exponenciales y logarítmicas

96. $\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au - 1)e^{au} + C$

97. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

98. $\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\sin bu - b\cos bu) + C$

99. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\cos bu + b\sin bu) + C$

100. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

101. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n + 1)^2}[(n + 1)\ln u - 1] + C$

102. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Formas hiperbólicas

103. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

104. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

106. $\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh\tfrac{1}{2}u\right| + C$

109. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

110. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

111. $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas que involucran $\sqrt{2au - u^2}$, $a > 0$

113. $\int \sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

114. $\int u\sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

115. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

116. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

117. $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

118. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

119. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + C$

120. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$

Corte aquí y guarde para consulta

CAPÍTULO 1 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una función? ¿Qué son su dominio y rango?

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto D exactamente un elemento llamado $f(x)$, en un conjunto E. El dominio es el conjunto D y el rango es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a todo lo largo del dominio.

(b) ¿Qué es la gráfica de una función?

La gráfica de una función f consta de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$ y x esté en el dominio de f.

(c) ¿Cómo se puede saber si una curva dada es la gráfica de una función?

Use la prueba de la recta vertical: Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si, y solo si, ninguna recta vertical interseca la curva más de una vez.

2. Analice cuatro maneras de representar una función. Ilustre la discusión con ejemplos.

Una función puede representarse verbal, numérica, visual o algebraicamente. Un ejemplo de cada una se da a continuación.

Verbal: Asignar a estudiantes los pupitres de un salón de clases (una descripción con palabras).

Numérica: Una tabla de impuestos que asigna una cantidad de impuestos a un ingreso (una tabla de valores).

Visual: Una historia gráfica del promedio Dow Jones (una gráfica).

Algebraica: Una relación entre el área A y la longitud de los lados s de un cuadrado: $A = s^2$ (una fórmula explícita).

3. (a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede saber si una función es par observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función par.

Una función f es par si satisface $f(-x) = f(x)$ para cada número x en su dominio. Si la gráfica de una función es simétrica con respecto al eje y, f es par. Ejemplos $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = |x|$.

(b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede saber si una función es impar observando su gráfica? Dé tres ejemplos de una función impar.

Una función f es impar si satisface $f(-x) = -f(x)$ para cada número x en su dominio. Si la gráfica de una función es simétrica con respecto al origen, f es impar. Ejemplos $f(x) = x^3$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = 1/x$.

4. ¿Qué es una función creciente?

Una función f es creciente en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

5. ¿Qué es un modelo matemático?

Un modelo matemático es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o una ecuación) de un fenómeno del mundo real. (Véase el análisis en las páginas 23-24.)

6. Dé un ejemplo de cada tipo de función.

(a) Función lineal: $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = ax + b$

(b) Función potencia: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^n$

(c) Función exponencial: $f(x) = 2^x$, $f(x) = b^x$

(d) Función cuadrática: $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$

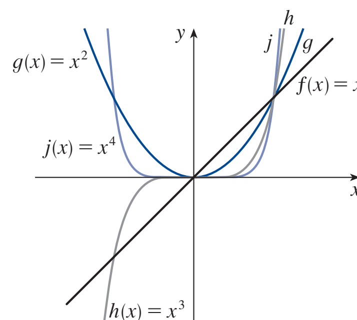
(e) Polinomio de grado 5: $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 7$

(f) Función racional: $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

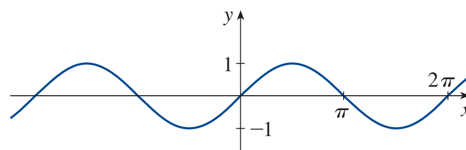
7. Trace a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = x$ **(b)** $g(x) = x^3$
(c) $h(x) = x^3$ **(d)** $j(x) = x^4$

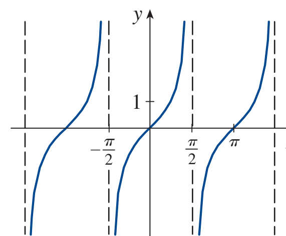


8. Trace a mano un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones siguientes.

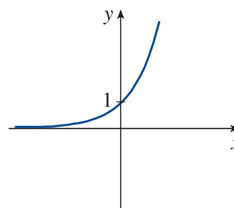
(a) $y = \operatorname{sen} x$

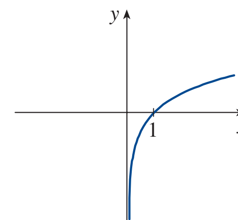


(b) $y = \tan x$



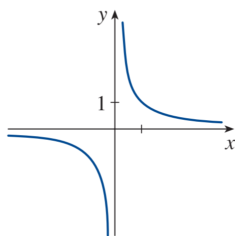
(c) $y = e^x$ **(d)** $y =$ 1n x



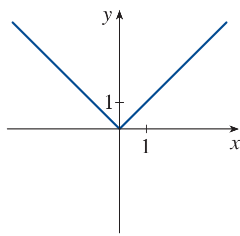


(*continúa*)

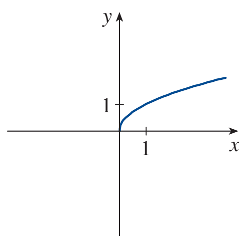
(e) $y = 1/x$



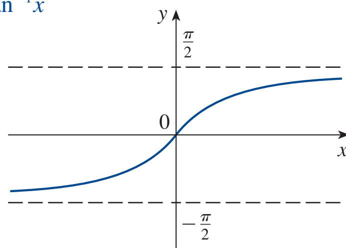
(f) $y = |x|$



(g) $y = \sqrt{x}$



(h) $y = \tan^{-1}x$



9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.

(a) Cuál es el dominio de $f + g$?

El dominio de $f + g$ es la intersección del dominio de f y el dominio de g; es decir, $A \cap B$.

(b) ¿Cuál es el dominio de fg?

El dominio de fg también es $A \cap B$.

(c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

El dominio de f/g debe excluir valores de x que vuelven a g igual a 0; es decir, $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$.

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

La composición de f y g está definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. El dominio es el conjunto de todas las x en el dominio de g tal que $g(x)$ esté en el dominio de f.

11. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de f de la siguiente manera.

(a) Desplazar dos unidades hacia arriba: $y = f(x) + 2$

(b) Desplazar dos unidades hacia bajo: $y = f(x) - 2$

(c) Desplazar dos unidades a la derecha: $y = f(x - 2)$

(d) Desplazar dos unidades a la izquierda: $y = f(x + 2)$

(e) Reflejar a través del eje $\boldsymbol{x}$: $y = -f(x)$

(f) Reflejar a través del eje $\boldsymbol{y}$: $y = f(-x)$

(g) Alargar verticalmente por un factor de 2: $y = 2f(x)$

(h) Contraer verticalmente por un factor de 2: $y = \frac{1}{2}f(x)$

(i) Alargar horizontalmente por un factor de 2: $y = f(\frac{1}{2}x)$

(j) Contraer horizontalmente por un factor de 2: $y = f(2x)$

12. (a) ¿Qué es una función inyectiva? ¿Cómo puede saber si una función es inyectiva observando su gráfica?

Una función f es inyectiva si no adopta nunca dos veces el mismo valor; es decir, $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Al examinar una gráfica use la prueba de la recta horizontal: Una función es inyectiva si, y solo si, ninguna recta horizontal interseca su gráfica más de una vez.

(b) Si f es una función inyectiva, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo se obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

Si f es una función inyectiva con dominio A y rango B, su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y se define mediante

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f a través de la recta $y = x$.

13. (a) ¿Cómo se define la función seno inversa $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?

La función seno inversa $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x$ se define como

$$\operatorname{sen}^{-1}x = y \iff \operatorname{sen} y = x$$

y $$-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$$

Su dominio es $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y su rango es $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

(b) ¿Cómo se define la función coseno inversa $f(x) = \cos^{-1}x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?

La función coseno inversa $f(x) = \cos^{-1}x$ se define como

$$\cos^{-1}x = y \iff \cos y = x$$

y $$0 \leqslant y \leqslant \pi$$

Su dominio es $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y su rango es $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

(c) ¿Cómo se define la función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1}x$? ¿Cuáles son su dominio y rango?

La función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1}x$ se define como

$$\tan^{-1}x = y \iff \tan y = x$$

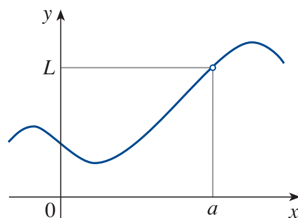
y $$-\pi/2 < y < \pi/2$$

Su dominio es $\mathbb{R}$ y su rango es $-\pi/2 < y < \pi/2$.

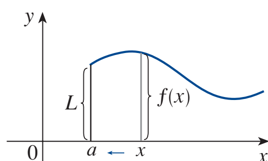
CAPÍTULO 2 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique qué significa cada uno de los enunciados siguientes e ilustre con un trazo.

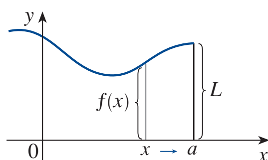
(a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a L conforme los valores de x se aproximan a a (pero $x \neq a$).



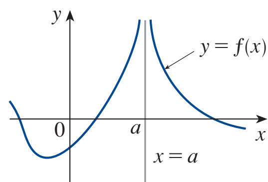
(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a L conforme los valores de x se aproximan a a mediante valores mayores que a.



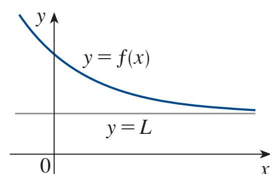
(c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a L conforme los valores de x se aproximan a a mediante valores menores que a.



(d) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes tomando a x lo suficientemente cerca de a (pero no igual a a).

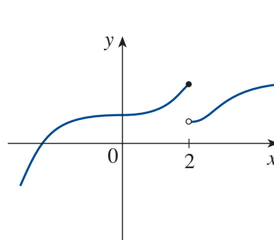


(e) $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cerca de L requiriendo que x sea lo suficientemnte grande.

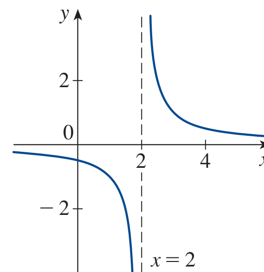


2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con gráficas.

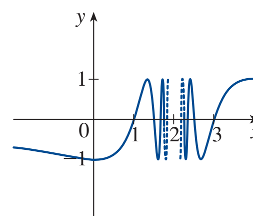
En general, el límite de una función no existe cuando los valores de la función no se aproximan a un número fijo. Para cada una de las funciones siguientes, el límite no existe en $x = 2$.



Los límites izquierdo y derecho no son iguales.



Hay una discontinuidad infinita.



Los valores de la función oscilan entre 1 y −1 con frecuencia infinita.

3. Enuncie las leyes de los límites siguientes.

(a) Ley de la suma

El límite de una suma es la suma de los límites:

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

(b) Ley de la diferencia

El límite de una diferencia es la diferencia de los límites:

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

(c) Ley del múltiplo constante

El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función:

$$\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$$

(d) Ley del producto

El límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

(e) Ley del cociente

El límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre y cuando el límite del denominador no sea 0:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

(continúa)

(f) Ley de la potencia

El límite de una potencia es la potencia del límite:
$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ (para n un entero positivo)

(g) Ley de la raíz

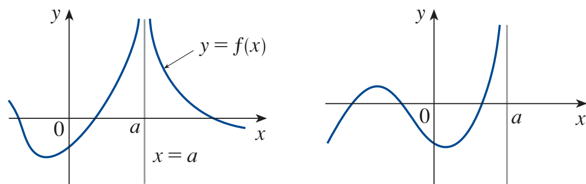
El límite de una raíz es la raíz del límite:
$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ (para n un entero positivo)

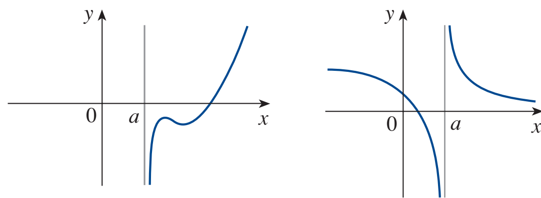
4. ¿Qué establece el teorema de la compresión?

Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x está cerca de a (excepto posiblemente en a) y $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$. En otras palabras, si $g(x)$ está comprimida entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces g está obligada a tener el mismo límite L en a.

5. (a) ¿Qué quiere decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

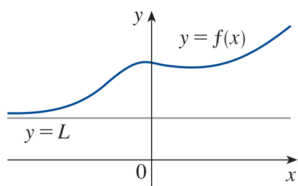
Significa que el límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a desde uno o ambos lados es infinito positivo o negativo.

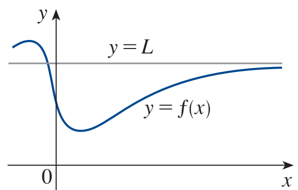




(b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

Significa que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.





6. ¿Cuáles de las curvas siguientes tienen asíntotas verticales? ¿Cuáles tienen asíntotas horizontales?

(a) $y = x^4$: sin asíntotas

(b) $y = \operatorname{sen} x$: sin asíntotas

(c) $y = \tan x$: asíntotas verticales $x = \pi/2 + \pi n$, n un entero

(d) $y = \tan^{-1} x$: asíntotas horizontales $y = \pm\pi/2$

(e) $y = e^x$: asíntota horizontal $y = 0$ $\left(\lim_{x \to -\infty} e^x = 0\right)$

(f) $y = \ln x$: asíntota vertical $x = 0$ $\left(\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty\right)$

(g) $y = 1/x$: asíntota vertical $x = 0$,
asíntota horizontal $y = 0$

(h) $y = \sqrt{x}$: sin asíntotas

7. (a) ¿Qué significa que f sea continua en a?

Una función f es continua en un número a si el valor de la función en $x = a$ es el mismo que el límite cuando x se aproxima a a; es decir, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(b) ¿Qué significa que f sea continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de esta función?

Una función f es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$ si es continua en todos los números reales a.

La gráfica de esa función no tiene agujeros ni quiebres.

8. (a) Dé ejemplos de funciones continuas en $[-1, 1]$.

$f(x) = x^3 - x$, $g(x) = 2^x$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \tan x$, $y = 1/(x - 3)$ y $h(x) = |x|$ son todas ellas continuas en $[-1, 1]$.

(b) Dé un ejemplo de una función que no sea continua en $[0, 1]$.

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \qquad \left(f(x) \text{ no está definida en } x = \tfrac{1}{2}\right)$$

9. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?

Si f es continua en $[a, b]$ y N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$ $[f(a) \neq f(b)]$, existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$. En otras palabras, una función continua adopta todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$.

10. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

La pendiente de la recta tangente está dada por

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{o} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(*continúa*)

Corte aquí y guarde para consulta

CAPÍTULO 2 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS (*continuación*)

11. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea del objeto en el momento $t = a$. ¿Cómo puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

La velocidad instantánea en el momento $t = a$ es

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esta velocidad es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$.

12. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.

(a) La razón de cambio promedio de y con respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(b) La razón de cambio instantánteo de y con respecto a x en $x = x_1$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

13. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

o, en forma equivalente,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ (con respecto a x) cuando $x = a$ y también representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$.

14. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

La segunda derivada de f, f'', es la derivada de f'. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, la primera derivada es velocidad y la segunda derivada es la razón instantánea de cambio de la velocidad, es decir la aceleración.

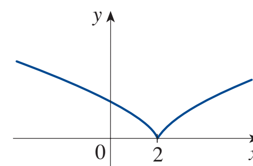
15. **(a)** ¿Qué significa que f sea derivable en a?

f es derivable en a si la derivada $f'(a)$ existe.

(b) ¿Cuál es la relación entre derivabilidad y continuidad de una función?

Si f es derivable en a, es continua en a.

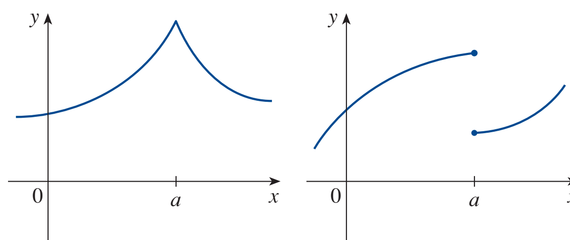
(c) Trace la gráfica de una función continua pero no derivable en $a = 2$.



La gráfica de f cambia de dirección abruptamente en $x = 2$, así que f no tiene ninguna recta tangente ahí.

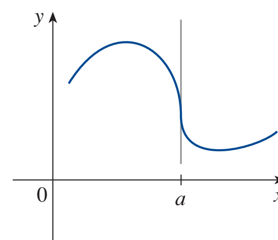
16 . Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con gráficas.

Una función es no derivable en cualquier valor donde la gráfica tenga una “esquina”, donde la gráfica tenga discontinuidad o donde tenga una recta tangente vertical.



Una esquina

Una discontinuidad



Una tangente vertical

Corte aquí y guarde para consulta

CAPÍTULO 3 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Exprese cada una de las reglas de derivación siguientes, tanto en símbolos como en palabras.

(a) La regla de la potencia

Si n es cualquier número real, entonces $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

Para determinar la derivada de una variable elevada a una potencia constante, multiplíque la expresión por el exponente y después reste uno al exponente.

(b) La regla del múltiplo constante

Si c es una constante y f una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

La derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.

(c) La regla de la suma

Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas.

(d) La regla de la diferencia

Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

La derivada de una diferencia de funciones es la diferencia de las derivadas.

(e) La regla del producto

Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

La derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función sumada a la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función.

(f) La regla del cociente

Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

La derivada de un cociente de funciones es el denominador multiplicado por la derivada del numerador menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo eso dividido entre el cuadrado del denominador.

(g) La regla de la cadena

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, la función compuesta definida por $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

La derivada de una función compuesta es la derivada de la función externa evaluada en la función interna multiplicada por la derivada de la función interna.

2. Obtenga la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = x^n$: $\quad y' = nx^{n-1}$

(b) $y = e^x$: $\quad y' = e^x$

(c) $y = b^x$: $\quad y' = b^x \ln b$

(d) $y = \ln x$: $\quad y' = 1/x$

(e) $y = \log_b x$: $\quad y' = 1/(x \ln b)$

(f) $y = \operatorname{sen} x$: $\quad y' = \cos x$

(g) $y = \cos x$: $\quad y' = -\operatorname{sen} x$

(h) $y = \tan x$: $\quad y' = \sec^2 x$

(i) $y = \csc x$: $\quad y' = -\csc x \cot x$

(j) $y = \sec x$: $\quad y' = \sec x \tan x$

(k) $y = \cot x$: $\quad y' = -\csc^2 x$

(l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$: $\quad y' = 1/\sqrt{1 - x^2}$

(m) $y = \cos^{-1} x$: $\quad y' = -1/\sqrt{1 - x^2}$

(n) $y = \tan^{-1} x$: $\quad y' = 1/(1 + x^2)$

(o) $y = \operatorname{senh} x$: $\quad y' = \cosh x$

(p) $y = \cosh x$: $\quad y' = \operatorname{senh} x$

(q) $y = \tanh x$: $\quad y' = \operatorname{sech}^2 x$

(r) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$: $\quad y' = 1/\sqrt{1 + x^2}$

(s) $y = \cosh^{-1} x$: $\quad y' = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

(t) $y = \tanh^{-1} x$: $\quad y' = 1/(1 - x^2)$

3. (a) ¿Cómo se define el número e?

e es el número tal que $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

(b) Exprese e como un límite.

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

(c) ¿Por qué en cálculo se usa la función exponencial natural $y = e^x$ con más frecuencia que las demás funciones exponenciales $y = b^x$?

La fórmula de derivación para $y = b^x$ $[dy/dx = b^x \ln b]$ es más simple cuando $b = e$, porque $\ln e = 1$.

(*continúa*)

(d) ¿Por qué en Cálculo se usa la función logarítmica natural $y = \ln x$ más que las demás funciones logarítimicas $y = \log_b x$?

La fórmula de derivación para $y = \log_b x$ $[dy/dx = 1/(x \ln b)]$ es más simple cuando $b = e$, porque $\ln e = 1$.

4. (a) Explique cómo funciona la derivación implícita.

La derivación implícita consiste en derivar ambos miembros de una ecuación con respecto a x, tratando a y como una función de x. Entonces se despeja y' en la ecuación resultante.

(b) Explique cómo funciona la derivación logarítmica.

La derivación logarítmica consiste en tomar logaritmos naturales de ambos miembros de una ecuación $y = f(x)$, simplificar usando las leyes de los logaritmos, derivar implícitamente con respecto a x y despejar y' en la ecuación resultante.

5. Dé varios ejemplos de cómo puede interpretar la derivada como una razón de cambio en física, química, biología, economía u otras ciencias.

En física, interpretaciones de la derivada incluyen velocidad, densidad lineal, corriente eléctrica, poder (la razón de cambio del trabajo) y la razón de decaimiento radiactivo. Los químicos pueden usar derivadas para medir la rapidez de reacción y la compresibilidad de una sustancia bajo presión. En biología, la derivada mide tasas de crecimiento demográfico y circulación de la sangre. En economía, la derivada mide el costo marginal (la razón de cambio del costo conforme se producen más bienes) y la utilidad marginal. Otros ejemplos son la razón de flujo de calor en geología, el índice de mejora del desempeño en psicología y la rapidez con que se propaga un rumor en sociología.

6. (a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley del crecimiento natural.

Si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el momento t, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad \text{donde } k > 0 \text{ es una constante}$$

(b) ¿En qué circunstancias este es un modelo apropiado para el crecimiento de la población?

La ecuación del inciso (a) es un modelo apropiado cuando existen el espacio y la nutrición suficientes para sostener el crecimiento.

(c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

Si $y(0) = y_0$, entonces las soluciones son $y(t) = y_0 e^{kt}$.

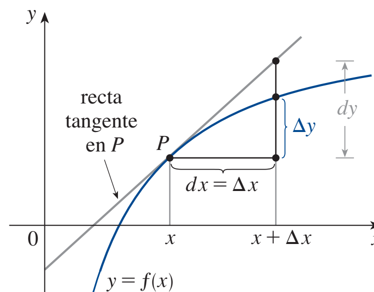
7. (a) Escriba una expresión para la linealización de f en a.

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

(b) Si $y = f(x)$, escriba una expresión para la diferencial dy.

$$dy = f'(x)\, dx$$

(c) Si $dx = \Delta x$, dibuje un diagrama que muestre los significados geométricos de Δy y dy.

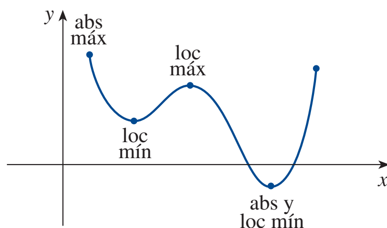


Corte aquí y guarde para consulta

CAPÍTULO 4 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique la diferencia entre máximo absoluto y máximo local. Ilustre por medio de un dibujo.

El valor de de la función $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f si $f(c)$ es el valor más grande de la función en todo el dominio de f, mientras que $f(c)$ es un valor máximo local si es el valor más grande de la función, cuando x está cerca de c.



2. (a) ¿Qué dice el teorema del valor extremo?

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, siempre alcanza un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en ese intervalo.

(b) Explique cómo funciona el método del intervalo cerrado.

Para determinar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$, se siguen estos tres pasos:

- Se determinan los números críticos de f en el intervalo (a, b) y se calculan los valores de f en esos números.
- Se determinan los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
- El mayor de los valores de los dos pasos previos es el valor máximo absoluto; el menor de esos valores es el valor mínimo absoluto.

3. (a) Enuncie el teorema de Fermat.

Si f tiene un máximo o mínimo local en c y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

(b) Defina un número crítico de f.

Un número crítico de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

4. (a) Enuncie el teorema de Rolle.

Sea f una función que satisface las tres hipótesis siguientes:

- f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- f es derivable en el intervalo abierto (a, b).
- $f(a) = f(b)$

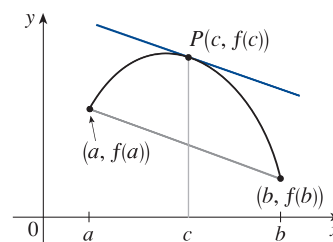
Entonces, existe un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

(b) Enuncie el teorema del valor medio y dé una interpretación geométrica.

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe un número c entre a y b tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En geometría, este teorema indica que hay un punto $P(c, f(c))$, donde $a < c < b$, en la gráfica de f donde la recta tangente es paralela a la recta secante que une a $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



5. (a) Enuncie la prueba creciente/decreciente.

Si $f'(c) > 0$ en un intervalo, f es creciente en ese intervalo.

Si $f'(c) < 0$ en un intervalo, f es decreciente en ese intervalo.

(b) ¿Qué significa que f es cóncava hacia arriba en un intervalo I?

f es cóncava hacia arriba en un intervalo si la gráfica de f se sitúa arriba de todas sus tangentes en ese intervalo.

(c) Enuncie la prueba de la concavidad.

Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, la gráfica de f es cóncava hacia bajo en ese intervalo.

(d) ¿Qué son los puntos de inflexión? ¿Cómo puede encontrarlos?

Los puntos de inflexión en la gráfica de una función continua f son puntos donde la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia bajo o de cóncava hacia bajo a cóncava hacia arriba. Pueden hallarse determinando los valores en los cuales la segunda derivada cambia de signo.

6. (a) Enuncie la prueba de la primera derivada.

Si se supone que c es un número crítico de una función continua f.

- Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
- Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
- Si f' es positiva a la izquierda y derecha de c, o negativa a la izquierda y derecha de c, f no tiene máximo ni mínimo local en c.

(b) Enuncie la prueba de la segunda derivada.

Suponga que f' es continua cerca de c.

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.

(*continúa*)

(c) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas relativas de estas pruebas?

La prueba de la segunda derivada es más fácil de usar a veces, pero no es concluyente cuando $f''(c) = 0$ y falla si $f''(c)$ no existe. En cualquier caso debe usarse la prueba de la primera derivada.

7. (a) ¿Qué afirma la regla de L'Hôpital?

La regla de L'Hôpital afirma que si el límite de un cociente de funciones es una forma indeterminada de tipo $0/0$ o ∞/∞, ese límite es igual al límite del cociente de sus derivadas:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(b) ¿Cómo puede usar la regla de L'Hôpital si se tiene un producto $f(x)g(x)$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?

Se escribe fg como $\dfrac{f}{1/g}$ o $\dfrac{g}{1/f}$ de tal modo que el límite se convierta en una forma indeterminada de tipo $0/0$ o ∞/∞.

(c) ¿Cómo puede usarse la regla de L'Hôpital si se tiene una diferencia $f(x) - g(x)$ donde $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?

Convierta la diferencia en un cociente usando un denominador común, racionalizando, factorizando o por algún otro método.

(d) ¿Cómo puede usarse la regla de L'Hôpital si se tiene una potencia $[f(x)]^{g(x)}$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$?

Tomando el logaritmo natural de ambos miembros de $y = [f(x)]^{g(x)}$, se puede convertir la potencia en un producto escribiendo $\ln y = g(x) \ln f(x)$. O bien, se puede escribir la función como una exponencial: $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

8. Indique si los límites siguientes tienen forma indeterminada. Donde sea posible, enuncie el límite.

(a) $\dfrac{0}{0}$: indeterminada. La regla de L'Hôpital puede aplicarse a esta forma. Note que todas las derivadas son un límite de esta forma.

(b) $\dfrac{\infty}{\infty}$: indeterminada. La regla de L'Hôpital se puede aplicar a esta forma.

(c) $\dfrac{0}{\infty}$: no indeterminada. Un límite de esta forma tiene valor 0.

(d) $\dfrac{\infty}{0}$: no indeterminada. Un límite de esta forma podría ser igual a ∞, $-\infty$ o podría no existir (aunque no puede ser igual a un valor finito).

(e) $\infty + \infty$: no indeterminada. Un límite de esta forma es igual a ∞.

(f) $\infty - \infty$: indeterminada.

(g) $\infty \cdot \infty$: no indeterminada. Un límite de esta forma es igual a ∞.

(h) $\infty \cdot 0$: indeterminada.

(i) 0^0: indeterminada.

(j) 0^∞: no indeterminada. Un límite de esta forma tiene valor 0.

(k) ∞^0: indeterminada.

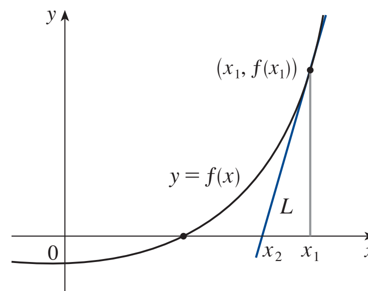
(l) 1^∞: indeterminada.

9. Si se tiene una calculadora graficadora o computadora, ¿por qué necesita del cálculo para graficar una función?

El cálculo revela todos los aspectos importantes de una gráfica, como valores extremos locales y puntos de inflexión, lo cuales pueden pasarse por alto cuando se depende en exclusiva de tecnología. En muchos casos se puede determinar ubicaciones exactas de esos puntos clave más que aproximaciones. Usar derivadas para identificar el comportamiento de la gráfica también ayuda a elegir una ventana de visualización apropiada y alerta acerca de dónde podría usarse una ventana de visualización más chica para ver mejor los detalles de una gráfica.

10. (a) Dada una aproximación inicial x_1 a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, explique geométricamente, mediante un dibujo, cómo se obtiene la segunda aproximación x_2 en el método de Newton.

Determinar la recta tangente L a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto$(x_1, f(x_1))$. Entonces, x_2 es la intersección en x de L.



(b) Escriba una expresión para x_2 en términos de x_1, $f(x_1)$ y $f'(x_1)$.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

(c) Escriba una expresión para x_{n+1} en términos de x_n, $f(x_n)$ y $f'(x_n)$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(d) ¿Bajo que circunstancias es probable que el método de Newton falle o funcione muy lentamente?

EL método de Newton podría fallar u operar muy lento cuando $f'(x_1)$ está cerca de 0. También falla cuando $f'(x_i)$ es indefinida.

11. (a) ¿Qué es una antiderivada de una función f?

Una función F es una antiderivada de f si $F'(x) = f(x)$.

(b) Suponga que F_1 y F_2 son antiderivadas de f en un intervalo I. ¿Cómo se relacionan F_1 y F_2?

Son idénticas o difieren por una constante.

CAPÍTULO 5 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que use.

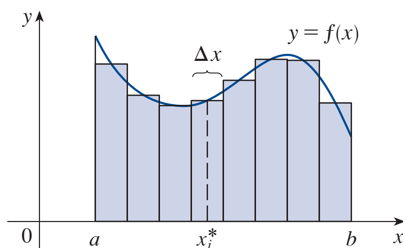
Una suma de Riemann de f es

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

donde x_i^* es un punto en el subintervalo de orden i $[x_{i-1}, x_i]$ y Δx es la longitud de los subintervalos.

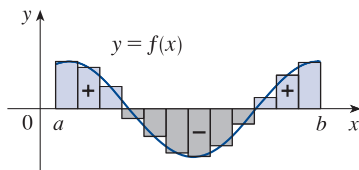
(b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

Si f es positiva, una suma de Riemann se puede interpretar como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, como se muestra en la figura.



(c) Si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre su respuesta con un diagrama.

Si f adopta valores tanto positivos como negativos, la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se ubican arriba del eje x y las negativas de las áreas de los rectángulos que se ubican debajo del eje x (las áreas de los rectángulos azules menos las áreas de los rectángulos grises).



2. (a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua de a a b.

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$. Sean $x_0\ (= a), x_1, x_2 \ldots, x_n\ (= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i-1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

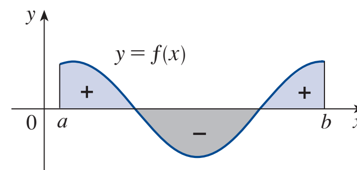
donde x_i^* es cualquier punto muestra en el subintervalo de orden i $[x_{i-1}, x_i]$.

(b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)dx$ si $f(x) \geqslant 0$?

Si f es positiva, $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como el área bajo la gráfica de $y = f(x)$ y arriba del eje x para $a \leqslant x \leqslant b$.

(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)dx$ si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos? Ilustre con un diagrama.

En este caso, $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como un "área neta", es decir el área de la región arriba del eje x y abajo de la gráfica de f (rotulada como "+" en la figura) menos el área de la región abajo del eje x y arriba de la gráfica de f (rotulada como "–").



3. Enuncie la regla del punto medio.

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

donde $\bar{x}_i$ = punto medio de $[x_{i-1}, x_i] = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$.

4. Enuncie ambas partes del teorema fundamental del cálculo.

Suponga que f es continua en $[a, b]$.

Parte 1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

Parte 2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir $F' = f$.

5. (a) Enuncie el teorema del cambio neto.

La integral de una razón de cambio es el cambio neto:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(b) Si $r(t)$ es la rapidez con la que el agua fluye hacia un depósito, ¿qué representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

$\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$ representa el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre el momento t_1 y el momento t_2.

6. Suponga que una partícula se mueve de un lado a otro a lo largo de una recta con velocidad $v(t)$, medida en metros por segundo, y aceleración $a(t)$.

(a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?

$\int_{60}^{120} v(t)\,dt$ representa el cambio neto en posición (el desplazamiento) de la partícula de $t = 60$ a $t = 120$ segundos; en otras palabras, en el segundo minuto.

(b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?

$\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$ representa la distancia total recorrida por la partícula en el segundo minuto.

(continúa)

(c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

$\int_{60}^{120} a(t)\,dt$ representa el cambio en velocidad de la partícula en el segundo minuto.

7. (a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

La integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es otra forma de llamar a una antiderivada de f, así que $\int f(x)\,dx = F(x)$ significa que $F'(x) = f(x)$.

(b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

La relación está dada por la parte 2 del teorema fundamental:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

si f es continua en $[a, b]$.

8. Explique con exactitud qué significa el enunciado "la derivación y la integración son procesos inversos".

La parte 1 del teorema fundamental del cálculo se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

lo que establece que si f se integra y después el resultado se deriva, se vuelve a la función original f.

Como $F'(x) = f(x)$, la parte 2 del teorema (o, en forma equivalente, el teorema del cambio neto) establece que

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esto indica que si se toma una función F, primero se deriva y después se integra el resultado, se vuelve a la función original, aunque en la forma $F(b) - F(a)$.

Asimismo, la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ representa una antiderivada de f, de modo que

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

9. Enuncie la regla de sustitución. En la práctica, ¿cómo puede usarla?

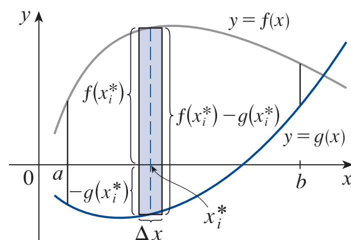
Si $u = g(x)$ es una función derivable y f es continua en el rango de g, entonces

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

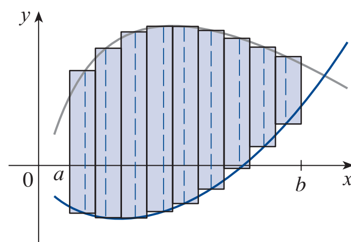
En la práctica, se hacen las sustituciones $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$ en el integrando para que la integral sea más simple de evaluar.

CAPÍTULO 6 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Trace dos curvas representativas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Muestre cómo aproximar el área entre esas curvas mediante una suma de Riemann y trace los rectángulos de aproximación correspondientes. Luego escriba una expresión para el área exacta.



Una suma de Riemann que aproxima el área entre esas curvas es $\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$. Un diagrama de los rectángulos de aproximación correspondientes es:

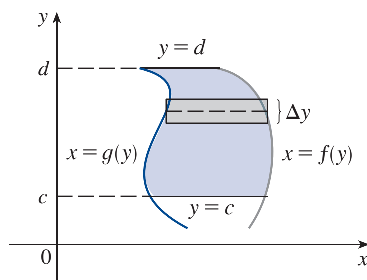


Una expresión para el área exacta es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

(b) Explique cómo cambia la situación si las curvas tienen ecuaciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$, donde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.

En vez de usar "punta menos base" e integrar de izquierda a derecha, se usa "derecha menos izquierda" y se integra de abajo arriba: $A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$



2. Suponga que Sue corre más rápido que Kathy en la competencia de 1500 metros. ¿Cuál es el significado físico del área entre sus curvas de velocidad para el primer minuto de la competencia?

Representa el número de metros por los cuales Sue aventaja a Kathy después del minuto 1.

3. (a) Suponga que S es un sólido con áreas de secciones transversales conocidas. Explique cómo aproximar obtener un valor aproximado del volumen de S mediante una suma de Riemann. Escriba una expresión para el volumen exacto.

Se corta S en "rebanadas" de igual ancho Δx. El volumen de la rebanada de orden i es aproximadamente $A(x_i^*)\,\Delta x$, donde x_i^* es un punto muestra en la rebanada de orden i y $A(x_i^*)$ el área transversal de S en x_i^*. Entonces, el volumen de S es aproximadamente $\sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$ y el volumen exacto es

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

(b) Si S es un sólido de revolución, ¿cómo se determinan las áreas transversales?

Si la sección transversal es un disco, se determina el radio en términos de x o y y se usa $A = \pi(\text{radio})^2$. Si la sección transversal es un cilindro, se determina el radio interno r_{in} y el radio externo r_{ex} y se usa $A = \pi(r_{\text{ex}}^2) - \pi(r_{\text{in}}^2)$

4. (a) ¿Cuál es el volumen de un cascarón cilíndrico?

$$V = 2\pi rh\,\Delta r = (\text{circunferencia})(\text{altura})(\text{grosor})$$

(b) Explique cómo usar los cascarones cilíndricos para calcular el volumen de un sólido de revolución.

Se aproxima la región que girará mediante rectángulos orientados de tal modo que la revolución forme cascarones cilíndricos en lugar de discos o arandelas. Para un cascarón típico se determinan la circunferencia y la altura en términos de x o y y se calcula

$$V = \int_a^b (\text{circunferencia})(\text{altura})(dx \text{ o } dy)$$

(c) ¿Por qué preferiría usted usar el método mediante cascarones en lugar del de las rebanadas?

A veces rebanar produce arandelas o discos cuyos radios son difíciles (o imposibles) de determinar explícitamente. En otras ocasiones, el método de cascarones cilíndricos produce una integral más fácil que al rebanar.

5. Suponga que empuja usted un libro al otro lado de una mesa de 6 metros de largo ejerciendo una fuerza $f(x)$ en cada punto desde $x = 0$ hasta $x = 6$. ¿Qué representa $\int_0^6 f(x)dx$? Si $f(x)$ se mide en newtons, ¿cuáles son las unidades para la integral?

$\int_0^6 f(x)dx$ representa la cantidad de trabajo realizado. Sus unidades son newton-metros, o joules.

6. (a) ¿Cuál es el valor promedio de una función f en un intervalo $[a, b]$?

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(b) ¿Qué establece el teorema del valor medio para integrales? ¿Cuál es su interpretación geométrica?

Si f es continua en $[a, b]$, hay un número c en $[a, b]$ en el cual el valor de f es exactamente igual al valor promedio de la función, es decir $f(c) = f_{\text{prom}}$. Esto significa que para funciones positivas f, hay un número c tal que el rectángulo con base $[a, b]$ y altura $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f de a a b.

CAPÍTULO 7 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Establezca la regla para la integración por partes. En la práctica, ¿cómo se utiliza?

Para integrar $\int f(x)g'(x)\,dx$, sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.
En la práctica, se intenta elegir $u = f(x)$ de tal forma que sea una función que se simplifique al derivarse (o que al menos no se complique más), siempre y cuando $dv = g'(x)\,dx$ pueda integrarse fácilmente para dar v.

2 ¿Cómo se evalúa $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ si m es impar? ¿Qué pasa si n es impar? ¿Qué ocurre si m y n son pares?

Si m es impar, se usa $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para escribir todos los factores seno excepto uno en términos del coseno. Luego se sustituye $u = \cos x$.

Si n es impar, se usa $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para escribir todos los factores coseno excepto uno en términos del seno. Luego se sustituye $u = \operatorname{sen} x$.

Si m y n son pares, se usan las identidades de medio ángulo

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

3. Si la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ se presenta en una integral, ¿qué sustitución se puede intentar? ¿Qué pasa si se presenta $\sqrt{a^2 + x^2}$? ¿Y si se presenta $\sqrt{x^2 - a^2}$?

Si $\sqrt{a^2 - x^2}$ ocurre, se prueba $x = a \operatorname{sen} \theta$; si $\sqrt{a^2 + x^2}$ ocurre, se prueba $x = a \tan \theta$, y si $\sqrt{x^2 - a^2}$ ocurre se prueba $x = a \sec \theta$.

4. ¿Cuál es la forma de la descomposición en fracciones parciales de una función racional $P(x)/Q(x)$ si el grado de P es menor que el grado de Q y $Q(x)$ solo tiene factores lineales distintos? ¿Qué pasa si tiene factores lineales repetidos? ¿Y qué ocurre si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible (no repetido)? ¿Y si el factor cuadrático se repite?

Para factores lineales distintos,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Si el factor lineal $a_1x + b_1$ se repite r veces, debemos incluir todos los términos

$$\frac{B_1}{a_1x + b_1} + \frac{B_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{B_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible (no repetido), incluimos un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Si el factor cuadrático irreducible se repite r veces, se incluye todos los términos

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

5. Establezca las reglas para aproximar la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ con la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson. ¿Cuál esperaría que diera la mejor estimación? ¿Cómo se aproxima la estimación del error de cada regla?

Sea $a \leqslant x \leqslant b$, $I = \int_a^b f(x)\,dx$, y $\Delta x = (b - a)/n$.

Regla del punto medio:

$$I \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$..

Regla del trapecio:

$$I \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde $x_i = a + i\,\Delta x$.

Regla de Simpson:

$$I \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde n es par.

Se esperaría que la mejor estimación fuera dada por la regla de Simpson.

Suponga que $|f''(x)| \leqslant K$ y $|f^{(4)}(x)| \leqslant L$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Los errores en las reglas del punto medio, del trapecio y de Simpson están dadas, respectivamente, por

$$|E_M| \leqslant \frac{K(b - a)^3}{24n^2} \qquad |E_T| \leqslant \frac{K(b - a)^3}{12n^2}$$

$$|E_S| \leqslant \frac{L(b - a)^5}{180n^4}$$

6. Defina las integrales impropias siguientes.

(a) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$, donde a es cualquier número real (suponiendo que ambas integrales son convergentes).

7. Defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ para cada uno de los casos siguientes.

(a) f tiene una discontinuidad infinita en a.

Si f es continua en $(a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

(b) f tiene una discontinuidad infinita en b.

Si f es continua en $[a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

(c) f tiene una discontinuidad infinita en c, donde $a < c < b$.

Si tanto $\int_a^c f(x)\,dx$ como $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

8. Establezca el teorema de comparación para integrales impropias.

Suponga que f y g son funciones continuas con $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

(b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

CAPÍTULO 8 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Cómo se define la longitud de una curva?

Se puede aproximar una curva C por medio de un polígono con vértices P_i a lo largo de C. La longitud L de C se define como el límite de las longitudes de estos polígonos inscritos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

(b) Escriba una expresión para la longitud de una curva suave dada por $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

(c) ¿Qué pasa si x se da como una función de y?

Si $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, entonces $L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$

2. (a) Escriba una expresión para el área de la superficie obtenida al hacer rotar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ alrededor del eje x.

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

(b) ¿Qué pasa si x se da como una función de y?

Si $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, entonces $S = \int_c^d 2\pi y\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$.

(c) ¿Qué pasa si la curva se hace girar alrededor del eje y?

$$S = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

o

$$S = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

3. Describa cómo se puede determinar la fuerza hidrostática contra una pared vertical sumergida en un fluido.

Se divide la pared en franjas horizontales de igual altura Δx y se aproxima cada una por medio de un rectángulo con longitud horizontal $f(x_i)$ en la profundidad x_i. Si δ es el peso específico del fluido, la fuerza hidrostática es

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta x_i f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b \delta x f(x)\, dx$$

4. (a) ¿Cuál es el significado físico del centro de masa de una placa delgada?

El centro de masa es el punto en el que la placa se balancea horizontalmente.

(b) Si la placa se sitúa entre $y = f(x)$ y $y = 0$, donde $a \leqslant x \leqslant b$, escriba expresiones para las coordenadas del centro de masa.

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\, dx \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$

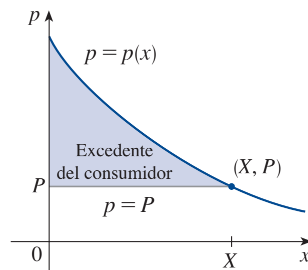
donde $A = \int_a^b f(x)\, dx$.

5. ¿Qué afirma el teorema de Pappus?

Si una región plana $\mathcal{R}$, que cae por completo a un lado de una recta ℓ en su plano, es rotada alrededor de ℓ, entonces el volumen del sólido resultante es el producto del área de $\mathcal{R}$ y la distancia recorrida por el centroide de $\mathcal{R}$.

6. Dada una función de demanda $p(x)$, explique lo que se entiende por excedente del consumidor cuando la cantidad de un artículo actualmente disponible es X y el precio de venta actual es P. Ilustre con un diagrama.

El excedente del consumidor representa la cantidad de dinero ahorrada por los consumidores al adquirir la mercancía al precio P [cuando estaban dispuestos a adquirirla al precio $p(x)$], en correspondencia con una cantidad demandada de X.



7. (a) ¿Cuál es el gasto cardíaco del corazón?

Es el volumen de sangre bombeada por el corazón por unidad de tiempo, es decir la razón de flujo en la aorta.

(b) Explique cómo puede medirse el gasto cardíaco por el método de dilución de colorante.

Una cantidad A de colorante es inyectada en una parte del corazón y la concentración $c(t)$ que sale del corazón se mide durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ hasta que el colorante se diluye. El gasto cardiaco está dado por $A/\int_0^T c(t)\, dt$.

8. ¿Qué es la función de densidad de probabilidad? ¿Qué propiedades tiene tal función?

Dada una variable aleatoria X, su función de densidad de probabilidad f es una función tal que $\int_a^b f(x)\, dx$ da la probabilidad de que X esté entre a y b. La función f tiene las propiedades de que $f(x) \geqslant 0$ para todas las x, y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

9. Suponga que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad para el peso de una estudiante universitaria, donde x se mide en kilogramos.

(a) ¿Cuál es el significado de la integral $\int_0^{60} f(x)\, dx$?

Representa la probabilidad de que una estudiante universitaria, seleccionada de forma aleatoria, pese menos de 60 kilogramos.

(b) Escriba una expresión para la media de esta función de densidad.

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx = \int_0^{\infty} xf(x)\, dx$$

[ya que $f(x) = 0$ para $x < 0$]

(c) ¿Cómo puede encontrarse la mediana de esta función de densidad?

La mediana de f es el número m tal que

$$\int_m^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

10. ¿Qué es una distribución normal? ¿Cuál es el significado de la desviación estándar?

Una distribución normal corresponde a una variable aleatoria X que tiene una función de densidad de probabilidad con una gráfica en forma de campana y una ecuación dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

donde μ es la media y la constante positiva σ es la desviación estándar. σ mide qué tan dispersos están los valores de X.

CAPÍTULO 9 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una ecuación diferencial?

Es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.

(b) ¿Cuál es el orden de una ecuación diferencial?

Es el orden de la derivada de orden mayor presente en la ecuación.

(c) ¿Qué es una condición inicial?

Es una condición de la forma $y(t_0) = y_0$.

2. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ con solo observar la ecuación diferencial?

La ecuación indica que la pendiente de una curva de solución en cualquier punto (x, y) es $x^2 + y^2$. Note que $x^2 + y^2$ siempre es positiva excepto en el origen, donde $y' = x^2 + y^2 = 0$. Así, hay una tangente horizontal en $(0, 0)$, pero en ningún otro lado, y las curvas de solución son crecientes en todas partes.

3. ¿Qué es un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$?

Un campo direccional (o campo de pendientes) para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ es una gráfica bidimensional que consta de segmentos de recta cortos con pendiente $F(x, y)$ en el punto (x, y).

4. Explique cómo funciona el método de Euler.

El método de Euler establece que se debe partir del punto dado por el valor inicial y avanzar en la dirección indicada por el campo direccional. Se hace alto un rato después, se examina la pendiente en la nueva ubicación y se avanza en esa dirección. Hay que seguir deteniéndose y cambiando de dirección de acuerdo con el campo direccional hasta que la aproximación esté completa.

5. ¿Qué es una ecuación diferencial separable? ¿Cómo se resuelve?

Es una ecuación diferencial en la que la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x multiplicada por una función de y, es decir $dy/dx = g(x)f(y)$. Se puede resolver la ecuación reescribiéndola como $[1/f(y)]\,dy = g(x)\,dx$, integrando ambos miembros y despejando y.

6. ¿Qué es una ecuación diferencial lineal de primer orden? ¿Cómo se resuelve?

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación diferencial que se puede poner en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas en un intervalo dado. Para resolver esa ecuación, se multiplican ambos miembros por el factor de integración $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ para ponerla en la forma $\big(I(x)\,y\big)' = I(x)\,Q(x)$. Luego se integran ambos miembros y se despeja y.

7. (a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley natural de crecimiento. ¿Qué dice en términos de la razón de crecimiento relativo?

Si $P(t)$ es el valor de una cantidad y en el momento t y si la razón de cambio de P con respecto a t es proporcionala su tamaño $P(t)$ en cualquier momento, entonces $\dfrac{dP}{dt} = kP$.

En este caso, la tasa de crecimiento relativo, $\dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{dt}$, es constante.

(b) ¿Bajo qué circunstancias es un modelo apropiado para el crecimiento poblacional?

Es un modelo apropiado en condiciones ideales: Entorno ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores y enfermedades.

(c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

Si $P(0) = P_0$, el valor inicial, las soluciones son $P(t) = P_0e^{kt}$.

8. (a) Escriba la ecuación diferencial logística.

La ecuación diferencial logística es

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

donde M es la capacidad de carga.

(b) ¿Bajo qué circunstancias es un modelo apropiado para el crecimiento poblacional?

Es un modelo apropiado para el crecimiento demográfico si la población aumenta a una tasa proporcional con el tamaño de la población inicial, pero finalmente se modera y se acerca a su capacidad de carga a causa de recursos limitados.

9. (a) Escriba las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de peces comestibles (F) y tiburones (S).

$$\frac{dF}{dt} = kF - aFS \qquad \text{y} \qquad \frac{dS}{dt} = -rS + bFS$$

(b) ¿Qué indican estas ecuaciones sobre cada población en ausencia de la otra?

En ausencia de tiburones, un amplio suministro alimentario sostendría el crecimiento exponencial de la población de peces, es decir $dF/dt = kF$, donde k es una constante positiva. En ausencia de peces, se supone que la población de tiburones disminuiría a una tasa proporcional a sí misma, es decir $dS/dt = -rS$, donde r es una constante positiva.

CAPÍTULO 10 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una curva paramétrica?

Una curva paramétrica es un conjunto de puntos de la forma $(x, y) = (f(t), g(t))$, donde f y g son funciones de una variable t, el parámetro.

(b) ¿Cómo se traza una curva paramétrica?

Trazar una curva paramétrica, como trazar la gráfica de una función, es difícil de hacer en general. Se pueden trazar puntos en la curva determinando $f(t)$ y $g(t)$ para varios valores de t, ya sea a mano o con una calculadora o computadora. A veces, cuando f y g están dadas por fórmulas, se puede eliminar t de las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para obtener una ecuación cartesiana que relacione a x y y. Podría ser más fácil graficar una ecuación que trabajar con las fórmulas originales para x y y en términos de t.

2. (a) ¿Cómo se encuentra la pendiente de una tangente a una curva paramétrica?

Se puede determinar dy/dx como una función de t calculando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{si } dx/dt \neq 0$$

(b) ¿Cómo se determina el área debajo de una curva paramétrica?

Si la curva se traza una vez conforme a las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, el área es

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

[o $\int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt$ si el punto más a la izquierda es $(f(\beta), g(\beta))$ antes que $(f(\alpha), g(\alpha))$].

3. Escriba una expresión para cada uno de los elementos siguientes:

(a) La longitud de una curva paramétrica

Si la curva se traza una vez conforme a las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, la longitud es

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\,dt$$

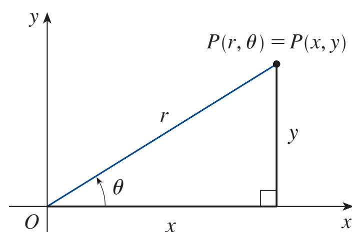
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

(b) El área de la superficie obtenida al hacer girar una curva paramétrica alrededor del eje x

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta 2\pi g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

4. (a) Use un diagrama para explicar el significado de las coordenadas polares (r, θ) de un punto.



(b) Escriba ecuaciones que expresen las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto en términos de las coordenadas polares.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

(c) ¿Qué ecuaciones usaría para obtener las coordenadas polares de un punto si conociera las coordenadas cartesianas?

Para determinar una representación polar (r, θ) con $r \geqslant 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, primero se calcula $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Luego se especifica θ por medio de $\tan\theta = y/x$. Hay que cerciorarse de elegir θ de tal forma que (r, θ) esté en el cuadrante correcto.

5. (a) ¿Cómo se determina la pendiente de una recta tangente a una curva polar?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{d}{d\theta}(y)}{\dfrac{d}{d\theta}(x)} = \frac{\dfrac{d}{d\theta}(r\,\text{sen}\,\theta)}{\dfrac{d}{d\theta}(r\cos\theta)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)\text{sen}\,\theta + r\cos\theta}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} \qquad \text{donde } r = f(\theta)$$

(b) ¿Cómo se calcula el área de una región acotada por una curva polar?

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

(c) ¿Cómo se determina la longitud de una curva polar?

$$L = \int_a^b \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \int_a^b \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \int_a^b \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$$

6. (a) Dé una definición geométrica de una parábola.

Una parábola es un conjunto de puntos en un plano cuyas distancias de un punto fijo F (el foco) y una recta fija l (la directriz) son iguales.

(b) Escriba una ecuación de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$. ¿Qué pasa si el foco es $(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$?

En el primer caso, una ecuación es $x^2 = 4py$, y en el segundo caso $y^2 = 4px$.

7. (a) Dé una definición de una elipse en términos de los focos.

Una elipse es un conjunto de puntos en un plano que satisface que la suma de las distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante.

(b) Escriba una ecuación para la elipse con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a \geqslant b > 0$ y $c^2 = a^2 - b^2$.

(continúa)

8. **(a)** Dé una definición de una hipérbola en términos de los focos.

Una hipérbola es un conjunto de puntos en un plano que satisfacen que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante. Esta diferencia debería interpretarse como la distancia mayor menos la distancia menor.

(b) Escriba una ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$.

(c) Escriba ecuaciones para las asíntotas de la hipérbola del inciso (b).

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

9. **(a)** ¿Cuál es la excentricidad de una sección cónica?

Si una sección cónica tiene foco F y directriz correspondiente l, la excentricidad e es la razón fija $|PF|/|Pl|$ para puntos P de la sección cónica.

(b) ¿Qué se puede decir acerca de la excentricidad si la sección cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?

$e < 1$ para una elipse; $e > 1$ para una hipérbola; $e = 1$ para una parábola.

(c) Escriba una ecuación polar para una sección cónica con excentricidad e y directriz $x = d$. ¿Qué pasa si la directriz es $x = -d$? ¿$y = d$? ¿$y = -d$?

directriz $x = d$: $\quad r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$

$x = -d$: $\quad r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$

$y = d$: $\quad r = \dfrac{ed}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$

$y = -d$: $\quad r = \dfrac{ed}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$

Corte aquí y guarde para consulta

CAPÍTULO 11 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión convergente?

Una sucesión convergente $\{a_n\}$ es una lista ordenada de números donde lím$_{n\ \to\infty}\ a^n$ existe.

(b) ¿Qué es una serie convergente?

Una serie $\Sigma\ a_n$ es la *suma* de una sucesión de números.

Es convergente si las sumas parciales $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ se aproximan un valor finito, es decir si lím$_{n\to\infty}\ s_n$ existe como un número real.

(c) ¿Qué significa lím$_{n\to\infty}\ a_n = 3$?

Que los términos de la sucesión$\{a_n\}$ se aproximan a 3 conforme n crece.

(d) ¿Qué significa $\Sigma_{n-1}^{\infty}\ a_n = 3$?

Que añadiendo suficientes términos a la serie, se puede acercar a 3 las sumas parciales tanto como se quiera.

2. (a) ¿Qué es una sucesión acotada?

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada si hay números m y M tales que $m \leqslant a_n \leqslant M$ para todas las $n \geqslant 1$.

(b) ¿Qué es una sucesión monótona?

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente para todas las $n \geqslant 1$.

(c) ¿Qué puede decir con respecto a una sucesión monótona acotada?

Todas las sucesiones monótonas acotadas son convergentes.

3. (a) ¿Qué es una serie geométrica? ¿En qué circunstancias es convergente? ¿Cuál es su suma?

Una serie geométrica es de la forma

$$\sum_{n-1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

Es convergente si $|r| < 1$ y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$.

(b) ¿Qué es una serie p? ¿En qué circunstancias es convergente? Una serie p es de la forma $\sum_{n-1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. Es convergente si $p > 1$.

4. Suponga que $\Sigma\ a_n = 3$ y s_n es la enésima suma parcial de la serie. ¿Qué es lím$_{n\to\infty}\ a_n$? ¿Qué es lím$_{n\to\infty}\ S_n$?

Si $\Sigma\ a_n = 3$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 3$.

5. Enuncie lo siguiente.

(a) Prueba de la divergencia

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(b) Prueba de la integral

Suponga que f es una función continua positiva decreciente en $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$.

- Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(c) Prueba por comparación

Suponga que $\Sigma\ a_n$ y $\Sigma\ b_n$ son series con términos positivos.

- Si $\Sigma\ b_n$ es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para todas las n, entonces $\Sigma\ a_n$ también es convergente.
- Si $\Sigma\ b_n$ es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para todas las n, entonces $\Sigma\ a_n$ también es divergente.

(d) Prueba por comparación del límite

Suponga que $\Sigma\ a_n$ y $\Sigma\ b_n$ son series con términos positivos. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/bn = c$, donde c es un número finito y $c > 0$, ambas series convergen o divergen.

(e) Prueba de la serie alternante

Si la serie alternante

$$\sum_{n-1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots$$

donde $b_n > 0$ satisface (i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todas las n y (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces la serie es convergente.

(f) Prueba de la razón

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, la serie $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y por tanto convergente).
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ o $\lim\limits_{n 1\ \infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, la serie $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ es divergente.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, la prueba de la razón no es concluyente.

(g) Prueba de la raíz

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, la serie $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y por tanto convergente).
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, la serie $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ es divirgente.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

6. (a) ¿Qué es una serie absolutamente convergente?

Una serie $\Sigma\ a_n$ se llama absolutamente convergente si la serie de valores absolutos $\Sigma\,|a_n|$ es convergente.

(b) ¿Qué puede decir acerca de dicha serie?

Si una serie $\Sigma\ a_n$ es absolutamente convergente, es convergente.

(c) ¿Qué es una serie condicionalmente convergente?

Una serie$\Sigma\ a_n$ se llama condicionalmente convergente si es convergente pero no absolutamente convergente.

(continúa)

7. **(a)** Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la integral, ¿cómo se estima su suma?

La suma s se puede estimar mediante la desigualdad

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

donde s_n es la enésima suma parcial.

(b) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba por comparación, ¿cómo estima su suma?

Primero se estima el residuo de la serie de comparación. Esto da un límite superior para el residuo de la serie original (como en el ejemplo 11.4.5).

(c) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante, ¿cómo se estima su suma?

Se puede usar una suma parcial s_n de una serie alternante como una aproximación de la suma total. Está garantizado que el tamaño del error no sea mayor que $|a_{n+1}|$, el valor absoluto del primer término omitido.

8. **(a)** Escriba la forma general de una serie de potencias.

Una serie de potencias centrada en a es

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

(b) ¿Qué es el radio de convergencia de una serie de potencias?

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, el radio de convergencia es:

(i) 0 si la serie converge solo cuando $x = a$,

(ii) ∞ si la serie converge para todas las x, o

(iii) un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.

(c) ¿Qué es el intervalo de convergencia de una serie de potencias?

El intervalo de convergencia de una serie de potencias es el intervalo que consta de todos los valores de x para los que la serie converge. En correspondencia con los casos del inciso (b), el intervalo de convergencia es (i) el solo punto {a}, (ii) $(-\infty, \infty)$ o (iii) un intervalo con puntos extremos a $- R$ y $a + R$ que puedan contener a ninguno, alguno o ambos puntos extremos.

9. Suponga que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia R.

(a) ¿Cómo deriva f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para f'?

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, entonces

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ con radio de convergencia R.

(b) ¿Cómo integra f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para $\int f(x)\,dx$?

$\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ con radio de convergencia R.

10. **(a)** Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de grado enésimo de f centrada en a.

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

(b) Escriba una expresión para la serie de Taylor de f centrada en a.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) Escriba una expresión para la serie de Maclaurin de f.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad [a = 0 \text{ en el inciso (b)}]$$

(d) ¿Cómo demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor?

Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de enésimo grado de f y $R_n(x)$ es el residuo de la serie de Taylor, se debe demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

(e) Enuncie la desigualdad de Taylor.

Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x-a| \leqslant d$, el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor satisface la desigualdad

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \qquad \text{para } |x-a| \leqslant d$$

11. Escriba la serie de Maclaurin y el intervalo de convergencia para cada una de las funciones siguientes.

(a) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad R = 1$

(b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad R = \infty$

(c) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty$

(d) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty$

(e) $\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1$

(f) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}, \quad R = 1$

12. Escriba el desarrollo de la serie binomial de $(1+x)^k$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

$$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

El radio de convergencia para la serie binomial es 1.

Corte aquí y guarde para consulta

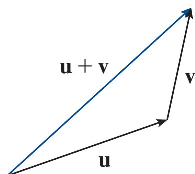
CAPÍTULO 12 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Cuál es la diferencia entre un vector y un escalar?

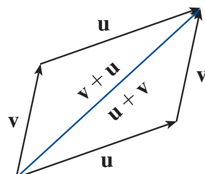
Un escalar es un número real, mientras que un vector es una cantidad que tiene tanto una magnitud con valor real como una dirección.

2. ¿Cómo se suman geométricamente dos vectores? ¿Cómo se suman algebraicamente?

Para sumar dos vectores geométricamente se puede usar la ley del triángulo o la ley del paralelogramo:



Ley del triángulo



Ley del paralelogramo

Algebraicamente, se suman los componentes correspondientes de los vectores.

3. Si **a** es un vector y c un escalar, ¿cómo se relaciona geométricamente $c\mathbf{a}$ con **a**? ¿Cómo se determina $c\mathbf{a}$ algebraicamente?

Para $c > 0$, $c\mathbf{a}$ es un vector con la misma dirección que **a** y longitud c multiplicada por la longitud de **a**. Si $c < 0$, $c\mathbf{a}$ apunta en la dirección opuesta a **a** y tiene longitud $|c|$ multiplicada por la longitud de **a**. Algebraicamente, para determinar $c\mathbf{a}$ se multiplica cada componente de **a** por c.

4. ¿Cómo se determina el vector de un punto a otro?

El vector del punto $A(x_1, y_1, z_1)$ al punto $B(x_2, y_2, z_2)$ está dado por

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

5. ¿Cómo se determina el producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dos vectores si se conocen sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Y si se conocieran sus componentes?

Si θ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces

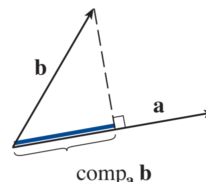
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

6. ¿Qué utilidad tienen los productos punto?

El producto punto se puede usar para determinar el ángulo entre dos vectores. En particular, se puede emplear para determinar si dos vectores son ortogonales. También se puede usar el producto punto para determinar la proyección escalar de un vector en otro. Adicionalmente, si una fuerza constante mueve un objeto, el trabajo realizado es el producto punto de los vectores de fuerza y de desplazamiento.

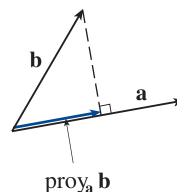
7. Escriba expresiones para las proyecciones escalar y vectorial de **b** en **a**. Ilustre con diagramas.

La proyección escalar de **b** en **a**: $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$



La proyección vectorial de **b** en **a**:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\, \mathbf{a}$$



8. ¿Cómo se determina el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores si se conocieran sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Y si se conocieran sus componentes?

Si θ es el ángulo entre **a** y **b** $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, entonces $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el vector con longitud $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$ y dirección ortogonal tanto a **a** como a **b**, tal como lo da la regla de la mano derecha. Si

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

9. ¿Qué utilidad tienen los productos cruz?

El producto cruz se puede usar para crear un vector ortogonal a dos vectores dados y se puede emplear para calcular el área de un paralelogramo determinado por dos vectores. Dos vectores diferentes de cero son paralelos si, y solo si, su producto cruz es **0**. Además, si una fuerza actúa sobre un cuerpo rígido, el vector de momento de torsión es el producto cruz de los vectores de posición y de fuerza.

(continúa)

10. (a) ¿Cómo se establece el área del paralelogramo determinado por **a** y **b**?

El área del paralelogramo determinado por **a** y **b** es la longitud del producto cruz: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

(b) ¿Cómo se establece el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c**?

El volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es la magnitud de su triple producto escalar: $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$

11. ¿Cómo se determina un vector perpendicular a un plano?

Si se conoce una ecuación del plano, se puede escribir en la forma $ax + by + cz + d = 0$. Un vector normal, el cual es perpendicular al plano, es $\langle a, b, c\rangle$ (o cualquier múltiplo escalar de $\langle a, b, c\rangle$ diferente de cero). Si no se conoce una ecuación, se pueden usar puntos en el plano para encontrar dos vectores no paralelos que residan en el plano. El producto cruz de estos vectores es un vector perpendicular al plano.

12. ¿Cómo se determina el ángulo entre dos planos intersecantes?

El ángulo entre dos planos intersecantes se define como el ángulo agudo θ entre sus vectores normales. Si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son los vectores normales, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}$$

13. Escriba una ecuación vectoral, ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas para una recta.

Una ecuación vectorial para una recta que es paralela a un vector **v** y pasa por un punto con vector de posición r_0 es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Ecuaciones paramétricas para una recta que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y que es paralela al vector $\langle a, b, c\rangle$ son

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

mientras que las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

14. Escriba una ecuación vectorial y una ecuación escalar para un plano.

Una ecuación vectorial de un plano que pasa por un punto con vector de posición $\mathbf{r}_0$ y que tiene vector normal **n** (lo que significa que **n** es ortogonal al plano) es $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, en forma equivalente, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$.

Una ecuación escalar de un plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) con vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

15. (a) ¿Cómo se sabe si dos vectores son paralelos?

Dos vectores (diferentes de cero) son paralelos si, y solo si, uno es un múltiplo escalar del otro. Además, dos vectores diferentes de cero son paralelos si, y solo si, su producto cruz es **0**.

(b) ¿Cómo se sabe si dos vectores son perpendiculares?

Dos vectores son perpendiculares si, y solo si, su producto punto es 0.

(c) ¿Cómo se sabe si dos planos son paralelos?

Dos planos son paralelos si, y solo si, sus vectores normales son paralelos.

16. (a) Describa un método para determinar si tres puntos P, Q y R están en la misma recta.

Se determinan los vectores $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{PR} = \mathbf{b}$. Si hay un escalar t tal que $a = t\mathbf{b}$, los vectores son paralelos y todos los puntos deben estar en la misma recta.

O bien, si $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos, así que P, Q y R son colineales.

Un método algebraico consiste en determinar una ecuación de la recta que une a los dos puntos y verificar después si el tercer punto satisface o no esta ecuación.

(b) Describa un método para determinar si cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo plano.

Se determinan los vectores $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{PR} = \mathbf{b}$, $PS = \mathbf{c}$. Entonces, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es normal al plano formado por P, Q y R, así que S reside en este plano si $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y **c** son ortogonales, es decir si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

O bien, se puede verificar si el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0 (véase el ejemplo 12.4.5).

Un método algebraico consiste en hallar una ecuación del plano determinado por tres de los puntos y después verificar si el cuarto punto satisface o no la ecuación.

17. (a) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a una recta?

Sea P un punto que no está en la recta L que pasa por los puntos Q y R y sea $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$. La distancia del punto P a la recta L es

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

(b) ¿Cómo se determina la distancia de un punto a un plano?

Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ cualquier punto en el plano $ax + by + cz + d = 0$ y sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto que no está en el plano. Si $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_0P_1} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle$, entonces la distancia D de P_1 al plano es igual al valor absoluto de la proyección escalar de **b** en el vector normal del plano $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$:

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(c) ¿Cómo se determina la distancia entre dos rectas?

Dos rectas sesgadas L_1 y L_2 se pueden visualizar como tendidas en dos planos paralelos, cada uno de ellos con vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores de dirección de L_1 y L_2. Después de elegir un punto en L_1 y determinar la ecuación del plano que contiene a L_2, se puede proceder como en el inciso (b). (Véase el ejemplo 12.5.10).

(continúa)

Corte aquí y guarde para consulta

18. ¿Qué son las trazas de una superficie? ¿Cómo se les determina?

Las trazas de una superficie son las curvas de interesección de la superficie con planos paralelos a los planos de coordenadas. Se puede hallar la traza en el plano $x = k$ (paralelo al plano yz) estableciendo $x = k$ y determinando la curva representada por la ecuación resultante. Las trazas en los planos $y = k$ (paralelo al plano xz) y $z = k$ (paralelo al plano xy) se hallan en forma similar.

19. Escriba ecuaciones en forma estándar de los seis tipos de superficies cuádricas.

Ecuaciones para las superficies cuádricas simétricas con respecto al eje z son como sigue:

Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Cono: $\dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Paraboloide elíptico: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

Hiperboloide de una hoja: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Hiperboloide de dos hojas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Paraboloide hiperbólico: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

CAPÍTULO 13 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Corte aquí y guarde para consulta

1. ¿Qué es una función vectorial? ¿Cómo se encuentran su derivada y su integral?

Una función vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores. Para determinar la derivada o la integral, se puede derivar o integrar cada función componente de la función vectorial.

2. ¿Cuál es la relación entre funciones vectoriales y curvas en el espacio?

Una función vectorial continua $\mathbf{r}$ define una curva en el espacio trazada por la punta del vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en movimiento.

3. ¿Cómo se determina el vector tangente a una curva suave en un punto? ¿Cómo se determina la recta tangente? ¿El vector tangente unitario?

El vector tangente a una curva suave en un punto P con vector de posición $\mathbf{r}(t)$ es el vector $\mathbf{r}'(t)$. La recta tangente en P es la recta que pasa por P paralela al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$. El vector tangente unitario es $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$.

4. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales derivables, c un escalar y f una función con valores reales, escriba las reglas para derivar las siguientes funciones vectoriales.

(a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

(b) $c\mathbf{u}(t)$

$$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

(c) $f(t)\,\mathbf{u}(t)$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\,\mathbf{u}(t)] = f'(t)\,\mathbf{u}(t) + f(t)\,\mathbf{u}'(t)$$

(d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

(e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

(f) $\mathbf{u}(f(t))$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$$

5. ¿Cómo se determina la longitud de una curva en el espacio dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$?

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, $a \leqslant t \leqslant b$, y la curva es recorrida exactamente una vez cuando t se incrementa de a a b, la longitud es

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

6. (a) ¿Cuál es la definición de curvatura?

La curvatura de una curva es $\kappa = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$ donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario.

(b) Escriba una fórmula para la curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$.

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

(c) Escriba una fórmula para la curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

(d) Escriba una fórmula para la curvatura de una curva en un plano, con ecuación $y = f(x)$.

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

7. (a) Escriba fórmulas para los vectores normal unitario y binormal de una curva suave en el espacio $\mathbf{r}(t)$.

Vector normal unitario: $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$

Vector binormal: $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$

(b) ¿Qué es el plano normal de una curva en un punto? ¿Qué es el plano osculador? ¿Qué es el círculo osculador?

El plano normal de una curva en un punto P es el plano determinado por los vectores normal y binormal $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ en P. El vector tangente $\mathbf{T}$ es ortogonal al plano normal.

El plano osculador en P es el plano determinado por los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$. Es el plano que está más cerca de contener la parte de la curva próxima a P.

El círculo osculador en P es el círculo que se ubica en el plano osculador de C en P, tiene la misma tangente que C en P, reside en el lado cóncavo de C (hacia el que apunta $\mathbf{N}$) y tiene radio $\rho = 1/\kappa$ (el recíproco de la curvatura). Es el círculo que describe mejor cómo se comporta C cerca de P; comparte la misma tangente, normal y curvatura en P.

(continúa)

8. (a) ¿Cómo se determina la velocidad, rapidez y aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio?

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula en la curva en el espacio, el vector de velocidad es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, la rapidez está dada por $|\mathbf{v}(t)|$, y la aceleración es $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.

(b) Escriba la aceleración en términos de sus componentes tangencial y normal.

$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$, donde $a_T = v'$ y $a_N = \kappa v^2$ ($v = |\mathbf{v}|$ es la rapidez y κ la curvatura).

9. Enuncie las leyes de Kepler.

- Un planeta gira alrededor del sol en una órbita elíptica con el sol en un foco.
- La recta que une al sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
- El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

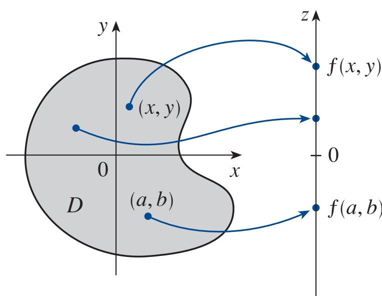
CAPÍTULO 14 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una función de dos variables?

Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) de números reales en su dominio un número real único denotado por $f(x, y)$.

(b) Describa tres métodos para visualizar una función de dos variables.

Una manera de visualizar una función de dos variables consiste en graficarla, lo que resulta en la superficie $z = f(x, y)$. Otro método es elaborar un mapa de contorno, el cual consta de curvas de nivel $f(x, y) = k$ (k una constante), que son trazas horizontales de la gráfica de la función proyectada en el plano xy. Asimismo, se puede usar un diagrama con flechas como el que aparece aquí.



2. ¿Qué es una función de tres variables? ¿Cómo puede visualizar una función de ese tipo?

Una función f de tres variables es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en su dominio un número real único $f(x, y, z)$. Se puede visualizar una función de tres variables examinando sus superficies de nivel $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante.

3. ¿Qué significa la expresión siguiente?

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

¿Cómo se puede demostrar que ese límite no existe?

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ significa que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) se aproxima al punto (a, b) a lo largo de cualquier trayectoria que esté dentro del dominio de f. Se puede demostrar que un límite en un punto no existe determinando dos trayectorias diferentes que se aproximan al punto a lo largo de las cuales $f(x, y)$ tiene límites diferentes.

4. (a) ¿Qué significa decir que f es continua en (a, b)?

Una función f de dos variables es continua en (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

(b) Si f es continua en $\mathbb{R}^2$, ¿qué puede decir usted sobre su gráfica?

Si f es continua en $\mathbb{R}^2$, su gráfica parecerá una superficie sin agujeros ni quiebres.

5. (a) Escriba expresiones para las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ como límites.

$$f_x(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f_y(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

(b) ¿Cómo se interpretan $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ geométricamente? ¿Cómo se les interpreta como razones de cambio?

Si $f(a, b) = c$, el punto $P(a, b, c)$ se sitúa en la superficie S dada por $z = f(x, y)$. Se puede interpretar $f_x(a, b)$ como la pendiente de la recta tangente en P a la curva de intersección del plano vertical $y = b$ y S. En otras palabras, si se restringe a la trayectoria a lo largo de S que pasa por P y que es paralela al plano xz, entonces $f_x(a, b)$ es la pendiente en P que apunta en la dirección positiva de x. De igual forma, $f_y(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente en P a la curva de intersección del plano vertical $x = a$ y S.

Si $z = f(x, y)$, entonces $f_x(x, y)$ se puede interpretar como la razón de cambio de z con respecto a x cuando y es fija. Así, $f_x(a, b)$ es la razón de cambio de z (con respecto a x) cuando y está fija en b y se permite a x variar desde a. Del mismo modo, $f_y(a, b)$ es la razón de cambio de z (con respecto a y) cuando x está fija en a y se permite a y variar desde b.

(c) Si $f(x, y)$ está dada por una fórmula, ¿cómo se calculan f_x y f_y?

Para determinar f_x, se considera y como constante y se deriva $f(x, y)$ con respecto a x. Para determinar f_y, se considera a x como constante y se deriva $f(x, y)$ con respecto a y.

6. ¿Qué dice el teorema de Clairaut?

Si f es una función de dos variables definida en un disco D que contiene al punto (a, b) y las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, el teorema de Clairaut establece que $f_{xy}.\ (a, b) = f_{yx}.\ (a, b)$

7. ¿Cómo se determina un plano tangente a cada uno de los tipos de superficies siguientes?

(a) Una gráfica de una función de dos variables, $z = f(x, y)$

Si f tiene derivadas parciales continuas, una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

(b) Una superficie de nivel de una función de tres variables, $F(x, y, z) = k$

El plano tangente a la superficie de nivel $F(x, y, z) = k$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ es el plano que pasa por P y tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$:

$$F_x(x_0\ \ y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)$$
$$+ F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

(continúa)

8. Defina la linealización de f en (a, b). ¿Cuál es la correspondiente aproximación lineal? ¿Cuál es la interpretación geométrica de la aproximación lineal?

La linealización de f en (a, b) es la función lineal cuya gráfica es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La aproximación lineal de f en (a, b) es

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Geométricamente la aproximación lineal indica que los valores de funciones $f(x, y)$ pueden ser aproximados por los valores $L(x, y)$ del plano tangente a la gráfica de f en $(a, b, f(a, b))$ cuando (x, y) está cerca de (a, b).

9. (a) ¿Qué significa decir que f es derivable en (a, b)?

Si $z = f(x, y)$, entonces f es derivable en (a, b) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. En otras palabras, una función derivable es aquella para la cual la aproximación lineal ya enunciada es una aproximación satisfactoria cuando (x, y) está cerca de (a, b).

(b) ¿Cómo suele verificarse que f es derivable?

Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es derivable en (a, b).

10. Si $z = f(x, y)$, ¿qué son las diferenciales dx, dy y dz?

Las diferenciales dx y dy son variables independientes que pueden recibir cualesquiera valores. Si f es derivable, la diferencial dz está definida por

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy$$

11. Enuncie la regla de la cadena para el caso en el que $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una variable. ¿Y si x y y son funciones de dos variables?

Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones derivables de t. Entonces, z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Si $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

12. Si z es definida implícitamente como una función de x y y por una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, ¿cómo se determinan $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$?

Si F es derivable y $\partial F/\partial z \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

13. (a) Escriba una expresión como un límite para la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$. ¿Cómo se le interpreta como una razón? ¿Cómo se le interpreta geométricamente?

La derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Se puede interpretar esto como la razón de cambio de f (con respecto a la distancia) en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{u}$. Geométricamente, si P es el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la gráfica de f y C es la curva de intersección de la gráfica de f con el plano vertical que pasa por P en la dirección de $\mathbf{u}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a C en P.

(b) Si f es derivable, escriba una expresión para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ en términos de f_x y f_y.

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

14. (a) Defina el vector gradiente ∇f para una función f de dos o tres variables.

Si f es una función de dos variables, entonces

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

Para una función f de tres variables,

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

(b) Exprese $D_{\mathbf{u}} f$ en términos de ∇f.

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

o $$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

(*continúa*)

Corte aquí y guarde para consulta

(c) Explique la significación geométrica del gradiente.

El vector gradiente de f da la dirección de razón máxima de incremento de f. En la gráfica de $z = f(x, y)$, ∇f apunta en la dirección del ascenso más pronunciado. Asimismo, el vector gradiente es perpendicular a las curvas de nivel o superficies de nivel de una función.

15. ¿Qué significan los enunciados siguientes?

(a) f tiene un máximo local en (a, b).

f tiene un máximo local en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b).

(b) f tiene un máximo absoluto en (a, b).

f tiene un máximo absoluto en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en el dominio de f.

(c) f tiene un mínimo local en (a, b).

f tiene un mínimo local en (a, b) si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b).

(d) f tiene un mínimo absoluto en (a, b).

f tiene un mínimo absoluto en (a, b) si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en el dominio de f.

(e) f tiene un punto silla en (a, b).

f tiene un punto silla en (a, b) si $f(a, b)$ es un máximo local en una dirección pero un mínimo local en otra.

16. (a) Si f tiene un máximo local en (a, b), ¿qué puede decir usted sobre sus derivadas parciales en (a, b)?

Si f tiene un máximo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f existen ahí, $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

(b) ¿Qué es un punto crítico de f?

Un punto crítico de f es un punto (a, b) tal que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ o una de estas derivadas parciales no existe.

17. Enuncie la prueba de la segunda derivada.

Suponga que las segundas derivadas parciales de f son continuas en un disco con centro (a, b) y que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ [es decir, (a, b) es un punto crítico de f]. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\, f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.
- Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.
- Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo ni un mínimo local. El punto (a, b) es un punto silla de f.

18. (a) ¿Qué es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué es un conjunto acotado?

Un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ es el que contiene todos sus puntos frontera. Si uno o más puntos en la curva frontera se omiten, el conjunto no es cerrado.

Un conjunto acotado es el que está contenido en algún disco. En otras palabras, es de extensión finita.

(b) Enuncie el teorema de valores extremos para funciones de dos variables.

Si f es continua en un conjunto cerrado y acotado D en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.

(c) ¿Cómo se determinan los valores que garantiza el teorema de valores extremos?

- Se determinan los valores de f en los puntos críticos de f en D.
- Se determinan los valores extremos de f en la frontera de D.
- El mayor de los valores de los pasos previos es el valor máximo absoluto; el menor de esos valores es el valor mínimo absoluto.

19. Explique cómo funciona el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. ¿Y si hubiera una segunda restricción $h(x, y, z) = c$?

Para hallar los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores extremos existen y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en la superficie $g(x, y, z) = k$], primero se determinan todos los valores de x, y, z y λ donde $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ y $g(x, y, z) = k$. (Así, se determinan los puntos de la restricción donde los vectores gradientes ∇f y ∇g son paralelos.) Se evalúa f en todos los puntos resultantes (x, y, z); el mayor de esos valores es el valor máximo de f y el menor es el valor mínimo de f.

Si hay una segunda restricción $h(x, y, z) = c$, se determinan todos los valores de x, y, z, λ y μ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

Nuevamente, los valores extremos de f se determinan evaluando f en los puntos resultantes (x, y, z).

CAPÍTULO 15 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Suponga que f es una función continua definida en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.

(a) Escriba una expresión para una doble suma de Riemann de f. Si $f(x, y) \geqslant 0$, ¿qué representa la suma?

Una doble suma de Riemann de f es

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A$$

donde ΔA es el área de cada subrectángulo y (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es el punto muestra en cada subrectángulo. Si $f(x, y) \geqslant 0$, esta suma representa una aproximación al volumen del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y bajo la gráfica de f.

(b) Escriba la definición de $\iint_R f(x, y) \, dA$ como un límite.

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A$$

(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\iint_R f(x, y) \, dA$ si $f(x, y) \geqslant 0$? ¿Y si f adopta valores tanto positivos como negativos?

Si $f(x, y) \geqslant 0$, $\iint_R f(x, y) \, dA$ representa el volumen del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y bajo la superficie $z = f(x, y)$. Si f toma valores tanto positivos como negativos, entonces $\iint_R f(x, y) \, dA$ es $V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen sobre R y bajo la superficie $z = f(x, y)$ y V_2 el volumen bajo R y sobre la superficie.

(d) ¿Cómo se evalúa $\iint_R f(x, y) \, dA$?

Usualmente se evalúa $\iint_R f(x, y) \, dA$ como una integral iterada de acuerdo con el teorema de Fubini:

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

(e) ¿Qué dice la regla del punto medio para las integrales dobles?

La regla del punto medio para las integrales dobles afirma que se aproxima la integral doble $\iint_R f(x, y) \, dA$ por medio de la doble suma de Riemann $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \, \Delta A$, donde los puntos $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ muestra son los centros de los subrectángulos.

(f) Escriba una expresión para el valor promedio de f.

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) \, dA$$

donde $A(R)$ es el área de R.

2. (a) ¿Cómo se define $\iint_D f(x, y) \, dA$ si D es una región acotada que no es un rectángulo?

Como D está acotada, puede estar encerrada en una región rectangular R. Se define una función nueva F con dominio R mediante

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{Si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{Si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

Entonces se define

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_R F(x, y) \, dA$$

(b) ¿Qué es una región tipo I? ¿Cómo se evalúa $\iint_D f(x, y) \, dA$ si D es una región tipo I?

Una región D es de tipo I si se ubica entre las gráficas de dos funciones continuas de x, es decir

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \; g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$. Entonces,

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

(c) ¿Qué es una región tipo II? ¿Cómo se evalúa $\iint_D f(x, y) \, dA$ si D es una región tipo II?

Un región D es de tipo II si se ubica entre las gráficas de dos funciones continuas de y, es decir

$$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d, \; h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$. Entonces,

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

(d) ¿Qué propiedades tienen las integrales dobles?

- $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] \, dA = \iint_D f(x, y) \, dA + \iint_D g(x, y) \, dA$
- $\iint_D c f(x, y) \, dA = c \iint_D f(x, y) \, dA$

donde c es una constante

- Si $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todos los (x, y) en D, entonces
$$\iint_D f(x, y) \, dA \geqslant \iint_D g(x, y) \, dA$$
- Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se superponen excepto quizá en sus fronteras, entonces
$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_{D_1} f(x, y) \, dA + \iint_{D_2} f(x, y) \, dA$$
- $\iint_D 1 \, dA = A(D)$, el área de D.
- Si $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todos los (x, y) en D, entonces
$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y) \, dA \leqslant MA(D)$$

(continúa)

3. ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble? ¿Por qué se querría hacer ese cambio?

Se puede querer cambiar de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble si la región D de integración es más fácil de describir en coordenadas polares:

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

Para evaluar $\iint_R f(x, y)\, dA$, se reemplazan x por $r \cos \theta$, y por $r \operatorname{sen} \theta$ y dA por $r\, dr\, d\theta$ (y se usan límites de integración apropiados):

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

4. Si una lámina ocupa una región plana D y tiene función de densidad $\rho(x, y)$, escriba expresiones para cada uno de los conceptos siguientes en términos de integrales dobles.

(a) La masa: $m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$

(b) Los momentos alrededor de los ejes:

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)\, dA \qquad M_y = \iint_D x\rho(x, y)\, dA$$

(c) El centro de masa:

$(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$, donde $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m}$

(d) Los momentos de inercia alrededor de los ejes y el origen:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, \rho(x, y)\, dA$$

5. Sea f una función de densidad conjunta de un par de variables aleatorias continuas X y Y.

(a) Escriba una integral doble para la probabilidad de que X se ubique entre a y b y Y se sitúe entre c y d.

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

(b) ¿Qué propiedades posee f?

$$f(x, y) \geqslant 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$$

(c) ¿Cuáles son los valores esperados de X y Y?

El valor esperado de X es $\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y)\, dA$

El valor esperado de Y es $\mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y)\, dA$

6. Escriba una expresión para el área de una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

(suponiendo que f_x y f_y son continuas).

7. (a) Escriba la definición de la integral triple de f en una caja rectangular B.

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

donde ΔV es el volumen de cada subcaja y $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ es un punto muestra en cada subcaja.

(b) ¿Cómo se evalúa $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$?

Usualmente se evalúa $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$ como una integral iterada de acuerdo con el teorema de Fubini para las integrales triples: si f es continua en $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Note que hay otros cinco órdenes de integración que se pueden usar.

(c) ¿Cómo se define $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región sólida acotada que no es una caja?

Como E está acotada, puede estar encerrada en una caja B como se describió en el inciso (b). Se define una función nueva F con dominio B mediante

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{Si } (x, y, z) \text{ está en } E \\ 0 & \text{Si } (x, y, z) \text{ está en } B \text{ pero no en } E \end{cases}$$

Entonces se define

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_B F(x, y, z)\, dV$$

(continúa)

Corte aquí y guarde para consulta

(d) ¿Qué es una región sólida tipo 1? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?

Una región E es de tipo 1 si está entre las gráficas de dos funciones continuas de x y y, es decir

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xy. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

(e) ¿Qué es una región sólida tipo 2? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?

Una región tipo 2 es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leqslant x \leqslant u_2(y, z)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano yz. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

(f) ¿Qué es una región sólida tipo 3? ¿Cómo se evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de ese tipo?

Una región tipo 3 es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leqslant y \leqslant u_2(x, z)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xz. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

8. Suponga que un objeto sólido ocupa la región E y tiene función de densidad $\rho(x, y, z)$. Escriba expresiones para cada uno de los factores siguientes.

(a) La masa:

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

(b) Los momentos alrededor de los planos de coordenadas:

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

(c) Las coordenadas del centro de masa:

$$(\bar{x}\ \bar{y}, \bar{z}), \text{ donde } \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

(d) Los momentos de inercia alrededor de los ejes:

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\, dV$$

(continúa)

9. **(a)** ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas en una integral triple?

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\text{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

donde

$$E = \{(r, \theta, z) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta), u_1(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) \leqslant z \leqslant u_2(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\}$$

Así, se reemplaza x por $r\cos\theta$, y por $r\,\text{sen}\,\theta$, dV por $r\, dz\, dr\, d\theta$ y se usan límites de integración apropiados.

(b) ¿Cómo se cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas en una integral triple?

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\rho\,\text{sen}\,\phi\, \cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\, \text{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

donde $$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d,\ g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\}$$

Así, se reemplaza x por $\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$, y por $\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta$, z por $\rho\cos\phi$, dV por $\rho^2\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$ y se usan límites de integración apropiados.

(c) ¿En qué situaciones usted cambiaría a coordenadas cilíndricas o esféricas?

Se puede querer cambiar de coordenadas rectangulares a cilíndricas o esféricas en una integral triple si la región E de integración es más fácil de describir en coordenadas cilíndricas o esféricas. Regiones que involucran simetría alrededor del eje z suelen ser más simples de describir usando coordenadas cilíndricas, y regiones simétricas alrededor del origen suelen ser más simples en coordenadas esféricas. Asimismo, a veces el integrando es más fácil de integrar usando coordenadas cilíndricas o esféricas.

10. **(a)** Si una transformación T está dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, ¿cuál es el jacobiano de T?

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

(b) ¿Cómo se cambian variables en una integral doble?

Se cambia de una integral en x y y a una integral en u y v expresando x y y en términos de u y v escribiendo

$$dA = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv$$

Así, en las condiciones apropiadas,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv$$

donde R es la imagen de S bajo la transformación.

(c) ¿Cómo se cambian variables en una integral triple?

En forma similar al caso de dos variables del inciso (b),

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw$$

donde $$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano.

Corte aquí y guarde para consulta

CAPÍTULO 16 RESPUESTAS A LA VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Qué es un campo vectorial? Dé tres ejemplos que tengan significado físico.

Un campo vectorial es una función que asigna un vector a cada punto en su dominio.

Un campo vectorial puede representar, por ejemplo, la velocidad del viento en cualquier lugar en el espacio, la velocidad y dirección de las corrientes marinas en cualquier ubicación o el vector de fuerza del campo gravitacional de la Tierra en un lugar en el espacio.

2. (a) ¿Qué es un campo vectorial conservativo?

Un campo vectorial conservativo **F** es un campo vectorial que es el gradiente de alguna función escalar f, es decir, $\mathrm{F} = \nabla f$.

(b) ¿Qué es una función potencial?

La función f del inciso (a) se llama función potencial de **F**.

3. (a) Escriba la definición de la integral de línea de una función escalar f a lo largo de una curva suave C con respecto a la longitud de arco.

Si C está dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, se divide el intervalo paramétrico $[a, b]$ en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual ancho. El subintervalo de orden i corresponde al subarco de C con longitud Δs_i. Entonces,

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

donde (x_i^*, y_i^*) es cualquier punto muestra en el subarco de orden i.

(b) ¿Cómo se evalúa tal integral de línea?

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

De igual forma, si C es una curva suave en el espacio, entonces

$$\int_C f(x, y, z)\, ds$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

(c) Escriba expresiones para la masa y centro de masa de un alambre delgado en forma de una curva C si el alambre tiene una función de densidad lineal $\rho(x, y)$.

La masa es $m = \int_C \rho(x, y)\, ds$.

El centro de masa es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\, \rho(x, y)\, ds$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y\, \rho(x, y)\, ds$$

(d) Escriba las definiciones de las integrales de línea a lo largo de C de una función escalar f con respecto a x, y y z.

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta x_i$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta y_i$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i$$

(Se tienen resultados similares cuando f es una función de dos variables.)

(e) ¿Cómo se evalúan estas integrales de línea?

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, y'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt$$

4. (a) Defina la integral de línea de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

Si **F** es un campo vectorial continuo y C está dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

(b) Si **F** es un campo de fuerza, ¿qué representa esta integral de línea?

Representa el trabajo realizado por **F** para mover una partícula a lo largo de la curva C.

(c) Si $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$, ¿cuál es la relación entre la integral de línea de **F** y las integrales de línea de las funciones componentes P, Q y R?

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

5. Enuncie el teorema fundamental para integrales de línea.

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y f es una función derivable cuyo vector gradiente ∇f es continuo en C, entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

6. (a) ¿Qué significa decir que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria?

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si la integral de línea tiene el mismo valor para dos curvas cualesquiera con los mismos puntos iniciales y los mismos puntos terminales.

(b) Si usted sabe que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, ¿qué se puede decir sobre **F**?

Se sabe que **F** es un campo vectorial conservativo, es decir que existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

(continúa)

7. Enuncie el teorema de Green.

Sea C una curva cerrada simple con orientación positiva y suave por partes en el plano y sea D la región acotada por C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

8. Escriba expresiones para el área encerrada por una curva C en términos de integrales de línea alrededor de C.

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

9. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.

(a) Defina rot $\mathbf{F}$.

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$= \nabla \times \mathbf{F}$$

(b) Defina div $\mathbf{F}$.

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

(c) Si $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad en flujo de fluidos, ¿cuáles son las interpretaciones físicas de rot $\mathbf{F}$ y div $\mathbf{F}$?

En un punto en el fluido, el vector rot $\mathbf{F}$ se alinea con el eje alrededor del cual el fluido tiende a rotar, y su longitud mide la rapidez de rotación; div $\mathbf{F}$ en un punto mide la tendencia del fluido a alejarse (divergir) de ese punto.

10. Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, ¿cómo se determina si $\mathbf{F}$ es conservativo? ¿Y si $\mathbf{F}$ fuera un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$?

Si P y Q tienen derivadas continuas de primer orden y

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

11. **(a)** ¿Qué es una superficie paramétrica? ¿Qué son sus curvas reticulares?

Una superficie paramétrica S es una superficie en $\mathbb{R}^3$ descrita por una función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

de dos parámetros u y v. Ecuaciones paramétricas equivalentes son

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

Las curvas reticulares de S son las curvas que corresponden a mantener constante a u o v.

(b) Escriba una expresión para el área de una superficie paramétrica.

Si S es una superficie paramétrica suave dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

donde $(u, v) \in D$ y S es cubierta solo una vez cuando (u, v) abarca D, el área de S es

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$$

(c) ¿Cuál es el área de una superficie dada por una ecuación $z = g(x, y)$?

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

12. **(a)** Escriba la definición de la integral de superficie de una función escalar f en una superficie S.

Se divide S en "parcelas" S_{ij}. Entonces,

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \lim_{m,\,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

donde ΔS_{ij} es el área de la parcela S_{ij} y P_{ij}^* es un punto muestra en la parcela. (S se divide en parcelas de tal forma que garantice que $\Delta S_{ij} \to 0$ cuando $m, n \to \infty$.)

(b) ¿Cómo se evalúa esa integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$$

donde D es el dominio paramétrico de S.

(c) ¿Y si S estuviera dada por una ecuación z = $g(x, y)$?

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS$$
$$= \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$$

(d) Si una hoja delgada tiene la forma de una superficie S y la densidad en (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$, escriba expresiones para la masa y centro de masa de la hoja.

La masa es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\,dS$$

El centro de masa es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\,\rho(x, y, z)\,dS$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\,\rho(x, y, z)\,dS$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\,\rho(x, y, z)\,dS$$

(continúa)

13. (a) ¿Qué es una superficie orientada? Dé un ejemplo de una superficie no orientable.

Una superficie orientada es aquella para la cual se puede elegir un vector normal unitario **n** en todos los puntos de tal forma que **n** varíe continuamente en S. La elección de **n** dota de orientación a S.

Una cinta de Möbius es una superficie no orientable. (Solo tiene un lado.)

(b) Defina la integral de superficie (o flujo) de un campo vectorial **F** en una superficie orientada S con vector normal unitario **n**.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

(c) ¿Cómo se evalúa esa integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

Se multiplica por -1 si se desea la orientación opuesta de S.

(d) ¿Y si S estuviera dada por una ecuación $z = g(x, y)$?

Si $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

para la orientación hacia arriba de S; se multiplica por -1 para la orientación hacia bajo.

14. Enuncie el teorema de Stokes

Sea S una superficie orientada suave por partes acotada por una curva frontera cerrada simple suave por partes C con orientación positiva. Sea **F** un campo vectorial cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

15. Enuncie el teorema de la divergencia.

Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con orientación positiva (hacia fuera). Sea **F** un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F}\, dV$$

16. ¿En qué sentidos son similares el teorema fundamental para las integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia?

En cada teorema se integra una "derivada" en una región, y esta integral es igual a una expresión que involucra los valores de la función original solo en la *frontera* de la región.

Corte aquí y guarde para consulta

1. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

(b) Escriba la ecuación auxiliar.

$$ar^2 + br + c = 0$$

(c) ¿Cómo se usan las raíces de la ecuación auxiliar para resolver la ecuación diferencial? Escriba la forma de la solución para cada uno de los tres casos que pueden ocurrir.

Si la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales distintas r_1 y r_2, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Si las raíces son reales e iguales, la solución es

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

donde r es la raíz común.

Si las raíces son complejas, se puede escribir $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, y la solución es

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

2. (a) ¿Qué es un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de segundo orden?

Un problema de valor inicial consiste en determinar una solución y de la ecuación diferencial que también satisfaga las condiciones dadas $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$, donde y_0 y y_1 son constantes.

(b) ¿Qué es un problema de valor frontera para una ecuación de ese tipo?

Un problema de valor frontera consiste en determinar una solución y de la ecuación diferencial que también satisfaga condiciones de frontera dadas $y(x_0) = y_0$ y $y(x_1) = y_1$.

3. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

$ay'' + by' + cy = G(x)$, donde a, b y c son constantes y G es una función continua.

(b) ¿Cuál es la ecuación complementaria? ¿Cómo ayuda a resolver la ecuación diferencial original?

La ecuación complementaria es la ecuación homogénea asociada $ay'' + by' + cy = 0$. Si se determina la solución general y_c de la ecuación complementaria y y_p es cualquier solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, la solución general de la ecuación diferencial original es $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$.

(c) Explique cómo funciona el método de coeficientes indeterminados.

Para determinar una solución particular y_p de $ay'' + by' + cy - G(x)$, se hace una conjetura inicial sobre que y_p es una función general del mismo tipo que G. Si $G(x)$ es un polinomio, se elige y_p de tal forma que sea un polinomio general del mismo grado. Si $G(x)$ es de la forma Ce^{kx}, se elige $y_p(x) = Ae^{kx}$. Si $G(x)$ es $C \cos kx$ o $C \operatorname{sen} kx$, se elige $y_p(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$. Si $G(x)$ es un producto de funciones, se elige y_p para que sea un producto de funciones del mismo tipo. Algunos ejemplos son:

$G(x)$	$y_p(x)$
x^2	$Ax^2 + Bx + C$
e^{2x}	Ae^{2x}
$\operatorname{sen} 2x$	$A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$
xe^{-x}	$(Ax + B)e^{-x}$

Después se sustituye y_p, y_p', y y_p'' en la ecuación diferencial y se determinan los coeficientes.

Si resulta que y_p es una solución de la ecuación complementaria, la solución de prueba inicial se multiplica por x (o x^2 si es necesario).

Si $G(x)$ es una suma de funciones, se determina una solución particular para cada función y y_p es entonces la suma de estas.

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

(d) Explique cómo funciona el método de variación de parámetros.

Se escribe la solución de la ecuación complementaria $ay'' + by' + cy = 0$ como $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes. Luego se toma $y_p(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$ como una solución particular, donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son funciones arbitarias. Después de calcular y_p', se impone la condición de que

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

y luego calculamos y_p''. La sustitución de y_p, y_p',. y y_p'' en la ecuación diferencial original da

$$a(u_1' y_1' + u_2' y_2') = G \qquad \textbf{(2)}$$

se despeja entonces las funciones desconocidas u_1' y u_2' en las ecuaciones **(1)** y **(2)**. Si se puede integrar estas funciones, una solución particular es $y_p(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$ y la solución general es $y(x) - y_p(x) + y_c(x)$.

4. Mencione dos aplicaciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

El movimiento de un objeto con masa m en el extremo de un resorte es un ejemplo de movimiento armónico simple y se describe por la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

(continúa)

donde k es la constante de resorte y x la distancia en que el resorte se estira (o contrae) desde su longitud original. Si hay fuerzas externas que actúan sobre el resorte, la ecuación diferencial se modifica.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden también se utilizan para analizar circuitos eléctricos que involucran una fuerza electromotriz, un resistor, un inductor y un capacitor en serie.

Véase el análisis de la sección 17.3 para detalles adicionales.

5. ¿Cómo se usan las series de potencias para resolver una ecuación diferencial?

Primero se supone que la ecuación diferencial tiene una solución de serie de potencias de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

La derivación da

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)c_{n+1} x^n$$

y

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1)c_{n+2} x^n$$

Se sustituyen estas expresiones en la ecuación diferencial y se igualan los coeficientes de x^n para determinar una relación de recursión que implique a las constantes c_n. La resolución de la relación de recursión da una fórmula para c_n y entonces

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

es la solución de la ecuación diferencial.

NOTAS



NOTAS

Cálculo. Trascendentes tempranas es una obra líder en el mercado que tiene como objetivo ayudar al estudiante a descubrir y comprender el cálculo, no sólo en su aplicación sino también por su sorprendente belleza. Con ello, su autor busca transmitir al futuro profesional la importancia de la materia y la forma en que puede desarrollar e incrementar sus competencias.

Por lo anterior, en esta octava edición el énfasis se orienta hacia la implementación de lo que el autor denomina *la regla de tres*, es decir, que "Los temas deben presentarse geométrica, numérica y algebraicamente". Es así que la visualización, al igual que la experimentación numérica y gráfica, han transformado la manera en que se desarrolla y enseña en la actualidad el razonamiento conceptual.

Entre los cambios para esta nueva edición destacan los siguientes:

- Para establecer el vínculo entre la teoría y la práctica, se incorporan nuevos proyectos, como *Aviones y pájaros* para analizar la minimización de la energía, *El Speedo LZR Racer,* el cual explica la reducción de la fricción en el agua.
- El capítulo sobre integrales múltiples ha sido reestructurado, al combinar las dos primeras secciones para que las integrales iteradas se estudien antes.
- Se incluyen diferentes tipos de problemas actualizados y organizados según su enfoque.
- Para motivar e ilustrar los conceptos, en la obra se incorporan numerosos datos y hechos interesantes que se derivan de contextos del mundo real.



Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com


ISBN-13: 978-607-526-549-0
ISBN-10: 607-526-549-X
9 786075 265490